

BAB III

METODE PENELITIAN

A. Jenis Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang diangkat dalam penelitian ini, maka penelitian ini adalah penelitian kualitatif, karena data yang dikumpulkan melalui kuesioner dan wawancara bercorak kualitatif. Penelitian kualitatif adalah penelitian yang menggunakan pendekatan naturalistik untuk mencari dan menemukan pengertian atau pemahaman tentang fenomena dalam suatu latar yang berkonteks khusus.¹²⁰ Data yang ditemukan pada kuesioner dan wawancara digunakan untuk mengidentifikasi struktur kognitif siswa dalam memahami konsep limit fungsi. Oleh karena itu, data penelitian ini bersifat naturalistik dan pelaporannya bersifat deskriptif. Pendekatan kualitatif merupakan pendekatan penelitian yang datanya dinyatakan dalam bentuk verbal dan tanpa menggunakan uji hipotesis.

Kuesioner disusun dengan tujuan untuk memperoleh subjek penelitian (siswa) yang diharapkan berada pada setiap tingkatan pemahaman Skemp (*instrumental understanding*, *relational understanding*, dan *logical understanding*). Sesudah ditemukan subjek yang diharapkan sesuai dengan tujuan penelitian, maka subjek akan diwawancarai dengan menggunakan *in-depth interview*.

¹²⁰ Lexy J. Moleong, *Metodologi Penelitian Kualitatif* (Bandung: Remaja Rosdakarya, 2010), h. 5

Pada saat wawancara, peneliti bersifat observernetral, yang bertujuan agar subjek penelitian (siswa) dapat mengungkapkan proses mental yang digunakannya untuk menyelesaikan masalah dalam wawancara. Proses mental subjek tersebut dapat menunjukkan struktur kognitif subjek penelitian (siswa) dalam memahami konsep limit fungsi.

Sebelum penelitian dilaksanakan, peneliti telah melaksanakan survei awal dengan tujuan untuk melihat persepsi siswa tentang konsep limit fungsi dan untuk memilih kelas yang sesuai dengan penelitian ini. Survei awal tersebut berupa wawancara dengan guru bidang studi matematika yang dilaksanakan pada tanggal 27-28 April 2012. Dari hasil wawancara tersebut, dipilih kelas XI-4 IPA semester II SMAN 4 Sidoarjo. Hasil wawancara tersebut dapat dilihat pada lampiran 22 halaman 191.

B. Instrumen Penelitian

Peneliti berperan sebagai perencana penelitian, pengumpul data, penganalisis data, dan penafsir data.¹²¹ Untuk memudahkan peneliti dalam mengumpulkan data, maka peneliti menyusun kuesioner dan wawancara.

Kuesioner didistribusikan kepada seluruh siswa kelas XI-4 IPA SMAN 4 Sidoarjo. Hasil kuesioner tersebut segera dikumpulkan sesudah waktu yang diberikan dalam mengisi kuesioner habis.

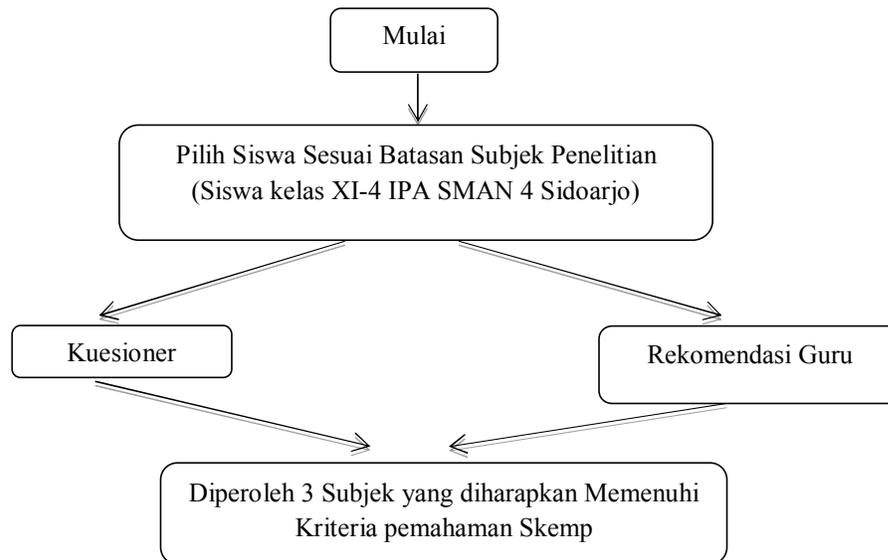
¹²¹Ibid, h. 168

Heid menekankan bahwa jawaban siswa dalam mengisi kuesioner tidak dapat menunjukkan tingkat pemahaman siswa yang tepat.¹²² Data yang diperoleh melalui kuesioner tersebut mungkin tidak mencapai atau bahkan melebihi salah satu tingkat pemahaman Skemp. Walaupun siswa mengisi kuesioner dengan tepat, terdapat kemungkinan bahwa siswa tersebut tidak mengerti apa yang mereka tulis. Untuk mengatasi permasalahan tersebut, maka peneliti menyusun pedoman wawancara. Isi dari wawancara tersebut tidak hanya untuk mencari jawaban dari pertanyaan yang disusun, akan tetapi untuk melihat proses mental yang dimiliki siswa dalam menyelesaikan tugas dalam wawancara yang dapat menunjukkan pemahaman siswa dalam konsep limit fungsi.

C. Subjek Penelitian

Subjek dalam penelitian ini adalah 3 siswa kelas XI-4 IPA SMAN Sidoarjo tahun ajaran 2011-2012. Pemilihan subjek dalam penelitian ini tidak dipilih secara random, akan tetapi dipilih melalui alasan siswa dalam menjawab kuesioner dan rekomendasi guru. Pemilihan subjek dalam penelitian ini dilaksanakan sesuai dengan diagram alur gambar 3.1.

¹²²<http://www.maa.org/saum/maanotes49/109.html>



Gambar 3.1 Diagram Alur Pemilihan Subjek Penelitian

Pemilihan subjek seperti pada gambar 3.1 tersebut bertujuan untuk memilih subjek yang diharapkan dapat memenuhi kriteria dalam setiap tingkatan pemahaman Skemp.

D. Metode Pengumpulan Data

Data dalam penelitian ini diperoleh melalui kuesioner dan *in-depth interview*.

1. Kuesioner

Kuesioner dilaksanakan selama 45 menit dikelas XI-4 IPA yang terdiri dari 37 siswa. Siswa-siswa tersebut telah mempelajari konsep limit fungsi sekitar satu bulan sebelum pelaksanaan penelitian.

Tujuan penyusunan kuesioner adalah untuk mengukur tingkat pemahaman konsep limit fungsi siswa. Fokus dari kuesioner adalah definisi informal limit fungsi, karena definisi *epsilon-delta* belum dipelajari secara mendalam ditingkat SMA. Kuesioner dalam penelitian ini berbentuk pernyataan yang harus dipilih oleh siswa. Peneliti menyusun kuesioner dengan tujuan sebagai berikut: a) Untuk melihat pemahaman konsep limit fungsi setiap siswa. b) Untuk mengetahui kemampuan siswa dalam mencari hubungan antara konsep fungsi dengan konsep limit fungsi. c) Untuk melihat persepsi siswa tentang ada atau tidak adanya nilai limit fungsi pada titik tertentu. d) Untuk melihat kemampuan siswa dalam mencari hubungan antara konsep limit fungsi dengan konsep turunan.

Terdapat penambahan isi dari kuesioner sesudah peneliti mendiskusikan dengan validator. Penambahan tersebut adalah siswa diharuskan memberikan alasan dalam memilih jawaban kuesioner (perubahan kuesioner dapat dilihat pada lampiran 5 halaman 144). Alasan siswa dalam menjawab setiap pernyataan kuesioner kemudian diinterpretasi oleh peneliti untuk menentukan 9 siswa sebagai alternatif subjek penelitian. Dengan rekomendasi guru bidang studi matematika, ke-9 siswa tersebut kemudian akan direduksi menjadi 3 siswa.

2. Wawancara

Wawancara merupakan metode penelitian yang luwes, karena berhubungan baik dengan orang yang diwawancarai dapat memberikan suasana kerjasama. Ada dua jenis wawancara, yaitu wawancara terstruktur dan wawancara yang tidak terstruktur.¹²³ Wawancara terstruktur adalah wawancara yang pewancaranya menetapkan sendiri masalah dan pertanyaan yang diajukan. Wawancara jenis ini dilakukan dengan tujuan mencari jawaban terhadap hipotesis kerja sehingga pertanyaan-pertanyaan disusun dengan rapi dan ketat. Sedangkan wawancara tidak terstruktur adalah wawancara yang pertanyaannya biasanya tidak disusun terlebih dahulu. Pelaksanaan tanya jawab mengalir seperti percakapan dalam sehari-hari. Wawancara tidak terstruktur dilakukan pada keadaan tertentu, diantaranya yaitu jika pewancara menanyakan sesuatu secara lebih mendalam pada subjek tertentu. Misalnya pewancara tertarik untuk mempersoalkan hal-hal tertentu yang tidak normal, dan pewancara tertarik untuk mengungkap motivasi, maksud, atau penjelasan dari responden.

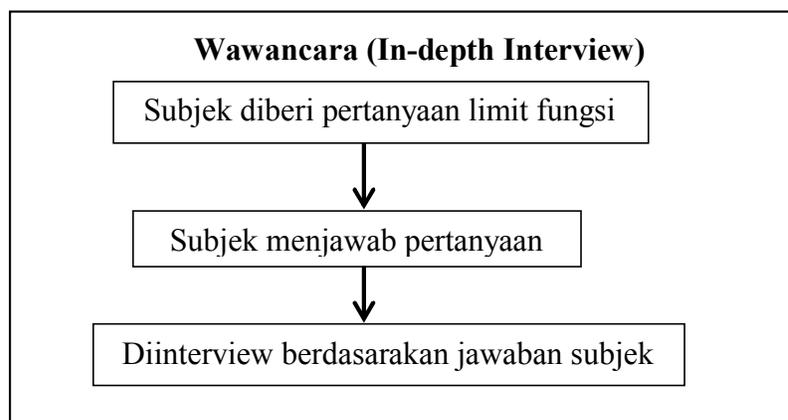
Wawancara yang dilakukan dalam penelitian ini adalah wawancara tidak terstruktur berupa *in-depth interview*. Selain itu, wawancara juga merupakan instrumen yang tepat untuk melihat bagaimana struktur kognitif siswa memahami konsep limit fungsi. Skemp menyebut wawancara sebagai *Piagetian methodology*.¹²⁴ Wawancara dilakukan dengan menggunakan

¹²³ Lexy J. Moleong, Op. Cit., h. 190

¹²⁴ Richard R. Skemp, "Theories and Methodologies", (1981), p. 8-11

pertanyaan yang dimaksudkan untuk mengetahui bagaimana struktur kognitif limit fungsi siswa memahami konsep limit fungsi.

Sesudah didiskusikan dengan validator, terdapat perubahan pada *in-depth* interview. Perubahan tersebut berupa perubahan kata “persamaan” menjadi “simbol” pada pertanyaan nomor 3. Pedoman wawancara sebelum dan sesudah terdapat perubahan dapat dilihat pada lampiran 7 (halaman 153) dan lampiran 8 (halaman 154). Berikut adalah diagram alur dari wawancara.



Gambar 3.2. Diagram Alur In-depth Interview

E. Metode Analisis Data

Analisis data dalam penelitian ini menggunakan metode analisis Miles dan Huberman.. Miles and Huberman mengemukakan bahwa aktivitas dalam analisis data kualitatif dilakukan secara interaktif dan berlangsung secara terus

menerus sampai tuntas, sehingga datanya sudah jenuh¹²⁵. Aktivitas dalam analisis data yaitu *data reduction*, *data display*, dan *conclusion drawing/verification*.

1. Data reduction

Data yang diperoleh dari lapangan jumlahnya cukup banyak, kompleks, dan rumit. Untuk itu perlu segera dilakukan analisis data melalui reduksi data. Data yang telah direduksi akan memberikan gambaran yang lebih jelas dan mempermudah peneliti untuk melakukan data selanjutnya. Dalam penelitian ini, reduksi data dilakukan dengan cara menyusun satuan-satuan penelitian.

Dalam penelitian ini, peneliti menggunakan berbagai teori kognitif domain sebagai pisau analisis data, sehingga dalam penelitian ini satuan yang digunakan berupa keseluruhan informasi yang terkait dengan penelitian ini. Satuan tersebut adalah struktur kognitif siswa dalam memahami konsep limit fungsi.

2. Data Display

Setelah data direduksi, maka langkah selanjutnya adalah *mendisplaykan* data. Dalam penelitian ini, *display data* dilakukan dengan menggunakan uraian singkat. Setelah menentukan satuan-satuan dari informasi yang diperoleh selama penelitian, peneliti membuat uraian singkat. Fungsi dari uraian singkat adalah untuk mempermudah penafsiran data,

¹²⁵ Miles and Huberman, dalam Sugiyono, *Metode Penelitian Kuantitatif, Kualitatif dan R&D*, (Cet IV, Bandung: Alfabeta, 2008), h. 246

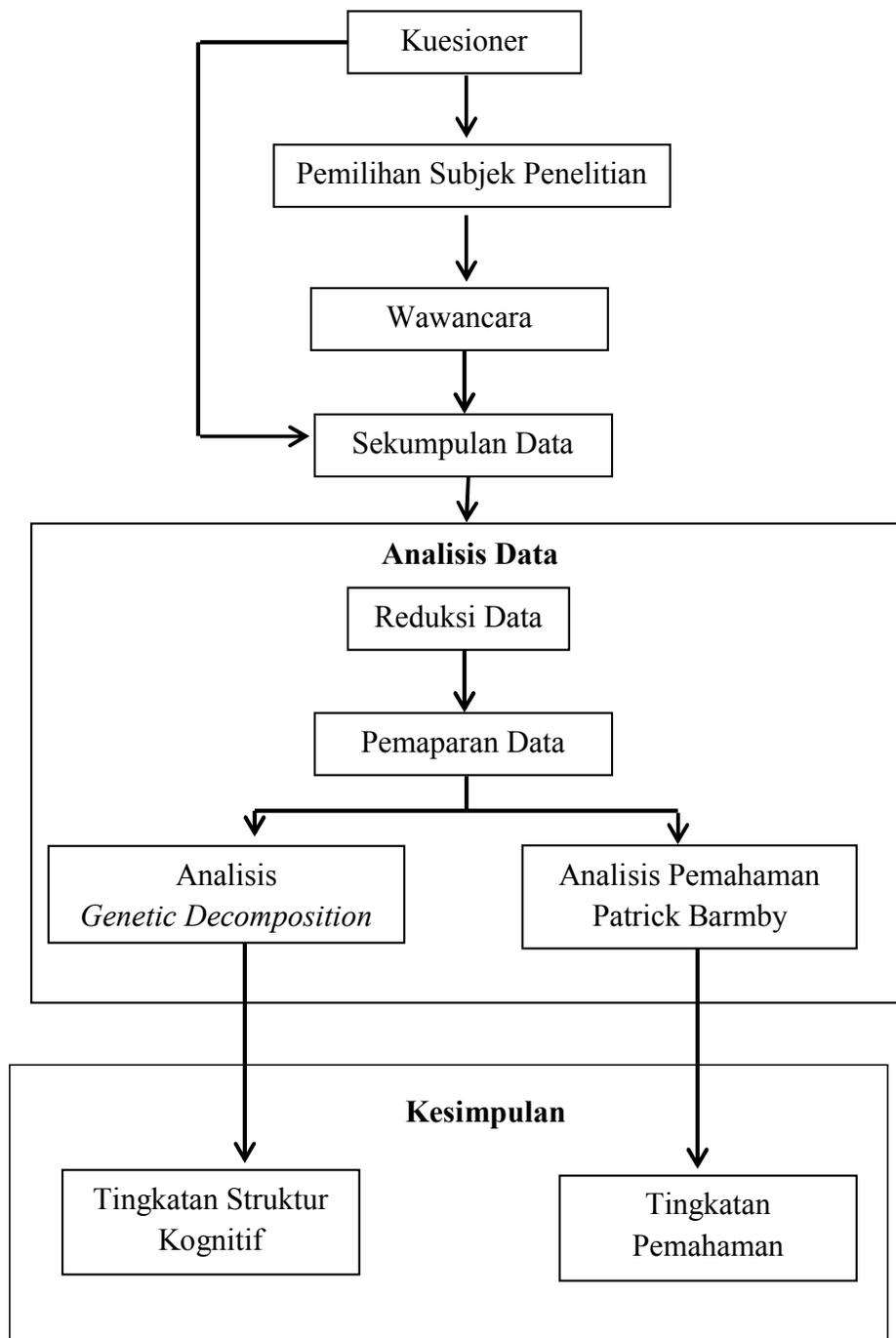
menyederhanakan permasalahan, dan mempermudah identifikasi struktur kognitif subjek penelitian dalam memahami konsep limit fungsi.

3. *Conclusion drawing / verification*

Langkah selanjutnya adalah menarik kesimpulan. Dalam penelitian ini, *verification* dilakukan dengan cara penafsiran data diarahkan untuk mencapai tujuan deskripsi berkaitan dengan tingkatan struktur kognitif siswa dalam memahami konsep limit fungsi. Alur analisis data dalam penelitian ini dapat dilihat pada gambar 3.3

Selanjutnya, agar sesuai dengan tujuan penelitian, maka teknik analisis data dalam penelitian ini menggunakan teknik analisis *genetic decomposition* dan teknik analisis Patrick Barmby. Penggunaan teknik analisis *genetic decomposition* adalah untuk melihat bagaimana struktur kognitif siswa dalam konsep limit fungsi. Sedangkan teknik analisis Patrick Barmby digunakan untuk melihat tingkat pemahaman limit fungsi yang dimiliki siswa menurut teori pemahaman Skemp.

Analisis *genetic decomposition* adalah suatu analisis tentang kumpulan terstruktur dari aktifitas mental yang membangun blok (kategori – kategori) untuk mendeskripsikan bagaimana konsep/prinsip dapat dikembangkan dalam pikiran seorang siswa. Analisis *genetic decomposition* digunakan untuk melihat tingkatan struktur kognitif –dalam teori kognitif domain- berupa proses mental subjek dalam menyelesaikan permasalahan limit fungsi dalam wawancara.



Gambar 3.3 Diagram Alur Prosedur Pengumpulan dan Analisis Data

Analisis pemahaman Patrick Barmby digunakan dengan tujuan melihat tingkat pemahaman konsep limit fungsi siswa dengan melakukan analisis terhadap: (1) *students errors*, (2) hubungan antara simbol, prosedur yang tersimbolkan, dan kesesuaian hubungan yang dibuat individu, (3) hubungan antara prosedur yang tersimbolkan dengan *problem solving* informal, (4) hubungan yang dibuat antar simbol.¹²⁶

Students' errors dapat dilihat pada saat siswa mengerjakan tugas limit. Analisa yang kedua dapat dilihat ketika siswa menjelaskan maksud dari simbol $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$. Analisa ketiga dapat dilihat pada cara siswa tersebut menyelesaikan masalah limit. Analisa terakhir dilihat ketika siswa menjelaskan hubungan antara simbol $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ dan simbol $f(x)$.

F. Tahap-tahap Penelitian

1. Tahap Persiapan

Pada tahap persiapan meliputi hal-hal berikut:

- a.) Latar belakang masalah dan alasan melakukan penelitian.
- b.) Kajian kepustakaan.
- c.) Pemilihan lapangan penelitian.
- d.) Penentuan jadwal pelaksanaan penelitian.
- e.) Pemilihan alat penelitian.

¹²⁶Patrick Barmby, et. al., Loc. Cit.

- f.) Rancangan pengumpulan data.
- g.) Rancangan prosedur analisis data.
- h.) Rancangan perlengkapan yang diperlukan dalam penelitian.

2. Tahap penelitian

Penelitian ini berlangsung dalam dua tahap. Tahap pertama, peneliti melakukan survey untuk melihat apakah lapangan penelitian yang telah dipilih benar-benar bisa digunakan sebagai tempat dilakukannya penelitian. Survey pertama dilaksanakan pada tanggal 27-30 April 2012. Tahap kedua, peneliti melakukan survey untuk mengetahui peta keragaman siswa. Survey ini dilakukan dengan metode kuesioner untuk memilih sampel yang cocok dengan penelitian. Kemampuan yang dilihat tidak hanya kemampuan akademis, tetapi juga kemampuan siswa dalam mengkomunikasikan ide limit fungsi dan kemampuan reflektif siswa ketika konsep limit fungsi dihubungkan dengan konsep turunan. Dengan mengetahui peta keragaman siswa tersebut peneliti bisa dengan mudah memilih sampel sebagai subbjek penelitian.

3. Tahap Pengambilan Data

Setelah memilih 3 siswa, peneliti melakukan wawancara mendalam terhadap ketiga siswa tersebut dengan tujuan untuk melihat bagaimana struktur kognitif siswa bekerja dalam memahami konsep limit fungsi.

4. Tahap Analisis Data

Setelah diperoleh data berupa rekaman - yang merupakan hasil observasi, dan hasil wawancara -, dilakukan reduksi terhadap data-data

tersebut. Setelah melalui reduksi, yang selanjutnya dilakukan adalah uraian singkat. Uraian singkat bertujuan untuk memudahkan saat menggambar struktur kognitif konsep limit fungsi yang dipelajari siswa tersebut. Struktur-struktur tersebut selanjutnya dianalisis untuk mengetahui bagaimana siswa memahami konsep limit fungsi.

G. Metode Pemeriksaan Keabsahan Data

Dalam penelitian ini, teknik pemeriksaan keabsahan data yang digunakan adalah triangulasi. Triangulasi adalah teknik pemeriksaan keabsahan data yang memanfaatkan sesuatu yang lain di luar data tersebut untuk keperluan pengecekan atau pembandingan. Denzin membedakan empat macam triangulasi sebagai teknik pemeriksaan yaitu triangulasi yang memanfaatkan penggunaan sumber, metode, penyidik, dan teori.¹²⁷ Pada penelitian ini digunakan triangulasi sumber yang berarti membandingkan dan memeriksa kembali derajat kepercayaan suatu informasi yang diperoleh melalui waktu dan alat yang berbeda dalam penelitian.¹²⁸ Triangulasi dalam penelitian ini dilakukan dengan membandingkan data yang diperoleh melalui kuesioner dan wawancara.

¹²⁷ Denzin, dalam Lexy J. Moleong, Op. Cit., h. 330

¹²⁸ Patton, dalam Lexy J. Moleong, Op. Cit., h. 300

BAB IV

PAPARAN DATA DAN TEMUAN PENELITIAN

Dalam penelitian ini akan dikaji dan dideskripsikan secara kualitatif struktur kognitif siswa dalam memahami konsep limit fungsi. Untuk itu dipaparkan hasil penelitian kuesioner yang kemudian dilanjutkan dengan hasil wawancara.

A. Data Kuesioner

1. Analisis dan Interpretasi Data Kuesioner

Kuesioner ini diberikan kepada 37 siswa kelas XI-4 IPA SMAN 4 Sidoarjo dan dilaksanakan selama 45 menit. Pada hari tersebut, semua siswa hadir dan mengisi kuesioner yang diberikan. Peneliti telah meminta semua siswa untuk mencantumkan namanya, tetapi ada 7 kuesioner yang tidak diberi identitas. Siswa-siswa tersebut telah diberi informasi tentang pelaksanaan kuesioner seminggu sebelumnya, tapi tidak diberitahukan isi dari kuesioner tersebut. Alasannya adalah peneliti tidak menginginkan siswa-siswa tersebut meriview konsep limit yang sudah dipelajarinya. Mereka harus menyadari apa yang dapat mereka ingat. Beberapa siswa memberikan komentar bahwa mereka sulit mengingat konsep limit karena mereka sudah lama tidak melakukan prosedur-prosedur limit fungsi. Tabel 4.1 adalah rangkuman hasil kuesioner yang diberikan kepada siswa kelas XI-4 SMAN 4 Sidoarjo. Hasil kuesioner lengkap dapat dilihat pada lampiran 9 halaman 196.

Tabel 4.1 Rangkuman Hasil Kuesioner

Pernyataan	Pilihan Jawaban			Alasan		
	B	S	-	Tepat	Tidak Tepat	-
Limit adalah bilangan terakhir dimana fungsi tidak dapat melaluinya.	22	14*	1	6	28	3
Limit adalah perkiraan yang dapat anda buat seakurat mungkin.	21	14*	2	0	34	3
Limit menggambarkan perpindahan nilai fungsi $f(x)$ ketika nilai x berpindah pada titik tertentu.	31	2*	4	0	32	5
Limit adalah bilangan yang dapat didekati oleh fungsi $f(x)$ tapi tidak akan pernah mencapai nilai tersebut.	30*	3	4	13	19	5
Limit fungsi bisa tidak terdefinisi pada titik tertentu.	17*	14	6	1	31	5
Limit adalah konsep yang menghubungkan antara konsep fungsi dengan konsep turunan.	29*	3	5	4	28	5

Tanda (*) menunjukkan jawaban yang tepat.

Tanda (-) adalah siswa yang tidak menjawab atau tidak memberikan alasan.

Dari hasil kuesioner tersebut, jika siswa yang tidak menjawab dianggap salah, maka:

- 1) 23 siswa (62,2 %) menganggap limit adalah bilangan terakhir dimana fungsi tidak dapat melaluinya. Hal tersebut menunjukkan bahwa siswa melihat limit sebagai batas dalam artian batas yang tidak dapat dilalui oleh fungsi. Seperti alasan S_6 , “Karena limit mendekati, jadi fungsi tidak dapat melaluinya”. Ada kesalahan dalam struktur kognitif S_6 , yaitu tidak mampu membedakan antara konsep fungsi dan konsep limit fungsi.
- 2) 62,2% siswa ($\frac{23}{37}$) melakukan kesalahan dengan mengatakan bahwa limit adalah pendekatan yang dapat dibuat seakurat mungkin. Kesalahan tersebut terjadi karena sebagian siswa belum menyadari bahwa prosedur-prosedur limit merupakan proses yang sama, yaitu untuk mencari nilai limit dari suatu fungsi. Hal tersebut seperti alasan S_{13} dalam lembar kuesioner, “Sebelum kita mengerjakan soal limit fungsi, kita harus mencoba cara-cara untuk menjawab soal limit. Seperti soal itu kita faktorkan, menyederhanakan, substitusi langsung. Itulah yang dinamakan limit dapat diperkirakan kita seakurat mungkin”.
- 3) 35 siswa (94,6%) melakukan kesalahan dengan menyatakan bahwa limit adalah perpindahan $f(x)$ ketika nilai x berpindah menuju titik tertentu. Hal ini mungkin disebabkan karena mereka menyamakan konsep fungsi dengan konsep limit fungsi, sehingga mereka melakukan prosedur fungsi ke dalam

limit fungsi. Mungkin juga dalam struktur kognitif yang mereka buat, ada gambaran perpindahan nilai $f(x)$ pada saat mencari nilai limit fungsi. Mereka belum menyadari bahwa limit adalah satu titik L (bukan banyak titik), dimana ketika x mendekati c –dari kiri dan dari kanan-, maka $f(x)$ akan mendekati L . Seperti alasan S_{17} , “Jika nilai x berubah, maka nilai limit akan berubah dengan adanya perpindahan fungsi $f(x)$ ”.

- 4) 16,2% siswa tidak setuju dengan pernyataan bahwa limit adalah bilangan yang dapat didekati oleh fungsi $f(x)$, tapi tidak pernah mencapai bilangan tersebut. Hal itu mungkin disebabkan oleh kebingungan antara konsep fungsi dan konsep limit fungsi.
- 5) 20 siswa (54,05 %) beranggapan bahwa limit fungsi pasti terdefinisi. Seperti pendapat S_4 , “Karena meskipun tidak terdefinisi (∞), hasil akhirnya tetap diketahui”.
- 6) 21, 62 % siswa ($\frac{8}{37}$) belum menyadari bahwa konsep turunan (diferensial) merupakan proses limit. Mungkin hal ini disebabkan oleh kebiasaan siswa mencari turunan suatu fungsi melalui prosedur tertentu, dan mereka tidak pernah mencari turunan suatu fungsi melalui metode limit. Walaupun 78,38% siswa menjawab dengan tepat, tapi mereka melakukan kesalahan ketika memberikan alasannya. S_1 menulis, “Karena untuk mencari nilai dari sebuah limit, kita bisa mencarinya melalui turunan dari fungsi tersebut”. Mungkin yang dimaksud S_1 adalah dalil L’Hopital.

Data Kuesioner menunjukkan adanya *proceptual divide* yang cukup besar antar siswa di kelas XI-4 IPA. Beberapa siswa memberikan alasan –atas jawaban mereka- yang tidak menyentuh definisi limit fungsi, dan hanya sedikit siswa memberikan alasan yang mulai menghubungkan konsep limit fungsi dengan konsep fungsi. Adanya *proceptual divide* tersebut memberikan kemungkinan, bahwa kebanyakan siswa tidak terlalu melibatkan kemampuan abstraksi yang mereka miliki.

2. Pemilihan Sampel Penelitian Melalui Kuesioner dan Rekomendasi Guru Bidang Studi Matematika Kelas XI-4 IPA SMAN 4 Sidoarjo

Pemilihan sampel tidak hanya dilihat dari seberapa banyak siswa memilih jawaban yang benar pada kuesioner, akan tetapi juga dilihat dari alasan yang dikemukakan oleh siswa tersebut. Pemilihan sampel juga melibatkan pertimbangan peneliti -melalui obeservasi yang dilakukan peneliti pada saat pelaksanaan kuesioner- dan guru bidang studi matematika kelas XI-4 IPA SMAN 4 Sidoarjo (Drs. Suprpto).

Melalui data kuesioner –yang di dalamnya terdapat jawaban serta alasan atas jawaban tersebut- yang diperoleh, ada 9 siswa yang dapat dikelompokkan ke dalam masing-masing tingkat pemahaman Skemp yang direduksi menjadi 3 siswa sebagai subjek yang akan diwawancarai. Hasil kuesioner 3 siswa tersebut dapat dilihat pada lampiran. Tabel 4.2 menunjukkan pengelompokkan siswa –yang diharapkan sesuai- menurut pemahaman Skemp

yang dilakukan peneliti dengan melihat jawaban dalam kuesioner serta alasan memilih jawaban tersebut.

Tabel 4.2. Pengelompokan Siswa ke dalam Pemahaman Skemp.

Tingkat	Nama	Alasan Peneliti
Instrumental Understanding	R. Cyntia Devi	Dari alasan-alasan yang dikemukakannya pada saat menjawab kuesioner, Cyntia sudah mulai melakukan manipulasi simbol, tapi belum sepenuhnya tepat.
	Aprilia D.	Aprilia memberikan alasan yang menunjukkan bahwa dia ragu dengan alasan yang dikemukakannya.
	Tanisiae Intan	Alasan-alasan yang dikemukakan Tanisiae menunjukkan bahwa dia sebenarnya tidak mengetahui ide tentang konsep limit.
Relational Understanding	Denny Trasela	Denny banyak menjawab dengan salah pernyataan-pernyataan pada kuesioner, akan tetapi dalam alasan-alasannya banyak melakukan manipulasi simbol.
	Mahesta Ratna D.	Mahesta sudah mulai mencari hubungan antara konsep limit fungsi dengan konsep fungsi, walaupun dia jarang mencantumkan simbol.
	Vinsa Adi	Vinsa banyak menjawab dengan benar pernyataan pada kuesioner, akan tetapi alasan yang dikemukakannya tidak menunjukkan keyakinan tentang konsep limit fungsi yang dimilikinya.

Sambungan dari Tabel 4.2.

Tingkat	Nama	Alasan Peneliti
Logical Understanding	Aliyah	Aliyah banyak menjawab dengan benar pernyataan kuesioner. Selain itu, Aliyah juga banyak melibatkan simbol dan beberapa prosedur limit dalam alasannya.
	Valerie Danis S. S	Valerie banyak melakukan manipulasi simbol limit dan simbol $f(x)$. Selain itu, Valerie juga banyak melakukan prosedur limit fungsi untuk menguatkan alasan yang dikemukakannya.
	Lilis Indriyani R.	Alasan yang dikemukakan Lilis mulai melibatkan definisi informal limit. Selain itu, Lilis juga menghubungkan antara simbol limit dan simbol $f(x)$

Sesudah didiskusikan dengan guru bidang studi matematika kelas XI-4 IPA (Drs.Suprpto) dan dengan mempertimbangkan kemampuan komunikasi yang dimiliki setiap siswa, kesembilan siswa tersebut direduksi menjadi 3 siswa yang mewakili tiap-tiap kelompok di atas. Tabel 4.3 adalah subjek penelitian yang diharapkan berada pada tingkatan-tingkatan pemahaman Skemp.

Tabel 4.3. Subjek yang akan diteliti dengan Indikator Pemahaman Skemp.

Instrumental Understanding	Relational Understanding	Logical Understanding
Aprilia Damayanti	Mahesta Ratna D.	Valerie Danis S. S

B. Analisis dan Interpretasi Data Wawancara dan Kuesioner dengan Subjek Penelitian

Wawancara dilaksanakan sehari sesudah pelaksanaan kuesioner dengan subjek Aprilia Damayanti, Mahesta Ratna D, dan Valerie Danis S. S. Setiap wawancara berdurasi antara 13-22 menit. Wawancara direkam dalam format audio dan video. Hal ini dilakukan agar peneliti dapat melihat kegiatan yang dilakukan subjek penelitian pada saat wawancara. Selanjutnya Aprilia Damayanti disingkat A; Mahesta Ratna D disingkat M; dan Valerie Danis S. S disingkat V.

Pertanyaan pada wawancara tidak bertujuan agar siswa menghitung nilai limit secara aljabar, karena sebagian besar siswa dapat melakukannya. Pertanyaan wawancara bertujuan untuk melihat bagaimana siswa memahami konsep limit fungsi dan bagaimanakah struktur kognitif mereka bekerja berkaitan dengan konsep limit fungsi dan konsep fungsi.

Metode yang digunakan dalam menganalisis data dengan tujuan melihat tingkat struktur kognitif subjek -dalam beberapa teori kognitif domain- adalah *genetic decomposition*. Analisis *genetic decomposition* adalah suatu analisis tentang kumpulan terstruktur dari aktifitas mental yang membangun blok (kategori – kategori) untuk mendeskripsikan bagaimana konsep/prinsip dapat dikembangkan dalam pikiran siswa. Sedangkan metode yang digunakan untuk menentukan tingkat pemahaman konsep limit fungsi adalah metode Patrick Barmby.

1. Analisis dan Interpretasi Data Wawancara dan Kuesioner dengan Aprilia

Damayanti (A)

a) Struktur Kognitif A Menurut Teori Kognitif Domain Piaget

Struktur kognitif A mengalami *disequilibrium* pada saat mencari nilai limit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 2}$. Subjek A belum melakukan akomodasi dengan cara memodifikasi skema fungsi yang dimilikinya agar sesuai dengan konsep limit fungsi yang baru dipelajarinya. Hal tersebut terlihat pada cuplikan 1-3 di bawah ini.

Cuplikan 1 (wawancara)

P : Semisal anda melihat persamaan limit $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$, bisakah anda menjelaskan maksud dari persamaan tersebut?

A : Kalau seperti itu, $x = 4$. Kalau $f(x)$ nya diganti 4, maka hasilnya 5

P : Begitu?

A : Iya.

Subjek A banyak melakukan asimilasi konsep fungsi ke dalam konsep limit fungsi, akan tetapi kurang melakukan akomodasi. Asimilasi yang dilakukan A adalah dengan menerapkan prosedur fungsi (substitusi) dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan konsep limit fungsi. Pada cuplikan wawancara di atas, A mulai melakukan *pseudo-empirical abstraction* terhadap konsep limit fungsi. *Pseudo-empirical abstraction* yang dilakukan A tersebut adalah dengan melakukan abstraksi terhadap konsep limit fungsi yang terlebih dahulu diberi tindakan prosedur fungsi.

Cuplikan 2 (wawancara)

P : Apa yang bisa anda lakukan untuk menyelesaikannya?

A : *Yaa...,pertama dicoba substitusi..*

P : He em...

A : *Tapi kan tidak bisa, soalnya hasilnya tidak terdefinisi..*

P : Ok.

A : *Terus menggunakan (prosedur) perkalian sekawan...juga tidak....
(Subjek A berfikir sebentar).*

A : *Tidak tahu.*

Jawaban A, “*Tidak tahu*” menunjukkan bahwa A mengalami *disequilibrium*. Hal tersebut dikarenakan pada saat A melakukan asimilasi prosedur limit fungsi (substitusi dan perkalian sekawan) mengalami kegagalan dalam menyelesaikan masalah limit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 2}$. Pemilihan prosedur tersebut mungkin dikarenakan A secara eksperensial menggunakan prosedur substitusi dan perkalian sekawan ketika melihat $f(x)$ berbentuk $\frac{h(x)}{g(x)}$. A perlu melakukan akomodasi lebih jauh dengan cara merombak skema fungsi yang dimilikinya agar sesuai dengan konsep limit fungsi.

Cuplikan 3 (wawancara)

P : Ok. Menurut anda, jika seperti ini (peneliti menunjuk simbol $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$), ada berapa simbol?

A : *Ada 2.*

P : Apa saja ?

A : *(simbol) $\lim_{x \rightarrow 4}$ dan (simbol) $f(x) = 5$.*

Subjek A mulai melihat hubungan antara konsep fungsi dengan konsep limit fungsi yang terdapat dalam simbol $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$, sehingga kemampuan kognitif A berada pada level *inter*. Struktur kognitif A masih

bersifat *operative*, karena A belum mampu membuat objek limit yang tertemukan.

b) Struktur Kognitif A Menurut Teori Kognitif Domain APOS

Struktur kognitif A masih belum menginternalisasi seluruh prosedur limit fungsi ke dalam struktur kognitifnya. Beberapa prosedur tertentu (substitusi) telah disadari oleh A dan A mampu menerapkan prosedur tersebut dengan baik. Akan tetapi, A belum mahir dalam menerapkan prosedur pemfaktoran pada saat mencari nilai limit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 2}$. Mungkin A juga belum memahami teorema limit fungsi yang dapat membantunya dalam mencari nilai dari suatu limit fungsi. Struktur kognitif A dalam teori APOS dapat dilihat pada cuplikan 4 dan cuplikan 5 di bawah ini.

Cuplikan 4 (wawancara)

P : Ok, untuk menemukan jawaban tersebut, prosedur apa saja yang dapat digunakan ?

A : Ya.. *substitusi*..

P : he em..

A : *Perkalian sekawan*...

P : Ok...

A : *Eeeeeem....apa lagi ya.... Oh iya, memfaktorkan.*

Struktur kognitif A banyak melakukan tindakan dengan melakukan manipulasi prosedur fungsi untuk memahami konsep limit fungsi. Subjek A mampu menyebutkan prosedur-prosedur limit -serta mengetahui alasan penggunaannya-, dan A mulai menginteriorisasi prosedur limit fungsi ke

dalam struktur kognitif yang dimilikinya. Hal tersebut ditunjukkan A dengan menyadari prosedur-prosedur limit fungsi yang dapat dilakukannya dalam menyelesaikan permasalahan limit, seperti ungkapan A pada wawancara di bawah ini.

Cuplikan 5 (wawancara)

A : Yaa...,pertama dicoba substitusi..

P : He em...

A : Tapi kan tidak bisa, soalnya hasilnya tidak terdefinisi..

Subjek A mengalami kesulitan untuk menyelesaikan permasalahan $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 2}$ pada wawancara di atas. Subjek A telah menginternalisasi prosedur substitusi, karena A mengetahui hasilnya berbentuk $\frac{0}{0}$ tanpa melakukan perhitungan nyata (dalam pikiran). Akan tetapi, A belum menginternalisasi prosedur limit lainnya, sehingga struktur kognitif A belum mencapai tahapan *process*. Oleh sebab itu, struktur kognitif A masih berada pada tahap *action*.

c) Struktur Kognitif A Menurut Teori Kognitif Domain Anna Sfard

Dalam teori kognitif domain Anna Sfard, struktur kognitif V berada pada tahapan *interiorization*. Hal itu dibuktikan dengan kemampuan A dalam memilih prosedur limit tertentu yang dapat dilakukannya untuk mencari nilai limit fungsi. Tetapi A masih belum mahir dalam menerapkan prosedur limit tertentu, sehingga struktur kognitif A belum mencapai

tahapan *condensation*. Kesimpulan ini diperoleh dengan melakukan interpretasi pada cuplikan 6 dan cuplikan 7 dibawah ini.

Cuplikan 6 (wawancara)

P : Ok... Jadi dalam pikiran anda sudah ada prosedur-prosedur tersebut?

A : Ya..., *InsyAllah*.

Struktur kognitif A mulai merasakan prosedur yang berlaku dalam konsep limit fungsi sebagai bagian dari dirinya. A menyadari satu kesatuan proses yang dapat digunakannya untuk menyelesaikan permasalahan konsep limit fungsi dan A bisa membandingkan antara prosedur yang satu dengan prosedur yang lainnya. Hal ini ditunjukkan A pada saat memilih prosedur limit fungsi tertentu dalam beberapa pertanyaan. Subjek A mengetahui kapan waktunya menggunakan prosedur substitusi dan perkalian sekawan. Akan tetapi A bingung untuk memilih prosedur yang tepat dalam menyelesaikan permasalahan limit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 2}$. A belum menyadari bahwa simbol $\frac{x - 2}{x - 2}$ dapat dimanipulasi menjadi konstanta (1), sehingga dengan menerapkan teorema limit, maka A dengan mudah akan menemukan nilai dari limit tersebut adalah 1.

Cuplikan 7 (wawancara)

P : Berapakah nilai dari limit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$?
 (Subjek A berfikir sebentar)
 A : *Boleh corat-coret mas?*

Subjek A belum merasakan keseluruhan prosedur tersebut sebagai prosedur yang sangat mudah untuk dilakukannya dan A tidak melakukan prosedur limit fungsi secara mental, sehingga struktur kognitif A berada pada tingkatan *interiorization.Conception* limit fungsi yang dimiliki A berupa *operational conception*, karena A belum membuat *concept image* limit fungsi secara sempurna di dalam struktur kognitif yang dimilikinya.

d) Struktur Kognitif A Menurut Teori Kognitif Domain Procept Gray & Tall.

Subjek A masih melihat simbol limit $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ dalam *symbolic world*. A belum melakukan *embodying symbolism* dengan cara membuat grafik dari fungsi yang di-limit-i, sehingga A belum mengetahui makna dari simbol limit $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ dalam *embodied world*. Struktur kognitif A dalam konsep limit fungsi dapat dilihat pada cuplikan 8-12 di bawah ini.

Cuplikan 8 (kuesioner)

Kuesioner 4 : “Limit adalah bilangan yang dapat didekati oleh fungsi $f(x)$ tapi tidak akan pernah mencapai nilai tersebut”.

Alasan A : “Karena bilangan yang dapat didekati oleh fungsi $f(x)$ tapi tidak akan pernah mencapai nilai tersebut”.

Kuesioner 6 : “Limit adalah konsep yang menghubungkan antara konsep fungsi dengan konsep turunan”.

Alasan A : “*Karena saling berhubungan*”.

*Set before*s berupa *language* yang dimiliki A belum bekerja dengan baik karena dalam mengemukakan alasannya pada kuesioner, A menggunakan bahasa yang sama dengan pernyataan kuesioner. A tidak mampu membuat bahasa yang dimilikinya sendiri untuk menjelaskan alasannya tersebut.

Cuplikan 9 (wawancara)

P : Kalau perkalian sekawan...?

A : *Kalau perkalian sekawan itu contohnya kalau per akar berapa min akar berapa.. kalau misal..ada satu min akar berapa.... gitu.....*

*Set-before*s A berupa *recognition* telah mengetahui perbedaan antara beberapa prosedur limit fungsi. Struktur kognitif A mampu memilih prosedur limit fungsi tertentu yang dapat digunakannya dalam menyelesaikan suatu permasalahan limit. Cuplikan 9 diatas juga mengindikasikan bahwa dalam struktur kognitif yang dimiliki A tergambar prosedur perkalian sekawan. *Recognition* A terhadap pola, persamaan, dan perbedaan dari beberapa prosedur limit fungsi mulai tergambar dalam struktur kognitif yang dimilikinya.

Cuplikan 10 (wawancara)

P : Berapakah nilai dari limit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$?

(Subjek A berfikir sebentar)

A : Boleh corat-coret mas?

P : Boleh, silahkan.

Hasil pekerjaan A

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} &= \frac{x-2}{x-2} \times \frac{x+2}{x+2} \\ &= \frac{x^2-4}{x^2-4} \\ &= \frac{x+2}{x+2} \\ &= \frac{2+2}{2+2} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Gambar 4.1. Pekerjaan Subjek A pada Soal limit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$

A : Iya mas, sama (hasilnya).

P : Hasilnya berapa ?

A : $\frac{0}{0}$.

P : Apakah hasilnya $\frac{0}{0}$?

(Subjek A berpikir sebentar)

A : Iya mas.

Set-befores A berupa *repetition* telah bekerja dengan baik. A dengan mudah melakukan prosedur perkalian sekawan –walaupun penggunaan prosedur tersebut salah. *Met-befores* A (yang didalamnya terdapat konsep

fungsi) mengalami internal inkonsistensi. Hal tersebut terlihat jelas pada saat

A kesulitan untuk menemukan nilai dari limit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 2}$. Subjek A menerapkan prosedur perkalian sekawan yang ternyata memberikan hasil yang sama dengan prosedur substitusi. Internal inkonsistensi yang dialami A terlihat pada saat “*A berpikir sebentar*”.

Cuplikan 11 (wawancara)

P : Hubungan dari “ini” dengan “ini” apa ?

(Peneliti menunjuk simbol limit $\lim_{x \rightarrow 2}$ dan simbol $\frac{x - 2}{x - 2}$)
 A : Ya hubungannya untuk mencari limit (ketika) x mendekati 2, menggunakan fungsi $\frac{x - 2}{x - 2}$.

Asumsi A pada wawancara di atas menunjukkan bahwa A sudah berhasil melihat maksud dari simbol $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 2}$. Ini membuktikan bahwa A telah memahami arti yang terdapat dalam simbol limit. Walaupun tidak akurat, A mulai mampu memisahkan unsur-unsur yang terdapat dalam simbol limit. Sayangnya, A tidak berhasil untuk menemukan jawaban dari permasalahan limit di atas.

Cuplikan 12 (wawancara)

P : Ok. Simbolnya mirip seperti itu, hanya saja aturannya diganti menjadi

limit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1 + h} - \sqrt{x + 1}}{h}$.

(Subjek A berfikir sebentar)

A : per h ini ?

P : Iya.

(A melakukan aktivitas dan hasilnya adalah dilembar berikutnya)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h}$$

$$\frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h} \times \frac{\sqrt{x+1+h} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1+h} + \sqrt{x+1}}$$

$$\frac{\cancel{\sqrt{x+1+h}} - \cancel{\sqrt{x+1}}}{h(\sqrt{x+1+h} + \sqrt{x+1})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+1+h} + \sqrt{x+1}}$$

Gambar 4.2. Pekerjaan Subjek A untuk mencari hasil dari $\lim_{h \rightarrow 0}$

$$\frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h}$$

P : Bagaimana hasilnya?

A : Ini akarnya tidak bisa dihilangkan?

(Peneliti diam dan A berfikir lama)

A : Tidak bisa mas.

Struktur kognitif A mampu melihat prosedur yang dapat digunakannya untuk mencari nilai limit ketika melihat simbol $\lim_{h \rightarrow 0}$

$$\frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h}$$

. Akan tetapi, A belum melakukan prosedur perkalian sekawan dengan sempurna. Hal tersebut menunjukkan bahwa struktur kognitif yang dimiliki A berada pada tingkatan *prosedur*.

e) Struktur Kognitif A dalam Prespektif al-Qur'an

Subjek A mulai memiliki uraian lengkap tentang konsep limit fungsi, yang di dalamnya terdapat simbol limit, $f(x)$, dan definisi informal limit. Pada saat mencari nilai dari limit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 2}$, A tidak bisa menemukan jawaban nilai dari limit tersebut. Struktur kognitif A masih membutuhkan *jidal* sebagai sarana untuk meluruskan kesalahan yang dilakukannya. Hal ini terlihat jelas pada cuplikan 13 di bawah ini.

Cuplikan 13 (wawancara)

P : Agar persamaan limit diatas benar, apakah $f(x)$ harus sama dengan 5?

A : Tidak, kan mendekati

P : Apakah $f(4) = 5$?

A : Iya, kayaknya.

Subjek A sudah melakukan abstraksi terhadap konsep limit fungsi dengan cara memodifikasi konsep fungsi. Hal tersebut dapat ditunjukkan ketika A mengetahui bahwa nilai limit adalah nilai yang hanya dapat didekati oleh $f(x)$ ketika x mendekati c . Akan tetapi, A mengalami kegagalan untuk mencari nilai dari limit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 2}$. Struktur kognitif A membutuhkan *jidal* untuk mengatasi kegagalan tersebut.

f) Tingkat Pemahaman Konsep Limit Fungsi yang dimiliki Aprilia

Damayanti (A)

Struktur kognitif yang dimiliki A mampu melihat prosedur yang terkandung dalam simbol limit dan mengetahui saat yang tepat dalam menggunakan prosedur limit tertentu. Prosedur limit yang digunakan oleh A sesuai dengan *problem solving* dari suatu masalah limit dan struktur kognitif A mampu melihat hubungan antara simbol limit dan simbol fungsi. Tetapi A melakukan *student errors* pada saat mencari nilai $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$ menggunakan prosedur perkalian sekawan. Pemahaman konsep limit fungsi yang dimiliki oleh A berada dalam tahapan *relational understanding* yang dibuktikan pada cuplikan 14 dan cuplikan 15 di bawah ini.

Cuplikan 14 (wawancara)

P : Ok. Semisal anda melihat simbol

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, apakah maksud dari simbol tersebut?

A : Maksud dari itu (simbol) ?

.....

P : Silahkan dicoba.

Kemudian A mulai bekerja, dan hasilnya adalah,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{f(x+h) + f(h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{f(x)}{h} \\ &= \frac{f(x)}{0} \end{aligned}$$

Gambar 4.3. Pekerjaan Subjek A untuk Menjawab Maksud dari Simbol $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Pada cuplikan 14, A melakukan kesalahan (*student error*) dengan menerapkan sifat distributif perkalian dalam menyelesaikan masalah di atas. Mungkin A melihat simbol f , x , dan h dalam simbol $f(x+h) - f(x)$ sebagai konstanta, dan tidak memahami makna simbol tersebut.

Cuplikan 15 (wawancara)

P : Apakah antara simbol limit dengan simbol $f(x)$ ada hubungannya ?

A : *Ada.*

P : Apa hubungannya ?

A : *Yaa..., cara mencari limit itu... melalui $f(x)$.*

P : Maksudnya bagaimana?

A : *Ya kalau kita ingin mengerjakan limit, itu.. menggunakan $f(x)$.*

Subjek A mulai menyadari adanya hubungan antara simbol limit dengan simbol $f(x)$. Subjek A mengetahui maksud simbol $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ adalah untuk mencari nilai limit dari suatu fungsi. Subjek A melakukan beberapa prosedur limit untuk mencari nilai limit dari suatu fungsi ketika x mendekati c , dan dia mengetahui alasan menggunakan salah satu dari prosedur tersebut.

Subjek A tanpa berpikir lama menggunakan prosedur perkalian sekawan

untuk mencari nilai dari limit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h}$. Subjek A

mulai mengetahui hubungan dan perbedaan antara konsep fungsi dan konsep

limit fungsi. Tetapi, A belum yakin dengan prosedur yang dapat

dilakukannya pada saat mencari nilai dari limit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$.

2. Analisis dan Interpretasi Data Wawancara dan Kuesioner dengan Mahesta

Ratna D (M)

a) Struktur Kognitif M Menurut Teori Kognitif Domain Piaget

Struktur kognitif M mengalami *disequilibrium* dikarenakan M melakukan *akomodasi* yang tidak benar. Subjek M bingung antara konsep fungsi dan konsep limit fungsi. M mungkin belum melakukan *reflective abstraction* terhadap konsep fungsi dan konsep limit fungsi, sehingga *akomodasi* yang dilakukan M tidak benar. Struktur kognitif M menurut teori Piaget akan dijelaskan pada cuplikan 1 dan cuplikan 2 di bawah ini.

Cuplikan 1 (wawancara)

P : Terima kasih atas kerja sama anda untuk tetap terlibat dalam wawancara ini. Semisal $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$, apa yang dimaksud dengan simbol tersebut?

M : Jadi..., maksud dari (simbol) ini... limit $f(x)$ sama dengan... ya limit x sama dengan 4.... x nya diganti 4.

P : Ok, terus...

(Subjek M berfikir sebentar)

M : Ini gak ada x nya ta mas disini ? (M menunjuk angka 5)

P : Tidak, tidak ada.

M : Ya...berarti $f(4)$ nya itu sama dengan 5.

P : $f(4)$ nya sama dengan ?

M : 5.

Dalam simbol $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$, M melihat dua buah simbol, yakni simbol “ $\lim_{x \rightarrow 4}$ ” dan simbol “ $f(x) = 5$ ”. Dari dua buah simbol tersebut, struktur kognitif M melihat jika x mendekati 4, maka $f(x) = 5$. Struktur kognitif M melakukan dua buah kesalahan dalam menginterpretasi simbol tersebut. Kesalahan pertama adalah kesalahan dalam mengasimilasi konsep fungsi ke dalam konsep limit fungsi -jika x mendekati 4, maka $f(x) = 5$. Kesalahan kedua adalah struktur kognitif M belum mampu membedakan simbol limit dan simbol $f(x)$. M bingung karena biasanya fungsi yang dilimiti tersebut didefinisikan, sehingga M bertanya, “*Ini gak ada x nya ta mas disini ? (M menunjuk angka 5)*”. Jawaban M menunjukkan bahwa struktur kognitif M menyamakan antara konsep fungsi dengan konsep limit fungsi. Kemampuan kognitif M berada pada level *intra*, karena M hanya fokus pada konsep fungsi dan mengabaikan definisi informal limit fungsi itu sendiri. Struktur kognitif M bersifat *operative*, karena struktur kognitif yang dimiliki M masih melakukan transformasi konsep limit fungsi.

Cuplikan 2 (wawancara)

P : Tidak terdefinisikan? Ketika anda melihat simbol ini ($\lim_{x \rightarrow 2}$) dan simbol ini ($\frac{x - 2}{x - 2}$), apa yang bisa anda lakukan untuk menyelesaikan kedua permasalahan tersebut?

M : Yang jelas kan yang tadi bisa ($\lim_{x \rightarrow 4} 3x - 7$), (masalah) ini aja yang tidak bisa.

Subjek M mengalami *disequilibrium* pada saat mencari nilai dari limit $_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$. Struktur kognitif yang dimiliki M belum melakukan akomodasi dengan cara merombak atau memodifikasi skema fungsi yang dimilikinya. Hal tersebut mungkin dikarenakan struktur kognitif yang dimiliki M belum melakukan *reflective abstraction* terhadap limit fungsi, sehingga M menerapkan prosedur substitusi tanpa mengetahui alasan menggunakan prosedur tersebut.

b) Struktur Kognitif M Menurut Teori Kognitif Domain APOS

Subjek M mampu melakukan prosedur substitusi dalam mencari nilai dari limit fungsi, akan tetapi M masih melakukan operasi empirik untuk prosedur yang lain. Hal tersebut menunjukkan bahwa struktur kognitif M belum menginternalisasi seluruh prosedur limit fungsi, sehingga struktur kognitif M belum mencapai tahapan *process*. Oleh karena itu, struktur kognitif yang dimiliki M berada pada tahapan *action*, yang akan ditunjukkan pada cuplikan 3 dan cuplikan 4 di bawah ini.

Cuplikan 3 (wawancara)

P : Ok. Jika $f(x) = \frac{x-2}{x-2}$, maka $f(2)$ nya berapa ?

M : Tidak terdefinisi.

P : Semisal ada simbol limit $_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$, berapakah nilai limit dari fungsi tersebut?

M : Ini (bentuk) limitnya sama dengan ini (menunjuk simbol limit $_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$)(kemudian M diam).

M : Tidak bisa ini.

P : Tidak?

M diam lama.

Cuplikan 4 (wawancara)

M melakukan manipulasi terhadap simbol limit _{$h \rightarrow 0$}

$$\frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h}$$

dan hasilnya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h} &= \frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+1+h} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1+h} + \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{x+1+h - x-1}{h \cdot (\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1})} \\ &= \frac{h}{h \cdot (\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1})} \end{aligned}$$

Gambar 4.4. Pekerjaan Subjek M untuk Mencari Hasil dari limit _{$h \rightarrow 0$}

$$\frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h}$$

Pada cuplikan ke-3, struktur kognitif yang dimiliki M telah menginteriorisasi dengan sempurna prosedur substitusi (walaupun memilih prosedur tersebut adalah tidak tepat). Tanpa melakukan perhitungan secara detail, M telah memperkirakan hasil yang didapatnya dan menjawab, “*tidak bisa ini*”. Pada cuplikan ke-4, M masih melakukan aktifitas berupa perhitungan dan manipulasi aljabar secara empirik. Karena struktur kognitif M mampu melakukan perhitungan secara mental dalam hal prosedur substitusi tetapi tidak dengan prosedur perkalian sekawan, maka struktur kognitif M tersebut belum mencapai tingkatan *process*. M belum merasakan seluruh prosedur limit fungsi sebagai bagian internal dirinya. Struktur kognitif M -dalam hal limit fungsi- berada pada tahapan *action*.

c) Struktur Kognitif M Menurut Teori Kognitif Domain Anna Sfard

Subjek M mulai melakukan strukturisasi prosedur limit fungsi, sehingga M menerapkan prosedur limit fungsi dengan tepat. Tetapi M belum mahir dalam penerapan prosedur tersebut. Mungkin strukturisasi M akan sempurna jika M lebih banyak melakukan latihan untuk mencari nilai dari suatu limit fungsi. Struktur kognitif M menurut teori Anna Sfard akan dijelaskan pada cuplikan 5 di bawah ini.

Cuplikan 5 (wawancara)

P : Apakah $f(x)$ harus terdefinisi agar limit (untuk) x mendekati 4 (maka) $f(x)$ sama dengan 5?

M : *Harus (terdefinisi).*

P : Harus ?

M : *Ya... nanti kalau 4 nya disubstitusi ke dalam $f(x) = 3x - 7$, maka $f(x) = 5$.*

Jawaban M pada cuplikan diatas menunjukkan bahwa struktur kognitif M telah melakukan perhitungan secara mental dan menemukan hasilnya tanpa memerlukan waktu yang lama. Struktur kognitif M seakan-akan telah mahir untuk melakukan prosedur limit fungsi sehingga berada pada tahapan *condensation*. Akan tetapi pada cuplikan ke-4, struktur kognitif M belum mampu melakukan perhitungan mental terhadap prosedur

perkalian sekawan. Oleh karena itu, struktur kognitif yang dimiliki M berada pada tingkatan *interiorization*. Struktur kognitif M belum melakukan strukturisasi terhadap prosedur limit fungsi, sehingga *conception* limit fungsi yang dimiliki M masih berbentuk *operational conception*.

d) Struktur Kognitif M Menurut Teori Kognitif Domain Procept Tall & Grey

Subjek M belum mampu memahami makna dari simbol limit $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$. Struktur kognitif M belum melakukan *embodying symbolism* terhadap simbol limit $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ dengan cara melihat grafik fungsi yang dilimit-i, sehingga simbol tersebut masih berada dalam *symbolic world*. Selanjutnya, struktur kognitif M menurut teori Procept akan dijelaskan dibawah ini.

Cuplikan 6 (wawancara)

P : Apakah anda mengetahui prosedur-prosedur limit?

M : *Prosedur-prosedur..limit?*

P : He em. Cara menyelesaikan soal limit.

M : *Ada banyak prosedur. Ada kayak itu tadi, substitusi, juga ada dikalikan sekawannya, difaktorkan.*

Cuplikan 7 (kuesioner)

Kuesioner 4 : “Limit adalah bilangan yang dapat didekati oleh $f(x)$ tapi tidak akan pernah mencapai nilai tersebut”.

Alasan M : “*Tergantung jenis soalnya*”.

Set-befores M berupa *recognition* terhadap pola, persamaan, dan prosedur limit sudah baik. Subjek M mampu melihat perbedaan pada

beberapa prosedur limit dan mengetahui saat yang tepat untuk menggunakan prosedur limit tertentu. Pada cuplikan ke-7 (walaupun alasan tersebut salah) mungkin M melihat bahwa nilai dari limit dapat dicari dengan menerapkan prosedur tertentu.

Cuplikan 8 (wawancara)

P : Ok. Jika $f(x) = \frac{x-2}{x-2}$, maka $f(2)$ nyaberapa ?
 M : Tidak terdefinisi.

Struktur kognitif M telah melakukan *repetition* dengan baik. Subjek M telah mengetahui urutan dalam prosedur substitusi sehingga secara otomatis, M mengetahui nilai dari $f(2)$.

Cuplikan 9 (kuesioner)

Kuesioner 5 : “Limit fungsi bisa tidak terdefinisi untuk titik tertentu”.
 Alasan M : “Karena limit itu bukan titik koordinat dan tidak bisa digunakan untuk menghitung titik suatu grafik fungsi”.

Struktur kognitif M telah menggunakan *language* dengan baik (walaupun kurang tepat) karena M menggunakan bahasanya sendiri untuk menggambarkan tentang apa yang dipahaminya. Alasan M tersebut memang benar bahwa limit bukanlah titik koordinat dari suatu fungsi, akan tetapi kurang tepat jika digunakan sebagai alasan pada kuesioner nomor 5 karena tidak menggunakan definisi formal limit(ϵ - δ) maupun definisi informal limit(jika x mendekati c dari kiri dan kanan, maka $f(x)$ mendekati L).

Cuplikan 10 (wawancara)

P : Bagaimana prosedur yang dapat anda gunakan untuk menyelesaikannya?

M : em.....itu... $f(x)$ nya kan 0 ($\overline{0}$), tidak terdefiniskan.

P : He em....

M : Ya, tidak bisa.

P : Tidak bisa dikerjakan?

M : He em.

Struktur kognitif M mengalami internal inkonsistensi pada saat mencari nilai dari $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$ – yang hasilnya tidak terdefinisi jika melakukan prosedur substitusi-, karena *met-befores* (konsep fungsi) yang dimiliki M menuntut M melakukan prosedur substitusi. Subjek M melakukan prosedur-prosedur tertentu dalam mencari nilai limit dari suatu fungsi, dan M menyadari bahwa prosedur-prosedur yang dilakukannya merupakan proses yang sama untuk mencari nilai limit. Akan tetapi M belum mahir dalam melakukan prosedur limit fungsi, sehingga struktur kognitif yang dimiliki M berada pada tingkatan *procedure*.

e) Struktur Kognitif M dalam Prespektif al-Qur'an

Subjek M telah memiliki gambaran tentang prosedur-prosedur limit fungsi dalam struktur kognitif yang dimilikinya, sehingga M dapat memilih prosedur yang tepat sebagai *problem solving* dari suatu masalah limit fungsi. Tetapi M masih belum mahir dalam menerapkan prosedur perkalian sekawan. Untuk lebih jelasnya, akan dibahas di bawah ini.

Cuplikan 11 (wawancara)

P : Semisal ada simbol limit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$, berapakah nilai limit dari fungsi tersebut?

M : Ini (bentuk) limitnya sama dengan ini (menunjuk simbol limit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$)?(kemudian M diam beberapa saat).

M : Tidak bisa ini.

Struktur kognitif M sudah menggunakan berbagai prosedur limit untuk mencari nilai dari suatu limit fungsi. M menggunakan prosedur substitusi pada saat mencari nilai dari limit $\lim_{x \rightarrow 4} 3x - 7$, dan menggunakan prosedur perkalian sekawan untuk mencari hasil dari limit $\lim_{h \rightarrow 0}$

$$\frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h}$$

, sehingga prosedur-prosedur limit fungsi sudah tergambar dalam struktur kognitif M. Akan tetapi M mengalami kegagalan untuk mencari nilai dari limit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$, sehingga struktur kognitif M berada pada tahapan *jidat*.

f) Tingkat Pemahaman Konsep Limit Fungsi yang dimiliki Mahesta

Ratna D (M)

Subjek M melakukan *student error* pada saat menggunakan prosedur substitusi untuk mencari nilai limit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$. Disisi lain, M dapat melihat prosedur yang terkandung dalam simbol limit dan mampu memilih prosedur yang dapat digunakannya untuk mencari nilai limit. Tetapi M belum yakin dengan kemampuan limit fungsi yang dimilikinya, sehingga

pemahaman konsep limit fungsi M masih berada dalam tahapan *relational understanding* dan akan dijelaskan dibawah ini.

Cuplikan 12 (wawancara)

P : Maksudnya bagaimana? Tidak terdefinisi? Tidak memiliki nilai limit, atau bagaimana?

M : Tidak terdefiniskan.

Subjek M melakukan kesalahan pada saat menggunakan prosedur substitusi untuk mencari nilai dari limit $_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$. Subjek M tidak menyadari bahwa permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan prosedur penyederhanaan (pemfaktoran), sehingga M salah ketika menjawab bahwa nilai limit tersebut tidak terdefinisi.

Cuplikan 13 (wawancara)

P : Ok. Semisal limit $_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h}$, bagaimanakah nilai limitnya ?

M melakukan manipulasi terhadap simbol limit $_{h \rightarrow 0}$

$$\frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h}$$

dan hasilnya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h} &= \frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+1+h} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1+h} + \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{x+1+h - x-1}{h \cdot (\sqrt{x+1+h} + \sqrt{x+1})} \\ &= \frac{2h}{h(\sqrt{x+1+h} + \sqrt{x+1})} \end{aligned}$$

Gambar 4.5. Pekerjaan Awal M untuk Mencari Hasil dari limit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h}$.

M : Hasilnya seperti ini?

P : Coba anda lihat lagi hasil pekerjaan anda.

M meneliti pekerjaannya dan menambahi di bawah ini.

$$\frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1+h} + \sqrt{x+1}}$$

$$\frac{h}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1+h} + \sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1+h} + \sqrt{x+1}}$$

Gambar 4.6. Pekerjaan Akhir M untuk Mencari Hasil dari limit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h}$.

Cuplikan 14 (wawancara)

P : Terus, semisal anda menggunakan prosedur perkalian sekawan, apakah anda mengetahui alasan menggunakannya?

M : Kalau (prosedur) sekawan digunakan pada soal yang ada hubungannya dengan akar kuadrat.

M dapat menemukan –walau tidak sempurna- hasil dari limit $\lim_{h \rightarrow 0}$

$\frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h}$. Hal tersebut menunjukkan bahwa M

mengetahui hubungan antara prosedur perkalian sekawan pada saat melihat

simbol $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h}$. Potensi yang dimiliki A tersebut hanya perlu diasah sedikit lagi agar A memiliki keyakinan tentang pemahaman konsep limit yang dimilikinya. Sedangkan pendapat M pada cuplikan ke-15 di atas telah sesuai dengan aturan prosedur limit fungsi.

Cuplikan 15 (wawancara)

M : Kalau menurut saya saling berhubungan.

P : (bentuk) hubungannya?

M : Hubungannya, kalau mengerjakan limit bisa menggunakan fungsi, dan sebaliknya, kalau mencari fungsi bisa menggunakan cara limit.

Subjek M melakukan kesalahan dalam membuat hubungan antara simbol $\lim_{x \rightarrow 4}$ dan simbol $f(x)$ pada cuplikan wawancara 16 di atas. Kesalahan tersebut mungkin terjadi karena M melihat kemiripan penerapan prosedur saat mencari nilai fungsi pada titik $x=c$ dan nilai limit dari suatu fungsi pada saat x mendekati c , sehingga M menyatakan bahwa “*mengerjakan limit bisa menggunakan fungsi, dan sebaliknya, kalau mencari fungsi bisa menggunakan cara limit*”. Jika dianalisis dengan menggunakan metode Patrick Barmby, maka pemahaman limit fungsi M berada pada tingkatan *relational understanding*.

3. Analisis dan Interpretasi Data Wawancara dan Kuesioner dengan Valerie

Danis S. S (V)

a) Struktur Kognitif V Menurut Teori Kognitif Domain Piaget

Struktur kognitif V mengalami *disequilibrium* pada saat menjelaskan maksud dari simbol $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$. Mungkin hal tersebut dikarenakan V belum memahami definisi limit fungsi. *Disequilibrium* struktur kognitif V dijelaskan pada cuplikan 1-4 di bawah ini.

Cuplikan 1 (wawancara)

P : Maka dari itu, ketika anda melihat seperti ini, apa sih.....yang...

(Peneliti menunjuk simbol $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$)

V : Ya cuma...x nya kan mendekati 4...

P : He em...

V : Jadi limit...ini, 5 ini kan limitnya kan mas?

P : Ok.....

V : Jadi, yang saya bayangkan....eee... 4 mendekati limit 5, begitu saja.

Cuplikan 2 (wawancara)

V : Jadi x mendekati 4 ini kan tinggal dimasukkan ke sini (simbol $f(x)$ pada $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$, dimana $f(x) = 3x - 7$).

Jawaban V di atas menunjukkan bahwa struktur kognitif V mulai melakukan abstraksi terhadap simbol $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$. Abstraksi yang dilakukan oleh V tersebut adalah dengan menghubungkan simbol $x \rightarrow 4$ dan simbol 5 yang terdapat dalam simbol $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$. Subjek V melakukan abstraksi terhadap simbol $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$ pada saat simbol $f(x)$ didefinisikan menjadi $3x - 7$, sehingga dapat dikatakan bahwa abstraksi yang dilakukan V adalah *pseudo-empirical abstraction* dan kemampuan kognitif V berada dalam tahap *intra*. Struktur kognitif V berada dalam keadaan *operative*, karena V berusaha untuk mentransformasi konsep limit fungsi.

Cuplikan 3 (kuesioner)

Kuesioner 1 : "Limit adalah bilangan terakhir dimana fungsi tidak dapat melaluinya".

Alasan M : "Karena dijelaskan fungsi limit dapat dibuat agar mempunyai nilai sedekat mungkin dengan limit, dengan cara membuat nilai x dekat dengan c".

Subjek V dapat menjelaskan definisi informal limit saat menyatakan alasan di atas. Tetapi V belum menggunakan definisi tersebut untuk menjelaskan maksud dari simbol $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$. Abstraksi V terhadap definisi informal limit tersebut belum sempurna, karena V juga menghubungkan antara simbol 4 dengan simbol 5, "4 mendekati limit 5", sehingga V mengalami kegagalan dalam mengasimilasikan definisi limit untuk menjelaskan simbol $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$. Struktur kognitif V mengalami *disequilibrium* karena belum memahami sepenuhnya definisi limit fungsi.

Cuplikan 4 (wawancara)

V : Kalau menggunakan cara substitusi hasilnya tidak terdefinisi.

Disequilibrium struktur kognitif V tersebut terlihat jelas pada saat mencari nilai dari limit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$ pada cuplikan wawancara 4 di atas. Struktur kognitif V mengalami kegagalan untuk mencari solusi dari limit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$. Mungkin hal itu terjadi karena V belum mahir dalam menerapkan prosedur-prosedur limit.

b) Struktur Kognitif V Menurut Teori Kognitif Domain APOS

Subjek V belum melakukan internalisasi semua prosedur fungsi ke dalam struktur kognitifnya. Subjek V belum mengetahui saat yang tepat untuk menggunakan prosedur limit fungsi tertentu, sehingga V melakukan percobaan menggunakan beberapa prosedur limit untuk menyelesaikan satu pertanyaan limit fungsi. Struktur kognitif V menurut teori APOS akan dijelaskan di bawah ini.

Cuplikan 5 (wawancara)

V : Ya menggunakan cara disubstitusikan. Kalau tidak ditemukan, ketemunya

$\frac{0}{0}$

berarti kan tidak terdefinisi.

P : Ok.

V : Ya menggunakan cara yang lain, nanti difaktorkan, disederhanakan.

Subjek V belum menyadari sepenuhnya tentang prosedur-prosedur yang dapat digunakan V dalam mencari nilai limit dari suatu fungsi. V masih merasakan prosedur tersebut sebagai bagian eksternal dirinya dan sedang mentransformasi prosedur tersebut ke dalam struktur kognitif yang dimilikinya. Pada cuplikan di atas, V melakukan percobaan prosedur limit tertentu yang dapat digunakan untuk mencari nilai limit.

Struktur kognitif V berada pada tahapan *action*, karena V belum melakukan internalisasi proses-proses yang dapat digunakannya untuk mencari nilai limit dari suatu fungsi. Proses-proses tersebut masih berada dalam wilayah eksternal V.

c) Struktur Kognitif V Menurut Teori Kognitif Domain Anna Sfard

Struktur kognitif V berada pada tahapan *interiorization* karena V belum mentransformasi prosedur perkalian sekawan untuk mencari nilai limit dari fungsi yang berbentuk akar. Subjek V belum mampu menjelaskan simbol $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ menggunakan definisi limit. Cuplikan 6 dan cuplikan 7 menjelaskan struktur kognitif V menurut teori Anna Sfard.

Cuplikan 6 (wawancara)

P : Semisal, anda melihat seperti ini...(Peneliti menuliskan simbol

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$), apa yang ada dalam benak anda?

V : Yang saya pikirkan, berarti.... yang ada h nya ini, kita substitusikan 0.

P : Coba bagaimana ?

(V berbicara dengan dirinya sendiri dan mencoba mentransformasi simbol

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$)

$$\begin{aligned} \text{Lim.} & \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ h \rightarrow 0 & \\ & = \frac{f(x+0) - f(x)}{0} \end{aligned}$$

Gambar 4.7. Pekerjaan V untuk Menjelaskan Simbol $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Hasil pekerjaan V menunjukkan bahwa V belum mahir dalam menggunakan prosedur substitusi dalam mencari nilai limit fungsi. Pertanyaan peneliti yang bertujuan untuk melihat bagaimana reaksi V menjelaskan simbol

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ melalui definisi limit tersebut direspon oleh V

dengan melakukan prosedur limit tertentu. Respon V dalam menanggapi

pertanyaan peneliti tersebut menunjukkan bahwa V belum membuat *concept definition* dalam struktur kognitifnya. Selain itu, respon V juga menunjukkan bahwa struktur kognitif V masih berusaha untuk mentransformasi prosedur-prosedur limit fungsi ke dalam pikirannya, sehingga *conception* limit fungsi V berupa *operational conception*.

Cuplikan 7 (wawancara)

P : Ok. Semisal $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h}$, Bagaimana anda menyelesaikan permasalahan di atas ?

V : Tidak. Saya tidak bisa kalau berbentuk akar.

Ketidakmampuan V untuk menemukan hasil dari $\lim_{h \rightarrow 0}$

$\frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h}$ menunjukkan bahwa V belum mentransformasi

seluruh prosedur fungsi ke dalam struktur kognitif yang dimilikinya. Mungkin

V melihat simbol dari $\frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h}$ sebagai sesuatu yang

rumit, sehingga V menjawab bahwa V tidak bisa menyelesaikan permasalahan

limit dari fungsi yang berbentuk akar. Selain itu, struktur kognitif yang

dimiliki V belum bekerja dengan baik pada saat menjelaskan maksud dari

simbol $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Walaupun cara V tersebut tidak tepat

untuk menjawab pertanyaan yang diajukan peneliti, tetapi jawaban tersebut

menunjukkan bahwa V belum mahir menggunakan prosedur substitusi.

d) Struktur Kognitif V Menurut Teori Kognitif Domain Procept Tall & Grey

Tingkatan struktur kognitif V adalah *procedure*. Hal ini bisa dilihat melalui jawaban-jawaban V dalam memecahkan permasalahan limit. Struktur kognitif V belum mampu untuk mengeneralkan prosedur tersebut sebagai suatu proses yang sama untuk mencari nilai limit. Struktur kognitif V belum melakukan *embodying symbolism* terhadap simbol $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ dengan cara melihat bentuk grafik dari fungsi yang dilimiti, sehingga simbol tersebut masih berada dalam *symbolic world*. Selanjutnya, struktur kognitif V menurut teori Procept akan dijelaskan di bawah ini.

Cuplikan 8 (wawancara)

V : Ya menggunakan cara disubstitusikan. Kalau tidak ditemukan, ketemunya

$\frac{0}{0}$

berarti kan tidak terdefinisi.

P : Ok.

V : Ya menggunakan cara yang lain, nanti difaktorkan, disederhanakan.

Cuplikan 9 (wawancara)

P : Apakah anda menyelesaikan permasalahan limit dengan cara mencoba ?

Maksudnya mecoba prosedur?

V : Ya pasti lah mas.

Subjek V melakukan percobaan prosedur tertentu untuk mencari nilai limit menunjukkan bahwa *set-befores* V berupa *recognition* terhadap prosedur-prosedur limit fungsi belum bekerja dengan baik. V belum mengenali ciri-ciri pola prosedur limit dan penggunaan prosedur limit fungsi

tertentu, sehingga V belum mampu memilih prosedur yang tepat sebagai *problem solving* dari permasalahan limit.

Cuplikan 10 (kuesioner)

Kuesioner 3 : “Limit menggambarkan perpindahan nilai fungsi $f(x)$ ketika nilai x berpindah pada titik tertentu”.

Alasan V : “Karena $f(x)$ bergantung pada x . Kalau x pindah, maka $f(x)$ nya

$$\begin{aligned} \text{juga pindah. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 8x + 15}{(x - 5)(x - 3)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 5)(x - 3)}{(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x - 5) \\ &= 3 - 5 = 2. \end{aligned}$$

Walaupun alasan V untuk menjawab pernyataan kuesioner di atas tidak tepat, tetapi alasan tersebut dapat menunjukkan bahwa V sudah melakukan *repetition* terhadap prosedur pemfaktoran untuk mencari nilai limit fungsi yang tidak terdefinisi di atas. V sudah mentransformasi prosedur limit (pemfaktoran) sebagai solusi dari limit fungsi yang dicontohkannya.

Cuplikan 11 (wawancara)

V : *Bilangannya ini tidak bisa mencapai, tidak bisa sama dengan (nilai) limit, hanya sekedar mendekati (nilai) limit.*

Cuplikan 12 (wawancara)

V : *Ya... substitusi itu mempermudah. Perkalian sekawan digunakan kalau ada per (pembagian) atau akar. Ya....., begitu saja mas.*

Subjek V mampu menggunakan *set-befores language* yang dimikinya dengan menggunakan bahasanya sendiri untuk menjelaskan maksud dari nilai limit. Jawaban V, “Ya... substitusi itu mempermudah” mengindikasikan bahwa struktur kognitif V belum memahami sepenuhnya tentang penggunaan

prosedur-prosedur limit fungsi. Walaupun V dapat menerapkan prosedur-prosedur limit fungsi tertentu, tetapi V belum menggunakan definisi limit untuk membantu V dalam mencari nilai limit dari suatu fungsi. Oleh sebab itu, stuktur kognitif V berada dalam tahapan *procedure*.

e) Struktur Kognitif V dalam Prespektif al-Qur'an

Struktur kognitif V dalam memahami konsep limit fungsi berada dalam tahap *mauizhah hasanah*. V masih berusaha melakukan transformasi konsep limit fungsi, baik definisi limit ataupun prosedur limit fungsi, yang akan dibuktikan pada cuplikan 13 di bawah ini.

Cuplikan 13 (wawancara)

P : Apakah anda bisa menjelaskannya melalui definisi formal limit (ε - δ)?

V : Tidak. x mendekati 2, $x - 2$ per $x - 2$, ya....2 nya disubstitusikan ke dalam x .

P : Ok.

V : Kalau menggunakan cara substitusi hasilnya tidak terdefinisi.

Pada cuplikan wawancara di atas, V berusaha memahami maksud dari simbol limit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 2}$ dengan menggunakan prosedur substitusi. Subjek V belum membuat *concept image* limit fungsi dengan sempurna dalam struktur kognitifnya, karena V meninggalkan definisi limit dan langsung mempelajari prosedur limit fungsi tertentu. Hal ini menunjukkan bahwa uraian limit fungsi yang dimiliki V dalam struktur kognitifnya belum lengkap, yang menyebabkan V tidak menemukan titik masuk agar struktur kognitif V

melakukan *jidat*. Subjek V masih perlu menyempurnakan uraian limit fungsi sehingga struktur kognitif V masih berada pada tahapan *mauizhah hasanah*.

f) Tingkat Pemahaman Konsep Limit Fungsi yang dimiliki Valerie Danis S.

S (V)

Cuplikan 14 (wawancara)

P : Jadi, apakah untuk $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$, maka $f(x)$ atau $f(4)$ nya harus sama dengan 5 ?

V : *Harus (menjawab dengan ragu).*

Cuplikan 15 (kuesioner)

Kuesioner 6 : “Limit adalah konsep yang menghubungkan antara konsep fungsi dengan konsep turunan”.

Alasan V : *“Karena saat mengerjakan limit fungsi, bisa digunakan konsep fungsi dengan konsep turunan di dalamnya.....”*

Subjek V melakukan *student erros* pada saat menyatakan bahwa $f(x)$ harus terdefinisi agar pernyataan $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$ benar. Ini menunjukkan V belum memahami bahwa dalam simbol $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$, $f(x)$ tidak harus terdefinisi agar mempunyai limit pada titik tertentu. V juga tidak memahami bahwa angka 5 dalam simbol tersebut adalah nilai limit dari $f(x)$, sehingga $f(x)$ tidak perlu lagi didefinisikan agar persamaan $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$ benar. V juga salah dalam menjelaskan hubungan antara konsep turunan dan konsep limit fungsi. Mungkin yang dimaksud V “*bisa digunakan konsep fungsi dengan konsep turunan*” adalah aturan L’Hopital.

Cuplikan 16 (wawancara)

V : x mendekati 4 $f(x)$, ini ($\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$) kan ada hubungannya sama ini (simbol $f(x) = 3x - 7$)..

P : Ok.

V : Jadi x mendekati 4 ini kan tinggal dimasukkan ke sini (simbol $f(x)$ pada $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$).

Cuplikan 17 (wawancara)

P : Tadi anda mengetahui kalau terdapat hubungan?

V : Ada, hanya tidak bisa menjelaskan.

Subjek V mengetahui bahwa dalam simbol $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$ terdapat prosedur yang dapat digunakannya (substitusi). Hubungan antara simbol dan prosedur substitusi yang tersimbolkan tersebut sudah benar. Tetapi V belum mahir dalam menggunakan prosedur perkalian sekawan (cuplikan 7). V mengetahui terdapat hubungan antara simbol $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$ dan simbol $f(x) = 3x - 7$, akan tetapi V tidak dapat menjelaskan hubungan tersebut. Ini berarti V belum memahami definisi formal limit fungsi.

Cuplikan 18 (wawancara)

V : Jadi, yang saya bayangkan....eee... 4 mendekati limit 5, begitu saja.

Subjek V tidak mengetahui secara jelas hubungan antara konsep limit fungsi dan konsep fungsi yang terdapat dalam simbol $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$. V membuat kesalahan hubungan antara prosedur substitusi dengan *problem solving* yang diharapkan (cuplikan 6). Subjek V menerapkan prosedur substitusi untuk menyelesaikan masalah $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Padahal tujuan peneliti adalah untuk melihat bagaimana definisi konsep limit fungsi

menjelaskan maksud dari simbol $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Secara keseluruhan, maka pemahaman konsep limit fungsi yang dimiliki V berada pada tahapan *instrumental understanding*.

BAB V

PEMBAHASAN

A. Pemahaman Limit Fungsi Siswa Kelas XI-4 IPA SMAN 4 Sidoarjo

Melalui data kuesioner yang diperoleh dalam penelitian ini, sebagian besar siswa kelas XI-4 IPA SMAN 4 Sidoarjo sulit memahami konsep limit fungsi. Alasan-alasan yang mereka ajukan terhadap pernyataan kuesioner sebagian besar belum menyentuh definisi limit, baik definisi ε - δ ataupun definisi informal limit. Untuk definisi formal limit (ε - δ) bisa dimaklumi karena definisi formal limit tidak dibahas dengan detail pada jenjang SMA, tetapi definisi informal limit sudah termasuk pokok bahasan dalam bab limit dijenjang SMA.

Siswa-siswa tersebut belum memahami proses untuk mencari nilai limit sebagai proses yang statis. Mereka melihat limit sebagai proses yang dinamis dengan cara mensubstitusikan nilai-nilai yang mendekati titik tertentu pada variabel x , dan belum menyadari bahwa proses dinamis tersebut adalah untuk mencari nilai $f(x)$ -yang statis-, ketika x mendekati titik tertentu.¹²⁹ Paradigma siswa tersebut menimbulkan kesulitan tersendiri bagi mereka, karena proses untuk mencari nilai limit tersebut tak terbatas, sedangkan nilai limit itu sendiri terbatas. Oleh sebab itu, siswa harus memahami perbedaan antara proses mencari nilai limit dari suatu fungsi dengan nilai limit itu sendiri. Kesalahan siswa dalam memahami konsep limit fungsi yang ditemukan melalui kuesioner adalah sebagai berikut:

¹²⁹Lihat David O. Tall dan R. L. E. Schwarzenberger, "Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits", Dipublikasikan dalam *Mathematical Teaching*, 82, 44-49, (1978), p. 9-11.

- 1) Beberapa siswa memahami limit sebagai suatu titik yang tidak dapat dilewati oleh fungsi.
- 2) Sebagian siswa melihat limit sebagai titik yang tidak dapat dicapai, akan tetapi dapat didekati seakurat mungkin.
- 3) Sebagian besar siswa memahami limit sebagai perubahan nilai dari $f(x)$ ketika x mendekati titik tertentu. Mereka melihat limit sebagai proses yang dinamis, bukan objek yang statis.
- 4) Sebagian besar dari mereka melihat bahwa konsep limit fungsi adalah sama dengan konsep fungsi.

B. Tingkat Struktur Kognitif Subjek Penelitian dalam Memahami Konsep Limit Fungsi

Hasil analisis *genetic decomposition* dan metode Patrick Barmby menunjukkan bahwa struktur kognitif subjek penelitian masih sulit untuk memahami konsep limit fungsi. Hal tersebut dikarenakan subjek penelitian hanya fokus pada prosedur limit dan kurang melibatkan definisi limit itu sendiri, sehingga subjek penelitian belum membuat *concept image* limit fungsi dalam struktur kognitif yang mereka miliki. Konsep limit adalah konsep matematika yang hanya menyediakan definisi ε - δ dan menuntut siswa untuk melakukan berbagai prosedur matematika agar memenuhi definisi formal limit tersebut. Disisi lain, sebagian besar siswa sulit untuk menjelaskan simbol yang terdapat dalam

konsep limit dengan kata-kata mereka sendiri.¹³⁰ Mungkin struktur kognitif – berkaitan dengan konsep limit fungsi- yang mereka miliki belum mampu untuk menentukan seberapa dekat x mendekati c .¹³¹

Struktur kognitif yang dimiliki ketiga subjek penelitian dalam memahami konsep limit fungsi menunjukkan bahwa mereka belum memiliki *concept image* limit fungsi yang benar. Proses mental yang mereka lakukan dalam memahami konsep limit fungsi mengalami kesulitan karena *concept image* yang belum sempurna tersebut. Ketiga subjek penelitian tidak mencoba untuk memahami definisi konsep limit fungsi –yang abstrak tersebut- melalui grafik fungsinya. Padahal dengan melihat grafik fungsi yang dilimiti, mereka dengan mudah dapat memahami definisi limit fungsi dan menemukan nilai limit fungsi tanpa melakukan perhitungan matematika.¹³² Hal ini mungkin dikarenakan struktur kognitif yang mereka miliki belum terbiasa untuk mencari nilai limit suatu fungsi menggunakan metode grafik. Ketiga subjek penelitian tersebut mengalami ketidakseimbangan antara *conceptual knowledge* dan *procedural knowledge* berkaitan dengan konsep limit fungsi.¹³³

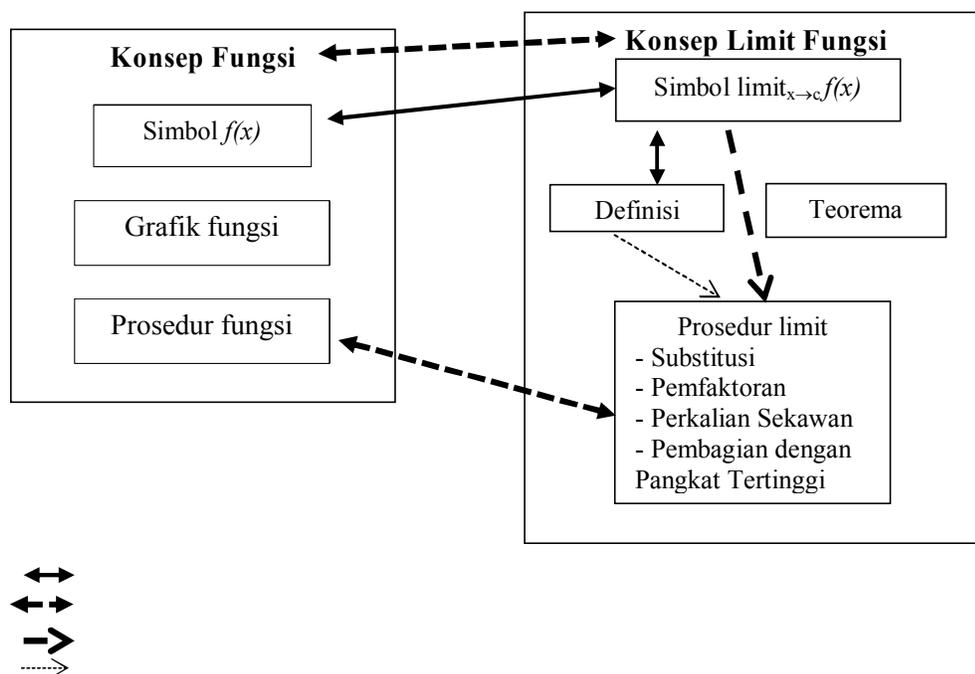
1. Subjek Penelitian Aprilia Damayanti (A)

¹³⁰ Lihat Antonio Domingos, Op. Cit., hal. 2274.

¹³¹ Isabelle Bloch, “*from Numbers to Limit: Situations as a Way to a Process of Abstraction*”, *Proceedings of CERME 6, 28 Januari – 1 Februari 2009*, hal. 2393

¹³² Lihat Ján Guñçaga, “*Introduction of the Notions of Limit and Derivative of a Function at a Point*”, *Proceedings of CERME 6, 28 Januari – 1 Februari 2009*, hal. 2424

¹³³ Meir Ben-Hur, “*Concept-Rich Mathematics Instruction*”, Association for Supervision and Curriculum Development (ASCD) Alexandria, Virginia USA, (2007), hal. 6



Gambar 5.1. Perkembangan Struktur Kognitif Limit Fungsi yang dimiliki A

Struktur kognitif A mampu melihat perbedaan antara konsep limit fungsi dan konsep fungsi, tetapi tidak yakin dengan alasan perbedaan tersebut. Secara keseluruhan, dengan menggunakan analisis *genetic decomposition*, maka struktur kognitif A masih berkuat dengan prosedur-prosedur limit fungsi yang dapat digunakannya untuk menyelesaikan permasalahan limit fungsi. Kegiatan kognitif A tersebut menunjukkan bahwa A belum melakukan *asimilasi-akomodasi* antara konsep fungsi dan konsep limit fungsi dengan sempurna, yang menyebabkan A –dalam teori Piaget- mengalami *disequilibrium*.

Subjek A merasakan prosedur-prosedur limit fungsi sebagai bagian eksternalnya dan A belum merasakan prosedur-prosedur limit sebagai hal yang mudah untuk dilakukan, sehingga struktur kognitif A -dalam teori APOS- berada pada tahapan *actions*.

Walaupun A belum memahami sepenuhnya tentang prosedur limit fungsi, tetapi A sudah mulai menginternalisasi prosedur-prosedur tersebut ke dalam struktur kognitif yang dimilikinya. Dalam teori Anna Sfard, struktur kognitif A berada pada tahapan *interiorization*, dengan *conception* limit fungsi berupa *operational conception*.

Disatu sisi, A belum menyadari sepenuhnya bahwa prosedur yang dilakukannya -sebagai *problem solving* permasalahan limit- merupakan proses yang sama -yang terdapat- dalam simbol limit, sehingga A masih belum melihat konsep limit fungsi sebagai *procept*. Dalam teori *procept* Tall & Grey, struktur kognitif A berada pada tahapan *procedure*.

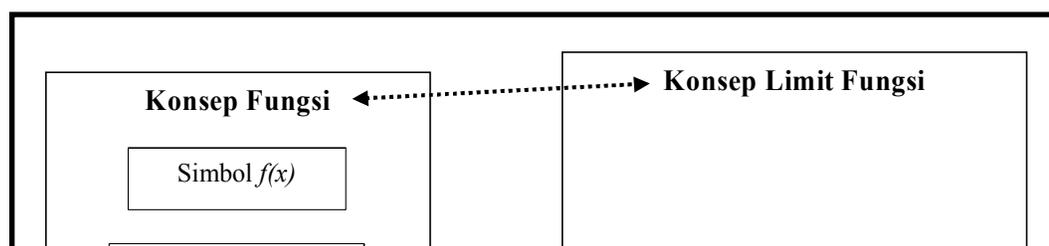
Dalam prespektif al-Qur'an, A memiliki uraian konsep limit fungsi – walau tidak lengkap- dalam struktur kognitifnya, sehingga dapat dikatakan struktur kognitif A sudah melewati tahapan *mauizhah hasanah*. A belum mampu menggunakan *mauizhah hasanah* konsep limit fungsi yang dimilikinya untuk

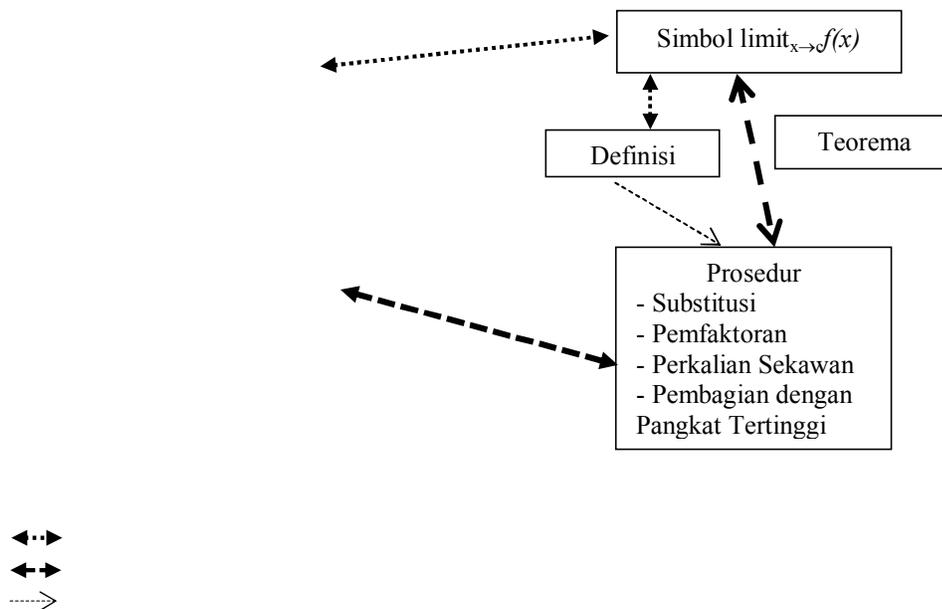
mencari nilai limit $_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 2}$ dan menyebabkan struktur kognitif A perlu melakukan *jidal*.

Dengan menggunakan metode Patrick Barmby dalam menganalisa tingkat pemahaman limit fungsi A, maka tingkat pemahaman limit fungsi A - dalam Teori Skemp – berada pada tahapan *relational understanding*. A dapat melihat prosedur yang terkandung dalam simbol limit sebagai *problem solving* dari permasalahan limit. A juga mampu melihat akan adanya hubungan antara simbol limit dan simbol $f(x)$, bahwa limit adalah simbol yang menunjukkan nilai yang dapat didekati oleh $f(x)$ dan tidak akan pernah mencapai nilai tersebut. Tetapi A melakukan *student errors* dalam menerapkan prosedur limit fungsi tertentu dalam menyelesaikan permasalahan limit. *Student errors* yang dilakukan A dapat disebabkan oleh beberapa aspek. Bisa jadi A belum mentransformasi definisi limit fungsi ke dalam struktur kognitif yang dimilikinya, sehingga A hanya menfokuskan struktur kognitifnya pada penerapan prosedur limit fungsi.

Subjek A harus memperbanyak latihan mencari nilai limit agar prosedur-prosedur limit fungsi menjadi bagian internal dirinya, sehingga A dapat dengan mudah memilih prosedur tertentu sebagai cara yang dapat digunakan A dalam menyelesaikan permasalahan tersebut. Keuntungan lainnya adalah dengan memperbanyak latihan, maka secara otomatis A akan melakukan *reflective abstraction* terhadap konsep limit fungsi dan konsep fungsi, yang dapat membantu A dalam memahami konsep limit fungsi.

2. Subjek Penelitian Mahesta Ratna D (M)





Gambar 5.2. Perkembangan Struktur Kognitif Limit Fungsi yang dimiliki M

Analisis *genetic decomposition* yang diterapkan untuk menganalisa struktur kognitif M menunjukkan bahwa M belum melakukan *reflective abstraction* dengan benar terhadap konsep limit fungsi dan konsep fungsi, sehingga *asimilasi-akomodasi* yang dilakukannya menyebabkan M mengalami *disquilibrium*.

Subjek M telah menginternalisasi beberapa prosedur limit fungsi ke dalam struktur kognitifnya. M dengan mudah menentukan prosedur yang dapat digunakannya (perkalian sekawan) sebagai *problem solving* dari limit_{h→0}

$$\frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h}$$

. Manipulasi prosedur perkalian sekawan yang

dilakukan oleh M menunjukkan bahwa M mulai mahir menggunakan prosedur tersebut. Tetapi, dalam kasus $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$, M mengalami kesulitan untuk mencari solusi dari permasalahan tersebut. Hal tersebut dikarenakan oleh penerapan prosedur substitusi yang dilakukan M. Kesalahan M dalam memilih prosedur substitusi -sebagai *problem solving* dari $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$ - mengindikasikan struktur kognitif M -dalam teori APOS- berada pada tahapan *actions*.

Subjek M belum menyadari bahwa dengan metode menfaktorkan, bentuk $\frac{x-2}{x-2}$ dapat berubah menjadi konstanta, 1. Dengan menggunakan teorema limit, maka hasil dari limit tersebut adalah 1. Dalam teori Anna Sfard, M masih melakukan *interiorization* terhadap prosedur-prosedur limit fungsi. Interiorisasi yang dilakukan M tersebut mengisyaratkan bahwa *conception* limit fungsi yang dimiliki M berupa *operational conception*.

Keragu-raguan M menjelaskan makna simbol $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 5$ menunjukkan bahwa M belum sepenuhnya memahami makna simbol tersebut. Disisi lain, M dapat dengan mudah menyebutkan beberapa prosedur limit fungsi, tetapi belum mahir menggunakan prosedur-prosedur tersebut, sehingga struktur kognitif M -dalam teori *procept*- berada pada tahapan *procedure*.

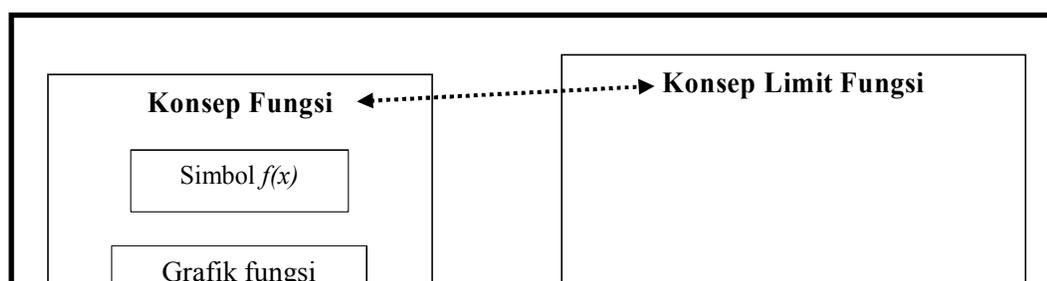
Dalam pandangan al-Qur'an, struktur kognitif M memiliki *mauizhah hasanah* konsep limit fungsi. *Mauizhah hasanah* tersebut terlihat pada

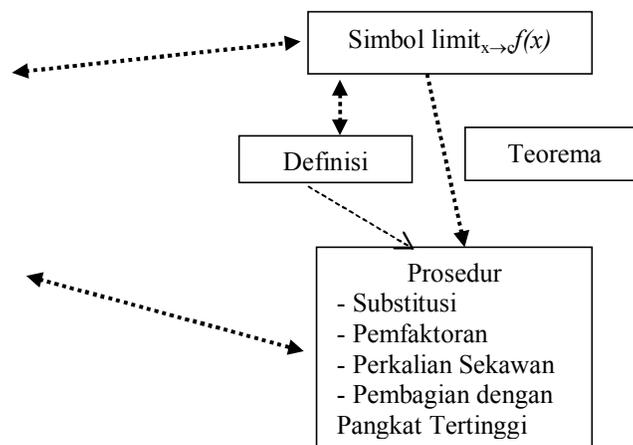
kemampuan manipulasi prosedur yang dilakukan M dalam mencari solusi dari permasalahan yang berkaitan dengan konsep limit fungsi. Sayangnya, manipulasi prosedur yang dilakukan M tidak melibatkan teorema limit, sehingga struktur kognitif M membutuhkan *jidat* dalam kasus limit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$.

Metode analisis Patrick Barmby menunjukkan bahwa pemahaman M berada pada tahapan *relational understanding*. M masih melakukan *student errors* ketika menerapkan prosedur substitusi untuk mencari nilai dari $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2}$. *Student errors* yang dilakukan M juga terjadi pada saat M mengatakan “kalau mengerjakan limit bisa menggunakan fungsi, dan sebaliknya, kalau mencari fungsi bisa menggunakan cara limit”. Dilain pihak, M dapat memilih prosedur yang tepat pada saat mencari hasil $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h}$, dan hasil penerapan prosedur tersebut menunjukkan bahwa M mahir dalam menerapkan prosedur perkalian sekawan.

Subjek M perlu melakukan abstraksi lebih jauh terhadap semua hal-hal yang berkaitan dengan konsep limit fungsi, sehingga M dapat menyempurnakan *concept image* limit fungsi yang sudah dibuatnya dan meningkatkan pemahaman limit fungsi yang dimilikinya.

3. Subjek Penelitian Valerie Danis S. S (V)





Gambar 5.3. Perkembangan Struktur Kognitif Limit Fungsi yang dimiliki V

Analisis *genetic decomposition* mengindikasikan bahwa secara mekanis V belum mengetahui perbedaan pasti antara prosedur limit yang satu dengan prosedur yang lainnya. Paradigma prosedur limit yang dimiliki V beranggapan “*pertama gunakan metode substitusi dan jika tidak ditemukan hasilnya, coba gunakan prosedur yang lainnya*”. V kebingungan untuk memilih prosedur yang tepat, sehingga membutuhkan banyak waktu dalam menyelesaikan permasalahan limit. Implikasi dari paradigma V tersebut memberikan efek yang cukup besar bagi struktur kognitifnya, yakni menyebabkan struktur kognitif V mengalami *disequilibrium*.

Subjek V belum memiliki gambaran secara jelas tentang konsep limit (*concept image*) dalam struktur kognitifnya dan tidak mengetahui secara pasti tentang prosedur limit yang digunakannya. V masih melakukan tindakan percobaan prosedur dalam mencari nilai limit. Tindakan percobaan yang dilakukan V menunjukkan bahwa struktur kognitif V –dalam teori APOS- berada pada tahapan *actions*.

Pada saat V melakukan percobaan prosedur limit, tanpa disadari V sedang menginteriorisasi prosedur-prosedur tersebut ke dalam struktur kognitifnya. Kegiatan menginteriorisasi prosedur limit yang dilakukan V dengan jelas menunjukkan bahwa –dalam teori Anna Sfard- struktur kognitif V berada pada tahapan *interiorization* dengan *conception* limit fungsi berupa *operational conception*.

Walaupun V dapat melihat prosedur-prosedur yang terkandung dalam simbol limit, akan tetapi prosedur-prosedur yang dilakukan V terlihat belum lancar, belum terstruktur, dan belum terkompresi menjadi suatu proses yang sama dalam mencari nilai limit. Hal ini menyebabkan struktur kognitif V dalam teori *procept* Tall & Grey berada pada tahapan *procedure*.

Jika dilihat melalui prespektif al-Qur'an, maka V belum memahami uraian tentang konsep limit fungsi. Uraian konsep limit fungsi yang dimaksud adalah uraian tentang definisi limit dan prosedur-prosedur limit. Ketidapkahaman V dalam uraian konsep limit fungsi menunjukkan bahwa struktur kognitif V

berada pada tahapan *mauizhah hasanah*, dan V perlu melakukan abstraksi terhadap uraian konsep limit fungsi tersebut.

Analisis Patrick Barmby yang digunakan dalam penelitian ini memberikan gambaran bahwa pemahaman limit fungsi yang dimiliki V berada pada tahapan *isntrumental understanding*. Subjek V melakukan *student erros* dengan beranggapan bahwa $f(x)$ harus terdefinisi agar mempunyai limit. *Student erros* pun terjadi ketika V membuat hubungan antara konsep limit fungsi dan konsep turunan. Dalam struktur kognitif yang dimiliki V, terbentuk pemahaman bahwa untuk mencari nilai limit suatu fungsi dapat menggunakan turunan dari fungsi tersebut (dalil L Hopital). Subjek V belum menyadari jika pemahaman tersebut adalah terbalik, karena untuk mencari turunan fungsi harus menggunakan konsep limit. Miskonsepsi tersebut mungkin dikarenakan V tidak mempelajari definisi turunan fungsi. Pada saat melihat simbol limit, V sadar bahwa dalam simbol tersebut terkandung prosedur-prosedur yang dapat dilakukannya. Sayangnya V belum terampil dalam menggunakan prosedur tersebut. Subjek V perlu memahami definisi limit, sehingga V dapat menggunakan prosedur limit yang tepat. V dapat menyebutkan bahwa dalam simbol $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$, terdapat dua simbol utama, yakni simbol limit dan simbol fungsi. V mengetahui bahwa terdapat hubungan antara limit dan fungsi, akan tetapi V tidak dapat menjelaskan bentuk hubungan tersebut. Subjek V perlu

melakukan abstraksi terhadap definisi limit dan konsep fungsi agar memiliki pemahaman limit yang lebih baik.

C. Keterbatasan Penelitian

Berbagai upaya telah dilakukan dalam penelitian ini agar dapat mencapai hasil yang optimal. Namun demikian, penelitian ini tetap memiliki berbagai keterbatasan sekaligus merupakan kelemahan dalam penelitian ini. Keterbatasan-keterbatasan tersebut adalah sebagai berikut :

Pertama, subjek yang diteliti dalam penelitian ini hanya dilihat bagaimana proses mental yang dimiliki oleh subjek dapat membuat suatu pengertian tentang permasalahan limit yang diajukan dalam penelitian ini (struktur kognitif). Aspek lain seperti: sikap, minat, motivasi, dan lain-lain tidak dilibatkan karena keterbatasan kemampuan peneliti. Untuk itu, diharapkan kepada peneliti lain untuk mengadakan penelitian sejenis dengan menggunakan rancangan eksperimen yang lebih kompleks.

Kedua, permasalahan limit yang diajukan dalam penelitian ini hanya bertujuan untuk melihat bagaimana struktur kognitif siswa dapat memahami konsep limit ditinjau dari definisi limit dan penerapan prosedur limit yang tepat. Dengan demikian, hasil yang diperoleh dalam penelitian ini belum tentu sama dengan penelitian lain yang melibatkan berbagai aspek konsep limit.

BAB VI

PENUTUP

A. Kesimpulan

Sesuai dengan rumusan masalah yang diajukan dalam penelitian ini, maka dapat disimpulkan sebagai berikut :

- 1) Struktur kognitif ketiga subjek dalam penelitian ini masih bersifat prosedural pada saat mereka mencari nilai limit dari suatu fungsi. Hal ini terjadi karena subjek masih belum merasakan konsep limit fungsi sebagai bagian *internal* dari dirinya.
- 2) Pemahaman konsep limit fungsi yang dimiliki ketiga subjek dalam penelitian ini masih belum menunjukkan bahwa subjek memiliki keyakinan tentang konsep limit fungsi. Hal tersebut dikarenakan struktur kognitif subjek belum membuat *concept image* limit fungsi yang lengkap, sehingga subjek masih kesulitan dalam memahami konsep limit fungsi.

B. Saran

Saran di bawah ini dibuat dengan melihat hasil temuan dalam penelitian ini:

- 1) Dilakukan penelitian yang bertujuan untuk melihat bagaimana proses konstruksi konsep limit yang dilakukan oleh siswa. Saran ini diajukan karena struktur kognitif yang dimiliki oleh siswa tidak terlepas dari cara siswa tersebut mengkonstruksi konsep limit fungsi.

- 2) Dilakukan penelitian yang bertujuan mencari cara yang tepat dalam mengajarkan konsep limit fungsi. Saran kedua ini diajukan agar dapat meningkatkan pemahaman siswa dalam konsep limit fungsi yang abstrak.
- 3) Dilakukan penelitian yang bertujuan untuk melihat efek penggunaan teknologi (program komputer) untuk menjelaskan konsep limit fungsi.

Perkembangan teknologi semakin cepat, termasuk program komputer. Banyak program komputer yang dapat membantu pekerjaan, seperti *Corel Draw* dapat membantu dalam membuat sketsa rancang bangunan; *Adobe Illustrator* yang dapat digunakan untuk membuat animasi; dan lain-lain. Manfaat teknologi inilah yang mendorong peneliti mengajukan saran terakhir.

DAFTAR PUSTAKA

- Asiala, Mark, et. al., 2004, "*A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education*", diunduh dari <http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html> pada tanggal 17 Januari 2012 pukul 01.50.
- Ayers, Frank, Jr., dan Mendelson, Elliot, 2006, *Kalkulus*, Ed. IV, Penerjemah: Nur Danarjaya, Jakarta: Erlangga.
- Baghni, Giorgio T., 2004, "*Historical Roots of Limit Notion Development of its Representation Registers and Cognitive Development*", Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education. Diunduh dari <http://www.syllogismos.it/history/CJSMTE-03.PDF> pada tanggal 26 April 2012 pukul 17. 05.
- Barmby, Patrick , et. al., 2007, "*How Can We Asses Mathematical Understanding?*", dihasilkan pada konferensi ke-31 *International Group for the Psychology of Mathematic Education*, Vol. 2, PP. 41- 48, Seoul. Diunduh dari <http://www.emis.de/proceedings/PME31/2/41.pdf> pada tanggal 21 Januari 2012 pukul 06.35.
- Bargh, Jhon A., and Ferguson, Melissa J. 2000, "*Beyond Behaviorism: On the Automaticity of Higher Mental Processes*", Psychological Bulletin, Vol. 126, No. 6, 925-945. Diunduh dari

<http://www.uic.edu/classes/psych/Health/Readings/Bargh,%20Automaticity%20review,%20PsyBull,%202000.pdf> pada tanggal 20 Januari 2012 pukul 12.39.

Basuni, Hasyim, M., 1986, *Kalkulus*, Edisi 1, Cet. 1, Jakarta : UI-Press.

Ben-Hur, Meir, 2007, "*Concept-Rich Mathematics Instruction*", Association for Supervision and Curriculum Development (ASCD) Alexandria, Virginia USA. Diunduh dari http://fileshare506.depositfiles.com/auth-1326739269e0b47929c8a10dd578a7ef-202.152.201.193-865851789-2397595-guest/FS506-7/Concept-Rich_Mathematics_Instruction.rar? Pada tanggal 17 Januari 2012 Pukul 12.41.

Bloch, Isabelle, 2009, "*from Numbers to Limit: Situations as a Way to a Process of Abstraction*", *Proceedings of CERME 6*, 28 Januari – 1 Februari 2009, diunduh dari <http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg12.pdf> pada tanggal 12 Maret 2012 pukul 16.38.

Breidenbach, Daniel, et. al., 2001, "*Development of The Process Conception of Function*", Purdue University, Departement of Mathematics. Di unduh dari <http://www.math.kent.edu/~edd/PROCESSFUNC.pdf> pada tanggal 17 Januari 2012 Pukul 11.13.

Cottrill, Jim , et. al., 1995, "*Understanding the Limit Concept: Beginning with Coordinated Process Schema*", *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167-192 , 1996,

Diunduh dari <http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/concept-limit.pdf> pada tanggal 26 April 2012 pukul 22.11.

Direktorat Pembinaan SMA, 2006, *Contoh Silabus Mata Pelajaran Matematika*, Departemen Pendidikan Nasional, Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah.

Domingos, Antonio, 2010, "*Learning Advanced Mathematical Concept : The Concept of Limit*", Proceedings of CERME 6, 28 Januari – 1 Februari 2009, Diunduh dari <http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg12-03-domingos.pdf> Pada tanggal 27 Februari 2012 Pukul 08.00.

Dubinsky Ed dan Lewin, Philip, 1986, "*Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of Induction and Compactness*", The Journal of Mathematical Behavior 5. Diunduh dari <http://www.math.kent.edu/~edd/RAMED.pdf> pada tanggal 14 Januari 2012 pukul 08.07.

Dubinsky, Ed, dan McDonald, A., Michael, 2000, "*APOS : A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research*", Diunduh dari <http://www.ripon.edu/academics/macsum/summation/2010/articles/S.%20Weyer%20-%20APOS%20Theory.pdf> pada tanggal 14 Januari 2012 Pukul 08.08.

Dubinsky, Ed, et. al., 2004, “*Some Historical Issues and Paradoxes Regarding the Concept of Infinity : An Apos Based Analysis, Part 1*”, Diunduh dari <http://www.math.kent.edu/~edd/HistPart1Submit.pdf> pada tanggal 14 Januari 2012 Pukul 23.17.

_____, 2005, “*Some Historical Issues and Paradoxes Regarding the Concept of Infinity : An Apos Based Analysis, Part 2*”, Diunduh dari <http://www.math.kent.edu/~edd/HistPart2RevSubmit1.pdf> pada tanggal 14 Januari 2012 Pukul 23.02.

Dubinsky, Ed, 2000, “*Meaning and Formalism in Mathematics*”, Georgia State University. Diunduh dari <http://www.math.kent.edu/~edd/UmeaII.pdf> pada tanggal 17 Januari 2012 Pukul 11.15.

_____, 2000, “*Reflections on Krantz’s ‘How to Teach Mathematics’: A Different View*”, Georgia State University. Diunduh dari <http://www.math.kent.edu/~edd/KrantzEssay.pdf> pada tanggal 17 Januari 2012 Pukul 11.14.

_____, 2010, “*The Apos Theory of Learning Mathematics: Pedagogical Applications and Result*”, Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education, diunduh dari http://www.sdu.uct.ac.za/usr/sdu/downloads/conferences/saar_mste2010/programme.pdf pada tanggal 26 April 2012 pukul 22.07.

Garnerr, Betty K., 2011, “*Getting to “Got It!” – Helping Struggling Students Learn How to Learn*”, diunduh dari

<http://groups.ascd.org/resource/documents/122463->

[GettingtoGotItHandoutASCDSession3228.pdf](#) pada tanggal 24 Mei 2012 pukul 18.53.

Gunçaga, Ján, 2009, “*Introduction of the Notions of Limit and Derivative of a Function at a Point*”, *Proceedings of CERME 6, 28 Januari – 1 Februari 2009*, diunduh dari <http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg12.pdf> pada tanggal 12 Maret 2012 pukul 16.38.

Hergenhahn B. R. dan Osmon, Mathew H., 2010, *Theories of Learning*, Penerjemah: Tri Wibowo B.S.Cet. III, Jakarta : Kencana.

Himonas, Alex, and Howard, Alan, 2003, *Calculus, Ideas & Application*, New Jersey : Jhon Wiley & Sons, Inc.

Idris, N., 2009, “*Enhancing Student’s Understanding in Calculus Through Writing*”, *International Electronic Journal of Mathematic Education*, Volume 4, No. 1.

Illeris, Knud, 2011, *Contemporary Theories of Learning*, penerjemah: M. Khozin, Bandung: Nusa Media.

Kementrian Agama RI, 2011, *Al-Qur’an & Tafsirnya (Edisi yang Disempurnakan)*, *Jilid VI*, Jakarta: Widya Cahaya.

Kosslyn, Stephen M., 2005, “*Mental Images and the Brain*”, *Cognitive Neuropsychology*, Vol. 22, 333-347

_____.(tth), "*on the Ontological Status of Visual Mental Image*", Harvard University, diunduh dari <http://acl.ldc.upenn.edu/T/T78/T78-1023.pdf> pada tanggal 24 Mei 2012 pukul 18.45.

Lubis, Yusuf, Akhyar, 1999, "*Konstruktivisme dalam Filsafat Ilmu Pengetahuan Kontemporer*", Vol.1 No.1 hal. 18.

Mahali, A. Mudjab, 2002, *Asbabun Nuzul: Studi Pendalaman al-Qur'an*, Ed.1, Cet.1, Jakarta: PT Raja Grafindo Persada.

Maharaj, Aneshkumar, 2010, "*An APOS Analysis of Students' Understanding of the Concept of a Limit of a Function*", Pythagoras No. 71. Diunduh dari http://amesa.org.za/amesap_n71_a5.pdf pada tanggal 14 Januari 2012 Pukul 08.51.

Meel, David, E., 2003, "*Models and Theories of Mathematical Understanding: Comparing Pirie and Kieren's Model of the Growth of Mathematical Understanding and APOS Theory*", CBMS Issues in Mathematics Education Volume 12, diunduh dari

[http://personal.bgsu.edu/~meel/Research/Meel\(RCME2003\).pdf](http://personal.bgsu.edu/~meel/Research/Meel(RCME2003).pdf) Pada tanggal 15 Maret 2012 Pukul 07.31.

Moleong, Lexy, J., 2010, *Metodologi Penelitian Kualitatif*, Bandung: Remaja Rosdakarya.

Monaghan, Jhon, et. al., 1994, "*Construction of the Limit Concept with a Computer Algebra System*", Proceedings of the Eighteenth Conference for the

- Psychology of Mathematics Education. Lisbon: Program Committee of the 18th PME Conference. Diunduh dari <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1994c-monhnsun-pme.pdf> pada tanggal 26 April 2012 pukul 17.11.
- Mudyahardjo, Redja, 2002, *Filsafat Ilmu Pendidikan : Suatu Pengantar*, Bandung: Remaja Rosda Karya.
- Muhajir, Noeng, 2002, *Metode Penelitian Kualitatif*, Yogyakarta: Rake Sarasih.
- Mulyasa, E., 2006, *Menjadi Guru Profesional: Menciptakan Pembelajaran Kreatif dan Menyenangkan*, Bandung: Remaja Rosdakarya.
- Piaget, Jean, (tth), "*The Psychogenesis of Knowledge and Its Epistemology Significance*", di unduh dari http://dc437.4shared.com/download/ZHzSUTkp/jean_piaget_-_the_psychogenesi.pdf?tsid=20120121-175136-eddfe4e6 pada tanggal 22 Januari 2012 pukul 00.53.
- Purcell, Edwin J., dan Verberg, Dale, _____, *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Ed. V, Penerjemah: I Nyoman Susila dkk, Jakarta: Erlangga.
- Pylyshyn, Zenon, 2003, "*Return of the Mental Image: are There Really Pictures in the Brain*", Elsevier, Trends in Cognitive Science, Vol. 7, No. 3, diunduh dari http://rucss.rutgers.edu/faculty/pylyshyn/tics_imagery.pdf pada tanggal 24 Mei 2012 pukul 18.46.
- Quthb, Sayyid, 2003, *Fi Zhilalil-Qur'an Jilid 7*, Penerjemah: As'ad Yasin dkk., Jakarta: Gema Insani Press.

- Quthb, Sayyid, 2003, *Fi Zhilalil-Qur'an Jilid 12*, Penerjemah: As'ad Yasin dkk., Jakarta: Gema Insani Press.
- Riduwan, 2010, *Metode dan Teknik Menyusun Tesis*, cet. XII, Bandung : Alfabeta.
- Santrock, W ., Jhon, 2008, *Psikologi Pendidikan*, Edisi kedua, Jakarta: Kencana.
- Schertlen, David J., et. al., 2009 “*Report of the Mental Cognitive Subcommittee of the Occupational Information Development Advisory Panel*”, diunduh dari <http://ssa.gov/oidap/Documents/AppendixC.pdf> pada tanggal 24 Mei 2012 pukul 17.22.
- Sfard, A., dan Linchevski, L., 1994, “*Between Arithmetic and Algebra: in the Search of a Missing Link the Case of Equations and Inequalities*”, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, Volume 52, No. 3. Diunduh dari <http://seminariomatematico.dm.unito.it/rendiconti/cartaceo/52-3/279.pdf> Pada tanggal 15 Maret 2012 Pukul 07.37.
- Sfard, Anna, 1991, “*On The Dual Nature of Mathematical Conceptions : Reflections on Processes and Objects as Different Sides of The Same Coin*”, Kluwer Academic Publisher: Educational Studies in Mathematics Volume 22, Diunduh dari <https://www.msu.edu/~sfard/Dual%20nature1.pdf> Pada tanggal 12 Maret 2012 Pukul 17.36.
- _____, 1997, “*On Two Metaphors for Learning and The Dangers of Choosing Just One*”, Educational Researcher, Vol. 27, No. 2, Diunduh dari <https://www.msu.edu/~sfard/two%20metaphors.pdf> Pada tanggal 12 Maret 2012 Pukul 17.36.

- Shihab, M. Quraish, 2007, *Tafsir al-Misbah Volume 7*, Cet. IX, Jakarta: Lentera Hati.
- _____, 2007, *Tafsir al-Misbah Volume 8*, Cet. IX, Jakarta: Lentera Hati.
- _____, 2007, *Tafsir al-Misbah Volume 15*, Cet. IX, Jakarta: Lentera Hati.
- Skemp, Richard R. , 1976, “*Relational Understanding and Instrumental Understanding*”, dipublikasikan pertama kali dalam *Mathematics Teaching*, 77, 20-26. Diunduh dari <http://www.grahamtall.co.uk/skemp/pdfs/instrumental-relational.pdf> pada tanggal 20 Januari 2012 pukul 05.45.
- _____, 1981, “*Theories and Methodologies*”.
- Subanji, 2007, *Pembelajaran dengan Pohon Matematika Sebagai Upaya Meningkatkan Kreativitas siswa*, Malang: UM Press.
- _____, 2007, *Proses Berpikir Penalaran Kovariasional Pseudo Dalam Mengkonstruksi Garfik Fungsi Kejadian Dinamik Berkebalikan*, Disertasi unpublished, Perpustakaan Universitas Negeri Surabaya.
- Sudjana, Nana , 2005, *Dasar-dasar Proses Belajar Mengajar*, Bandung: Sinar Baru Algesindo.
- Sugiyono, 2008, *Metode Penelitian Kuantitatif, Kualitatif dan R&D*, Cet IV, Bandung: Alfabeta.
- Suhartono, Suparlan , 2007, *Filsafat Pendidikan*, cet II, Jogjakarta : AR-RUZZ MEDIA.
- Tall, David, et. al., 1999, “*What is the Object of the Encapsulatin of a Process?*”, Diunduh dari

<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1997c-davis-thomas-merga.pdf>

Pada tanggal 21 Januari 2012 Pukul 14.06.

Tall, David dan Chin, Erh-Tsung, 2002, “*Mathematical Proof as Formal Procept in Advanced Mathematical Thinking*”, Diunduh dari

<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot20021-formal-procept.pdf> Pada tanggal 21 Januari 2012 Pukul 14.16.

Tall, David dan Crowley, Lillie, 2006, “*Two Students : Why Does One Succeed and the Other Fail?*”, Diunduh dari

<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2006c-tall-crowley.pdf>

Pada tanggal 21 Januari 2012 Pukul 14.21.

Tall, David, dan Gray ,Eddie,2001, “*Relationship between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics*”, Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3, 65–72. Utrecht, The Netherlands.

Diunduh dari <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001i-pme25-gray-tall.pdf> pada tanggal 21 Januari 2012 pukul 14.08.

_____, 1992, “*Success and Failure in Mathematics: Procept and Procedure 1. A Primary Perspective*”, Mathematics Education Research Center.

Diunduh dari <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992k-primary-procept.pdf> Pada tanggal 21 Januari 2012 Pukul 14.04.

_____, _____, “*Success and Failure in Mathematics: Procept and Procedure 2. Secondary Mathematics*”, *Workshop on Mathematics Education and Computers*, Taipei National University, April 1992, 216– 221.

Diunduh dari <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992l-secondary-procept.pdf> Pada tanggal 21 Januari 2012 Pukul 14.04.

_____, 2002, “*What is a Scheme?*”, Diunduh dari <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002d-davis-schemes.pdf> pada tanggal 21 Januari 2012 Pukul 14.14.

Tall, David, dan Poynter, Anna, 2005, “*Relating Theories to Practice in Teaching of Mathematics*”, *Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Diunduh dari http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2005a-cerme4_poynter_tall.pdf Pada tanggal 21 Januari 2012 Pukul 14.04.

Tall, David O., dan Schwarzenberger, R. L. E., 1978, “*Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits*”, Dipublikasikan dalam *Mathematical Teaching*, 82, 44-49, diunduh dari

<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1978c-with-rolph.pdf> pada tanggal 26 April 2012 pukul 16.51.

Tall, David, dan Vinner, Shlomo, 1981, “*Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity*”, dipublikasikan dalam *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 12,

diunduh dari

<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1981a-concept-image.pdf> pada tanggal 12 Maret 2012 pukul 17.17.

Tall, David, dan Watson, Anna, 2002, "*Embodied Action, Effect and Symbol in Mathematical Growth*",

Diunduh dari <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002j-pme26-watson.pdf> Pada tanggal 21 Januari 2012 Pukul 14.15.

Tall, David, 2008, "*Cognitive and Social Development of Proof Through Embodiment, Symbolism & Formalism*", University of Warwick, UK.

Diunduh dari <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2009a-icme-proof.pdf> Pada tanggal 21 Januari 2012 Pukul 14.30.

_____, 2004, "*Introducing Three World of Mathematics*", University of Warwick, UK. Diunduh dari

<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2004a-3worlds-flm.pdf> Pada tanggal 21 Januari 2012 Pukul 14.17.

_____, 2010, "*The Transition to Formal Thinking in Mathematics*", University of Warwick, UK. Diunduh dari

<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2008e-merji-3worlds.pdf> Pada tanggal 21 Januari 2012 Pukul 14.29.

Thomas, George B., Jr. Dan Finney, Ross L., 1998, *Calculus and Analitic Geometry 9th Edition*, Unites States of America Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

- Troelstra, A. S., 2005, "*History of Constructivism in The 20th Century*". Diunduh dari <http://staff.science.uva.nl/~anne/hhhist.pdf> pada tanggal 27 April 2012 pukul 17.16.
- Tudge, Jonathan R. H., and Winterhoff, Paul A., 1993, "*Vygotsky, Piaget, and Bandura: Prespective on the Relations between the Social World and Cognitive Development*", *Human Development*, Vol. 36, diunduh dari <http://152.13.13.169/hdf/facultystaff/Tudge/vpb93.pdf> pada tanggal 2 April 2012 pukul 07:04.
- Varberg, et. al., 2003, *Kalkulus Edisi 8*, Penerjemah: I Nyoman Susila, Jakarta: Erlangga.
- Weyer, Sarah R., 2010, "*APOS Theory as a Conseptualization for Understanding Mathematical Learning*", Departement of Mathematics and Computer Sciences – Rippon College. Diunduh dari <http://ripon.edu/mac/s/summation> pada tanggal 14 Januari 2012 Pukul 22.55.
- Wirodikromo, Sartono, 2003, *Matematika 2000 untuk SMU Jilid 4 Kelas 2*, Jakarta : Erlangga.