

BAB II

KAJIAN TEORI

A. Kemampuan Penalaran Matematika

1. Penalaran

Menurut R.G. Soekadijo penalaran adalah suatu bentuk pemikiran.¹

Adapun Suhartoyo Hardjosatoto dan Endang Daruni Asdi memberikan definisi penalaran sebagai berikut,

“Penalaran adalah proses dari budi manusia yang berusaha tiba pada suatu keterangan baru dari sesuatu atau beberapa keterangan lain yang telah diketahui dan keterangan yang baru itu mestilah merupakan urutan kelanjutan dari sesuatu atau beberapa keterangan yang semula itu².”

Mereka juga menyatakan bahwa penalaran menjadi salah satu kejadian dari proses berfikir. Pengertian mengenai berfikir yaitu,

“Berpikir atau thinking adalah serangkaian proses mental yang banyak macamnya seperti mengingat-ingat kembali sesuatu hal, berkhayal, menghafal, menghitung dalam kepala, menghubungkan beberapa pengertian, menciptakan sesuatu konsep atau mengira-ngira pelbagai kemungkinan.”

Namun, Suhartoyo Hardjosatoto dan Endang Daruni Asdi menyatakan perbedaan antara penalaran dan berfikir sebagai berikut, “Memang penalaran

¹ Soekadijo, R.G. *Logika Dasar. Tradisional, Simbolik, dan Induktif*. Jakarta: PT. Gramedia.1985,Hal.3

² Suhartoyo Hardjosatoto dan Endang Daruni Asdi. *Pengantar Logika Modern Jilid I*. Yogyakarta: Fakultas Filsafat Universitas Gadjah Mada.1979,hal.10

atau *reasoning* merupakan salah satu pemikiran atau *thinking*, tetapi tidak semua *thinking* merupakan penalaran³.”

R.G. Soekadijo membuat kronologi mengenai terjadinya penalaran. Proses berfikir dimulai dari pengamatan indera atau observasi empirik. Proses itu di dalam pikiran menghasilkan sejumlah pengertian dan proposisi sekaligus. Berdasarkan pengamatan-pengamatan indera yang sejenis, pikiran menyusun proposisi yang sejenis pula. Proses inilah yang disebut dengan penalaran yaitu bahwa berdasarkan sejumlah proposisi yang diketahui atau dianggap benar kemudian digunakan untuk menyimpulkan sebuah proposisi baru yang sebelumnya tidak diketahui⁴.

Kerap dalam Fadjar Shadiq menjelaskan penalaran (jalan pikiran atau *reasoning*) sebagai: “Proses berpikir yang berusaha menghubungkan fakta-fakta atau evidensi-evidensi yang diketahui menuju kepada suatu kesimpulan”. Secara lebih jelas, Fadjar Shadiq mendefinisikan bahwa penalaran merupakan suatu kegiatan, suatu proses atau suatu aktivitas berfikir untuk menarik kesimpulan atau membuat suatu pernyataan baru yang benar berdasarkan pada beberapa pernyataan yang kebenarannya telah dibuktikan atau diasumsikan sebelumnya⁵.

³ Ibid.

⁴ Soekadijo, R.G. *Logika Dasar. Tradisional, Simbolik, dan Induktif*. Jakarta: PT. Gramedia. 1985, Hal.6

⁵ Shadiq, Fadjar. *Pemecahan Masalah, Penalaran dan Komunikasi*. Disampaikan pada Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SMA Jenjang Dasar Tanggal 6 s.d. 19 Agustus 2004 di PPPG Matematika. Yogyakarta: Departemen Pendidikan Nasional Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah Pusat Pengembangan Penataran Guru (PPPG) Matematika Yogyakarta.2004,hal.2

Menurut Copi dalam Fadjar Shadiq menyatakan penalaran sebagai berikut:

“Reasoning is a special kind of thinking in which inference takes place, in which conclusions are drawn from premises⁶.”

Berdasarkan definisi yang disampaikan Copi tersebut, Fajar Shadiq menerjemahkan bahwa penalaran merupakan kegiatan, proses atau aktivitas berpikir untuk menarik suatu kesimpulan atau membuat suatu pernyataan baru berdasarkan pada beberapa pernyataan yang diketahui benar ataupun yang dianggap benar yang disebut premis.

Dari definisi yang dinyatakan oleh Copi tersebut dapat diketahui bahwa kegiatan penalaran terfokus pada upaya merumuskan kesimpulan berdasarkan beberapa pernyataan yang dianggap benar.

Penalaran juga merupakan aktivitas berpikir yang abstrak. Untuk mewujudkannya diperlukan simbol. Simbol atau lambang yang digunakan dalam penalaran berbentuk bahasa, sehingga wujud penalaran akan berupa argumen. Pengertiannya adalah pernyataan atau konsep adalah abstrak dengan simbol berupa kata, sedangkan untuk proposisi simbol yang digunakan adalah kalimat (kalimat pernyataan) dan penalaran menggunakan simbol berupa argumen. Argumenlah yang dapat menentukan kebenaran konklusi dari premis.

⁶ Shadiq, Fadjar. 2007. *Penalaran atau Reasoning. Perlu Dipelajari Para Siswa di Sekolah?.* <http://prabu.telkom.us/2007/08/29/penalaran-atau-reasoning/>

2. Kemampuan Penalaran Matematika

Matematika pada dasarnya suatu alat untuk mengembangkan cara berpikir, oleh karena itu matematika sangat diperlukan baik dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam menghadapi kemajuan IPTEK sehingga perlu dibekalkan kepada peserta didik, bahkan sejak jenjang pendidikan Taman Kanak-kanak.

Matematika pada hakekatnya merupakan suatu ilmu yang cara bernalarnya deduktif formal dan abstrak (objek-objek penelaahannya abstrak, hanya ada dalam pemikiran manusia sehingga hanya suatu hasil karya dari kerja otak manusia). Objek penelaahan matematika tidak sekedar kuantitas berupa bilangan-bilangan serta operasinya yang tidak banyak artinya dalam matematika, tetapi lebih dititikberatkan kepada hubungan, pola, bentuk, dan stuktur (unsur ruang).

Penalaran matematika diperlukan untuk menentukan apakah sebuah argumen matematika benar atau salah dan dipakai untuk membangun suatu argumen matematika. Penalaran matematika tidak hanya penting untuk melakukan pembuktian atau pemeriksaan program, tetapi juga untuk inferensi dalam suatu sistem kecerdasan buatan.

Pada dasarnya setiap penyelesaian soal matematika memerlukan kemampuan penalaran. Melalui penalaran, siswa diharapkan dapat melihat bahwa matematika merupakan kajian yang masuk akal atau logis. Dengan

demikian siswa merasa yakin bahwa matematika dapat dipahami, dipikirkan, dibuktikan, dan dapat dievaluasi. Dan untuk mengerjakan hal-hal yang berhubungan diperlukan bernalar.

Istilah penalaran matematika atau biasa yang dikenal dengan penalaran matematis dalam beberapa literatur disebut dengan *mathematical reasoning*. Karin Brodie menyatakan bahwa, “*Mathematical reasoning is reasoning about and with the object of mathematics*⁷.” Pernyataan tersebut dapat diartikan bahwa penalaran matematis adalah penalaran mengenai objek matematika. Objek matematika dalam hal ini adalah cabang-cabang matematika yang dipelajari seperti statistika, aljabar, geometri dan sebagainya.

Referensi lain yaitu *Math Glossary* menyatakan definisi penalaran matematis sebagai berikut, “*Mathematical reasoning: thinking through math problems logically in order to arrive at solutions. It involves being able to identify what is important and unimportant in solving a problem and to explain or justify a solution*⁸.”

Pernyataan tersebut dapat diartikan bahwa penalaran matematis adalah berpikir mengenai permasalahan-permasalahan matematika secara logis untuk memperoleh penyelesaian. Penalaran matematis juga mensyaratkan kemampuan untuk memilah apa yang penting dan tidak penting dalam

⁷ Brodie, Karin. *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classroom*. New York: Springer.2010,hal.7

⁸ (<http://www.surfnetparents.com>)

menyelesaikan sebuah permasalahan dan untuk menjelaskan atau memberikan alasan atas sebuah penyelesaian.

Dari definisi yang tercantum pada *Math Glossary* tersebut, dapat diketahui bahwa terdapat dua hal yang harus dimiliki siswa dalam melakukan penalaran matematis yaitu kemampuan menjalankan prosedural penyelesaian masalah secara matematis dan kemampuan menjelaskan atau memberikan alasan atas penyelesaian yang dilakukan.

Penalaran merupakan tahapan berpikir matematika tingkat tinggi, mencakup kapasitas untuk berpikir secara logis dan sistematis. Terdapat dua jenis penalaran matematika, yaitu penalaran induktif dan penalaran deduktif.

a) Penalaran Induktif

Penalaran induktif merupakan suatu kegiatan, suatu proses atau suatu aktivitas berpikir untuk menarik suatu kesimpulan atau membuat suatu pernyataan baru yang bersifat umum (*general*) berdasarkan pada beberapa pernyataan khusus yang diketahui benar. Dalam hal ini telah terjadi proses berpikir yang berusaha menghubungkan fakta-fakta atau evidensi-evidensi khusus yang sudah diketahui menuju kepada suatu kesimpulan yang bersifat umum.

Misalkan, jika ada siswa diminta untuk menunjukkan bahwa jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^0 , lalu setiap siswa diminta untuk membuat model segitiga sembarang dari kertas,

menggunting sudut-sudut segitiga tersebut, dan mengimpitkannya. Diantara siswa mungkin ada yang membuat segitiga siku-siku, ada yang membuat segitiga sama kaki, sama sisi atau segitiga sembarang. Dari hasil yang diperoleh siswa menunjukkan hasil yang sama, yaitu jumlah besar sudut-sudut segitiga adalah 180^0 .

Berdasarkan hal ini, dari beberapa kasus khusus itu yaitu dari setiap segitiga, akan didapat hasil yang sama sehingga dapat ditarik suatu kesimpulan yang bersifat umum bahwa jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^0 .

Pernyataan atau kesimpulan yang didapat dari penalaran induktif bisa bernilai benar atau salah. Karenanya, di dalam matematika kesimpulan yang didapat dari proses penalaran induktif masih disebut dengan dugaan (*conjecture*). Kesimpulan tersebut boleh jadi valid pada contoh yang diperiksa, tetapi tidak dapat diterapkan pada keseluruhan contoh. Sebagai contoh, siswa diminta menentukan aturan yang digunakan untuk bilangan-bilangan 2, 4, 6. Jika aturan itu adalah “suatu barisan bilangan genap”, maka aturan itu sesuai dengan contoh. Tetapi, jika contohnya lebih bervariasi, misalnya 2, 3, 5, maka aturan semula tidak dapat lagi digunakan.

Dengan demikian melalui penalaran induktif dapat dihasilkan suatu kesimpulan yang benar berkenaan dengan contoh khusus yang dipelajari,

tetapi kesimpulan tersebut tidak terjamin untuk generalisasi. Meskipun penarikan kesimpulan dengan penalaran induktif tidak valid, tetapi penalaran induktif sangat bermanfaat dalam pengembangan matematika.

b) Penalaran Deduktif

Deduksi didefinisikan sebagai proses penalaran yang menerapkan hal-hal yang umum terlebih dahulu untuk seterusnya dihubungkan dalam bagian-bagian yang khusus. Pada penalaran deduktif proses penalaran konklusinya diturunkan secara mutlak dari premis-premisnya. Pada deduksi yang valid atau sah, kesimpulan yang didapat dinyatakan tidak akan pernah salah jika premis-premisnya bernilai benar.

Melalui penalaran deduktif dapat menyimpulkan informasi lebih banyak daripada penalaran induktif. Artinya, dari keterangan tertentu dapat ditarik kesimpulan tentang hal-hal lain tanpa perlu memeriksanya secara langsung. Sebagai contoh, selalu dapat ditambahkan satu dari suatu bilangan. Dari keterangan tersebut dapat disimpulkan bahwa tidak ada bilangan terbesar atau bilangan terakhir, melainkan tak terbatas. Penalaran deduktif dapat menentukan apakah suatu konjektur yang muncul dikarenakan suatu intuisi atau deduksi secara logis serta konsisten dan apakah penalaran itu hanya untuk kasus-kasus tertentu atau kasus yang lebih umum.

3. Indikator Penalaran Matematika

Siswa dikatakan mampu melakukan penalaran matematika bila ia mampu menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika. Dalam kaitan ini, pada penjelasan teknis Peraturan Dirjen Dikdasmen Depdiknas Nomor 506/C/Kep/PP/2004 tanggal 11 November 2004 tentang rapor diuraikan bahwa indikator siswa yang memiliki kemampuan dalam penalaran matematika adalah:

- a. Mengajukan dugaan.
- b. Melakukan manipulasi matematika.
- c. Menarik kesimpulan, menyusun bukti, memberikan alasan atau bukti terhadap kebenaran solusi.
- d. Menarik kesimpulan dari pernyataan.
- e. Memeriksa kesahihan suatu argumen.
- f. Menemukan pola atau sifat dari gejala matematis untuk membuat generalisasi.

Sedangkan menurut Sumarmo, indikator penalaran matematika pada pembelajaran matematika antara lain, siswa dapat:

- a. Menarik kesimpulan logis;
- b. Memberikan penjelasan dengan model, fakta, sifat- sifat dan hubungan;
- c. Memperkirakan jawaban dan proses solusi;

- d. Menggunakan pola dan hubungan untuk menganalisis situasi matematik;
- e. Menyusun dan menguji konjektur;
- f. Merumuskan lawan contoh (*counter example*);
- g. Mengikuti aturan inferensi, memeriksa *validitas argumen*;
- h. Menyusun argumen yang valid; dan
- i. Menyusun pembuktian langsung, tak langsung, dan menggunakan induksi matematika.

Dalam penelitian ini, indikator yang digunakan yaitu 4 indikator dari beberapa indikator yang dinyatakan oleh Peraturan Dirjen Dikdasmen Depdiknas tersebut di atas.

B. Masalah Matematika

Suatu pertanyaan akan merupakan suatu masalah hanya jika seseorang tidak mempunyai aturan/hukum tertentu yang segera dapat dipergunakan untuk menemukan jawaban dari pertanyaan tersebut. Pertanyaan itu dapat juga tersembunyi dalam suatu situasi sehingga situasi itu sendiri perlu mendapat penyelesaian.

Nampak di sini bahwa menyelesaikan masalah itu merupakan aktivitas mental yang tinggi. Perlu diketahui bahwa suatu pertanyaan merupakan masalah bergantung kepada individu dan waktu. Artinya, bahwa suatu pertanyaan merupakan suatu masalah bagi seorang siswa, tetapi mungkin bukan merupakan

suatu masalah bagi siswa yang lain. Pertanyaan yang dihadapkan kepada siswa yang tidak bermakna akan bukan merupakan masalah bagi siswa tersebut. Dengan perkataan lain, pertanyaan yang dihadapkan kepada siswa haruslah dapat diterima oleh siswa tersebut. Jadi pertanyaan itu harus sesuai dengan struktur kognitif siswa.

Demikian juga, pertanyaan merupakan suatu masalah bagi seorang siswa pada suatu saat, tetapi bukan merupakan suatu masalah lagi bagi siswa tersebut pada saat berikutnya, bila siswa tersebut sudah mengetahui cara atau proses mendapatkan penyelesaian masalah tersebut. Jadi, syarat suatu masalah bagi seorang siswa adalah sebagai berikut⁹:

1. Pertanyaan yang dihadapkan kepada seorang siswa haruslah dapat dimengerti oleh siswa tersebut, namun pertanyaan itu harus merupakan tantangan baginya untuk menjawabnya.
2. Pertanyaan tersebut tidak dapat dijawab dengan prosedur rutin yang telah diketahui siswa. Karena itu, faktor waktu untuk menyelesaikan masalah janganlah dipandang sebagai hal yang esensial.

⁹ <http://id.shvoong.com/social-sciences/education/2198813-pengertian-masalah-dalam-pembelajaran-matematika/> 3-10-2012 8.33

Masalah matematika dapat dibedakan dalam dua jenis, yaitu masalah rutin dan masalah nonrutin Sri Wardani (dalam Erniwati)¹⁰:

- a. Masalah rutin dapat dipecahkan dengan mengikuti prosedur yang mungkin sudah pernah dipelajari. Masalah rutin sering disebut sebagai masalah penerjemah karena deskripsi situasi dapat diterjemahkan dari kata-kata menjadi simbol-simbol.
- b. Masalah nonrutin mengarah kepada masalah proses, membutuhkan lebih dari sekedar menerjemahkan masalah menjadi kalimat matematika dan penggunaan prosedur yang sudah diketahui. Masalah nonrutin mengharuskan pemecah masalah untuk membuat metode pemecahan sendiri.

Misalnya kita perhatikan soal berikut. Berapa banyak segmen garis paling banyak yang dapat ditarik untuk menghubungkan titik yang terletak di sebuah lingkaran.

Soal tersebut akan merupakan masalah bagi seorang siswa sekolah menengah, bila siswa itu belum pernah menyelesaikan soal semacam itu. Masalah semacam itu memerlukan penganalisaan dan setelah pola diketahui dapatlah diketemukan formulanya. Selanjutnya formula ini perlu dibuktikan. Tetapi soal semacam itu akan menjadi bukan masalah lagi bagi seorang siswa yang sudah pernah menyelesaikannya.

¹⁰ Erniwati. Upaya Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematika Siswa Kelas VIII SMP Negeri 2 Depok dengan Menggunakan LKS Berbasis PMR Melalui Model Pembelajaran Kooperatif Tipe STAD Pada Pokok Bahasan Panjang Garis Singgung Lingkaran.FMIPA UNY.2011,hal 16

C. Profil Kemampuan Penalaran Matematika Siswa

Profil kemampuan siswa merupakan gambaran tentang kecakapan, kesanggupan, serta kapasitas siswa dalam menyelesaikan soal, tugas, atau masalah yang diberikan kepada siswa.

Yang dimaksud profil kemampuan penalaran matematika siswa dalam penelitian ini adalah gambaran kemampuan penalaran matematika siswa dalam menyelesaikan masalah matematika. Masalah matematika yang digunakan dalam penelitian ini adalah materi persamaan garis lurus kelas VIII.

Kemampuan yang diteliti dalam penelitian ini adalah:

1. Melakukan manipulasi matematika
2. Menarik kesimpulan dari pernyataan
3. Memberikan alasan atau bukti terhadap satu atau beberapa solusi.
4. Memeriksa kesahihan suatu argumen

Berdasarkan indikator penelitian tersebut, maka karakteristik soal matematika yang tergabung dalam kemampuan penalaran matematika adalah sebagai berikut¹¹:

1. Soal yang meminta siswa untuk melakukan manipulasi matematika

Memanipulasi adalah mengatur (mengerjakan) dengan cara yang pandai sehingga tercapai tujuan yang dikehendaki.¹²

¹¹ Achmad Nizar. Jurnal Pendidikan Inovatif Volume 2 Nomor 2. 2007. Hal 75-78

¹² <http://www.artikata.com/arti-339763-manipulasi.html> diakses pada 12 november 2012 pukul 9.43

Karakteristik soal ini memungkinkan siswa melakukan apapun yang menurut siswa perlu yang dapat membantunya mengingat kembali konsep yang telah dimengerti.

Contoh: Siswa diberi PLSV: $n + 5 > -4$, maka siswa mampu memanipulasi variabel n untuk menunjukkan pernyataan yang benar dan pernyataan yang salah.

2. Soal yang mengharuskan siswa menarik kesimpulan dari suatu pernyataan.

Karakteristik soal jenis ini adalah menekankan pada kejelian siswa dalam menentukan kebenaran dari suatu pernyataan yang diberikan.

Contoh: Siswa diberi pernyataan: *“Tepat dua tahun yang lalu umur Amir dua kali umur Dewi. Sekarang umur Amir 8 tahun. Orang tua Dewi mempunyai kebiasaan menimbang berat badan semua anak-anaknya yang masih balita ke Posyandu. Apakah sekarang Dewi masih ditimbang berat badannya di Posyandu?”* Siswa mampu menjawab pertanyaan dengan cara mencari umur Dewi sekarang dan membuat kesimpulan terkait dengan kebiasaan orang tua Dewi.

3. Soal yang mengharuskan siswa memberikan alasan atau bukti terhadap satu atau beberapa solusi..

Karakteristik soal ini setidaknya dapat menggugah siswa untuk menyelesaikan permasalahan dengan model yang dikembangkan siswa sendiri.

Contoh: Siswa mampu menunjukkan lewat penyelidikan (dengan pengukuran sudut melalui busur derajat) bahwa besarnya sudut dalam berseberangan, bertolak belakang, sehadap adalah sama besar, sedang dua sudut dalam sepihak jumlahnya 180 derajat.

4. Soal yang memungkinkan siswa untuk memeriksa kesahihan argumen.

Karakteristik dari soal ini biasanya dimulai dengan menyebutkan jawaban suatu masalah atau pernyataan yang sengaja dibuat salah. Tujuannya hanyalah memancing ketelitian siswa dalam mengecek kesahihan suatu argumen.

Contoh: Siswa mampu menyelidiki benar-tidaknya argumen. Contoh argumen: '*Besar suatu sudut lancip sama dengan selisih dari pelurusnya dengan dua kali penyikunya*'.