

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

A. Proses Kognisi

Kamus Besar Bahasa Indonesia memberikan pengertian kognisi sebagai kegiatan memperoleh pengetahuan atau usaha mengenali sesuatu melalui pengalaman sendiri.¹ Kognisi dipahami sebagai proses mental karena kognisi mencerminkan pemikiran dan tidak dapat diamati secara langsung. Oleh karena itu kognisi tidak dapat diukur secara langsung, namun melalui perilaku yang ditampilkan dan dapat diamati. Misalnya kemampuan anak untuk mengingat angka dari 1-20 atau kemampuan untuk menyelesaikan teka-teki, kemampuan menilai perilaku yang patut dan tidak untuk diimitasi.

Jones memberikan definisi proses kognisi sebagai berikut,

*“Cognition processes are defined as the mental processes of an individual, with particular relation to a view that argues that the mind has internal mental states (such as beliefs, and intentions) and can be understood in term of information processing, especially when a lot of abstraction or concretization is involved, or processes such as involving knowledge, expertise or learning.”*²

Berdasarkan kutipan di atas, proses kognisi merupakan proses mental yang kompleks berkaitan dengan kondisi mental internal yang dapat dipahami menggunakan istilah-istilah pemrosesan informasi. Melakukan tugas kognisi yang melibatkan abstraksi, konkretisasi, pengetahuan, keahlian, atau belajar memungkinkan untuk mempelajari proses kognisi. Dengan demikian, proses kognisi merupakan serangkaian tahapan-tahapan yang terjadi selama proses membangun pengetahuan atau menyelesaikan tugas kognisi.

¹ KBBI, diakses dari <http://kbbi.web.id/kognisi>, pada tanggal 4 Agustus 2016

² Jones, “Cognitive Processes during Problem Solving of middle School Students with different levels of Mathematics Anxiety and Self-Esteem” (Paper Presented at Electronic Theses, Treatises and Disertations, 2006), 17.

Pengertian proses kognisi yang erat kaitannya dengan pemrosesan informasi juga dikemukakan oleh Carroll, Carroll menyatakan bahwa proses kognisi merupakan proses pengoprasian isi pikiran untuk menghasilkan respon.³ Baron dalam Biggs dan Telfer menyatakan bahwa proses kognitif merupakan aktivitas pikiran yang melibatkan penangkapan, representasi, penyimpanan, pemanggilan kembali, dan penggunaan informasi.⁴ Resnick dan Ford juga menyatakan proses kognitif merupakan cara organisme untuk mendapatkan, menyimpan dan mentransformasikan informasi.⁵ Berdasarkan pendapat di atas, peneliti dapat menyimpulkan bahwa untuk membangun pengetahuan atau menyelesaikan suatu masalah melibatkan banyak kognisi seperti keyakinan diri, harapan, perhatian, memori atau aspek kognisi yang lain. Proses kognisi muncul saat membangun pengetahuan atau menyelesaikan suatu masalah matematika.

Proses kognisi menggabungkan antara informasi yang diterima melalui indera tubuh manusia dengan informasi yang telah disimpan di ingatan jangka panjang. Kedua informasi tersebut diolah di ingatan kerja yang berfungsi sebagai tempat pemrosesan informasi. Kapabilitas pengolahan ini dibatasi oleh kapasitas ingatan kerja dan faktor waktu. Proses selanjutnya adalah pelaksanaan tindakan yang telah dipilih. Tindakan dilakukan mencakup proses kognisi dan proses fisik dengan anggota tubuh manusia (jari, tangan, kaki dan suara). Tindakan dapat juga berupa tindakan pasif, yaitu melanjutkan pekerjaan yang telah dilakukan sebelumnya.

Proses kognisi yang dimaksud dalam penelitian ini yaitu tahap-tahap aktivitas mental dalam menyelesaikan suatu tugas kognitif berupa mengkonstruksi konjektur matematika. Mengkonstruksi konjektur matematika merupakan membuat konjektur matematika menggunakan inferensi induksi seperti yang dijelaskan pada bagian 2C dan 2E. Tahap-tahap aktivitas mental dalam mengkonstruksi konjektur meliputi memahami masalah, mengeksplorasi masalah,

³ J.B Carroll, *Human Cognitive Abilities: A Survey of Factor-Analytic Studies* (Cambridge: Cambridge University Press, 1993), 10.

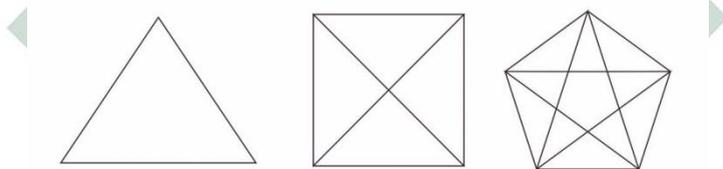
⁴ J.B Biggs dan Telfer, *The Process of Learning* 2nd eds, Newcastle Prentice-Hall, 1987.

⁵ L.B Resnick - W.W Ford, *Psychology of Mathematics for Instruction* (Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1981), 111.

merumuskan konjektur, mengargumentasi konjektur, dan membuktikan konjektur seperti yang dijelaskan pada bagian 2F.

B. Konjektur

Menurut Norton, proses abstraksi dan generalisasi dalam matematika sering melibatkan ide-ide yang awalnya bersifat hipotetik atau dugaan yang disebut konjektur.⁶ Konjektur muncul dari intuisi setelah menyadari adanya hubungan-hubungan yang bersifat matematik selama proses abstraksi dan generalisasi berlangsung. Konjektur-konjektur dapat dikonstruksi berdasarkan objek-objek yang diamati atau masalah yang diberikan serta bantuan dari basis pengetahuan yang relevan yang telah dimiliki sebelumnya. Objek-objek bisa memberikan informasi yang kompleks dan memunculkan dugaan tentang berbagai hal seperti kuantitas, variabel, atau hubungan-hubungan seperti hubungan antar kuantitas atau antar variabel atau antar keduanya. Misalnya tersedia serangkaian objek geometri berupa segi-n beraturan.



Gambar 2.1
Representasi beberapa poligon beraturan beserta diagonalnya

Model matematis dari segi-n beraturan merupakan suatu variabel yang tergantung pada n . Banyak titik, banyak sisi, banyak diagonal, atau banyak daerah di dalam segi-n beraturan menyatakan suatu kuantitas. Hubungan antara banyak titik dengan banyak sisi atau banyak titik dengan banyak diagonal menyatakan suatu hubungan-hubungan. Pernyataan –pernyataan yang dibuat berdasarkan dugaan-dugaan terkait dengan banyak titik atau banyak diagonal atau banyak daerah yang ada di dalam segi-n

⁶ A. Norton, “*Students Conjectures in Geometri*” (paper presented at the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Hiroshima, Jepang), 4.

beraturan merupakan konjektur-konjektur yang dikonstruksi berdasarkan pengamatan terhadap objek-objek tersebut. Salah satu pernyataan yang dapat dibuat misalnya adalah “untuk $n \geq 3$, banyak diagonal pada segi- n beraturan adalah $\frac{1}{2}n(n-3)$ ”. Pernyataan ini umumnya merupakan konjektur bagi sebagian orang yang baru mempelajari poligon beraturan. Akan tetapi, bagi mereka yang telah menguasai materi poligon beraturan, pernyataan tersebut bukanlah suatu konjektur tetapi merupakan pernyataan yang valid.

Konjektur umumnya mempunyai ciri-ciri tertentu. Norton memberikan gambaran tentang konjektur dan ciri-cirinya dengan menyatakan

“... *conjectures are ideas formed by a person (the learner) in experience which satisfy the following properties: the idea is conscious (though not necessarily explicitly stated), uncertain and the conjecturer is concerned about its validity*”.⁷ Ciri penting dalam konjektur sesuai pernyataan Norton adalah kesadaran dan ketidaktentuan. Kesadaran berarti ide-ide yang dibangun diketahui dan dimengerti. Ketidaktentuan berarti ide-ide yang dibangun masih memuat hal-hal yang bisa keliru. Akibatnya konjektur belum memiliki kebenaran yang pasti. Kebenaran atau kesalahan suatu konjektur perlu dibuktikan melalui proses penalaran menggunakan aturan-aturan logis atau menggunakan contoh penyangkal. Konjektur yang telah terbukti kebenarannya menjadi pernyataan yang valid.⁸

Tidak semua konjektur mudah dibuktikan kebenarannya. Banyak konjektur dalam matematika yang kebenarannya belum dapat dibuktikan secara tuntas baik menggunakan penalaran deduktif dengan menggunakan hukum-hukum logika maupun dengan memberikan contoh penyangkal. Konjektur Goldbach merupakan salah satu contoh konjektur yang belum dapat dibuktikan secara lengkap. Goldbach membuat dugaan dengan menyatakan bahwa setiap bilangan bulat yang lebih besar dari 4

⁷ Ibid, halaman 1.

⁸ Julian Hernadi, *Metoda Pembuktian Dalam Matematika* (Ponorogo: UM Ponorogo Press, 2011), 3.

dapat dinyatakan sebagai jumlah dua bilangan prima.⁹ Kesulitan mengidentifikasi bilangan-bilangan besar sebagai bilangan prima merupakan salah satu kendala dalam membuktikan konjektur Goldbach. Dalam penelitian ini, agar peneliti dapat melihat bahwa pernyataan yang dibuat subjek tepat. Peneliti membuat indikator konjektur sebagai berikut:

Tabel 2.1
Indikator Konjektur

No	Indikator
1	Sebuah kalimat pernyataan yang dipradugakan sebagai hal yang nyata, benar atau asli, sebagian besarnya didasarkan pada landasan yang tidak konklusif (tanpa kesimpulan)
2	Berbentuk kalimat logika, dapat berupa implikasi, biimplikasi, negasi atau berupa kalimat berkuantor. Operator logika seperti (dan, atau, tidak) sering digunakan dalam pernyataan matematika.
3	Pernyataan matematika yang bernilai benar berdasarkan observasi, investigasi, eksplorasi, eksperimen dan inkuiri

C. Konjektur Matematika dan Peranannya Dalam Matematika dan Pembelajaran Matematika

Kamus online Webster mendefinisikan konjektur sebagai berikut, “*a proposition (as in mathematics) before it has been proved or disproved*”.¹⁰ Hal ini berarti bahwa konjektur merupakan proposisi yang belum terbukti kebenarannya sehingga belum mencapai nilai kebenaran yang pasti. Dengan demikian, konjektur secara singkat dapat disamakan dengan dugaan atau hipotesis. Akan tetapi, para ahli mendefinisikan konjektur secara beragam.

⁹ Konjektur Goldbach, diakses dari https://id.wikipedia.org/wiki/Konjektur_Goldbach, pada tanggal 8 Agustus 2016.

¹⁰ Webster, diakses dari <http://www.webster-dictionary.org/definition/Conjectures>, pada tanggal 4 Agustus 2016.

Ponte, et. Al menyatakan bahwa “A mathematical conjecture is a statement that answers a certain question and that is considered to be true”.¹¹ Pedemonte memberikan definisi konjektur dengan menyatakan, “conjecture is a statement strictly is potentially true because some conceptions allow the construction of an argumentation that justifies it”.¹² Norton menetapkan konjektur dengan menyatakan,

“conjectures are ideas formed by a person (the learner) in experience which satisfy the following properties: the idea is conscious (throughout not necessarily explicitly stated), uncertain and the conjecture is concerned about its validity”.¹³

Ketiga definisi konjektur yang diberikan oleh Ponte, Pedemonte, dan Norton menggambarkan hal yang sama dengan penekanan dengan yang berbeda. Ponte menekankan bahwa konjektur sebagai suatu pernyataan matematika yang menjawab suatu pertanyaan tertentu dimana jawaban tersebut dianggap benar. Pedemonte menekankan bahwa konjektur sebagai pertanyaan yang langsung berhubungan dengan argumentasi dan sekumpulan konsep. Penekanan ini lebih mengarah kepada tindak lanjut dari konjektur yang memerlukan pembuktian. Norton menekankan seorang dapat mengkonstruksi konjektur berdasarkan pengalaman belajarnya.

Menurut Norton, konjektur dikonstruksi oleh seseorang berdasarkan pengalamannya dan sifat konjektur berkaitan dengan kesadaran dan ketidaktentuan. Kesadaran berarti ide-ide yang dibangun diketahui dan dimengerti. Ketidaktentuan berarti ide-ide yang dibangun masih memuat hal-hal yang bisa keliru atau memuat ketidakpastian. Pembuat konjektur memperhatikan validitas pernyataannya. Validitas berarti ide-ide yang dibangun sesuai dengan pengalaman dan informasi yang tersedia. Akibatnya, konjektur belum memiliki nilai kebenaran yang pasti. Kebenaran

¹¹ J.P Ponte – C. Brunheira - L. Oliveira – dan Varandas. “Investigating Mathematical Investigation”. In P.Abrantes, J. Porfiriodan M. Baia (Eds). *Les Interactions Dams La Classe De Mathematiques* (Setubal: Ese de Setubal, 1998), 4.

¹² Pedemonte, “some cognitive Aspects of the Relationship between Argumentation and Proof in Mathematics”. (paper presented of the 25th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education, Netherland, 2001), 2.

¹³ A. Norton, Op. Cit., hal 1.

suatu konjektur perlu dibuktikan agar menjadi pernyataan yang valid.

Kebenaran atau kesalahan suatu konjektur dibuktikan melalui proses penalaran menggunakan aturan-aturan logis atau menggunakan contoh-contoh penyangkal. Konjektur yang telah terbukti kebenarannya menjadi pernyataan yang valid.¹⁴ Pembuktian konjektur menjadi pernyataan yang valid melalui proses penalaran menggunakan aturan-aturan logis atau menggunakan contoh-contoh penyangkal yang umum dilakukan oleh para matematikawan. Akan tetapi, pembuktian konjektur oleh orang yang tidak ahli matematika seperti siswa umumnya tidak demikian.

Fiallo and Gutierrez secara umum membedakan bukti-bukti yang diberikan oleh siswa menjadi dua jenis yaitu bukti-bukti empirik (*empirical proofs*) dan bukti-bukti deduktif (*deductive proofs*). Bukti-bukti empirik dibedakan menjadi tiga jenis yaitu bukti-bukti empirik naïve (*naïve empirical proofs*), bukti-bukti eksperimen krusial (*crucial experiment proofs*), dan bukti contoh generik (*generic example proofs*) sedangkan bukti deduktif dibedakan menjadi dua jenis yaitu bukti-bukti gagasan eksperimen (*thought experiment proofs*) dan bukti deduksi formal (*formal deduction proofs*). Bukti-bukti dikatakan sebagai bukti-bukti empirik naïve bila suatu konjektur dibuktikan dengan menunjukkan kebenarannya pada contoh-contoh yang dipilih tanpa menetapkan kriteria tertentu. Bukti-bukti dikatakan bukti-bukti eksperimen krusial bila suatu konjektur dibuktikan dengan menunjukkan kebenarannya pada contoh-contoh yang dipilih sesuai kriteria tertentu. Bukti-bukti dikatakan bukti-bukti contoh generik bila bukti-bukti didasarkan pada suatu contoh tertentu sebagai karakteristik yang merepresentasikan kelas-kelasnya. Bukti-bukti dikatakan sebagai bukti-bukti gagasan eksperimen bila suatu contoh tertentu digunakan untuk mengorganisasi bukti. Bukti-bukti dikatakan bukti-bukti deduksi formal bila pembuktian tidak berdasarkan suatu contoh tertentu.

¹⁴ Julan Hernadi, Op. Cit., hal 3.

Healy dan Hoyles menyatakan ada empat cara yang umum digunakan oleh siswa untuk menunjukkan kebenaran suatu konjektur.¹⁵ Keempat cara itu adalah empiris, naratif, visual, dan aljabar. Menunjukkan kebenaran konjektur secara empiris dilakukan dengan mengaji contoh-contoh khusus. Menunjukkan kebenaran konjektur secara naratif dilakukan dengan menjelaskan mengapa sifat-sifat tertentu bernilai benar verbal menggunakan bahasa deduktif. Menunjukkan kebenaran konjektur secara visual dilakukan dengan gambar yang menunjukkan mengapa konjektur bernilai benar untuk kasus umum (kasus generik). Menunjukkan kebenaran konjektur secara aljabar dilakukan dengan pernyataan deduktif formal seperti kesamaan atau persamaan. Cooper, et.al, menyatakan bahwa tiga cara terakhir dari Healy dan Hoyles menunjukkan cara yang lebih formal dibandingkan dengan yang pertama.¹⁶

Fischbein dalam Canadas menganggap konjektur sebagai ungkapan atau ekspresi dari intuisi karena konjektur merupakan ungkapan dari kognisi yang bersifat segera.¹⁷ Hal ini berarti bahwa konjektur memiliki karakteristik bersifat segera. Hartati menyebutkan bahwa karakteristik kognisi yang bersifat segera meliputi (1) *direct and self evidence*, (2) *intrinsic certainly*, (3) *perseverance and coersiveness*, (4) *extrapolativeness*, dan (5) *globality and implicitness*. Sebagai ekspresi segera dari kognisi, konjektur bersifat langsung dan memuat kebenaran intuitif, bersifat kokoh atau stabil, dan mempunyai aspek generalisasi.

Konjektur mempunyai peranan yang sangat vital dalam matematika. Sejarah menunjukkan bahwa konjektur mampu mendorong matematika untuk tumbuh dan berkembang. Banyak teori-teori dalam matematika berkembang dari upaya membuktikan suatu konjektur. Salah satu contohnya adalah konjektur yang

¹⁵ L. Healy dan C. Hoyles, "A Study of Proof Conceptions in Algebra", Journal for Research in Mathematics Education, Vol 31 (May,2000), 400.

¹⁶ J.L. Cooper – C.A. Walkington – C.C Williams – O.A Akinsiku – S.W Kalish- A.B Ellis – E.J Kruth. "Adolescent Reasoning in Mathematics: Exploring Middle School Students Strategic Approaches in Empirical Justification". In L. Carlson – C. Hoelscher – T.F. Shipley (Eds.), *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Cognitive Science Society* (Austin, TX: Cognitive Science Society, 2011), 2189.

¹⁷ M.C Canadas – F. Deulofeu – L. Figueiras – D. Reid – O. Yevdokinov, "The Conjecturing Process: Perspective in Theory and Implication in Practice", *Journal of Teaching and Learning*, 3:1, 62.

dibuat oleh Fermat. Fermat dalam Burger dan Morgan membuat konjektur pada teori bilangan pada tahun 1637 seperti berikut.

“It is impossible to separate a cube into two cubes, or a biquadrate into two biquadrates or generally any power except a square into power with the same exponent. I have discovered a trully wonderous demonstration of this, which this margin is too narrow to contain”.¹⁸

Fermat mengatakan bahwa konjektur tersebut merupakan suatu teorema dan merumuskannya dalam bentuk pernyataan “ untuk sebarang bilangan bulat $N \geq 3$, tidak ada bilangan bulat yang memenuhi $x^N + y^N = z^N$ dengan $xyz \neq 0^n$. Kebenaran konjektur ini hanya dibuktikan oleh Fermat untuk $N = 4$. Para ahli matematika meyakini bahwa Fermat tidak memiliki bukti yang lengkap sehingga selama ratusan tahun pernyataannya dianggap sebagai suatu konjektur. Banyak ahli tertantang untuk membuktikan konjektur Fermat. Sejarah pembuktian konjektur Fermat melahirkan banyak teori baru dalam teori bilangan seperti bilangan prima Spoie Germain dari Sophie Germain, bilangan-bilangan bulat Gauss dan bilangan-bilangan siklotomik dari Lerne dan teori bilangan aljabar dari Kummer. Seiring berjalannya waktu pembuktian konjektur Fermat selain menghasilkan teori baru juga menghasilkan konjektur-konjektur baru.

Di samping dalam matematika, konjektur sangat penting dalam belajar dan pembelajarannya. Dalam dokumen Standar tahun 2000, NCTM memberi penekanan yang tinggi pada pengujian konjektur, perumusan contoh penyangkal, konstruksi dan penilaian terhadap argumen yang valid, dan kemampuan menggunakan ketiga hal sebelumnya dalam konteks pemecahan masalah yang bersifat tidak rutin.¹⁹ Akan tetapi, standart-standart ini gagal mengeksploitasi potensi bukti sebagai alat pembelajaran.²⁰ Alasan ini mendasari NCTM melakukan perubahan pada standart-standart proses matematika. Hasil perubahan ini muncul dalam dokumen

¹⁸E.B Burger – F. Morgan, “Fermat’s Last Theorem, the Four Color Conjecture, and Bill Clinton for April Fools’ Day”, *Proquest Educations Journals*, 104:3 (March, 1997), 246.

¹⁹ NTCM, diakses dari <http://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/>, pada tanggal 5 Agustus 2016.

²⁰ G. Hanna, “Proof, Explanation and Exploration: An Overview”, *Educational Studies in Mathematics*, 44:2, (Januari, 2000): 10.

principles and standarts tahun 2000 yang menegaskan peranan penalaran, bukti, konjektur, dan pemecahan masalah dalam belajar dan pembelajaran matematika. Penalaran, bukti, konjektur, dan pemecahan masalah menjadi bagian terintegrasi dalam standar proses yang dinamakan standar penalaran dan bukti (*reasoning and proof Standart*). Standar penalaran dan bukti tahun 2000 secara tegas menggariskan bahwa siswa dapat (1) memahami Penalaran dan bukti sebagai aspek fundamental dari matematika, (2) merumuskan dan menyelidiki konjektur matematika, (3) mengembangkan dan mengevaluasi argument matematika dan bukti, dan (4) memilih dan menggunakan berbagai jenis penalaran dan metode pembuktian.

Konjektur pada penelitian ini disintesis dari ketiga definisi konjektur yang diberikan oleh Ponte, Podemonte atau Norton. Konjektur matematika merupakan suatu kalimat deklaratif (ide) yang bersifat hipotetik yang dibuat oleh seseorang berdasarkan informasi yang disediakan atau masalah yang diberikan menggunakan pengetahuan yang dimiliki serta berpotensi mempunyai nilai yang benar. Dengan kata lain, konjektur merupakan suatu pernyataan yang langsung berkaitan dengan suatu argumen dan sengkumpulan konsep dimana pernyataan tersebut berpotensi memiliki kebenaran karena beberapa konsep memungkinkan mengkonstruksi argumen yang dapat mendukung pernyataan tersebut.

D. Logika

Kebenaran suatu teori yang dikemukakan setiap ilmuwan, matematikawan, maupun para ahli merupakan hal yang sangat menentukan reputasi mereka. Untuk mendapatkan hal tersebut, mereka akan berusaha untuk mengaitkan suatu fakta atau data dengan fakta atau data lainnya melalui suatu proses penalaran yang sah atau *valid*. Sebagai akibatnya, logika merupakan ilmu yang sangat penting dipelajari. Di dalam mata pelajaran matematika maupun IPA, aplikasi logika seringkali ditemukan meskipun tidak secara formal.

Secara etimologis, logika berasal dari kata Yunani '*logos*' yang berarti kata, ucapan, pikiran secara utuh, atau bisa juga berarti ilmu pengetahuan. Dalam arti luas, logika adalah suatu cabang ilmu yang mengkaji penurunan-penurunan kesimpulan yang sah

(valid, *correct*) dan yang tidak sah (tidak valid, *incorrect*). Proses berpikir yang terjadi di saat menurunkan atau menarik kesimpulan dari pernyataan-pernyataan yang diketahui benar atau dianggap benar itu sering juga disebut dengan penalaran (*reasoning*).

Pengembangan penalaran logis sangat terkait dengan pemahaman siswa mengenai kata-kata penting tertentu, seperti: *semua, beberapa, tidak, dan, atau, dan jika*. Kegiatan penyusunan dan pengelompokan yang *konkret* dapat menjadi tak berarti dalam membantu siswa mengkonstruksi pemahaman mengenai istilah-istilah seperti itu.²¹

Prinsip logika didasarkan atas bisa tidaknya diterima oleh akal. Valid atau tidak validnya sebuah pernyataan akan diproses oleh logis, bukan saja didasarkan pada isi permasalahan yang dipertimbangkan. Tentu bisa disepakati bahwasanya logika ini menjadi sarana untuk menganalisa sebuah pernyataan. Keterkaitan antara kesimpulan, bukti yang ada (sering di sebut premis) menjadi dasar dasar penting dalam menggunakan logika. Proses penggunaan nalar akan membutuhkan premis premis atau bukti awal untuk menyelesaikan sebuah argumen yang ada.

Dalam hal proses dan berdasarkan keadaan premis yang telah ada, maka penggolongan logika ini akan dipartisi menjadi dua bagian. Pertama itu logika deduktif. Penggunaan logika deduktif ini dimana nilai validitas suatu pernyataan bukan berupa benar atau salah. Validitas dinilai berupa efek konsekuensi dari setiap bukti (premis) yang telah ada. Jadi dalam hal ini hasil penalaran akan terimbas dari evaluasi dari premis yang telah diberikan. Yang kedua adalah penalaran induktif. Penarikan kesimpulan di sini berdasarkan pada fakta fakta unik dari premis untuk mendapatkan sebuah kesimpulan yang umum.

E. Inferensi: Deduksi, Abduksi, dan Induksi

Konjektur matematika dikonstruksi dari proses inferensi yaitu proses penarikan kesimpulan dengan menggunakan hukum-hukum logika dimana kesimpulan ditarik dari premis-premis yang mendahuluinya. Menurut Peirce dalam Ferrando, inferensi secara

²¹Nanang Priatna. 2008. Penalaran Matematika. Di akses dari http://file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/JUR._PEND._MATEMATIKA/196303311988031-NANANG_PRIATNA/Penalaran_Matematika.pdf, pada tanggal 4 April 2016

garis besar dibedakan menjadi dua, yaitu inferensi yang bersifat eksplikatif (analogi atau deduktif) dan inferensi yang bersifat ampliatif (sintetik). Perbedaan kedua inferensi ini terletak pada bagaimana kesimpulan ditarik dari premis-premis yang mendahuluinya. Hal ini sesuai dengan kutipan berikut. “*In explicative inference the conclusion necessarily follows from the premises, while in the ampliative inference the conclusion does not necessarily follow from the premises*”²² pada inferensi yang bersifat eksplikatif, kesimpulan perlu/mesti mengikuti premis-premis yang mendahului sedangkan pada inferensi yang bersifat ampliatif, kesimpulan tidak perlu mengikuti premis-premis yang mendahului. Inferensi yang bersifat ampliatif dapat dibedakan menjadi dua, yaitu abduksi dan induksi. Dengan demikian, inferensi dibedakan menjadi deduksi, abduksi, dan induksi. Terdapat banyak cara penarikan kesimpulan, sesuai dengan penelitian ini untuk menyelesaikan masalah generalisasi pola secara matematis, menggunakan tiga jenis penarikan kesimpulan yakni logika *induktif* (induksi), logika *deduktif* (deduksi) dan logika *abduktif* (abduksi).

Logika induksi merupakan inferensi untuk menghasilkan proposisi berdasarkan pengalaman atau memformulasikan pernyataan-pernyataan sesuai fenomena. Pola inferensi induksi adalah sebagai berikut.

Premis 1 : $P_1 \in P, P_2 \in P, \dots, P_{n-1} \in P$ untuk n bilangan asli

Premis 2 : $P_n \in P$

Kesimpulan : $P_{n+1} \in P$

Contoh penarikan kesimpulan dengan menggunakan inferensi induksi adalah sebagai berikut.

Premis 1 : Dari dulu sampai kemarin, matahari terbenam pada sore hari di barat.

Premis 2 : Hari ini matahari terbenam pada sore hari di barat.

Kesimpulan : Besok matahari juga akan terbenam pada sore hari di barat.

²² E. Ferrando, Doctoral Dissertation : “*Abductive Processes in Conjecturing and Proving*”, (West Lafayette: Purdue University, 2005), 6.

Kebenaran pada induksi tidak bersifat konklusif karena selalu terdapat peluang untuk menyangkal kesimpulan yang telah dibuat bilamana premis lain muncul sebagai akibat adanya fenomena baru yang tidak teramati sebelumnya.²³ Sun dan Pan memberi contoh klasik terkait dengan hal ini. Penemuan angsa hitam di Australia menyangkal kesimpulan yang telah dibuat sebelumnya bahwa semua angsa berwarna putih. Keyakinan bahwa semua angsa berwarna putih bertahan cukup lama sebelum penemuan angsa hitam di Australia.

Deduksi merupakan inferensi dari bentuk umum ke bentuk khusus yang kesimpulannya mesti mengikuti premis-premis yang ditetapkan. Kesimpulan pada deduksi merupakan konsekuensi logis dari premis-premisnya artinya bila premis-premisnya benar maka simpulannya tidak mungkin salah. Bentuk klasik dari deduksi adalah modus ponens. Pola inferensi menggunakan modus ponens adalah sebagai berikut:

Premis 1 : $\forall x, P(x)$.

Premis 2 : $a = x$.

Kesimpulan : $P(a)$.

Premis-premis pada modus ponens umumnya berbentuk pernyataan berkuantor seperti terlihat pada bentuk di atas. Premis 1 menyatakan bahwa untuk setiap x bersifat P . Premis 2 menyatakan bahwa a adalah x . Kesimpulannya adalah a pasti bersifat P . Penggunaan modus ponens dengan pola di atas terlihat pada contoh berikut.

Premis 1 : Semua makhluk hidup pasti bernafas.

Premis 2 : manusia adalah makhluk hidup.

Kesimpulan : Manusia pasti bernafas.

Premis pada modus ponens bisa juga berupa pernyataan implikasi yaitu pernyataan yang berbentuk “jika ... maka ...” yang polanya adalah sebagai berikut.²⁴

²³ S. Sun – W. Pan, “The Philosophical Foundations of Prescriptive Statements and Statistical Inference”, *Education Psychol Rev*, 23:5, 208.

²⁴ Ibid, halaman 210.

Premis 1 : Jika p maka q
 Premis 2 : p
 Kesimpulan : q

Contoh deduksi menggunakan modus ponens dengan premis berupa implikasi adalah sebagai berikut.

Premis 1 : Jika p adalah manusia maka p akan mati.
 Premis 2 : Aristoteles adalah manusia
 Kesimpulan : Aristoteles akan mati

Selain berbentuk modus ponens, bentuk klasik yang lain dari deduksi adalah modus tolens.²⁵ Sama seperti pada modus ponens, premis-premis pada modus tolens bisa berupa pernyataan berkuantor atau pernyataan implikasi. Berikut adalah pola modus tolens dengan premisnya berbentuk implikasi.

Premis 1 : Jika p maka q .
 Premis 2 : $\sim q$
 Kesimpulan : $\sim p$

Dimana simbol “ \sim ” menyatakan tidak atau bukan. Berikut adalah contoh deduksi menggunakan modus tolens.

Premis 1 : Jika hari hujan maka tanah basah
 Premis 2 : Tanah tidak basah
 Kesimpulan : Hari tidak hujan

Kesimpulan pada contoh di atas secara deduktif adalah benar.

Ada bentuk inferensi yang menyerupai deduksi yang disebut kesalahan deduksi yang polanya adalah sebagai berikut.

Premis 1 : Jika p maka q .
 Premis 2 : q
 Kesimpulan : p

Inferensi dengan pola ini tidak valid karena premis-premis bisa benar tetapi kesimpulannya salah. Berikut adalah contohnya.

Premis 1 : Jika hari hujan maka tanah basah
 Premis 2 : Tanah basah
 Kesimpulan : Hari hujan

²⁵ Azafilmi – Hakiim & Iqbal - Syaichurrozi. - Prita Issolikha Wijayanti, “Konsep Dasar Berfikir Ilmiah dengan Penalaran Deduktif, Induktif, dan Abduktif”. (Paper presented at Seminar Undip, 2012), 5.

Kesimpulan pada contoh ini tidak valid karena tanah basah tidak menjamin telah terjadi hujan. Tanah basah bisa disebabkan oleh faktor lain seperti banjir atau telah disiram.

Keberadaan beberapa faktor penyebab terhadap suatu sebab (fenomena yang teramati) seperti pada contoh di atas menghasilkan jenis informasi yang dinamakan abduksi. Abduksi merupakan inferensi untuk memberikan argumen atau penjelasan terbaik terhadap suatu fenomena. Pola inferensi abduksi adalah sebagai berikut

Premis 1 : diantara p , p' , dan p'' , p paling mampu menjelaskan q

Premis 2 : q

Kesimpulan : p

Ketepatan penarikan kesimpulan dalam penalaran deduktif bergantung dari tiga hal, yakni *kebenaran premis mayor*, *kebenaran premis minor*, dan *keabsahan pengambilan kesimpulan*.²⁶ Jika salah satu dari ketiga unsur tersebut persyaratannya tidak terpenuhi maka kesimpulan yang ditariknya akan salah. *Matematika* adalah pengetahuan yang disusun secara *deduktif*. Misalnya, $A = B$ dan bila $B = C$ maka $A = C$. Kesimpulan A sama dengan C pada hakekatnya bukan merupakan pengetahuan baru dalam arti yang sebenarnya, melainkan sekedar konsekwensi dari dua pengetahuan yang telah kita ketahui sebelumnya.

Abduktif (abduksi) melakukan penalaran dari sebuah fakta ke aksi atau kondisi yang mengakibatkan fakta tersebut terjadi. Metode ini digunakan untuk menjelaskan kegiatan yang kita amati. Sebagai contoh, misalkan kita mengetahui bahwa seseorang yang bernama Budi selalu mengendarai mobilnya dengan sangat cepat jika sedang terburu-buru. Maka pada saat kita melihat Budi mengendarai mobilnya dengan sangat cepat maka kita berkesimpulan bahwa Budi sedang terburu-buru. Tentunya hal ini belum tentu benar, mungkin saja dia sedang dalam keadaan gawat darurat.²⁷

Metode Abduksi merupakan semua proses yang terdiri dari mencari dan merumuskan hipotesis terjadi dalam pemikiran ilmuwan dan dan berkisar seputar hipotesis dan preses penyimpulan. Tujuan utama ilmu pengetahuan tidak berhenti

²⁶ Ibid, halaman 5.

²⁷ Ibid, halaman 6.

dengan pengumpulan data, melainkan lebih dari itu coba mencarikan dan menemukan penjelasan atau eksplanasi atas data. Ilmuwan tidak pernah puas hanya dengan menerima data begitu saja dan tidak merupakan sumber satu-satunya bagi pengetahuan manusia. Ilmu pengetahuan merupakan suatu proses hidup yang dijalani oleh ilmuwan dalam menemukan hipotesis untuk menjelaskan fenomena atau data.²⁸

F. Tahap-tahap Mengonstruksi Konjektur Matematika

Mengonstruksi konjektur matematika merupakan salah satu cara dalam mengonstruksi pengetahuan matematika.²⁹ Konjektur dapat dikonstruksi dari informasi yang disediakan atau masalah yang diberikan serta dukungan pengetahuan awal yang dimiliki sebelumnya. Kompleksitas pernyataan konjektur mencerminkan kompleksitas struktur kognitif yang mendasarinya. Kompleksitas struktur kognitif berkaitan erat dengan pengalaman berinteraksi dengan lingkungan sebelumnya. Hal ini berarti bahwa pengetahuan-pengetahuan matematika yang diperoleh dari interaksi dengan objek-objek matematika seperti definisi, rumus, representasi grafik, diagram, gambar bangun, atau teorema yang telah pernah dilakukan akan menentukan bagaimana konjektur matematika yang dihasilkannya. Semakin kompleks konjektur matematika yang dibangun maka semakin kompleks struktur kognitif yang dimiliki oleh yang mengonstruksinya.

Pengetahuan matematika yang tersimpan dalam memori segera dapat diakses dan diaktifkan saat siswa diberi stimulus berupa informasi atau masalah yang berkaitan dengan pengetahuan tersebut. Pengetahuan matematika yang tersimpan dalam memori memungkinkan seseorang segera memberikan respon bila ada tantangan untuk menggunakan pengetahuan tersebut. Hal ini mendorong intuisi agar bekerja. Dengan intuisi, segera dapat dicerna tentang berbagai keadaan informasi yang berfungsi sebagai stimulus seperti apakah informasi masuk akal, mengandung anomali, atau kurang lengkap. Bahkan, intuisi bisa memberikan gambaran kemana arah perluasan informasi dapat dilakukan.

²⁸ Paulinus Yanto—Eron - Johanis Vian M. V. Lakesubun, “*Metode Abduksi Deduksi dan Induksi*”, (Paper presented at Seminar Sanata Dharma, Yogyakarta, 2015), 2.

²⁹ Calder, N, et.al. “Forming Conjectures Within a Spreadsheet Environment”, *Mathematics Education Research Journal*, 18:3, (April, 2006), 105.

Mengkonstruksi konjektur dalam matematika dapat dilakukan selama proses pembelajaran berlangsung melalui aktivitas-aktivitas yang dirancang untuk tujuan investigasi. Investigasi matematika dimulai dengan suatu situasi yang harus dipahami atau sekumpulan data yang harus diorganisasi dan dijelaskan dalam istilah-istilah yang umum dalam matematika. Tahap-tahap dalam investigasi matematika melibatkan konjektur.³⁰ Tiga tahap dalam investigasi matematika menurut Ponte, et.al adalah: (1) mengajukan pertanyaan dan menghasilkan konjektur, (2) menguji dan memperbaiki konjektur, dan (3) memberi alasan dan membuktikan konjektur³¹. Ponte menegaskan bahwa mengonstruksi konjektur bukan merupakan aktivitas instan tetapi merupakan proses berulang dan menyerupai metode ilmiah. Pada tahap-tahap mengonstruksi konjektur ini, peneliti mengadaptasi dari proposal tesis I Wayan Puja Astawa yang berjudul “Proses kognisi mahasiswa calon guru dalam mengonstruksi konjektur matematika ditinjau dari kemampuan matematika dan gender” sebagai berikut:³²

³⁰ Ponte, J. P., et.al., *Investigating Mathematical Investigaton*. In P. Abrantes, J. Porfirio, and M. Baia (Eds.) *Les interactions dans la classe de mathematiques: Proceedings of the CIEAEM 49*. Setubal : Ese de Setubal. (1998). 3-13.

³¹ Ibid, halaman 14

³² I Wayan Puja Astawa, Proposal Disertasi: “*Proses Kognisi Mahasiswa Calon Guru dalam mengonstruksi konjektur matematika ditinjau dari kemampuan matematika dan gender*”,(Surabaya: Pascasarjana UNESA,2013),60.

Tabel 2.2
Proses Kognisi Tahap Mengkonstruksi Konjektur Dan Fokus Kajiannya

No	Tahap Mengkonstruksi Konjektur	Fokus proses kognisi yang dikaji
1	Memahami Masalah	Bagaimana proses kognisi siswa SMA dalam memahami masalah yang meliputi proses mengetahui apa yang dicari dan apa yang ditanyakan.
2	Mengeksplorasi Masalah	Bagaimana proses kognisi SMA dalam mengeksplorasi masalah, yang meliputi proses menerjemahkan masalah dan memanipulasi situasi..
3	Merumuskan Konjektur	Bagaimana proses kognisi siswa SMA dalam merumuskan konjektur, yang meliputi proses menuliskan kalimat-kalimat konjektur, dan pertimbangan-pertimbangan yang digunakan.
4	Mengargumentasi Konjektur	Bagaimana proses kognisi siswa SMA dalam mengargumentasi konjektur, yaitu proses memvalidasi (memberi alasan) konjektur.
5	Membuktikan Konjektur	Bagaimana proses kognisi siswa SMA dalam membuktikan konjektur, yaitu proses memilih dan menyusun bukti konjektur.

G. Generalisasi Pola dalam Matematika

Generalisasi dalam arti secara bahasa adalah memperumum. Wikipedia Indonesia menerangkan bahwa generalisasi adalah proses penalaran yang bertolak dari fenomena individual menuju kesimpulan umum. Dalam Mulligan&Mitchelmore, pola matematika dapat digambarkan sebagai keteraturan yang dapat diprediksi, biasanya melibatkan numerik, spasial, atau hubungan logis.

Jadi generalisasi pola matematika adalah suatu proses penalaran yang bertolak dari suatu pola menuju suatu bentuk umum.³³ Dalam hal ini lebih dikhususkan mengenai proses merumuskan bentuk umum suatu pola. Pola adalah cara terbaik untuk mengajak siswa mengeksplor ide-ide penting dalam pembelajaran aljabar sebagai sebuah dugaan dan generalisasi. NCTM merekomendasikan bahwa siswa berpartisipasi dalam kegiatan pola dari usia muda, dengan harapan mereka akan dapat (1) Membuat generalisasi tentang pola geometris dan numerik, (2) Menyediakan pembenaran untuk dugaan mereka, (3) Mewakili pola dan fungsi dalam kata-kata, tabel, dan grafik.³⁴ Pendekatan metodologi berbasis pola menantang siswa untuk menggunakan keterampilan berpikir tingkat tinggi, penekanan eksplorasi, investigasi, dugaan dan generalisasi. Mencari pola adalah bagian dari pemecahan masalah yang membutuhkan strategi kuat.

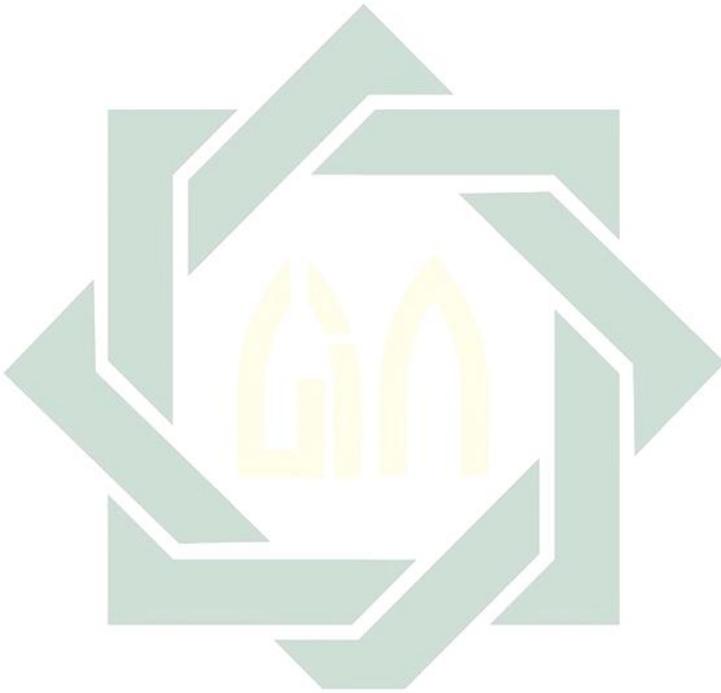
Siswa menggunakan aturan generalisasi dari pola yang mereka miliki menggunakan cara yang mereka rasa paling menyenangkan dan nyaman untuk mereka. dengan menggunakan katakata, diagram, simbol yang mereka buat sendiri, atau dalam sebuah persamaan. Aspek yang penting dalam langkah ini adalah bagaimana siswa dapat mendeskripsikan generalisasi mereka dihubungkan dengan situasi nyata. Melalui generalisasi pola, siswa dapat memahami kekuatan dari penalaran aljabar.

Aljabar adalah generalisasi dari ide-ide aritmatika dimana nilai dan variabel yang tidak diketahui dapat ditemukan dengan pemecahkan masalah. Kaput dalam Van De Walle mendeskripsikan lima bentuk penalaran aljabar, yaitu (1)

³³ J.Mulligan – Mitchelmore – M, “Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical”, *Mathematic Education Research Journal*. 21:2 (May, 2009), 35.

³⁴ NTCM, Op.Cit.

Generalisasi dari aritmatika dan dari pola pada semua cabang matematika, (2) Penggunaan simbol, (3) Pembelajaran tentang struktur dalam sistem bilangan, (4) Pembelajaran tentang pola dan fungsi, (5) Proses pemodelan matematika yang mengintegrasikan keempat hal sebelumnya.³⁵



³⁵ Van De Walle - John A. Elementary and middle school mathematics. USA: Pearson Education. (2007). 253.