# BAB II
# KAJIAN PUSTAKA

## A. Berpikir

Berpikir merupakan aktivitas mental untuk mengolah pengetahuan atau menyusun ulang informasi dari lingkungan. Berpikir juga merupakan proses kognitif yang digunakan seseorang untuk menyelesaikan permasalahan. Santrock mendefinisikan berpikir sebagai manipulasi atau mengolah dan mentransformasi informasi dalam memori.[1] Sedangkan menurut Arends mendefinisikan berfikir sebagai proses yang melibatkan operasi mental, seperti induksi, deduksi, klasifikasi, dan penalaran.[2] Solso juga menjelaskan tentang definisi berpikir sebagai berikut:

> *Thinking is a process by which a new mental representation is formed through the transformation of information by complex interaction of the mental attributes of judging, abstracting, reasoning, imagining and problem solving.*[3]

Solso mendefinisikan berpikir merupakan proses yang menghasilkan representasi mental baru melalui transformasi informasi yang melibatkan interaksi secara kompleks antara atribut-atribut mental seperti penilaian, abtraksi, penalaran, imajinasi, dan pemecahan masalah. Dapat dikatakan, bahwa berpikir merupakan proses mengolah informasi yang melibatkan aktivitas mental seperti penilaian, abstraksi, penalaran, imajinasi, dan pemecahan masalah. Berdasarkan beberapa definisi tentang berpikir, dapat disimpulkan bahwa berpikir dalam penelitian ini adalah aktivitas kognitif siswa dalam mengolah, memproses informasi, dan menghubungkan ide-ide dengan menggunakan operasi mental yaitu bernalar, berimajinasi, dan abstraksi.

---

[1] Santrock,*A Topical Approach to Life-Span Development Edition*., (New York: Mc Graw Hill Companies)
[2] Arends. *Learning to Teach Fifth Edition*. Singapure: Mc Graw hill Higher Education
[3] Robert L, Solso. *Cognitive Psychology*. (MA: Allyn and Bacon,1995),408

## B. Bukti Geometri

Bukti adalah sesuatu yang menyatakan kebenaran suatu peristiwa.[4] Bukti di dalam matematika berbeda dengan bukti yang dikenal di dalam disiplin ilmu yang lain. Bukti, secara etimologis, mengandung beragam makna yang bersifat kontekstual bergantung pada bidang ilmu di mana bukti tersebut dibicarakan. Bukti bagi hakim dapat berimplikasi pada sesuatu yang tidak diragukan lagi. Bukti bagi statistikawan berarti terjadi dengan probabilitas tertentu, dan bagi ilmuwan bukti adalah hasil dari suatu eksperimen empiris.[5] Namun, di kalangan matematikawan, bukti memiliki peran penting yakni sebagai suatu metode meyakinkan yang digunakan untuk menguji pengetahuan dan sangat berbeda dengan cara induksi di dalam kegiatan-kegiatan empiris.[6] Karakteristik bukti yang demikian menjadi salah satu alasan mengapa matematika secara tradisional dipandang sangat berbeda dengan ilmu pengetahuan alam (sains) yang berlandaskan metode induktif. Tetapi pada dasarnya, bukti atau membuktikan berarti mereproduksi suatu urutan deduksi untuk mengembangkan suatu hasil yang penting.[7]

Konsep tentang bukti sesungguhnya sangat mendasar di dalam matematika.[8] Bukti dianggap sebagai bagian fundamental kegiatan matematika bahkan sejak zaman matematika kuno.[9] Bukti juga menjadi pembeda matematika dari semua bidang kegiatan lain umat manusia.[10] Keunikan sifat bukti matematika melekatkan status yang unik pula kepada matematika itu sendiri.[11] Untuk itu, diperlukan suatu perhatian yang memadai terhadap cara mengkondisikan mahasiswa di dalam budaya membuktikan dan pada saat yang sama, gagasan dan pandangan mereka tentang bukti sebaiknya diperhatikan.

---

[4] http://kbbi.web.id/bukti diakses pada tanggal 10 April 2016.
[5] D.O.Tall, "The Nature of Mathematical Proof. *Mathematics Teaching," 127*, 1989, halaman 28-32.
[6] C.Hoyles,"The Curricular Shaping of Students' Approaches to Proof. *For the Learning of Mathematics," 17*(1),1997, 7-16.
[7] Ibid, halaman 29.
[8] Ibid, halaman 10.
[9] J.K. Lee, "Philosophical Perspective on Proof in Mathematics Education.",2002 *16*.
[10] D.Reid,."*Proof, Proofs, Proving and Probing: Research Related to Proof*."2001
[11] G Hanna,. "Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics,"*2000, *44*, 5-23.

Reid mengklasifikasikan beberapa istilah teknis yang berkenaan dengan gagasan bukti yang banyak digunakan dalam penelitian pendidikan matematika. Ada empat istilah yang diajukannya yaitu: konsep bukti, bukti, membuktikan dan pemeriksaan. Konsep bukti mengacu pada keyakinan bahwa bukti mengarahkan kita kepada ketentuan yang pasti. Sebuah bukti memberi atribut kesahihan universal yang bersifat *a priori* kepada pernyataan matematis yang dibuktikan. Bukti pada dasarnya adalah rangkaian tulisan yang dipublikasikan sesuai dengan harapan para matematikawan. Sementara itu, membuktikan berarti bernalar secara deduktif dan pemeriksaan mengacu pada kegiatan penyelidikan di dalam matematika yang bersifat empiris semu.

Istilah bukti mengacu pada suatu argumen deduktif yang menunjukkan mengapa suatu pernyataan benar dengan menerapkan hasil matematis yang lainnya dan/atau pemahaman yang lain ke dalam struktur matematis yang terbentuk di dalam pernyataan itu.[12] Lebih lanjut, Reid memperkenalkan tiga jenis bukti berdasarkan tingkat formalitasnya, yaitu: bukti informal, bukti kurang formal dan bukti formal.[13] Ketiga jenis ini diajukan untuk dapat membedakan bukti sebagai suatu konsep yang digunakan dalam ranah matematika dengan bukti yang dikenal di dalam kehidupan sehari-hari. Bukti formal adalah suatu bukti yang mengikuti bentuk tertentu dan/atau menggunakan bahasa yang khusus dengan gaya yang bersifat ritual. Meskipun belum ada pembakuan dari bentuk yang dianggap memenuhi syarat sebagai bukti formal, tetapi suatu bukti formal memenuhi kaidah keketatan, ketelitian dan ketepatan yang sangat kuat.

Bukti yang kurang formal adalah bukti yang tidak terstruktur secara ketat, juga cenderung kurang ketat ditinjau dari sudut pandang matematika. Jenis bukti ini digunakan lebih untuk menunjukkan kebenaran premis-premis yang dikembangkan untuk kasus-kasus yang relevan, sedangkan bukti informal adalah istilah yang digunakan untuk argumen yang sama sekali tidak memenuhi kriteria sebuah bukti. Berdasarkan perspektif perkembangan kognitif, Tall menjelaskan representasi bukti yang berkembang dari

[12] E. J. Knuth, a. "Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof."*33*(5),2002, 389.
[13]Ibid, halaman 392.

bukti tindakan, bukti visual, bukti simbolis dan bukti formal. Bukti tindakan adalah istilah yang dikenakan pada bukti yang berada pada level paling bawah (primitif) yang melibatkan penampilan sebuah kegiatan fisik untuk menunjukkan suatu kebenaran. Bukti visual adalah bukti yang melibatkan grafik atau gambar, sedangkan bukti simbolis adalah bukti yang menggunakan manipulasi simbol-simbol aljabar.

Sejalan dengan definisi bukti formal menurut klasifikasi yang dikemukakan oleh Knuth, Tall mendefinisikan bukti formal sebagai bukti yang melibatkan logika deduktif aksiomatis.[14] Para matematikawan profesional mengklasifikasi lain yang dikemukakan oleh Reid membedakan tiga jenis bukti, yaitu: bukti pra-formal, bukti formal dan bukti post formal.[15] Bukti pra-formal adalah bukti yang biasanya ditampilkan di dalam catatan harian dan percakapan sehari-hari yang melibatkan asumsi-asumsi tersembunyi, analogi dan bahasa dan notasi informal. Bukti formal adalah bukti yang biasanya dipresentasikan dalam publikasi ilmiah (misalnya: jurnal), meskipun terkadang bukti-bukti dalam artikel yang dipublikasikan pada dasarnya belumlah betul-betul formal karena keterbatasan ruang yang tersedia. Bagaimanapun, kita harus sadari bahwa formalisasi penuh atau bukti formal yang lengkap jarang dipraktekkan.[16] Sementara itu, bukti post formal adalah bukti yang merepresentasikan analisis meta-matematika tentang sifat-sifat bukti formal.

Proses berpikir siswa SMP mengonstruksi bukti visual/simbolik tersebut sebagai prosep dilakukan dalam tujuh tahap, yaitu: identifikasi, mobilisasi dan organisasi data, pembuatan rencana, aplikasi rencana, pembentukan makna, evaluasi, dan tahap prosep.[17]

## C. Kemampuan Mengonstruk Bukti Geometri

Kemampuan mengkonstruksi bukti adalah kemampuan menyusun suatu bukti pernyataan matematik berdasarkan definisi,

---

[14]D.O.Tall, "*Cognitive Development, Representations, and Proof*." 1995.

[15]D.Reid, "*Proof, Proofs, Proving and Probing: Research Related to Proof*."2001.

[16]R Hersh,."Proving is Convincing and Explaining. *Educational Studies in Mathematics,"*1993. *24*,389-399.

[17]Faaso Ndraha. "Proses berpikir siswa smp mengonstruksi bukti informal geometri sebagai prosep". 2013. Halaman 9.

prinsip, dan teorema serta menuliskannya dalam bentuk pembuktian lengkap (pembuktian langsung atau tak langsung). Pembuktian pada dasarnya adalah membuat serangkaian deduksi dari asumsi (premis atau aksioma) dan hasil-hasil matematika yang sudah ada (lemma atau teorema) untuk memperoleh hasil-hasil penting dari suatu persoalan matematika.[18]

Adapun kemampuan mengkontruksi bukti matematika oleh Sumarmo disajikan pada Tabel 2.1 berikut.

**Tabel 2.1**

**Kemampuan mengonstruk bukti matematika**

**(dari Sumarmo)**

| Variabel | Indikator | Jenis Ukur | Kode |
|---|---|---|---|
| Kemampuan mengonstruk bukti matematika | 1. Mengidentifikasi apa yang menjadi data dari pernyataan | Lisan / Tulis | $M_1$ |
| | 2. Mengidentifikasi apa yang menjadi *conclusion* dari pernyataan | Tulis | $M_2$ |
| | 3. Menyatakan keterkaitan diantara data dengan konklusi dengan menunjukkan suatu *warrant* (aturan) | Lisan / Tulis | $M_3$ |
| | 4. Membuat dugaan mengenai konsep kunci yang menjembatani antara data dan konklusi (konjektur) | Lisan | $M_4$ |
| | 5. Mengetahui aturan-aturan penarikan kesimpulan dari fakta-fakta yang diberikan atau diperoleh secara kritis (kaidah inferensi) | Lisan / Tulis | $M_5$ |

[18] I Made Arnawa. *Mengembangkan Kemampuan Mahasiswa dalam Memvalidasi Bukti pada Aljabar Abstrak melalui Pembelajaran Berdasarkan Teori APOS*. Jurnal Matematika dan Sains, Juni 2009, vol. 14 no. 2, 64

Dalam penelitian ini, indikator kemampuan mengkonstruk bukti geometri disusun dengan modifikasi indikator kemampuan mengkonstruk bukti matematika oleh Sumarmo pada Tabel 2.1 di atas. Ada beberapa indikator yang mendukung kemampuan mengkontruksi bukti. *Pertama,* yaitu mampu mengidentifikasi apa yang menjadi fakta dalam pembuktian geometri. Artinya adalah siswa mengetahui apa saja yang menjadi modal awal untuk membuktikan dengan kaidah pembuktian yang logis matematis. *Kedua,* mampu membuat konjektur sebagai hipotesis dalam pembuktian. Konjektur juga diartikan sebagai membuat dugaan mengenai gagasan utama dalam pembuktian. *Ketiga,* mampu menunjukkan aturan/*warrant* sebagai hal yang menjembatani pernyatan dan kesimpulan. Aturan dalam hal ini yaitu aksioma dan teorema matematika yang sah. *Keempat*, mampu mengidentifikasi apa yang menjadi kesimpulan dalam pembuktian geometri tersebut. Kesimpulan/*conclusion* ini sebagai langkah terakhir dalam pembuktian yang merupakan hasil dari proses pembuktian. *Kelima,* mampu mengetahui aturan-aturan penarikan kesimpulan dari proses pembuktian geometri yang logis. Dengan kata lain, susunan pembuktian geometri dan aturan harus sesuai dan jelas.

## D. Prosep (Proses dan Konsep)

Prosep merupakan campuran proses, konsep, dan simbol yang menyatakan proses dan konsep tersebut. Gray dan Tall menjelaskan bahwa

"*An elementary procept is the amalgam of three components: a process which produces a mathematical object, and a symbol which is used to represent either process or object…... A procept consists of a collection of elementary procepts which have the same object".*[19]

Sebuah prosep dasar adalah campuran dari tiga komponen. Sebuah proses yang menghasilkan objek matematika dan sebuah simbol yang digunakan untuk merepresentasikan sebuah proses atau objek. Prosep memuat suatu koleksi dari prosep dasar

[19]E.Gray, and D.Tall," Duality, Ambiguity and Flexilbility: A Proceptual View of Simple Arithmetics." 1994.Vol 26 (2) hal 115-141.

yang mempunyai objek sama. Sebagai prosep, bukti juga memiliki proses, konsep dan simbol. Berdasarkan pendapat Gray dan Tall, disimpulkan bahwa dengan memandang bukti sebagai prosep terdapat simbol didalamnya. Simbol prosep adalah redaksi teorema yang menyatakan proses dan konsep bukti.[20] Proses bukti adalah prosedur-prosedur yang dinyatakan secara gamblang dan sederhana yang dapat dilakukan dan sukses dalam menyusun bukti, dan konsep bukti adalah makna yang terkandung dalam rangkaian bukti. Secara eksplisit, Gray dan Tall mendefinisikan

"*... a procept to be a combined mental object consisting of both process and concept in which the same symbolization is used to denote both the process and the object which is produced by the process*".[21]

Sebuah prosep menjadi sebuah objek mental yang terkombinasi memuat kedua proses dan konsep dalam penyimbolan sama digunakan untuk menotasikan kedua proses dan objek yang dihasilkan oleh proses. Terdapat empat istilah kunci dalam definisi prosep diatas, yaitu simbol, proses, produk, dan objek. Objek yang dimaksud berupa konsep serupa atau konsep baru. Sebagai contoh penjumlahan enam suku pertama pada deret aritmetika dapat disimbulkan dengan notasi sigma $\sum_{i=1}^{6}(3i+1)$. Dalam notasi tersebut memuat konsep variabel dan konsep penjumlahan dari suku-suku yang berpola, yakni untuk $i=1$ diperoleh suku pertama $3(1)+1=4$, untuk $i=2$ diperoleh suku kedua $3(2)+1=7$, hingga untuk $i=6$ diperoleh suku keenam $3(6)+1=19$. Selanjutnya dengan melakukan proses mensubtitusi variabel dan menjumlahkan didapatkan hasil:

$$\sum_{i=1}^{6}(3i+1) = \big((3\times 1)+1\big) + \big((3\times 2)+1\big) + \big((3\times 3)+1\big) +$$

[20]Erh-Tsung.Chin,"*Mathematical Proof as Formal Procept in Advanced Mathematical Thinking*."2003.

[21]E. Gray and D. Tall,. "*Success and Failure in Mathematics: Procept and Prosedur in Primary Mathematics*."April1992.

$$\left((3 \times 4) + 1\right) + \left((3 \times 5) + 1\right) + \left((3 \times 6) + 1\right)$$

$= 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19$

$= 69$

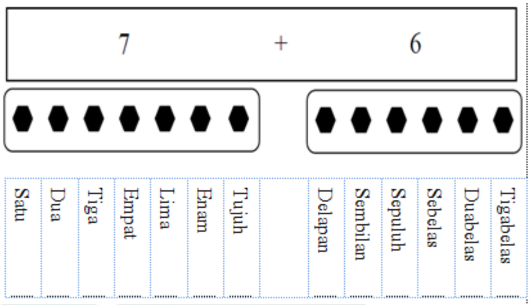
Dengan demikian notasi sigma $\sum_{i=1}^{6}(3i + 1)$ dipandang sebagai sebuah prosep sebab notasi ini merepresentasikan konsep dan sekaligus proses. Konsep yang termuat adalah konsep jumlah suku-suku perpola dan konsep variabel sedangkan proses yang termuat adalah proses subtitusi dan proses menjumlahkan.

1. Prosep matematika dalam sekolah

   Prosep matematik dapat ditemui di semua level sekolah, baik itu sekolah dasar, sekolah menengah pertama, maupun sekolah menengah atas. Gray dan Tall memberikan contoh-contoh prosep yang diajarkan di sekolah dasar, misalnya: prosep bilangan bulat (*whole number*), prosep penjumlahan (*addition*), prosep pengurangan (*subtraction*), prosep perkalian (*multiplication*), prosep pembagian (*division*), dan prosep nilai tempat (*place value*). Sebagai ilustrasi, berikut ini diuraikan secara singkat berkenaan dengan prosep jumlah dan prosep nilai tempat.

   Notasi jumlah adalah "+" dan notasi ini merupakan suatu prosep karena notasi tersebut sekaligus merepresentasikan proses jumlah dan konsep jumlah. Proses penjumlahan melibatkan konsep dua bilangan yang hendak dijumlahkan. Sebagai contoh proses penjumlahan 7 + 6 dapat dilakukan dengan berbagai cara seperti berikut.

   a. Siswa melakukan aktivitas enaktif yakni membilang "satu, dua, tiga, hingga tujuh" dengan menunjuk ketujuh benda satu-persatu dan kemudian dilanjutkannya dengan membilang "delapan, sembilan, sepuluh, sebelas, dua belas, tiga belas" sembari menunjuk keenam benda satu persatu-persatu. Perhatikan ilustrasinya pada Gambar 2.1 berikut.

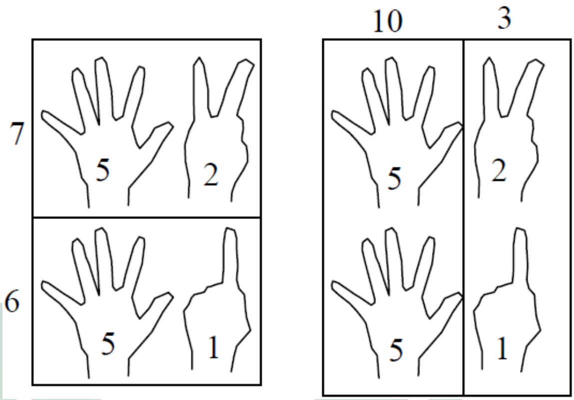



**Gambar 2.1**
**Proses Penjumlahan dengan Cara Hitung Berkelanjutan dalam Prosep Jumlah**

b. Siswa melakukan aktivitas enaktif dengan menggunakan jari-jari tangan miliknya dan milik temannya. Ia melakukan penggabungan dua telapak tangan sehingga jumlahnya 5 + 5 = 10 dan sisanya yang berjumlah 2 + 1 = 3. Dengan demikian didapatkan bahwa 7 + 6 = 10 + 3, penjumlahan setelah tanda sama dengan ini lebih familiar bagi siswa. Perhatikan proses yang dikerjakan siswa pada Gambar 2.2. Secara matematik yang dilakukan siswa adalah 7 + 6 = (5 + 2) + (5 + 1) = 5 + 2 + 5 + 1 = 5 + 5 + 2 + 1 = (5 + 5) + (2 + 1) = 10 + 3 = 13. Siswa tersebut secara tidak sadar telah menggunakan sifat komutatif dan asosiatif dari operasi penjumlahan.

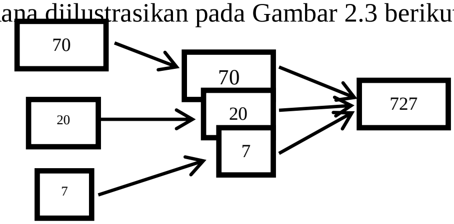
c. Kedua proses enaktif pada prosep jumlah di atas bisa juga dengan menggunakan aktivitas ikonik dengan menggunakan gambar piktorial atau goresan batang lidi, misalnya dan .

d. Siswa juga dapat melakukan proses dalam prosep jumlah secara simbolik dengan menggunakan notasi-notasi matematika atau hanya dengan menggunakan pikirannya saja.




**Gambar 2.2 Proses Penjumlahan dengan Cara Pengelompokkan Lima-Lima dalam Prosep Jumlah**

Nilai tempat menggunakan notasi yang sangat kuat (*powerful*). Dalam bilangan 727 memuat dua angka tujuh yang benar-benar berbeda maknanya, angka tujuh yang pertama menyatakan 7 ratusan sedangkan angka tujuh kedua menyatakan 7 satuan. Dengan menggunakan nilai tempat bilangan 727 dapat dijabarkan menjadi 700 + 20 + 7. Peluruhan dua angka nol pada 700 dan satu angka nol pada 20, serta struktur penulisannya menjadi 727 merupakan hal yang rumit. Beberapa guru memandang peluruhan angka nol tersebut sebagai suatu kesepakatan belaka sehingga menjadi kurang bermakna bagi siswa. Proses peluruhan tiga angka nol dalam penulisan bilangan 727 dapat diperjelas dengan menggunakan media kartu yang digunakan secara dinamis sebagaimana diilustrasikan pada Gambar 2.3 berikut.




**Gambar 2.3. Proses Dinamis atas Prosep Nilai Tempat**

Berdasarkan Gambar 2.3 di atas terdiri dari tiga bagian. Bagian paling kiri menggambarkan tiga kartu bilangan yang berturut-turut bertuliskan lambang bilangan 700, 20, dan 7. Gambar bagian tengah adalah gambar tumpukan ketiga kartu tersebut manakala kartu diurutkan dari paling bawah dengan urutan kartu 700, 20 dan 2. Gambar paling kanan diperoleh setelah ketiga kartu ditumpuk sehingga diperoleh bilangan 727. Proses pembentukan prosep seperti ini dilakukan melalui aktivitivas *hand-on* yakni dengan memakai kartu-kartu secara dinamis dan aktivitas *mind-on* dengan memaknai penggabungan ketiga kartu yang menandai 700 + 20 + 7.

Gray dan Tall menguraikan contoh-contoh prosep pada materi pelajaran matematika di sekolah dasar. Prosep-prosep yang dimaksud di atas diantaranya adalah:

1. Simbol +3 merupakan representasi dari proses "menambah tiga" atau geser kearah kanan sejauh "tiga langkah" pada garis bilangan dan konsep bilangan bulat positif +3.
2. Simbol –4 merupakan representasi dari suatu proses "mengurangi empat" atau geser kearah kiri sejauh "empat langkah" pada garis bilangan dan konsep bilangan bulat negatif –4.

Selain pada level sekolah dasar, Gray dan Tall juga memberikan contoh-contoh prosep yang terkait dengan materi matematika di sekolah menengah. Prosep-prosep tersebut antara lain:

1. Gagasan pecahan, misalkan $\frac{10}{3}$ yang merepresentasikan proses pembagian 10 oleh 3 dan hasil dari proses pembagiannya yang berupa konsep pecahan campuran $3\frac{1}{3}$ .
2. Simbol aljabar dengan memakai variabel, seperti $2x + 1$ yang menyatakan proses "menambahkan dua kali *x* dan satu" dan sekaligus menyatakan hasil dari proses tersebut yakni "$2x + 1$" . Misalkan *x* =3 maka melalui proses algoritma 2 × 3 + 1 diperoleh hasil 7. Dengan demikian "2 × 3 + 1" merupakan suatu contoh proses sekaligus konsep dari bentuk aljabar tersebut.

3. Limit fungsi yang dinotasikan dengan $\lim_{x\to 2} f(x)$ juga merupakan suatu prosep. Dalam prosep ini ada proses nilai *x* mendekati 2 yang menghasilkan nilai yang menuju suatu nilai tertentu. Jadi dalam dalam prosep limit terdapat proses "mendekati" dan konsep nilai dari limit itu sendiri. Misalkan bila dengan $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ dengan $x \to 1$, maka proses pencarian nilai $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x-1}$ dapat dilakukan dengan beberapa cara, misalnya cara pola intuitif, cara grafik, cara subtitusi, dan yang paling sulit adalah dengan memakai definisi limit secara formal. Cara pola intuitif disajikan pada Tabel 2.2 berikut.

**Tabel 2.2**
**Nilai fungsi f(x)**

| *X* | 0,9 | 0,99 | 0,999 | $\rightarrow$ | 1 | $\leftarrow$ | 1,001 | 1,01 | 1,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x^2-1}{x-1}$ | 1,8 | 1,98 | 1,998 | $\rightarrow$ | 2 | $\leftarrow$ | 2,002 | 2,02 | 2,2 |

Pada Tabel 2.2 di atas, tampak adanya hubungan bila nilai *x* menuju 1 maka nilai $\frac{x^2-1}{x-1}$ menuju 2.

4. Turunan dari fungsi *f* di *a* yang dinotasikan dengan $f'(a)$ adalah prosep turunan fungsi *f* di *x* = *a*. Prosep tersebut memuat konsep nilai turunan fungsi dan proses menurunkannya. Misalkan $f(x) = x^2$. Proses yang terjadi pada prosep $f'(3)$ adalah menurunkan turunan dengan menggunakan rumus seperti berikut.

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{3^2 + 6h - 3^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6h}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} 6$$
$$= 6.$$

Dengan demikian dalam prosep $f'(3)$ memuat proses pencarian limit dan konsep nilai limit yang diperolehnya.

2. Prosep geometri dalam sekolah

Prosep (proses dan konsep) tidak hanya ada dalam matematika saja. Salah satu contohnya bisa ditemui dalam geometri, misalnya: Perbandingan trigonometri, misalnya sinus = $\frac{\text{oposit}}{\text{hipotenusa}}$, merepresentasikan baik proses kalkulasi sinus suatu besar sudut tertentu dan hasil dari perhitungan tersebut. Misalkan pada segitiga ABC yang siku-siku di C dengan BC = 3 cm dan BA = 6 cm, diperoleh sin A = 3 : 6 = $\frac{1}{2}$. Dalam hal ini siswa melakukan proses perbandingan sinus dan mendapatkan konsep nilai dari sinus itu sendiri.

## E. Teori Gray-Tall

Gray dan Tall mengembangkan teori prosep berdasarkan teori Piaget.[22] Prosep merupakan campuran proses, konsep, dan simbol yang menyatakan proses dan konsep tersebut. Gray dan Tall menjelaskan bahwa

"*An elementary procept is the amalgam of three components: a process which produces a mathematical object, and a symbol which is used to represent either process or object…… A procept consists of a collection of elementary procepts which have the same object".*[23]

Sebuah prosep dasar adalah campuran dari tiga komponen. Sebuah proses yang menghasilkan objek matematika dan sebuah

---

[22]Davis.G., Gray,E.,Simpson,A.,Tall,D., Thomas,M.2000. "What isthe Object of the Encapsulation of a Process?" http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2000a-objec-encap-jmb.pdf, diakses 10 April 2016.

[23]Gray, Eddie dan Tall, David.1994. "Duality,Ambiguity and Flexibility:A Proceptual View of Simple Arithmetic" .*Journal for Research in Mathematics Education,26(2),115-141.*

simbol yang digunakan untuk merepresantisakan sebuah proses atau objek. Prosep memuat suatu koleksi dari prosep dasar yang mempunyai objek sama. Sebagai prosep, bukti juga memiliki proses, konsep dan simbol.

Berdasarkan pendapat Gray dan Tall dan Erh-Tsung, disimpulkan bahwa dengan memandang bukti sebagai prosep, *simbol* prosep adalah redaksi teorema, yang menyatakan *proses* dan *konsep* bukti.[24] *Proses* bukti adalah prosedur-prosedur yang dinyatakan secara gamblang dan sederhana yang dapat dilakukan dan sukses dalam menyusun bukti, dan *konsep* bukti adalah makna yang terkandung dalam rangkaian bukti.

Gray dan Tall menjelaskan lebih lanjut bahwa ada tiga tahap aktivitas pengonstruksian prosep dalam pikiran yaitu tahap prosedur, proses dan prosep.

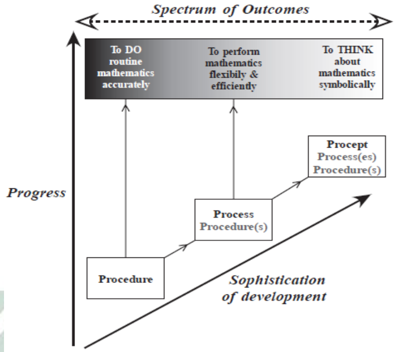
"*.....the meaning of symbols developed through a sequence of activities: (a) procedure, where a finite succession of decisions and actions is built up into a coherent sequence, (b) process, where increasingly efficient ways become available to achieve the same result, now seen as a whole, (c) procept, where the symbols are conceived flexibly as processes to do and concepts to think about.*[25]

Arti dari simbol berkembang melalui sebuah rangkaian aktivitas : a) prosedur, dimana suksesi berhingga dari keputusan dan aksi dibangun kedalam rangkaian yang terkait, b) proses, dimana langkah efisisen berkembang menjadi bisa mencapai hasil yang sama, sekarang dilihat sebagai sebuah keseluruhan, c) prosep, dimana simbol dipahami secara fleksibel sebagai proses untuk melakukan dan konsep untuk memikirkan. Tahap aktivitas proses matematika tersebut bisa dilihat pada Gambar 2.4 berikut ini.

---

[24]Ibid, halaman 117.

[25]David.Tall,"From School to University : The Effects of Learning Styles in the Transition from Elementary to Advanced Mathematical Thinking.",1997, 9-26.




**Gambar 2.4**

**Skema penampilan dalam proses matematika**

## F. Sudut dan Segitiga

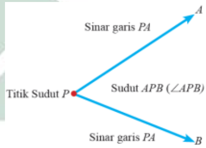
Pada penelitian ini materi yang digunakan adalah materi geometri. Pada materi geometri mencakup pokok bahasan yang sangat banyak. Namun pada penelitian ini lebih di khususkan pada pokok bahasan sudut dan segitiga.

1. Sudut
   a. Menemukan Konsep Sudut
   Perhatikan Gambar 2.5 berikut ini.


**Gambar 2.5 Aktivitas sehari-hari yang membentuk Sudut**

Banyak aktivitas yang kita lakukan dalam kehidupan sehari-hari berkaitan dengan sudut. Misalnya memanah, sudut terbentuk antara tangan dengan badan pemanah. Untuk gambar pemancing, garis bantu sengaja ditambah untuk menunjukkan lebih jelas sudut yang terbentuk antara pancingan dengan bidang datar.

Sudut terbentuk karena dua sinar bertemu pada titik pangkalnya.Secara matematis, hubungan sinar garis dan titik sudut diilustrasikan pada Gambar 2.6 berikut ini.

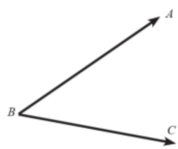



**Gambar 2.6 Sudut yang terbentuk oleh Dua Sinar Garis**

Satuan sudut dinyatakan dalam dua jenis, yaitu derajat ($^o$) dan radian (rad). $\angle APB$ bisa juga disebut $\angle P$. Besar sudut $P$ dilambangkan dengan $m\angle P$. Besar sudut satu putaran penuh yaitu 360 derajat ($360^o$)

b. Penamaan sudut

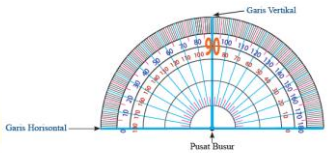
Secara matematis, penamaan sudut diperlukan untuk mempermudah penamaan sudut untuk kajian selanjutnya. Mari kita perhatikan Gambar 2.7 berikut ini.




**Gambar 2.7 Penamaan Sudut *ABC* atau Sudut *CBA***

Dari Gambar 2.7, $\overline{AB}$ dan $\overline{BC}$ disebut kaki sudut. Titik *B* adalah titik sudut. Ada dua hal penting dari Gambar 2.7 di atas yaitu: a) Titik *B* adalah titik sudut *B* seperti pada Gambar 2.6. Ingat, penulisannya selalu menggunakan huruf kapital, b) Sudut yang terbentuk pada gambar diatas dapat juga notasikan dengan $\angle ABC$, $\angle CBA$, atau $\angle B$.

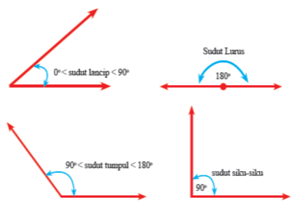
Pada setiap sudut yang terbentuk, harus kita tahu berapa besarnya. Secara manual, kita dapat menggunakan alat ukur sudut yaitu busur derajat. Alat ini dapat membantu kita mengukur suatu sudut yang sudah terbentuk dan membentuk besar sudut yang akan digambar. Adapun alat bantu tersebut dinamakan busur derajat dan disajikan pada Gambar 2.8 berikut ini.




**Gambar 2.8 Busur Derajat**

Busur derajat dapat membantu kita mengukur suatu sudut yang sudah terbentuk dan membentuk besar sudut yang akan digambar. Pusat busur, garis horizontal, dan garis vertikal sangat berperan dalam mengukur besar sudut dan membentuk ukuran sudut.

Perlu kita kenalkan bahwa, terdapat ukuran sudut standar yang perlu kita ketahui, seperti yang disajikan pada Gambar 2.9 di bawah ini.

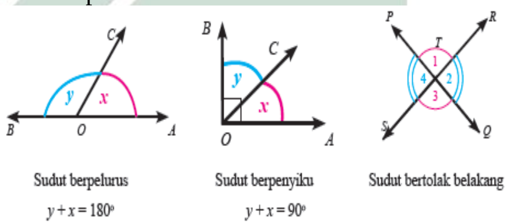



**Gambar 2.9 Sudut lancip, tumpul, siku-siku, dan sudut lurus**

Dari Gambar 2.9 di atas ada beberapa macam sudut yakni sudut lancip, tumpul, siku-siku dan lurus. Adapun jenis-jenis sudut yaitu: 1) sudut siku-siku, besar sudut siku-siku adalah $90^o$, 2) sudut lancip, ukuran sudutnya antara $0^o$ dan $90^o$, 3) sudut tumpul, ukuran sudutnya antara $90^o$ dan $180^o$, 4) sudut lurus, ukuran sudutnya $180^o$, dan 5) sudut reflek, ukuran sudutnya antara $180^o$ dan $360^o$.

c. Memahami hubungan antar sudut

Mari kita perhatikan Gambar 2.10 berikut ini.

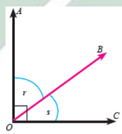



**Gambar 2.10 Hubungan antar Dua Sudut**

Pada Gambar 2.10 terdapat sudut berpelurus, sudut berpenyiku dan sudut bertolak belakang. Adapun paparan pada masing-masing hubungan antar dua sudut sebagai berikut:

a) Sudut Berpelurus dan Sudut Berpenyiku

Perhatikan Gambar 2.11 di bawah ini.

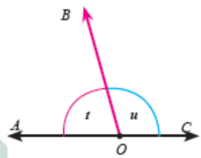



**Gambar 2.11 Sudut Berpenyiku**

Berdasarkan Gambar 2.11 di atas menunjukkan bahwa bahwa $m\angle AOB = r$ dan $m\angle BOC = s$. Kemudian $m\angle AOB + m\angle BOC = 90^o$. Dari penjumlahan kedua sudut tersebut sehingga $m\angle AOB = 90^o - m\angle BOC$ dan $m\angle BOC = 90^o - m\angle AOB$. Hubungan antara

$m\angle BOC$ dan $m\angle AOB$ disebut sudut berpenyiku.

Perhatikan Gambar 2.12 di bawah ini.

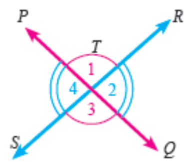



**Gambar 2.12 Sudut Berpelurus**

Berdasarkan Gambar 2.12 di atas menunjukkan bahwa, $\angle AOB = t \; dan \; \angle BOC = u$. Jika sudut-sudut itu dijumlahkan maka $t + u = 180^o$. Sehingga $t = 180^o - u$ dan $u = 180^o - t$. Sudut *AOB* dengan sudut *BOC* disebut sudut berpelurus. Hubungan antar sudut pada Gambar 2.11 dan 2.12 yaitu: 1) sudut berpenyiku, dua sudut dikatakan berpenyiku jika jumlah besar kedua sudut tepat $90^o$, 2) sudut berpelurus, dua sudut dikatakan berpelurus, jika jumlah besar kedua sudut tepat $180^o$.

b) Sudut saling bertolak belakang

Perhatikan Gambar 2.13 berikut ini.

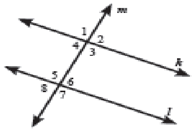



**Gambar 2.13 Dua Garis yang saling Bertolak Belakang**

Garis *RS* dan garis *PQ*, berpotongan di titik *T* seperti pada Gambar 2.13, sehingga membentuk empat sudut, yaitu $\angle T1$, $\angle T2$, $\angle T3$, dan $\angle T4$. Besar Sudut bertolak belakang adalah sama sehingga $m\angle T1 = m\angle T3 = 90^o$ dan $m\angle T2 = m\angle T4 = 90^o$.

c) Hubungan sudut-sudut pada dua garis sejajar

Perhatikan Gambar 2.14 di bawah ini




**Gambar 2.14 Garis *k* dan *l* dipotong Garis *m***

Garis *k* dan garis *l*, dipotong oleh garis-garis *m* pada Gambar 2.14 sehingga membentuk delapan sudut. Sudut-sudut ini mempunyai nama khusus sesuai dengan posisinya. Delapan sudut tersebut dapat dilihat pada Tabel 2.3 di bawah ini.

**Tabel 2.3**

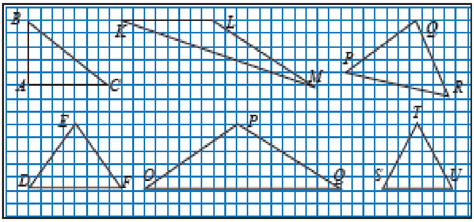
**Nama sudut yang dibentuk oleh dua garis yang sejajar dan dipotong satu garis lurus**

| Nama | Sudut |
|---|---|
| Sudut-sudut luar | $\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$ |
| Sudut-sudut dalam | $\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$ |
| Sudut dalam berseberangan | $\angle 3\ dan\ \angle 5\ , \angle 4\ dan\ \angle 6$ |
| Sudut luar bersebrangan | $\angle 1\ dan\ \angle 7\ , \angle 2\ dan\ \angle 8$ |
| Sudut dalam sepihak | $\angle 3\ dan\ \angle 6\ , \angle 4\ dan\ \angle 5$ |
| Sudut-sudut sehadap | $\angle 1\ dan\ \angle 5\ , \angle 2\ dan\ \angle 6,$ $\angle 3\ dan\ \angle 7\ , \angle 4\ dan\ \angle 8$ |

2. Segitiga

a. Jenis-jenis segitiga

Perhatikan Gambar 2.15 di bawah ini berikut.

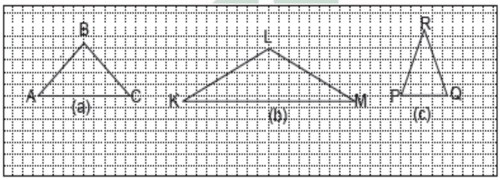



**Gambar 2.15 Berbagai bentuk segitiga**

Dari Gambar 2.15 di atas terdapat berbagai macam jenis segitiga yakni 1) segitiga yang panjang sisi-sisinya tidak sama panjang disebut segitiga sebarang, 2) segitiga yang salah satu besar sudutnya 90° disebut segitiga siku-siku, 3) segitiga yang ketiga sisinya sama panjang disebut segitiga samasisi, 4) segitiga yang dua sisinya sama panjang disebut segitiga samakaki, 5) segitiga yang salah satu sudutnya tumpul disebut segitiga tumpul, dan 6) segitiga yang ketiga sudutnya lancip disebut segitiga lancip.

b. Sifat-sifat segitiga

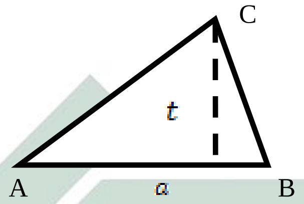
Perhatikan Gambar 2.16 berikut ini.




**Gambar 2.16 Jenis-jenis Segitiga Berdasarkan Sifat-Sifatnya**

Berdasarkan Gambar 2.16 maka sifat segitiga ada tiga yaitu 1) suatu segitiga yang besar salah satu sudutnya 90°dan dua sisinya sama panjang disebut segitiga siku-siku samakaki, 2) suatu segitiga yang salah satu sudutnya tumpul dan kedua sisinya sama panjang disebut segitiga tumpul samakaki, dan 3) segitiga yang salah satu sudutnya lancip dan memiliki dua sisi yang sama panjang disebut segitiga lancip samakaki.

c. Luas segitiga



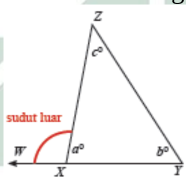

**Gambar 2.17 Segitiga ABC**

Berdasarkan Gambar 2.17 di atas, Jika *ABC* sebuah segitiga yang panjang alas *a* dan tinggi *t*, maka luas daerah segitiga dapat dinyatakan dengan $L = \frac{1}{2} \times (a \times t)$. Selanjutnya, luas daerah segitiga biasa dikatakan dengan luas segitiga.

d. Keliling segitiga

Jika $\Delta ABC$ memiliki panjang sisi-sisi *a*, *b* dan *c*, maka keliling segitiga adalah $K = a + b + c$.

e. Sudut luar dan sudut dalam segitiga




**Gambar 2.18 Segitiga XYZ**

Berdasarkan Gambar 2.18 di atas, terdapat $\Delta XYZ$. Pada segitiga XYZ di atas rusuk *XY* diperpanjang menjadi *WY*. Akibat dari perpanjangan rusuk tersebut maka $\angle Y$, $\angle Z$, dan $\angle YXZ$ adalah sudut dalam $\Delta XYZ$ dan $\angle WXZ$ adalah sudut luar $\Delta YXZ$.