

## **BAB IV**

### **HASIL PENELITIAN**

#### **A. Deskripsi data**

Pada bagian ini akan dijelaskan atau dideskripsikan hasil-hasil yang diperoleh dalam penelitian yang berjudul profil berpikir siswa dalam mengkonstruksi bukti geometri sebagai proses (proses dan konsep) berdasarkan teori Gray-Tall. Penelitian ini menggunakan dua instrumen yaitu lembar tes matematika dan lembar pedoman wawancara. Tes matematika bertujuan untuk mendapatkan jawaban tertulis subjek penelitian. Pedoman wawancara digunakan untuk mengungkap langkah-langkah atau ide-ide dari subjek penelitian dalam menyelesaikan tes matematika. Berikut ini akan dideskripsikan jawaban tertulis dari subjek penelitian.

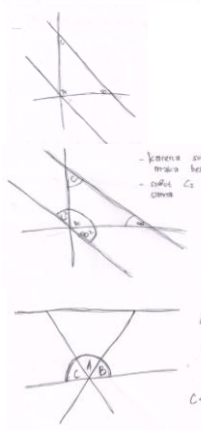
##### 1. Deskripsi data $S_1$

Berdasarkan Gambar 4.1 di bawah subjek  $S_1$  telah menuliskan dan menjawab langkah-langkah penyelesaian masalah dari tes matematika dengan menulis apa yang diketahui dan yang ditanyakan dalam masalah. Subjek  $S_1$  menuliskan apa yang diketahui yakni segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku ABC dan jumlah sudut satu segitiga adalah 180 derajat. Subjek  $S_1$  juga menuliskan apa yang ditanyakan dalam tes matematika yakni pembuktian bahwa satu segitiga besarnya 180 derajat.

Selanjutnya subjek  $S_1$  menggambar segitiga siku-siku ABC yang ada pada lembar tes matematika pada lembar jawaban yang sudah disediakan. Subjek  $S_1$  menggambar segitiga siku-siku ABC tidak sama persis seperti yang tertera dalam tes matematika, akan tetapi subjek  $S_1$  sudah memberikan tambahan yakni garis penolong atau garis bantu. Penambahan garis bantu atau garis penolong digunakan untuk mempermudah subjek  $S_1$  menyelesaikan permasalahan di soal. Selanjutnya subjek  $S_1$  menggambar garis penolong yang sejajar dengan ruas garis BC.

yang diketahui bahwa jumlah sudut satu segitiga adalah  $180^\circ$  segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku.

yang ditanyakan adalah pembuktian bahwa satu segitiga bernilai  $180^\circ$



- karena sudut B beraturan  $90^\circ$ , maka besarnya sama (dalam beraturan)

- sudut C beraturan  $90^\circ$ , maka besarnya sama

Agar ini dapat dipertahankan (segitiga benar)  $180^\circ$  karena saling beraturan.

$$C + A + B = 180^\circ$$

**Hubungan antar sudut**

- Dalam beraturan
- saling beraturan.

Kertas beraturan, saling beraturan, setiap ujungnya (sudut) dan digabung akan membentuk satu garis lurus / beraturan.

**Gambar 4.1**  
**Jawaban tertulis subjek S<sub>1</sub>**

Penambahan garis penolong atau garis bantu tidak hanya diberikan subjek S<sub>1</sub> pada garis yang sejajar dengan ruas garis BC saja, akan tetapi ruas garis pada segitiga siku-siku ABC itu juga diperpanjang. Ruas garis segitiga siku-siku ABC yang diperpanjang yaitu ruas garis AB, ruas garis AC, dan ruas garis BC. Hal itu dimaksudkan agar subjek S<sub>1</sub> dapat mengerjakan dan menyelesaikan tes matematika dengan mudah dan benar.

Setelah dilakukan penambahan garis bantu dan memperpanjang ruas garis pada segitiga siku-siku ABC, subjek S<sub>1</sub> memberi nama sudut pada segitiga siku-siku

ABC. Subjek  $S_1$  memberikan tiga nama sudut pada segitiga siku-siku ABC. Sudut B merupakan sudut siku-siku dari segitiga ABC, kemudian dua sudut lainnya dinamakan dengan sudut A dan sudut C. Langkah selanjutnya subjek  $S_1$  menggambar segitiga berikutnya.

Subjek  $S_1$  menggambar segitiga siku-siku ABC kedua yang sudah diberi nama sudut dan telah diperpanjang ruas garisnya. Pada segitiga siku-siku ABC yang kedua, subjek  $S_2$  memberikan nama sudut baru. Sudut baru yang diberikan oleh subjek  $S_1$  yaitu sudut  $B_2$  dan sudut  $C_2$ . Sudut  $C_2$  dan sudut  $B_2$  diberikan oleh subjek  $S_1$  di samping sudut A.

Pada gambar kedua, subjek  $S_1$  memberikan konsep matematika yang digunakan dalam menyelesaikan soal. Konsep yang digunakan subjek  $S_1$  adalah tentang sudut, tepatnya tentang hubungan antar sudut. Hubungan antar sudut yang digunakan adalah sudut dalam berseberangan dan sudut berpelurus. Besar sudut B dinyatakan sama besarnya dengan sudut  $B_2$  oleh subjek  $S_1$  karena ada hubungan antar sudut di kedua sudut tersebut, yakni sudut dalam berseberangan. Begitu pula dengan sudut C, besar sudut C dengan sudut  $C_2$  besarnya sama karena kedua sudut tersebut merupakan sudut dalam berseberangan. Kemudian subjek  $S_1$  menuliskan alasan besar sudut B sama dengan sudut  $B_2$  dan sudut C sama dengan sudut  $C_2$  di samping gambar kedua.

Pada gambar kedua, subjek  $S_1$  sudah menamai sudut  $B_2$  dan sudut  $C_2$  yang berdekatan dengan sudut A. Kemudian subjek  $S_1$  menggambar gambar yang ketiga dengan memotong dan memilih sudut-sudut yang saling berdekatan tersebut. Subjek  $S_1$  memotong dan menyederhanakan dari gambar kedua yang masih berbentuk segitiga siku-siku ABC. Hasil dari potongan gambar kedua terdapat dua garis yang sejajar yaitu ruas garis BC dan garis bantu. Dalam dua garis sejajar itu terdapat nama sudut yang sudah diganti oleh subjek  $S_1$ .

Subjek  $S_1$  sudah mengganti nama dari sudut  $B_2$  ke sudut B dan juga dari sudut  $C_2$  ke sudut C. Kemudian subjek  $S_1$  menuliskan bahwa sudut-sudut tersebut jika

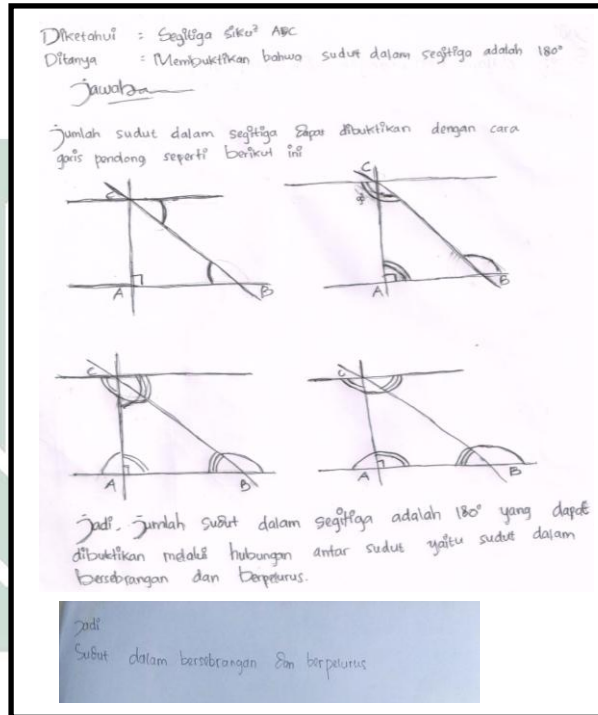
ditambahkan akan membentuk sudut 180 derajat. Jumlah dari sudut A, sudut B, dan sudut C adalah 180 derajat karena sudut-sudut tersebut membentuk sudut berpelurus atau saling berpelurus. Kemudian subjek  $S_1$  menyimpulkan bahwa jumlah sudut-sudut dalam segitiga siku-siku ABC berjumlah 180 derajat karena saling berpelurus. Subjek  $S_1$  menuliskannya di samping gambar ketiga dengan  $A + B + C = 180$  derajat. Jadi kesimpulan dari soal tes matematika di atas yaitu jumlah sudut-sudut dalam segitiga adalah 180 derajat. Sehingga subjek  $S_1$  telah membuktikan dengan benar dan terbukti.

2. Deskripsi data  $S_2$

Berdasarkan Gambar 4.2 di bawah, subjek  $S_2$  telah menuliskan langkah-langkah penyelesaian dari soal yang telah diberikan. Subjek  $S_2$  menuliskan apa yang diketahui pada soal tes matematika. Subjek  $S_2$  menuliskan yang diketahui pada lembar jawaban yaitu segitiga siku-siku ABC. Selanjutnya subjek  $S_2$  menuliskan juga apa yang ditanyakan pada soal tes matematika yang diberikan. Subjek  $S_2$  menjawab dan menuliskan yang ditanya pada soal yaitu membuktikan bahwa jumlah sudut-sudut dalam segitiga adalah 180 derajat. Kemudian subjek  $S_2$  menuliskan jawaban dibawah apa yang diketahui dan ditanyakan pada lembar jawaban. Subjek  $S_2$  tidak langsung menggambar seperti subjek  $S_1$  di atas, akan tetapi subjek  $S_2$  menuliskan rencana yang akan digunakan. Adapun jawaban tertulis subjek  $S_2$  disajikan pada Gambar 4.2 berikut ini.

Rencana yang digunakan subjek  $S_2$  adalah dengan menggunakan garis penolong pada penyelesaian soal matematika yang diberikan. Subjek  $S_2$  menggambar segitiga ABC yang diketahui seperti di soal, akan tetapi pada gambar pertama ini subjek  $S_2$  sudah memberikan bantuan garis penolong. Garis penolong yang digunakan adalah garis yang sejajar dengan sisi AB dan melalui titik C pada segitiga siku-siku ABC. Kemudian subjek  $S_2$  memberikan garis penolong juga dengan memperpanjang sisi-sisi segitiga siku-siku ABC. Subjek  $S_2$  juga sudah

memberikan tanda sudut pada titik B dengan simbol “ $\sphericalangle$ ”. Tanda sudut yang sama juga diberikan pada titik C yang di luar segitiga ABC dan di atas garis BC dengan simbol “ $\sphericalangle$ ”.



**Gambar 4.2**

### Jawaban tertulis Subjek S<sub>2</sub>

Pada gambar kedua, subjek S<sub>2</sub> menggambar segitiga siku-siku ABC yang sama dengan gambar segitiga siku-siku pertama yang sudah diberi garis penolong atau garis bantu. Kemudian subjek S<sub>2</sub> memberikan tanda sudut pada titik A dengan simbol “ $\sphericalangle$ ”. Pada sudut A terdapat tanda persegi kecil. Artinya titik A adalah sudut siku-siku, akan tetapi subjek S<sub>2</sub> tetap

memberikan tanda sudut dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” sendiri. Selanjutnya subjek  $S_2$  juga memberikan tanda sudut dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” pada titik C di luar segitiga ABC. Subjek  $S_2$  tetap memberikan tanda sudut “ $\sphericalangle$ ” pada titik B di luar segitiga ABC dan di atas garis BC. Subjek  $S_2$  juga menuliskan besar sudut pada titik C dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” yaitu 90 derajat.

Pada gambar ketiga, subjek  $S_2$  sudah memberikan banyak tanda sudut pada segitiga siku-siku ABC. Tanda sudut pada segitiga ABC yang sama berarti besar sudutnya sama, begitu penjelasan dari subjek  $S_2$ . Sudut B diberi tanda sudut dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” oleh subjek  $S_2$ , kemudian sudut A diberi tanda sudut dengan simbol “ $\sphericalangle$ ”. Subjek  $S_2$  memberikan tanda sudut dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” pada titik C di luar segitiga ABC dan di atas garis BC. Besarnya sudut di luar segitiga ABC dan di atas garis BC sama dengan sudut B yang ditunjukkan dengan simbol “ $\sphericalangle$ ”. Kedua sudut tersebut besarnya sama karena sudut dalam berseberangan. Subjek  $S_2$  juga memberikan tanda sudut dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” pada titik C dan di luar segitiga ABC. Besar sudut ini sama dengan besar sudut A karena sudut dalam berseberangan.

Pada gambar keempat, subjek  $S_2$  menggambarkan segitiga yang hampir sama dengan gambar yang ketiga namun diperjelas yang akan dibuktikan. Subjek  $S_2$  membuktikan dengan memperjelas bahwa akan membentuk sudut berpelurus melalui titik C. Besar sudut B sama dengan sudut dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” pada titik C di luar segitiga ABC dan di atas garis BC. Kedua sudut tersebut merupakan sudut dalam berseberangan. Kemudian sudut A yang ada tanda sudut dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” besarnya sama dengan sudut yang ada pada titik C di luar segitiga ABC dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” karena sudut dalam berseberangan. Sedangkan sudut C tetap tidak dirubah letaknya oleh subjek  $S_2$ . Jumlah dari

sudut C ditambah dengan sudut pada titik C di luar segitiga ABC dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” dan sudut di atas garis BC dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” membentuk sudut berpelurus. Sehingga menurut subjek  $S_2$  terbukti bahwa jumlah sudut-sudut dalam segitiga adalah 180 derajat karena membentuk setengah lingkaran atau berpelurus. Total sudutnya bisa dilihat pada sudut C ditambah dengan sudut-sudut yang ada pada titik C di luar segitiga ABC dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” dan simbol “ $\sphericalangle$ ”. Sudut yang ada pada titik C dan di luar segitiga ABC dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” besarnya sama dengan sudut A, sedangkan sudut yang ada pada titik C dan di luar segitiga ABC dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” besarnya sama dengan sudut B karena sudut dalam bersebrangan.

Subjek  $S_2$  membuat kesimpulan bahwa jumlah sudut-sudut dalam segitiga adalah 180 derajat dan dapat dibuktikan dengan hubungan antar sudut yakni sudut dalam bersebrangan dan sudut berpelurus. Subjek  $S_2$  membuktikan jumlah sudut dalam segitiga dengan memakai tanda sudut. Subjek  $S_2$  bertujuan bahwa tanda sudut yang sama dengan simbol berarti besar sudutnya sama.

## B. Analisis data

Pada bagian ini, akan di analisis data yang sudah didapatkan dengan indikator mengkonstruksi bukti geometri dan tahap berpikir prosep yang ada pada teori Gray-Tall. Pada setiap tahap berpikir prosep, ada indikator mengkonstruksi bukti geometri yang termasuk didalamnya. Berdasarkan deskripsi data di atas, berikut ialah hasil analisis proses berpikir mengkonstruksi bukti geometri sebagai prosep subjek  $S_1$  dalam menyelesaikan permasalahan.

### 1. Analisis data $S_1$

Tahap pengkonstruksian bukti geometri sebagai prosep menurut Gray-Tall ada tiga tahapan yaitu prosedur, proses, dan prosep (proses dan konsep). Berikut ini akan ditunjukkan uraian masing-masing tahapan.

a. Prosedur

Berdasarkan deskripsi data di atas menunjukkan bahwa, subjek  $S_1$  dalam mengidentifikasi apa yang menjadi fakta dalam pembuktian geometri ditunjukkan dengan apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan dalam tes matematika. Subjek  $S_1$  menuliskan yang diketahui yaitu gambar segitiga, segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku dan jumlah sudut dalam segitiga adalah 180 derajat. Sedangkan yang ditanyakan di dalam tes matematika adalah pembuktian bahwa jumlah sudut-sudut dalam segitiga adalah 180 derajat. Selanjutnya untuk membuktikan soal matematika subjek  $S_1$  membuat langkah-langkah yaitu dengan mengidentifikasi fakta, memilih konsep yang digunakan, dan garis penolong.

Subjek  $S_1$  mengidentifikasi fakta yaitu dengan menuliskan apa yang diketahui dan ditanyakan pada soal. Selanjutnya subjek  $S_1$  memilih konsep hubungan antar sudut dalam menyelesaikan pembuktian. Definisi sudut dalam berseberangan dan sudut berpelurus dipilih oleh subjek  $S_1$ . Adapun jawaban tertulis subjek  $S_1$  tentang pemilihan konsep dapat dilihat pada Gambar 4.4. Subjek  $S_1$  membuat garis penolong untuk memudahkan dalam proses pembuktian geometri. Tahapan prosedur dalam penelitian ini memuat satu indikator mengkonstruksi bukti geometri yaitu mengidentifikasi apa yang menjadi fakta dalam pembuktian geometri. Menurut Sumarmo, paparan identifikasi subjek  $S_1$  di atas termasuk dalam indikator pertama yaitu mengidentifikasi apa yang menjadi fakta dalam pembuktian geometri. Adapun jawaban tertulis dari subjek  $S_1$  terkait identifikasi fakta ditunjukkan pada Gambar 4.3 berikut ini.



yang berarti bahwa jumlah sudut satu segitiga adalah  $180^\circ$ , segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku  
yang ditanyakan adalah pembuktian bahwa satu segitiga besarnya  $180^\circ$

**Gambar 4.3**

**Potongan jawaban tertulis subjek  $S_1$  terkait identifikasi fakta dalam pembuktian**

Berdasarkan gambar 4.3 di atas, subjek  $S_1$  juga menuliskan dan menjelaskan apa yang telah diidentifikasi pada pembuktian. Namun dalam mengidentifikasi apa yang menjadi fakta, subjek  $S_1$  mengidentifikasinya setelah mengerjakan dan menyelesaikan tes matematika yang telah diberikan. Subjek  $S_1$  hanya mengidentifikasi gambarnya dan pertanyaan pada tes matematika, namun dapat mengidentifikasi seluruh apa yang menjadi fakta setelah tes matematika dikerjakan dan dilakukan wawancara. Hal ini bisa dilihat pada jawaban tertulis subjek  $S_1$  yang menuliskan apa yang menjadi fakta di balik lembar jawaban. Subjek  $S_1$  langsung mengerjakan dengan menggambar segitiga langsung. Berikut ini adalah cuplikan wawancara subjek  $S_1$  dalam mengidentifikasi fakta dalam pembuktian:

P : oke,, apa kamu paham dengan soal ini?

$S_{1.10}$  : iya saya memahaminya.

P : terus, apa yang kamu ketahui dari soal ini?

$S_{1.11}$  : yang saya ketahui adalah segitiga di soal adalah segitiga siku-siku dan jumlah sudut dalam segitiga adalah 180.

P : kemudian apa yang ditanyakan dari soal itu?

$S_{1.12}$  : buktikan ini kak, bahwa jumlah sudut dalam segitiga adalah 180?

- P : iya, kemudian apa ada hal lain yang kamu ketahui dari soal ini?
- S<sub>1.13</sub> : gak ada kak, (sambil senyum).

Berdasarkan hasil wawancara di atas, menurut Sumarmo dapat diketahui bahwa subjek S<sub>1</sub> termasuk dalam indikator pertama yaitu dapat menyebutkan dan mengidentifikasi apa yang menjadi fakta dalam pembuktian. Prosedur untuk mengawali pembuktian dilakukan dengan baik oleh subjek S<sub>1</sub>, sehingga tahap prosedur pada teori Gray-Tall telah dicapai dengan baik. Berdasarkan hasil analisis data di atas, dapat disimpulkan bahwa subjek S<sub>1</sub> dapat mengidentifikasi apa yang menjadi fakta dalam pembuktian geometri dan melaksanakan tahap prosedur pada teori Gray-Tall dengan cara membaca teks soal yang diberikan dan setelah mengerjakan soal.

b. Proses

Tahapan pengkontruksian bukti geometri yang kedua pada teori Gray-Tall yaitu proses. Pada tahap proses ini terdapat beberapa indikator mengkonstruksi bukti. Adapun uraian masing-masing indikator mengkonstruksi bukti akan dijelaskan di bawah ini.

1) Membuat konjektur sebagai hipotesis dalam pembuktian

Berdasarkan deskripsi data di atas menunjukkan bahwa, subjek S<sub>1</sub> menyebutkan konjektur untuk menyelesaikan tes matematika yang akan dibuktikan. Subjek S<sub>1</sub> menyebutkan konjektur tentang definisi yang dipakai untuk menyelesaikan masalah yang akan di buktikan. Menurut Sumarmo, membuat konjektur subjek S<sub>1</sub> di atas termasuk dalam indikator yang kedua yaitu membuat konjektur sebagai hipotesis dalam pembuktian. Adapun jawaban tertulis subjek S<sub>1</sub> terkait pembuatan konjektur ditunjukkan pada Gambar 4.4 berikut ini.



**Gambar 4.4**

**Potongan jawaban tertulis subjek  $S_1$  terkait konjektur dalam pembuktian**

Berdasarkan Gambar 4.4 di atas, konjektur yang dibuat subjek  $S_1$  adalah tentang definisi sudut-sudut yang akan dibuat untuk menyelesaikan pembuktian geometri. Penyebutan konjektur tersebut masih bermakna ganda, sehingga peneliti memberikan rangsangan pertanyaan agar jelas. Subjek  $S_1$  mengalami kesulitan untuk menjawab dan menjelaskannya, namun peneliti sudah tahu bahwa subjek  $S_1$  memahami konjekturnya akan tetapi masih sulit untuk menjelaskannya.

Subjek  $S_1$  membutuhkan waktu sejenak untuk bisa menjelaskan apa yang dimaksud dengan konjektur. Setelah diberikan rangsangan pertanyaan lagi, subjek  $S_1$  bisa menjelaskan konjektur yang telah dibuat. Subjek  $S_1$  mengalami proses berpikir yang tergolong cepat karena dengan sedikit tambahan rangsangan langsung paham dan bisa jelaskan konjektur yang dibuat. Pada tahap ini, subjek  $S_1$  telah mengalami proses pada tahap Gray-Tall dalam mengerjakan pembuktian geometri.

Berikut ini adalah cuplikan wawancara subjek  $S_1$  dalam membuat konjektur sebagai hipotesis dalam pembuktian:

- P : kira-kira bagaimana cara menyelesaikan soal tersebut?
- $S_{1.15}$  : dengan menggunakan definisi sudut-sudut yang diketahui kak,

- P : maksudnya gimana itu yang diketahui?
- S<sub>1.16</sub> : ehmmm..(agak sedikit bingung),
- P : apa dengan menggunakan definisi sudut yang sudah dipahami?
- S<sub>1.17</sub> : iya kak, maksudnya begitu,
- P : iya, apa saja sih emangnya?
- S<sub>1.18</sub> : disini saya hanya pakai definisi sudut dalam berseberangan dan sudut berpelurus saja.

Berdasarkan hasil transkrip wawancara di atas, dapat diketahui bahwa subjek S<sub>1</sub> dalam membuat konjektur sebagai hipotesis dalam pembuktian geometri dengan memakai definisi-definisi sudut yang diketahui oleh subjek S<sub>1</sub>. Menurut Sumarmo, penjelasan subjek S<sub>1</sub> termasuk dalam indikator kedua yaitu membuat konjektur sebagai hipotesis dalam pembuktian geometri.

Berdasarkan hasil analisis data di atas, dapat disimpulkan bahwa subjek S<sub>1</sub> mampu membuat konjektur sebagai hipotesis dalam pembuktian. Subjek S<sub>1</sub> membuat konjektur dengan menyebutkan konsep matematika. subjek S<sub>1</sub> juga mengalami tahap proses pada teori Gray-Tall dengan menyebutkan definisi sudut-sudut yang akan dipakai dalam membuktikan soal yang diberikan.

- 2) Menunjukkan aturan/*warrant* sebagai hal yang menjembatani pernyataan dan kesimpulan

Berdasarkan deskripsi data di atas menunjukkan bahwa, subjek S<sub>1</sub> memberikan keterangan atau menunjukkan aturan/*warrant*

yang dipakai. Aturan/*warrant* yang dipakai oleh subjek  $S_1$  yakni memberikan keterangan tentang konsep hubungan antar sudut. Menurut Sumarmo, penyebutan dan penunjukkan aturan/*warrant* subjek  $S_1$  di atas termasuk dalam indikator ketiga yaitu menunjukkan aturan/*warrant* sebagai hal yang menjembatani pernyataan dan kesimpulan. Adapun jawaban tertulis subjek  $S_1$  terkait penunjukkan aturan/*warrant* bisa ditunjukkan pada Gambar 4.5 berikut ini.



**Gambar 4.5**  
**Potongan jawaban tertulis subjek  $S_1$  terkait aturan/*warrant***

Adapun cuplikan hasil wawancara dengan subjek  $S_1$  terkait aturan/*warrant* sebagai berikut.

P : oke, sekarang.. konsep matematika apa yang kamu gunakan dalam menyelesaikan soal ini?

$S_{1,19}$  : ehmm.. gimana kak? (agak bingung)

P : begini, tadi kan kamu sudah bisa buktikan, nah sekarang konsep matematika apa saja yang kamu pakai tadi?

$S_{1,20}$  : ohh.. (sambil senyum), iya kak paham.

P : apa kalau begitu?

- S<sub>1.21</sub> : itu kak, saya pakai konsep hubungan antar sudut.
- P : apa saja emangnya hubungan antar sudut yang kamu gunakan? Tuliskan!
- S<sub>1.22</sub> : ditulis kak?
- P : iya lah, hehe (sambil senyum)
- S<sub>1.23</sub> : dimana ini kak tulisnya? (sambil lihat lembar yang penuh jawaban).
- P : ohh.. iya, dibaliknya juga gak papa.
- S<sub>1.24</sub> : iya kak, hubungan antar sudut begitu kak? (agak sedikit bingung).
- P : iya, apa saja tadi..
- S<sub>1.25</sub> : sedang menulis....
- P : sudah selesai?
- S<sub>1.26</sub> : belum kak, baru juga nulis, hmmm kakak ini (sambil senyum)
- P : oh.. tak kira diam itu sudah.. hehe (senyum)
- S<sub>1.27</sub> : sudah kak.. (semangat)
- P : sip, bagus.. (sambil melihat kerjaan S<sub>1</sub>), ada berapa hubungan antar sudut?
- S<sub>1.30</sub> : ada dua kak.. (sambil menunjuk kertas)
- P : apa saja itu?
- S<sub>1.31</sub> : sudut dalam berseberangan sama sudut berpelurus kak..

Berdasarkan hasil transkrip wawancara di atas, menurut Sumarmo penunjukkan aturan/*warrant* subjek S<sub>1</sub> termasuk dalam indikator ketiga yakni menunjukkan aturan/*warrant* sebagai hal yang menjembatani

pernyataan dan kesimpulan. Subjek  $S_1$  menjelaskan dan menunjukkan jika menggunakan aturan hubungan antar sudut dalam menyelesaikan soal matematika yang diberikan. Kemudian subjek  $S_1$  juga dapat menuliskan apa yang menjadi aturan/warrant di lembar jawaban yang sudah disediakan oleh peneliti. Subjek  $S_1$  menuliskan aturan dengan menggunakan hubungan antar sudut, sedangkan yang dipakai pada tes matematika ini yakni definisi dari sudut dalam berseberangan dan sudut berpelurus.

Subjek  $S_1$  menjelaskan penggunaan definisi sudut dalam berseberangan dan berpelurus setelah dilakukan wawancara. Subjek  $S_1$  mengalami sedikit bingung dengan pertanyaan dari peneliti. Subjek  $S_1$  masih harus diberikan pertanyaan yang dapat dengan mudah dipahami sehingga peneliti memberikan rangsangan pertanyaan lagi. Kemudian subjek  $S_1$  menunjukkan aturan yang dipakai untuk menjembatani pernyataan dan kesimpulan pada pembuktian. Pada tahap ini subjek  $S_1$  memberikan keterangan tentang konsep hubungan antar sudut. Subjek  $S_1$  dapat menyebutkan aturan apa yang akan dipakai pada pembuktian geometri.

Subjek  $S_1$  juga dapat menuliskan aturan apa yang dipakai pada proses pembuktian geometri. Aturan yang dipakai yakni konsep hubungan antar sudut. Hubungan antar sudut meliputi banyak sekali definisi sudut, akan tetapi subjek  $S_1$  dapat memilih dan menunjukkan aturan yang akan dipakai yaitu sudut dalam berseberangan dan sudut berpelurus. Subjek  $S_1$  tidak hanya mampu menunjukkan aturan saja, akan tetapi juga menjelaskan aturan yang dipakai. Pemilihan aturan yang dipakai oleh subjek  $S_1$  tidak

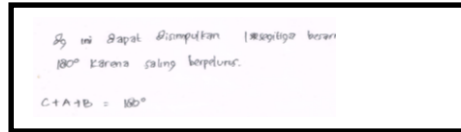
dijelaskan dalam tahap ini dengan memakai definisi sudut dalam berseberangan dan sudut berpelurus. Proses berpikir subjek  $S_1$  dalam menunjukkan aturan sebagai jembatan antara pernyataan dan kesimpulan sudah baik, akan tetapi butuh rangsangan tambahan agar bisa menjelaskan apa yang telah digunakan dalam pembuktian.

Berdasarkan analisis data di atas dapat disimpulkan bahwa subjek  $S_1$  mampu menunjukkan aturan/warrant sebagai hal yang menjembatani antara pernyataan dan kesimpulan pada pembuktian geometri. Proses berpikir subjek  $S_1$  dalam menunjukkan aturan ini juga sudah melakukan tahap proses pada teori Gray-Tall.

3) Mengidentifikasi apa yang menjadi kesimpulan dalam pembuktian geometri

Berdasarkan deskripsi data di atas menunjukkan bahwa, subjek  $S_1$  langsung dapat mengidentifikasi apa yang menjadi kesimpulan dalam pembuktian geometri. Subjek  $S_1$  secara cepat dan tegas menjawab jika kesimpulan dari soal yang diberikan adalah jumlah sudut-sudut dalam segitiga ABC adalah 180 derajat. Menurut Sumarmo, identifikasi subjek  $S_1$  di atas termasuk dalam indikator keempat dalam penelitian yaitu mengidentifikasi apa yang menjadi kesimpulan dalam pembuktian geometri. Adapun pernyataan subjek  $S_1$  pada jawaban tertulis terkait identifikasi kesimpulan ditunjukkan pada Gambar 4.6 berikut ini.





**Gambar 4.6**

**Potongan jawaban tertulis subjek S<sub>1</sub> terkait kesimpulan pada pembuktian geometri**

Berdasarkan Gambar 4.6 di atas, subjek S<sub>1</sub> dapat mengidentifikasi dengan cepat karena setelah mengerjakan pembuktian tersebut ternyata terbukti dan sama dengan apa yang ditanyakan pada tes matematika. Pada tahap mengidentifikasi apa yang menjadi kesimpulan, subjek S<sub>1</sub> tidak mengalami kebingungan seperti tahap sebelumnya, karena pertanyaan yang diberikan pada waktu wawancara sangat jelas dan juga subjek S<sub>1</sub> sudah memahami apa yang menjadi kesimpulan pada pembuktian geometri. Identifikasi suatu hal yang menjadi kesimpulan dipandang penting karena subjek S<sub>1</sub> harus memahami tujuan akhir dari soal matematika yang telah diberikan. Proses berpikir subjek S<sub>1</sub> sangat cepat dan paham akan pertanyaan yang diberikan peneliti. Berikut adalah lanjutan kutipan teks wawancara dengan subjek S<sub>1</sub>:

- P : oke.. kemudian kira-kira apa kesimpulan dari soal ini?  
 S<sub>1.32</sub> : disimpulkan bahwa besar sudut dalam segitiga adalah 180 derajat.

Berdasarkan hasil transkrip wawancara di atas, menurut Sumarmo identifikasi subjek S<sub>1</sub> termasuk dalam indikator keempat yaitu mengidentifikasi apa yang menjadi kesimpulan dalam pembuktian geometri. Subjek S<sub>1</sub> dapat mengidentifikasi dan mengetahui kesimpulan

dari soal matematika yang telah diberikan dan dikerjakan. Subjek  $S_1$  dengan cepat menjawab bahwa jumlah sudut-sudut dalam segitiga adalah 180 derajat.

Berdasarkan analisis data di atas dapat disimpulkan bahwa subjek  $S_1$  mampu mengidentifikasi apa yang menjadi kesimpulan dalam pembuktian geometri dengan benar dan cepat. Proses berpikir untuk mengidentifikasi apa yang menjadi kesimpulan pembuktian dengan mengerjakan tes matematika yang telah diberikan. Pada tahap ini, subjek  $S_1$  juga melakukan tahap proses pada teori Gray-Tall dengan baik.

c. Prosep

Berdasarkan deskripsi data di atas menunjukkan bahwa, subjek  $S_1$  dapat mengetahui aturan-aturan penarikan kesimpulan dari proses pembuktian geometri yang logis. Subjek  $S_1$  menunjukkan jika aturan yang dipakai adalah dengan konsep hubungan antar sudut. Hubungan antar sudut mencakup beberapa definisi sudut, akan tetapi subjek  $S_1$  memakai definisi sudut dalam berseberangan dan sudut berpelurus. Menurut Sumarmo, penjelasan dari subjek  $S_1$  di atas termasuk dalam indikator yang kelima yakni mengetahui aturan-aturan penarikan kesimpulan dari proses pembuktian geometri yang logis. Berikut adalah cuplikan transkrip wawancara dengan subjek  $S_1$  terkait mengetahui aturan-aturan penarikan kesimpulan:

P : oh begitu.. sekarang apakah kamu sudah yakin dengan jawaban kamu?

$S_{1.33}$  : iya yakin kak..

P : nah sekarang, kalau kamu sudah yakin, bagaimana caranya memeriksa jawaban kalau sudah benar?

S<sub>1.34</sub> : ya ini kak, (sambil tunjuk jawabannya).

P : oh ya tau kakak, sambil jelaskan!, hehe (sambil senyum)

S<sub>1.35</sub> : oh iya kak, (diam sejenak dan lihat jawaban)

P : dari gambar yang pertama narita, jelaskan atau ngomong aja bagaimana cara kamu tadi menjawab?

S<sub>1.36</sub> : gambar segitiganya langsung tak beri garis kak, ini (sambil tunjuk jawaban)

P : iya, terus.

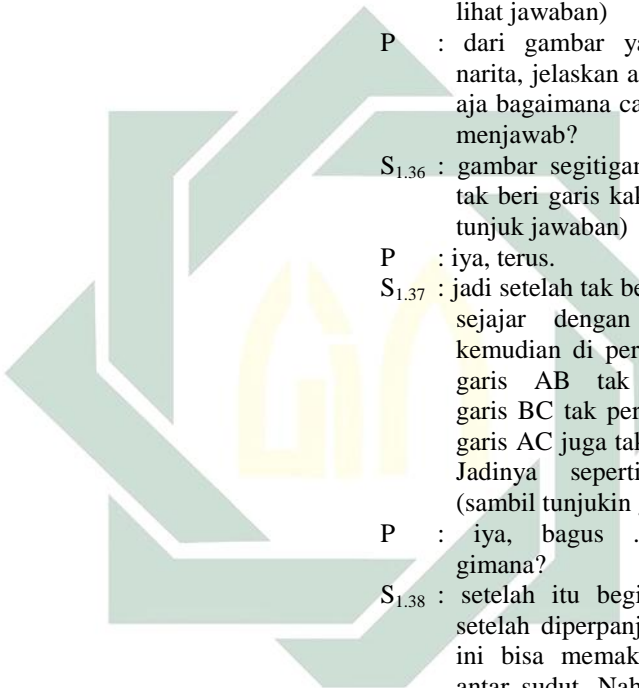
S<sub>1.37</sub> : jadi setelah tak beri garis yang sejajar dengan garis BC, kemudian di perpanjang kak, garis AB tak perpanjang, garis BC tak perpanjang, dan garis AC juga tak perpanjang. Jadinya seperti ini kak. (sambil tunjukkan gambar).

P : iya, bagus .. kemudian gimana?

S<sub>1.38</sub> : setelah itu begini kak, kan setelah diperpanjang tau kak, ini bisa memakai hubungan antar sudut. Nah.. saya ingat dan pakai sudut dalam berseberangan kak.

P : kemudian ini bagaimana? (menunjuk gambar yang kedua)

S<sub>1.39</sub> : setelah itu begini kak, kan sudut B itu dalam berseberangan dengan sudut B2, makanya besar sudutnya sama kak. Kemudian sudut C



juga dalam bersebrangan dengan sudut C2, makanya besar sudutnya sama juga kak. Setelah itu sudut A itu kan tidak berpindah kak, atau tetap disitu. Hehe (sambil tersenyum). Jadinya kan sudutnya sudah bisa membentuk sudut berpelurus kak. Sudut A ditambah dengan Sudut B2 ditambah dengan sudut C2. Begitu kak.

P : terus yang gambar ketiga ini bagaimana?

S<sub>1.40</sub> : ohh.. ini tinggal di balik kak, hehe (sambil senyum dan lihat jawaban), kan tadi bentuknya agak miring kak, ini saya gambar lurus aja biar enak. Jadi sudut tiga ini bisa membentuk sudut berpelurus kak. Sehingga sudut-sudut ini jika dijumlahkan berjumlah 180 derajat karena membentuk sudut berpelurus.

P : jadi kesimpulannya gimana?

S<sub>1.41</sub> : iya kak, jadi total jumlah sudut dalam segitiga ABC ini adalah 180 derajat karena tadi membentuk sudut berpelurus.

Berdasarkan hasil transkrip wawancara di atas, subjek S<sub>1</sub> mengetahui dan memahami aturan penarikan kesimpulan dari proses pembuktian geometri secara logis. Pemahaman dan pengetahuan saja tidak cukup, oleh karena itu peneliti memberikan pancingan pertanyaan kepada subjek S<sub>1</sub> untuk menjelaskan apa yang telah dituliskan di lembar jawaban. Subjek S<sub>1</sub> dapat menjelaskan jawaban yang telah dituliskan

meskipun sedikit bingung pada awal mau menjelaskannya. Subjek  $S_1$  sudah yakin akan jawaban yang telah dituliskannya sehingga peneliti memberikan pertanyaan bagaimana cara memeriksa jawaban bila subjek  $S_1$  sudah yakin.

Subjek  $S_1$  memeriksa jawaban dan aturan yang dipakai dengan hanya menunjuk jawaban yang sudah dituliskan. Subjek  $S_1$  tidak menjelaskan, sehingga peneliti meminta untuk menjelaskannya. Subjek  $S_1$  memberikan garis bantu terhadap segitiga siku-siku ABC, kemudian memberikan garis bantu yang sejajar dengan ruas garis BC. Subjek  $S_1$  memberikan nama sudut  $B_2$  dan  $C_2$  yang letaknya di dekat sudut A. Kemudian besar dari sudut  $B_2$  itu sama dengan besar sudut B karena sudut dalam berseberangan begitu juga dengan sudut  $C_2$  yang besarnya sama dengan sudut C karena sudut dalam berseberangan. Maka sudut-sudut tersebut dijumlahkan dan membentuk sudut berpelurus. Besar sudut berpelurus adalah 180 derajat, jadi terbukti bahwa jumlah sudut-sudut dalam segitiga ABC adalah 180 derajat karena membentuk sudut berpelurus. Berdasarkan transkrip wawancara di atas, menurut Sumarmo, penjelasan tentang aturan-aturan penarikan kesimpulan oleh subjek  $S_1$  termasuk dalam indikator kelima yakni mengetahui aturan-aturan penarikan kesimpulan dari proses pembuktian geometri yang logis.

Subjek  $S_1$  dalam menjelaskan tenang dan santai, akan tetapi pada pertanyaan pertama subjek  $S_1$  terlihat agak berpikir sejenak untuk menjelaskan jawaban yang sudah dituliskan. Kemudian subjek  $S_1$  menjelaskan semuanya dimulai dari gambar yang pertama sampai gambar yang ketiga dan terbukti bahwa jumlah sudut dalam segitiga tersebut adalah 180 derajat. Subjek  $S_1$  mempunyai proses berpikir mengkonstruksi bukti geometri yang baik. Hal ini bisa dilihat pada gambar kedua ke gambar ketiga. Subjek  $S_1$  langsung memotong gambar yang asalnya berbentuk segitiga siku-siku dengan diperpanjang

sisinya dan garis bantu ke gambar yang menunjukkan bahwa sudut-sudut dalam segitiga dijumlahkan akan membentuk garis lurus. Subjek  $S_1$  juga langsung merubah nama dari sudut  $C_2$  pada gambar kedua menjadi sudut C pada gambar ketiga karena sudah mengetahui alasannya dan besar sudutnya sama. Begitu pula dengan sudut  $B_2$  yang pada gambar kedua dirubah menjadi sudut B pada gambar ketiga.

Pada tahap prosep (proses dan konsep) subjek  $S_1$  juga sudah paham akan konsep dan proses dari pembuktian geometri tersebut. Berikut adalah cuplikan transkrip wawancara subjek  $S_1$ :

P : jika kamu mendengar pernyataan seperti ini “jumlah sudut dalam segitiga ABC atau segitiga sembarang adalah 180 derajat” apa yang pertama terlintas dalam pikiran kamu?

$S_{1.43}$  : (diam dan sambil lihat jawaban) tanpa kata-kata..

P : begini, santai aja, tak ulangi, jika kakak bilang seperti ini “jumlah sudut-sudut dalam segitiga adalah 180 derajat” apa yang ada dalam pikiran kamu? Atau kamu paham cara mengerjakannya?

$S_{1.44}$  : ohh.. ya paham kak, kayak yang tadi itu, pakai hubungan antar sudut.

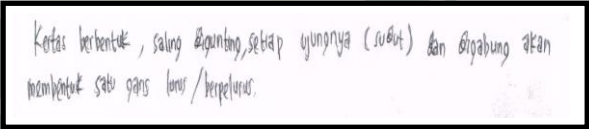
P : sekarang jika ada pernyataan seperti itu, apakah kamu paham akan proses kerjakannya dan konsepnya?

$S_{1.45}$  : iya kak, paham. Kan sama kayak yang tadi tak kerjakan, konsepnya pakai hubungan antar sudut, terus prosesnya sama

kayak tadi tapi segitiganya diberi garis tambahan dulu.

Berdasarkan hasil wawancara di atas, subjek  $S_1$  mengetahui dan paham akan konsep dari hubungan antar sudut dan bisa menggunakan konsep tersebut untuk proses pembuktian geometri. Pada tahap ini subjek  $S_1$  sudah melewati tahap prosep (proses dan konsep) pada teori Gray-Tall dengan baik, akan tetapi butuh sedikit rangsangan pertanyaan yang lebih untuk memahami maksud dari peneliti.

Pada tahap prosep ini subjek  $S_1$  juga diberikan pertanyaan yang berbeda oleh peneliti, yakni apakah mempunyai cara lain untuk membuktikan jumlah sudut-sudut dalam segitiga adalah 180 derajat. Subjek  $S_1$  menjawab dengan tenang dan mempunyai cara lain untuk membuktikannya yakni dengan kertas berbentuk. Adapun jawaban tertulis dari subjek  $S_1$  terkait cara lain dalam membuktikan ditunjukkan pada Gambar 4.7 berikut ini.



Kertas berbentuk, saling digabung, setiap ujungnya (sudut) dan digabung akan membentuk satu garis lurus /berpeturas.

**Gambar 4.7**

**Potongan jawaban tertulis subjek  $S_1$  terkait cara lain dalam pembuktian**

Berikut ini adalah cuplikan transkrip wawancara dengan subjek  $S_1$ :

- P : oke, sekarang apa kamu punya cara lain untuk mengerjakan soal ini?
- $S_{1.46}$  : iya kak, bisa. Dengan kertas bebentuk.
- P : bagaimana itu?

$S_{1,47}$  : digunting setiap sudutnya kak, kemudian di susun dan disatukan nanti membentuk garis lurus/sudut berpelurus sehingga sudutnya kan 180 derajat.

Berdasarkan hasil transkrip wawancara di atas, subjek  $S_1$  mempunyai cara lain untuk membuktikan pada soal yang diberikan yakni dengan kertas berbentuk. Berdasarkan hasil analisis di atas menunjukkan bahwa, subjek  $S_1$  mampu mengetahui dan menjelaskan aturan-aturan penarikan kesimpulan dari proses pembuktian geometri yang logis. Subjek  $S_1$  juga sudah melalui tahap prosep (proses dan konsep) pada teori Gray-Tall dengan baik. Subjek  $S_1$  paham akan konsep hubungan antar sudut dan prosesnya. Subjek  $S_1$  juga mempunyai cara yang lain untuk membuktikan jumlah sudut-sudut dalam segitiga dengan kertas berbentuk.

## 2. Analisis data $S_2$

Tahap pengkontruksian bukti geometri sebagai prosep menurut Gray-Tall ada tiga tahapan yaitu prosedur, proses, dan prosep (proses dan konsep). Berikut ini akan ditunjukkan uraian masing-masing tahapan.

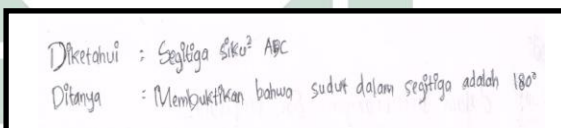
### a. Prosedur

Berdasarkan deskripsi data di atas menunjukkan bahwa, subjek  $S_2$  dalam mengidentifikasi apa yang menjadi fakta dalam pembuktian geometri ditunjukkan dengan apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan dalam tes matematika yang diberikan. Subjek  $S_2$  menuliskan yang diketahui pada tes matematika yaitu segitiga siku-siku ABC. Kemudian subjek  $S_2$  juga menuliskan apa yang ditanyakan dalam tes matematika yaitu membuktikan bahwa sudut-sudut dalam segitiga adalah 180 derajat. Selanjutnya subjek  $S_2$  membuat langkah-langkah untuk menemukan hasil dari pembuktian yaitu dengan mengidentifikasi fakta,



membuat garis bantu, dan memilih konsep yang digunakan.

Subjek  $S_2$  mengidentifikasi fakta yaitu dengan menyebutkan dan menuliskan apa yang diketahui dan ditanyakan pada soal matematika. Selanjutnya subjek  $S_2$  memuat garis bantu yang bertujuan untuk memudahkan dalam proses pembuktian geometri. adapun jawaban tertulis subjek  $S_2$  tentang garis penolong dapat dilihat pada Gambar 4.9. Subjek  $S_2$  memilih konsep hubungan antar sudut yakni dengan menggunakan definisi sudut dalam berseberangan dan sudut berpelurus. Adapun jawaban tertulis subjek  $S_2$  tentang pemilihan konsep dapat dilihat pada Gambar 4.10. Tahapan prosedur dalam penelitian ini memuat satu indikator mengkonstruksi bukti geometri yaitu mengidentifikasi apa yang menjadi fakta dalam pembuktian geometri. Hal ini menurut Sumarmo, penjelasan identifikasi subjek  $S_2$  di atas termasuk dalam indikator pertama yaitu mengidentifikasi apa yang menjadi fakta dalam pembuktian geometri. Adapun jawaban tertulis subjek  $S_2$  terkait identifikasi fakta akan ditunjukkan pada Gambar 4.8 berikut ini.



**Gambar 4.8**

**Potongan jawaban tertulis subjek  $S_2$  terkait identifikasi fakta dalam pembuktian**

Berdasarkan Gambar 4.8 di atas, subjek  $S_2$  dapat menuliskan dan mengidentifikasi apa yang menjadi fakta dalam pembuktian geometri dengan baik. Subjek  $S_2$  mengidentifikasi apa yang menjadi fakta dalam pembuktian di tes matematika sebelum mengerjakan dan ditulis apa yang diketahui serta yang ditanyakan pada soal tersebut. Berikut ini adalah cuplikan wawancara subjek  $S_2$  dalam mengidentifikasi fakta dalam pembuktian:

- P : bagaimana ris? Apa kamu paham soal ini?
- S<sub>2.13</sub> : iya, saya paham kak,
- P : kemudian, apa yang kamu ketahui dari soal ini?
- S<sub>2.14</sub> : yang saya ketahui dari soal ini adalah segitiga siku-siku ABC. Begitu kak..
- P : oh.. ya ris, terus apa ada lagi?
- S<sub>2.15</sub> : gak ada kak,

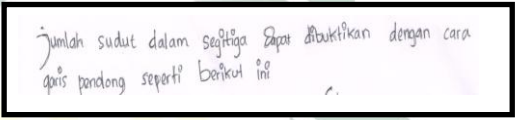
Berdasarkan hasil transkrip wawancara di atas, menurut Sumarmo dapat diketahui bahwa subjek S<sub>1</sub> termasuk dalam indikator pertama yaitu dapat menyebutkan dan mengidentifikasi apa yang menjadi fakta dalam pembuktian. Subjek S<sub>2</sub> sudah mampu mengidentifikasi apa yang menjadi fakta dalam pembuktian dengan baik. Namun subjek S<sub>2</sub> dalam mengidentifikasi cenderung berpikir agak lambat karena dalam mengidentifikasi fakta, subjek S<sub>2</sub> membutuhkan waktu lebih lama daripada subjek S<sub>1</sub>. Tahapan prosedur subjek S<sub>2</sub> sudah dicapai dengan baik dengan bisa mengidentifikasi apa yang menjadi fakta dalam pembuktian, sehingga tahap prosedur pada teori Gray-Tall telah dilaksanakan. Berdasarkan hasil analisis data di atas, dapat disimpulkan bahwa subjek S<sub>2</sub> dapat mengidentifikasi apa yang menjadi fakta dalam pembuktian geometri dan melaksanakan tahap prosedur pada teori Gray-Tall dengan cara membaca teks soal yang diberikan dan setelah mengerjakan soal dilakukan wawancara.

b. Proses

Tahapan pengkontruksian bukti geometri yang kedua pada teori Gray-Tall yaitu proses. Pada tahap proses ini terdapat beberapa indikator mengkonstruksi bukti. Adapun uraian masing-masing indikator mengkonstruksi bukti akan dijelaskan di bawah ini.

- 1) Membuat konjektur sebagai hipotesis dalam pembuktian

Berdasarkan deskripsi data di atas menunjukkan bahwa, subjek  $S_2$  menyebutkan konjektur untuk menyelesaikan tes matematika yang telah diberikan. Subjek  $S_2$  menuliskan konjektur dengan memakai garis penolong dan hubungan antar sudut. Menurut Sumarmo, penulisan dan penyebutan konjektur subjek  $S_2$  di atas termasuk dalam indikator kedua yakni membuat konjektur sebagai hipotesis dalam pembuktian. Adapun jawaban tertulis dari subjek  $S_2$  terkait konjektur dalam pembuktian ditunjukkan pada Gambar 4.9 berikut ini.



jumlah sudut dalam segitiga dapat dibuktikan dengan cara garis penolong seperti berikut ini

**Gambar 4.9**  
**Potongan jawaban tertulis subjek  $S_2$  terkait konjektur dalam pembuktian**

Berdasarkan Gambar 4.9 di atas, subjek  $S_2$  hanya menuliskan dengan memakai garis penolong saja, akan tetapi pada proses pembuktian geometrinya subjek  $S_2$  memakai konsep hubungan antar sudut juga. Subjek  $S_2$  sudah paham tentang hubungan antar sudut dengan memakai definisi dari sudut dalam berseberangan dan sudut berpelurus. Berikut ini adalah cuplikan transkrip wawancara subjek  $S_2$  tentang membuat konjektur dalam pembuktian:

- P : sip.. kira-kira, bagaimana cara untuk menyelesaikan soal ini?
- $S_{2.18}$  : untuk menyelesaikan soal ini dapat dibuktikan dengan garis penolong seperti ini (sambil menunjuk jawaban) dan hubungan antar sudut.

Berdasarkan hasil wawancara di atas menunjukkan bahwa, subjek  $S_2$  mampu membuat konjektur dalam pembuktian geometri dengan memakai garis penolong dan konsep hubungan antar sudut. Hal ini sesuai dengan Sumarmo bahwa penyebutan dan pembuatan konjektur subjek  $S_2$  termasuk indikator kedua yakni membuat konjektur sebagai hipotesis dalam pembuktian.

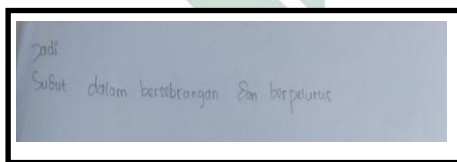
Subjek  $S_2$  membuat konjektur dengan proses berpikir yang cepat dan yakin. Pada waktu wawancara, subjek  $S_2$  sudah bisa langsung paham akan pertanyaan yang diberikan. Subjek  $S_2$  memberikan jawaban bahwa konjektur yang akan dipakai adalah dengan menggunakan garis penolong dan hubungan antar sudut. Hal ini berbeda dengan subjek  $S_1$  yang butuh waktu untuk menjelaskan tentang konjektur yang dibuat karena masih setengah ingat. Namun, peneliti sudah mengetahui dan memahami akan maksudnya. Subjek  $S_1$  butuh rangsangan sedikit agar dapat paham dengan maksud dari pertanyaan yang diberikan. Pada tahap ini, subjek  $S_2$  sudah mengalami tahap proses pada tahap teori Gray-Tall dalam menyelesaikan soal pembuktian geometri.

Berdasarkan hasil analisis di atas, dapat disimpulkan bahwa subjek  $S_2$  mampu membuat konjektur sebagai hipotesis dalam pembuktian geometri dan juga mengalami tahap proses pada teori Gray-Tall. Subjek  $S_2$  membuat konjektur dengan menulis dan menyebutkan konjektur yakni dengan memakai garis penolong dan hubungan antar sudut.

- 2) Menunjukkan aturan/*warrant* sebagai hal yang menjembatani pernyataan dan kesimpulan

Berdasarkan deskripsi data di atas menunjukkan bahwa, subjek  $S_2$  menunjukkan

dan menulis aturan/*warrant* yang dipakai untuk membuktikan tes matematika yang diberikan. Kemudian subjek  $S_2$  menunjukkan aturan yang dipakai yakni dengan memakai definisi dari sudut dalam berseberangan dan sudut berpelurus. Menurut Sumarmo, penulisan dan penunjukkan aturan/*warrant* subjek  $S_2$  di atas termasuk dalam indikator ketiga yaitu menunjukkan aturan/*warrant* sebagai hal yang menjembatani pernyataan dan kesimpulan. Adapun pernyataan dari subjek  $S_2$  terkait aturan/*warrant* ditunjukkan pada Gambar 4.10 berikut ini.



**Gambar 4.10**  
**Potongan jawaban tertulis subjek  $S_2$  terkait aturan/*warrant***

Berdasarkan Gambar 4.10 di atas menunjukkan bahwa, subjek  $S_2$  menunjukkan aturan/*warrant* tentang hubungan antar sudut. Selanjutnya subjek  $S_2$  juga dapat menuliskan hubungan antar sudut yang digunakan yakni sudut dalam berseberangan dan sudut berpelurus. Berikut ini adalah cuplikan transkrip wawancara subjek  $S_2$  tentang menunjukkan aturan dalam proses pembuktian.

- P : oh.. begitu ya. Kemudian konsep matematika apa yang kamu pakai tadi untuk meyelesaikan soal ini?
- $S_{2.20}$  : hubungan antar sudut kak..

- P : oh iya ris, apa saja itu?  
Coba tuliskan?
- S<sub>2.21</sub> : di bawahnya sini kak?  
(agak bingung)
- P : dibaliknya aja ris, kan  
masih kosong.
- S<sub>2.22</sub> : iya kak, (sambil  
menulis jawaban).
- P : iya ditulis disitu, hehe
- S<sub>2.23</sub> : sudah kak.
- P : iya, apa itu?
- S<sub>2.24</sub> : jadi, hubungan antar  
sudut yang saya pakai  
adalah sudut dalam  
bersebrangan (hmmm,,  
diam sejenak) dan  
sudut berpelurus.

Berdasarkan hasil transkrip wawancara di atas menunjukkan bahwa, Menurut sumarmo, penyebutan dan penunjukan aturan/*warrant* oleh subjek S<sub>2</sub> termasuk dalam indikator yang ketiga yakni menunjukkan aturan/*warrant* sebagai hal yang menjembatani pernyataan dan kesimpulan. Subjek S<sub>2</sub> dapat menunjukkan dan menyebutkan aturan/*warrant* yang dipakai untuk proses menyelesaikan soal matematika. Subjek S<sub>2</sub> menuliskan dan menunjukkan aturan yang digunakan yaitu tentang hubungan antar sudut. Dalam hubungan antar sudut terdapat beberapa definisi-definisi sudut. Kemudian subjek S<sub>2</sub> dapat memilih definisi sudut yang akan digunakan dan menuliskannya pada lembar jawaban yang sudah di sediakan. Subjek S<sub>2</sub> memilih menggunakan definisi sudut dalam berseberangan dan definisi sudut berpelurus untuk menyelesaikan pembuktian geometri.

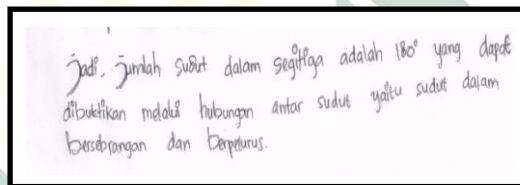
Penjelasan mengenai definisi sudut dalam berseberangan dan sudut berpelurus dilakukan pada waktu wawancara. Subjek  $S_2$  mengalami proses berpikir yang cepat tanggap akan pertanyaan yang diberikan oleh peneliti pada waktu wawancara. Subjek  $S_2$  langsung menjawab dengan cepat dan yakin bahwa akan menggunakan konsep hubungan antar sudut untuk menyelesaikan tes matematika yang telah diberikan. Selanjutnya subjek  $S_2$  memilih dan menunjukkan aturan/warrant yang akan digunakan yaitu definisi sudut dalam berseberangan dan sudut berpelurus. Tidak hanya memilih dan menunjukkan aturan/warrant saja, akan tetapi subjek  $S_2$  dapat menjelaskan aturan/warrant yang digunakan dalam menyelesaikan tes matematika. Subjek  $S_2$  telah mengalami proses berpikir dalam menunjukkan aturan/warrant sebagai jembatan antara pernyataan dan kesimpulan dengan baik. Pada tahap ini, subjek  $S_2$  mengalami tahap proses pada teori Gray-Tall dengan baik.

Berdasarkan hasil analisis data di atas dapat disimpulkan bahwa, subjek  $S_2$  mampu menunjukkan aturan/warrant sebagai hal yang menjembatani antara pernyataan dan kesimpulan pada pembuktian geometri. Subjek  $S_2$  dapat menunjukkan dan menyebutkan hubungan antar sudut tepatnya dengan memakai definisi sudut dalam berseberangan dan sudut berpelurus. Proses berpikir subjek  $S_2$  juga telah melakukan tahap proses pada teori Gray-Tall dengan baik. Subjek  $S_2$  dengan cepat menjawab pertanyaan yang diberikan tentang menunjukkan aturan yang akan dipakai.

- 3) Mengidentifikasi apa yang menjadi kesimpulan dalam pembuktian geometri

Berdasarkan deskripsi data di atas menunjukkan bahwa, subjek  $S_2$  dapat

mengidentifikasi apa yang menjadi kesimpulan dari tes matematika yang diberikan tentang pembuktian geometri. Subjek  $S_2$  secara cepat dan yakin menjawab pertanyaan yang diberikan tentang kesimpulan dari pembuktian geometri. Subjek  $S_2$  menyebutkan dan mengidentifikasi bahwa kesimpulan dari soal yakni jumlah sudut-sudut dalam segitiga adalah 180 derajat. Menurut Sumarmo, identifikasi dan penyebutan oleh subjek  $S_2$  termasuk dalam indikator keempat yakni mengidentifikasi apa yang menjadi kesimpulan dalam pembuktian geometri. Adapun jawaban tertulis subjek  $S_2$  dalam mengidentifikasi kesimpulan dalam pembuktian ditunjukkan pada Gambar 4.11 berikut ini.



**Gambar 4.11**

**Potongan jawaban tertulis subjek  $S_2$**

Berikut ini adalah lanjutan kutipan transkrip wawancara subjek  $S_2$  tentang identifikasi kesimpulan:

- P : selanjutnya, apa kesimpulan dari soal ini?  
 $S_{2.26}$  : kesimpulan yang saya dapat dari soal ini adalah sudut dalam segitiga adalah 180 derajat.

Berdasarkan hasil transkrip wawancara di atas menunjukkan bahwa, subjek  $S_2$  dapat mengidentifikasi apa yang menjadi kesimpulan pada pembuktian geometri. Subjek  $S_2$  dengan



cepat menjawab dan yakin bahwa jumlah sudut-sudut dalam segitiga ABC adalah 180 derajat. Hal ini sesuai dengan Sumarmo, identifikasi kesimpulan subjek  $S_2$  termasuk dalam indikator keempat yaitu mengidentifikasi apa yang menjadi kesimpulan dalam pembuktian geometri.

Subjek  $S_2$  dapat berpikir cepat dan tepat dalam hal mengidentifikasi apa yang menjadi kesimpulan dikarenakan telah membuktikan soal yang telah diberikan. Pada tahap ini subjek  $S_2$  tidak mengalami kesulitan karena pertanyaan yang diberikan pada waktu wawancara telah terbukti dan sudah diselesaikan. Identifikasi suatu hal yang menjadi kesimpulan pada pembuktian geometri sangat diperlukan karena hal ini bisa menuntun dan mengarahkan ke tujuan akhir atau kesimpulan yang akan dicapai.

Berdasarkan analisis data di atas dapat disimpulkan bahwa subjek  $S_1$  mampu mengidentifikasi apa yang menjadi kesimpulan dalam pembuktian geometri dengan benar dan cepat. Proses berpikir untuk mengidentifikasi apa yang menjadi kesimpulan pembuktian dengan mengerjakan soal yang telah diberikan. Pada tahap ini subjek  $S_1$  juga melakukan tahap proses pada teori Gray-Tall dengan baik.

c. Prosep

Berdasarkan deskripsi data di atas menunjukkan bahwa, subjek  $S_2$  dapat mengetahui aturan-aturan penarikan kesimpulan dari proses pembuktian geometri yang logis. Subjek  $S_2$  memakai aturan hubungan antar sudut dalam menyelesaikan pembuktian geometri. Hubungan antar sudut meliputi banyak definisi sudut-sudut, akan tetapi subjek  $S_2$  memakai definisi sudut dalam berseberangan dan sudut berpelurus dalam menyelesaikan soal pembuktian. Menurut Sumarmo, penjelasan dan

penunjukkan dari subjek  $S_2$  di atas termasuk dalam indikator yang kelima yakni mengetahui aturan-aturan penarikan kesimpulan dari proses pembuktian geometri yang logis. Berikut adalah cuplikan transkrip wawancara dengan subjek  $S_2$ :

P : oke, bagus, sudahkah kamu yakin dengan jawaban kamu ris?

$S_{2.27}$  : iya kak, yakin. (dengan cepat jawabnya)

P : kalau sudah yakin ris, terus bagaimana caranya kamu memeriksa kalau jawaban kamu ini sudah benar?

$S_{2.28}$  : ehmmm,, (diam sambil lihat jawaban)

P : begini, coba jelaskan aja jawaban kamu. Mulai dari mana tadi kerjakannya?

$S_{2.29}$  : oh ya kak, tadi mulai dari sini, (sambil nunjuk gambar)

P : oke, coba jelaskan, dari yang pertama sampai yang terakhir.

$S_{2.30}$  : iya kak, pertama saya beri garis bantu yang sejajar dengan garis AB.

P : terus?

$S_{2.31}$  : terus saya perpanjang kak, semua garis yang ada di segitiga siku-siku ABC, dan juga ada garis bantu yang sejajar dengan garis AB. Kemudian pada sudut B ini kak (sambil nunjuk sudut B), sudut B ini besarnya sama dengan sudut ini kak, karena sudut dalam bersebrangan.

P : oh ya, ini gambar satu ya?

S<sub>2.32</sub> : iya kak, ini masih gambar satu atau gambar yang ini (sambil tunjuk gambar)

P : oke, terus gambar yang ini bagaimana? (sambil tunjuk gambar lainnya dari jawaban)

S<sub>2.33</sub> : iya kak, jadi karena tadi sudah ada sudut dalam bersebrangan sudut B, sekarang sudut B yang ini kak. (sambil tunjuk gambar). Jadi sudut B yang ini juga sudut dalam bersebrangan dengan sudut ini kak. Terus sudut A adalah sudut siku-siku, ini juga sudut yang besarnya sama kak dengan sudut A, karena sudut A dalam bersebrangan dengan sudut ini (sambil tunjuk gambar).

P : iya, terus gambar selanjutnya?

S<sub>2.34</sub> : selanjutnya kak, kan dari gambar yang ini tadi dan gambar yang ini tadi sudah kak, kemudian digabung. Jadi sudut B bersebrangan dengan sudut ini, kemudian sudut A bersebrangan dengan sudut ini juga. Jadi membentuk sudut berpelurus kak.

P : bentar, gimana? Coba diulang (agak bingung)

S<sub>2.35</sub> : kan dari sudut B ini kak, kemudian sudut B ini besarnya sama dengan sudut ini karena sudut dalam bersebrangan kak. Kemudian

sudut A ini kak, ini kan juga sudut dalam bersebrangan dengan sudut ini. Jadi sudut-sudut ini membentuk sudut yang berpelurus kak.

P : oh.. iya, terus gambar yang terakhir gimana?

S<sub>2.36</sub> : iya kak, ini kan hampir sama kayak gambar yang sebelumnya kak, akan tetapi agak di perjelas sedikit, hehe (sambil ketawa). Sudut B yang ini besarnya sama dengan sudut ini kak, karena sudut dalam bersebrangan. Sudut B yang ini juga besarnya sama dengan yang ini karena sudut dalam bersebrangan juga (menunjuk sudut B yang tumpul). Sedangkan sudut A ini kak, besarnya juga sama dengan sudut ini, karena sudut dalam bersebrangan. Kemudian sudut-sudut ini kan ada dalam segitiga ABC kak, ini kan membentuk sudut berpelurus. Sedangkan sudut berpelurus kan besarnya 180 derajat.

Berdasarkan hasil wawancara di atas menunjukkan bahwa, subjek S<sub>2</sub> memahami aturan-aturan penarikan kesimpulan dari pembuktian geometri secara logis. Subjek S<sub>2</sub> tidak hanya mengetahui saja, akan tetapi juga bisa menjelaskan aturan-aturan yang dipakai dalam menyelesaikan soal pembuktian geometri. Menurut Sumarmo, penjelasan dari subjek S<sub>2</sub> di atas termasuk dalam indikator kelima yaitu mengetahui aturan-aturan

penarikan kesimpulan dari proses pembuktian geometri yang logis.

Subjek  $S_2$  menjelaskan aturan-aturan penarikan kesimpulan dari penyelesaian soal pembuktian geometri hanya dengan menunjuk jawaban yang dituliskan. Kemudian peneliti memberikan pertanyaan jika sudah yakin dengan jawaban yang telah dituliskan. Subjek  $S_2$  menjawab dengan cepat bahwa jawaban yang ditulis itu sudah benar dan yakin. Kemudian subjek  $S_2$  diberikan pertanyaan cara memeriksa bahwa jawaban yang telah dituliskan itu sudah benar. Subjek  $S_2$  terlihat sedikit kebingungan dan belum mengerti akan maksud dari pertanyaan yang diberikan. Selanjutnya subjek  $S_2$  diberikan sedikit tambahan rangsangan pertanyaan yang memperjelas maksudnya. Subjek  $S_2$  memahami pertanyaan tambahan yang diberikan dan mau menjelaskan jawabannya.

Subjek  $S_2$  menjelaskan jawabannya dimulai dari gambar yang pertama dia buat. Subjek  $S_2$  memberikan garis penolong atau garis bantu yang sejajar dengan sisi AB pada segitiga siku-siku ABC. Pemberian garis penolong atau garis bantu yang sejajar dengan sisi AB pada segitiga bertujuan untuk memudahkan proses pembuktian geometri. Penambahan garis penolong yang sejajar dengan sisi AB ini juga bertujuan agar membentuk sudut berpelurus jika ke tiga sudut dijumlahkan tanpa memindahkan sudut C. Subjek  $S_2$  membuat tanda sudut dengan simbol bertujuan bahwa besar sudut yang diberikan tanda sudut dengan simbol tersebut adalah sama. Kemudian subjek  $S_2$  memberikan tanda sudut dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” di sudut B yang besarnya juga sama dengan sudut yang ada tanda sudut dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” pada titik C di luar segitiga siku-siku ABC dan di atas garis BC. Subjek  $S_2$  memberikan tanda sudut yang sama

dikarenakan kedua sudut tersebut adalah sudut dalam berseberangan sehingga besar sudutnya sama.

Pada gambar kedua, subjek  $S_2$  memberikan tanda sudut dengan simbol “~~∠~~” pada sudut A. Sudut A pada gambar kedua mempunyai besar 90 derajat karena sudut A adalah sudut siku-siku. Subjek  $S_2$  memahami bahwa sudut siku-siku besarnya 90 derajat sehingga memberikan tanda sudut yang sama dengan simbol “~~∠~~” juga pada titik C di luar segitiga siku-siku ABC dan di sebelah kiri garis AC. Sudut yang mempunyai tanda dengan simbol “~~∠~~” besar sudutnya sama karena kedua sudut tersebut adalah sudut dalam berseberangan. Sudut yang mempunyai tanda sudut dengan simbol “~~∠~~” besarnya 90 derajat dan juga besar sudutnya sama dengan sudut A. Selanjutnya subjek  $S_2$  juga memberikan tanda sudut dengan simbol “~~∠~~” pada titik B di luar segitiga siku-siku ABC dan di atas garis BC. Subjek  $S_2$  bertujuan untuk menyamakan besar sudut tersebut sama dengan besar sudut C ditambah dengan sudut yang besarnya sama dengan sudut A dengan simbol “~~∠~~”. Subjek  $S_2$  beralasan bahwa kedua sudut tersebut merupakan sudut dalam berseberangan sehingga diberikan tanda sudut yang sama.

Pada gambar ketiga, subjek  $S_2$  menggambar segitiga siku-siku yang sudah banyak tanda sudutnya. Pada gambar ketiga ini subjek  $S_2$  bertujuan menggabungkan antara gambar satu dengan gambar yang kedua yang telah dibuat sebelumnya. Selanjutnya subjek  $S_2$  sudah memindahkan besar sudut A ke sudut di titik C pada luar segitiga ABC dengan simbol “~~∠~~”. Sudut A diberi tanda sudut dengan simbol “~~∠~~” besarnya 90 derajat dan besarnya sama dengan

sudut yang diberi tanda sudut dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” pada titik C di luar segitiga ABC dan di sebelah kiri garis AC. Subjek  $S_2$  beralasan bahwa kedua sudut tersebut adalah sudut dalam berseberangan. Selanjutnya pada sudut B, subjek  $S_2$  merubah tanda sudut dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” menjadi simbol “ $\sphericalangle$ ” pada gambar ketiga ini.

Besar sudut B pada segitiga siku-siku ABC sama dengan besar sudut yang diberi tanda sudut dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” oleh subjek  $S_2$  karena kedua sudut tersebut adalah sudut dalam berseberangan. Selanjutnya subjek  $S_2$  menggambar segitiga keempat untuk memperjelas bahwa jumlah sudut dalam segitiga adalah 180 derajat. Besar sudut A pada segitiga ABC sama dengan besar sudut dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” di luar segitiga ABC pada titik C dan di sebelah kiri garis AC karena sudut dalam berseberangan. Besar sudut B pada segitiga ABC sama dengan besar sudut dengan simbol “ $\sphericalangle$ ” di luar segitiga ABC pada titik C dan di atas garis BC. Kemudian subjek  $S_2$  memberikan pernyataan bahwa ketiga sudut tersebut membentuk sudut berpelurus. Besar sudut berpelurus adalah 180 derajat sehingga terbukti bahwa jumlah sudut dalam segitiga adalah 180 derajat.

Subjek  $S_2$  mempunyai proses berpikir mengkonstruksi bukti geometri yang baik. Hal ini bisa dilihat pada jawaban tertulis bahwa gambar yang telah dibuat runtut dan terstruktur. Gambar yang dibuat oleh subjek  $S_2$  tidak dipotong akan tetapi tetap seperti gambar yang pertama dibuat sampai pada gambar terakhir. Pada gambar terakhir terlihat bahwa sudut-sudut dalam segitiga dijumlahkan membentuk sudut berpelurus yakni di sudut C. Hal ini terbukti bahwa jumlah sudut dalam segitiga ABC adalah 180 derajat.

Pada tahap prosep (proses dan konsep) subjek  $S_1$  juga sudah paham akan konsep dan proses dari pembuktian geometri tersebut. Berikut adalah cuplikan transkrip wawancara subjek  $S_2$ :

P : sip, sekarang jika kamu mendengar pernyataan seperti itu, apa yang ada dalam pikiran kamu?

$S_{2.38}$  : ehmm (agak bingung).. belum paham kak?

P : iya, begini maksudnya, jika kamu mendengar pernyataan “jumlah sudut-sudut dalam segitiga berjumlah 180 derajat” apa yang ada dalam pikiran kamu? Atau apa yang terlintas pertama dalam pikiran kamu?

$S_{2.39}$  : jadi, jumlah sudut-sudut dalam segitiga adalah 180 derajat itu bisa di buktikan dengan hubungan antar sudut seperti ini..

P : oke..., kamu paham konsep dan prosesnya ?

$S_{2.40}$  : iya paham kak, konsep hubungan antar sudut dan prosesnya seperti ini tadi.

Berdasarkan hasil wawancara di atas, subjek  $S_1$  mengetahui dan paham akan konsep dari hubungan antar sudut dan bisa menggunakan konsep tersebut untuk proses pembuktian geometri. Pada tahap ini subjek  $S_2$  sudah melewati tahap prosep (proses dan konsep) pada teori Gray-Tall dengan baik, akan tetapi butuh sedikit rangsangan pertanyaan yang lebih untuk memahami maksud dari peneliti.



Pada tahap prosep ini subjek  $S_2$  juga diberikan pertanyaan yang berbeda oleh peneliti, yakni apakah mempunyai cara lain untuk membuktikan jumlah sudut-sudut dalam segitiga adalah 180 derajat. Subjek  $S_1$  menjawab dengan tenang dan mempunyai cara lain untuk membuktikannya yakni dengan kertas berbentuk segitiga. Berikut ini adalah cuplikan transkrip wawancara dengan subjek  $S_2$ :

P : bagus.. apa kamu punya cara lain untuk mengerjakan soal ini?

$S_{2.41}$  : ada kak, dengan kertas segitiga dipotong menjadi 3 bagian dan di satukan ujungnya nanti membentuk sudut berpelurus..

P : terus..?ada yang lain

$S_{2.42}$  : udah itu aja..

Berdasarkan hasil transkrip wawancara di atas, subjek  $S_2$  mempunyai cara lain untuk membuktikan pada soal yang diberikan yakni dengan kertas segitiga. Kemudian subjek  $S_2$  juga menjelaskan jika kertas segitiga tersebut dipotong dan sudut-sudutnya dijumlahkan. Setelah dijumlahkan atau disatukan akan membentuk sudut berpelurus. Kemudian peneliti memberikan pertanyaan lagi tentang cara lain dalam pembuktian sudut dalam segitiga. Subjek  $S_2$  menjawab dengan tenang yakni kalau hanya itu saja yang diketahui untuk menyelesaikannya.

Berdasarkan hasil analisis di atas menunjukkan bahwa, subjek  $S_2$  mampu mengetahui dan menjelaskan aturan-aturan penarikan kesimpulan dari proses pembuktian geometri yang logis. Subjek  $S_2$  juga sudah melalui tahap prosep (proses dan konsep) pada teori Gray-

Tall dengan baik. Subjek  $S_1$  paham akan konsep hubungan antar sudut dan prosesnya. Subjek  $S_1$  juga mempunyai cara yang lain untuk membuktikan jumlah sudut-sudut dalam segitiga dengan kertas berbentuk segitiga.

