Paket 6
POHON *(TREE)*

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada konsep pohon *(tree)*. Kajian dalam paket ini meliputi pengertian pohon *(tree)*, beberapa sifat graph pohon, dan graph pohon rentang.

Pada paket ini akan dibahas graph khusus yang disebut pohon *(tree)* dan permasalahan yang terkait. Ciri utama graph pohon adalah terhubung dan tidak memuat sikel. Sifat-sifat penting lainnya akan disajikan dalam paket ini.

Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkulahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan Labtob sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat membatu perkuliahan, serta kertas plano, spidol dan isolasi sebagai alat memaparkan kreatifitas hasil perkuliahan dengan membuat peta konsep.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Memahami konsep pohon *(tree)*

Indikator

Memahami pengertian pohon *(tree)*

Memahami sifat-sifat pohon

Waktu

3 x 50 menit

Materi Pokok

Pohon *(tree)*

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan awal (20 menit)

1. Brainstorming dengan mengamati slide
2. Penjelasan mengenai pentingnya mempelajari paket

Kegiatan Inti (110 menit)

1. Dosen menerangkan materi secara ceramah dan umpan balik.
2. Penguatan hasil diskusi dari dosen
3. Dosen memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberikan dorongan psikologis atau saran atau nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Lembar Kegiatan

Membuat contoh algoritma pohon

Tujuan

Mahasiswa dapat memahami pengertian pohon dan pohon rentang.

Bahan dan Alat

Proyektor / LCD dan Labtop

Langkah Kegiatan

1. Pilihlah seorang pemandu kerja kelompok dan penulis koknsep hasil kerja!
2. Diskusikan materi yang telah ditentukan dengan anggota kelompok!
3. Tuliskan hasil diskusi dalam bentuk peta konsep sebagaimana dalam contoh gambar diatas!
4. Tempelkan hasil kerja kelompok di papan tulis atau dinding kelas!
5. Pilihlah satu anggota kelompok untuk presentasi!
6. Presentasikan hasil kerja kelompok secara bergiliran, dengan waktu bergiliran masing-masing 20 menit.
7. Berikan tanggapan atau klarifikasi dari presentasi.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Uraian Materi

POHON *(TREE)*

Sebelum mempelajari materi ini, mari kita pelajari sejarah tentang hijrah nabi dari kota Mekkah ke kota Madinah. Peristiwa hijrah Rasululllah SAW dari Mekkah ke Madinah terjadi setelah agama Islam mulai banyak dianut oleh orang arab di Mekkah. Pada waktu itu suasana di kota Mekkah memang sedang gawat darurat. Kaum kafir Quraisy yang sangat membenci Nabi Muhammad SAW mencapai kemarahan yang memuncak dikarenakan dakwah beliau yang semakin menyebar luas di kota Mekkah. Mereka berkumpul dalam sebuah perkumpulan para kabilah kaum kafir Quraisy untuk membahas rencana menghentikan dakwah beliau dengan cara apapun. Diantara mereka adalah Abu Jahal, Abu Lahab, Abu Sufyan bin Harb, Tuaimah bin Ad, dan Utbah bin Rabi'ah. Mereka memutuskan pendapat membahas keputusan dan harus dipatuhi oleh seluruh kabilah, yaitu Muhammad harus dibunuh.

Mereka pun menyusun rencana untuk membunuh Nabi Muhammad SAW. Mereka membuat perjanjian pada setiap kabilah, barangsiapa yang dapat membunuh Muhammad SAW, akan diberikan 1000 ekor unta. Namun ketika mereka merencanakan tipu daya itu, Allah SWT menurunkan wahyu perintah hijrah kepada Nabi Muhammad SAW. Allah SWT. Juga memberitahu beliau tentang rencana jahat kaum kafir Quraisy yang akan membunuh beliau. Wahyu tersebut tecantum dalam Al-Qur'an surah al-Anfal ayat 30 berikut :

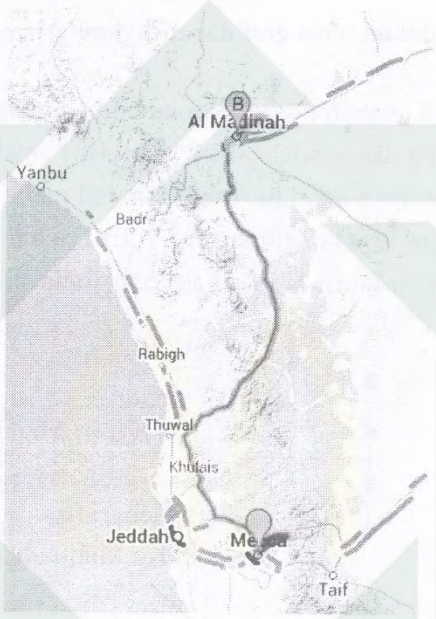
وَإِذْ يَمْكُرُ بِكَ ٱلَّذِينَ كَفَرُوا۟ لِيُثْبِتُوكَ أَوْ يَقْتُلُوكَ أَوْ يُخْرِجُوكَ ۚ وَيَمْكُرُونَ وَيَمْكُرُ ٱللَّهُ ۖ وَٱللَّهُ خَيْرُ ٱلْمَٰكِرِينَ ﴿٣٠﴾

Dan (ingatlah), ketika orang-orang kafir (Quraisy) memikirkan daya upaya terhadapmu untuk menangkap dan memenjarakanmu atau membunuhmu, atau mengusirmu, mereka memikirkan tipu daya dan

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Allah menggagalkan tipu daya itu. Dan Allah sebaik-baik pembalas tipu daya.[1]

Allah memberi jalan keluar Nabi Muhamad SAW agar sampai ke Yatsrib (sekarang Madinah) dengan selamat. Rutenya kurang lebih dapat dijelaskan sebagai berikut:



Peta Geografis
Mekkah Ke Madinah

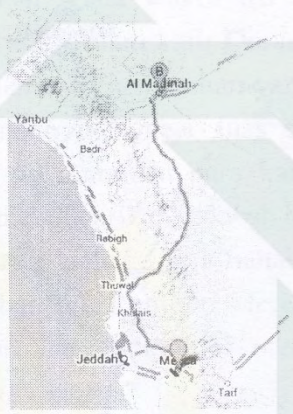
Pada malam gelap setelah mendapat wahyu beliau ke rumah Abu Bakar ra. Dengan ditemani Abu Bakar, beliau menuju Gua Tsur yang terletak kurang lebih 5 km di luar kota Mekkah untuk bersembunyi dari kepungan kaum kafir selama tiga hari. Setelah itu, perjalanan dilanjutkan ke Quba'. Beliau tiba di Quba' pada tanggal 23 September 622 M. Disana beliau mendirikan sebuah Masjid yang kelak dikenal dengan sebutan Masjid Quba'. Kemudian bersama rombongan beliau sampai di Yatsrib pada hari Jum'at 27 September 622 M. Kemudian di desa Bani Salim beliau dan

[1] Al-Qur'an, 8 (al-Anfal): 30.

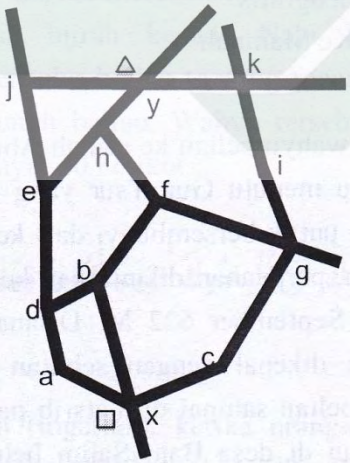
digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

muslimin melaksanakan sholat Jum'at. Inilah peristiwa sholat Jum'at yang pertama kali yang dilakukan Nabi Muhammad SAW.[2]

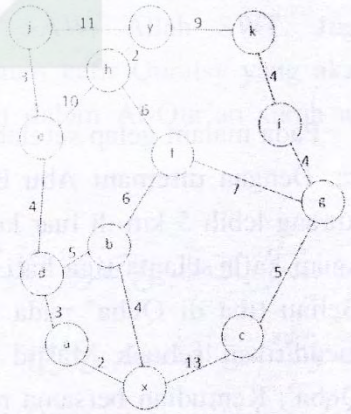
Demikianlah perjalanan Nabi Muhammad SAW hijrah dari Mekkah Menuju Madinah yang luar biasa. Peristiwa ini kemudian ditetapkan sebagai awal tahun Hijriyah oleh Khalifah 'Umar bin Khattab. Rute perjalanan hijrah Nabi Muhammad SAW dari Mekkah Ke Madinah melalui jalur terpendek dalam teori graf dapat digambarkan sebagai berikut :



Peta Geografis
Mekkah Ke Madinah



Peta Jaringan Jalan
Mekkah Ke Madinah



Graph dari Jaringan
Mekkah Ke Madinah

[2]Arifin Sunaryo, (*Sejarah Peradaban Islam Kelas II*), (Jakarta : 2011), 26

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

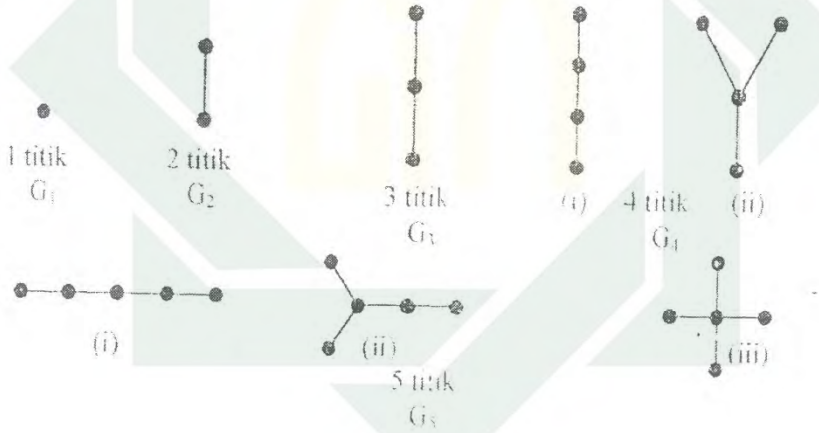
A. Beberapa Sifat Graph Pohon

Definisi 6.1

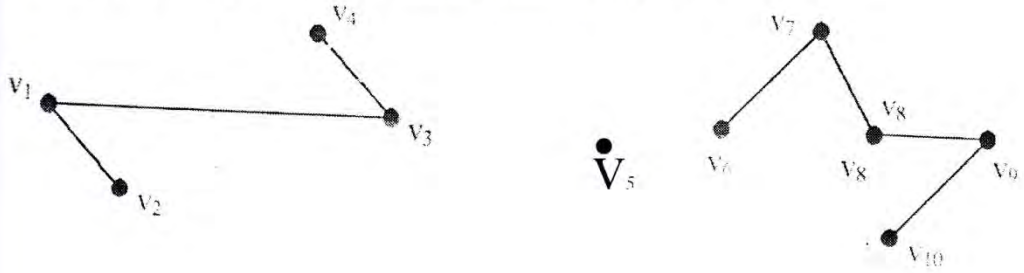
Sebuah graph G disebut pohon *(tree)* jika G graph terhubung dan tidak memiliki sikel. Sedangkan sebuah graph yang setiap komponennya pohon disebut hutan *(forest)*.

Ilustrasi berikut merupakan gambaran dari pohon dengan maksimal 5 titik.

Misalkan u dan v adalah titik-titik 0 dan sisi e = u, v (sering ditulis e = uv) adalah sisi dari G. Dalam hal ini dikatakan bahwa sisi e menghubungkan titik-titik u dan v, titik u dan titik v berhubungan langsung *(adjacent)* di G, u dan v adalah titik-titik akhir dari sisi e, sisi e terkait *(incident)* dengan titik u dan v.



Sedangkan graph tak terhubung H di bawah ini dengan tiga komponen dan setiap komponen dari H adalah pohon merupakan hutan.



digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Teorema 6.2

Jika G graph pohon maka untuk setiap dua titik u dan v yang berbeda di G terdapat tepat satu lintasan *(path)* yang menghubungkan kedua titik tersebut.

Bukti

Misalkan u dan v adalah dua titik yang berbeda di graph pohon G. Karena G graph terhubung, maka terdapat lintasan yang menghubungkan u dan v. Andaikan P_1 dan P_2 adalah dua lintasan berbeda di G yang menghubungkan u dan v. Misalkan panjang P_1 kurang dari atau sama dengan panjang P_2.

Telusuri lintasan P_1 dari u ke v. Misalkan w_1, adalah titik pertama di P_1 dan P_2 sedemikian hingga titik berikutnya tidak di P_2. Ini terjadi karena G graph sederhana serta P_1 dan P_2 berbeda. Selanjutnya, misalkan W_2 adalah titik berikutnya yang terletak di P_1 dan P_2. Oleh karena itu, semua sisi dari w_1, dan W_2 membentuk sebuah sikel di G. Ini bertentangan dengan definisi bahwa pohon G tidak memiliki sikel. Jadi pengandaian salah, Dengan demikian teorema terbukti.

Beberapa hal yang dapat diturunkan dari teorema 6.2, yakni:

(i) Jika G graph tanpa gelung maka konvers dari teorema 6.2 yakni "jika untuk setiap dua titik u dan v yang berbeda di G terdapat satu lintasan *(path)* yang menghubungkan kedua titik tersebut maka G graph pohon" adalah benar.

(ii) Jika sebuah sisi dari pohon G dihapus maka diperoleh graph baru tak terhubung yang memiliki tepat dua komponen dan masing-masing komponen merupakan pohon.

Teorema 6.3

Jika G graph pohon maka $|V(G)| = |E(G)| + 1$

Bukti

Mari kita buktikan teorema ini dengan induksi pada $|V(G)|$. Jika pohon G mempunyai satu titik, jelas banyaknya sisi G adalah nol. Jadi teorema benar untuk pohon G dengan satu titik.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Asumsikan bahwa pernyataan dalam teorema benar untuk pohon dengan k titik. Artinya jika pohon G mempunyai paling banyak k titik maka $|V(G)| = |E(G)| + 1$.

Akan ditunjukkan bahwa jika pohon G mempuyai k+1 titik, maka $|V(G)| = |E(G)| + 1$. Untuk itu, misalkan G adalah sebuah graph pohon dengan k+1 titik dan e adalah sebuah sisi G. Jadi graph G-e memiliki tepat dua komponen pohon dengan titik kurang dari k+1. Sehingga menurut asumsi, $|V(G_i)| = |E(G_i)| + 1$; $i = 1,2$.

Selanjutnya, $|E(G)| = |E(G_1)| + |E(G_1)| + 1$. Sehingga

$$\begin{aligned} |V(G)| &= |E(G_1)| + |E(G_2)| \\ &= |E(G_1)| + 1 + |E(G_2)| + 1 \\ &= (|E(G_1)| + |E(G_2)| + 1) + 1 \\ &= |E(G_1)| + 1 \end{aligned}$$

Teorema 6.4

Jika $P = (v_0, v_1, v_2, ..., v_n)$ sebuah lintasan terpanjang di pohon G, maka $d(v_0) = d(v_n) = 1$.

Bukti

Misalkan G sebuah pohon dan $P = (v_0, v_1, v_2, ...v_n)$ lintasan terpanjang di G. Andaikan $d(v_0) \neq 1$, maka $d(v_0) > 1$. Berarti ada paling sedikit dua sisi G yang terkait (insiden) dengan v_0. Misalkan $e \neq v_0v_1$ sebuah sisi G yang terkait dengan v_0. Karena P lintasan terpanjang di G dan G sederhana, sisi e harus menghubungkan v_0 dengan sebuah titik lain di P, katakan titik v_k, $k \neq 0$ dan $k \neq 1$. Akibatnya $(v_0, v_1, v_2, ..., v_k, v_0)$ membentuk sikel di G. Ini bertentangan dengan kenyataan bahwa G sebuah pohon, jadi pengandaian $d(v_0) \neq 1$ salah. Dengan kata lain $d(v_0) = 1$. Dengan argumen yang serupa, dapat ditunjukkan $d(v_n) = 1$

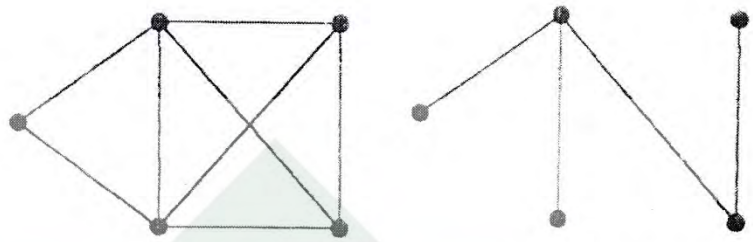
B. Pohon Rentang

Definisi 6.5

Misalkan G sebuah graph. Sebuah pohon di G yang memuat semua titik G disebut pohon rentang *(spanning tree)* dari G.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Contoh 6.1



G graph terhubung T pohon rentang

Contoh 6.2

Diketahui graph komplit K_4

Buatlah pohon rentang dari K_4 (minimal 5 buah)

Jawab

Kemungkinan-kemungkinan pohon rentang dari K_4

(i) (ii) (iii) (iv) (v)

Sebuah graph terhubung mungkin memuat lebih dari satu pohon rentang, seperti terlihat pada contoh 6.2.

Selanjutnya, T(G) melambangkan banyaknya pohon rentang di graph G. Adakah cara yang dapat dipakai untuk menentukan banyaknya pohon rentang di dalam sebuah graph? Jawaban dari pertanyaan tersebut akan diberikan pada sifat-sifat berikut, namun sebelumnya perlu memahami notasi-notasi berikut.

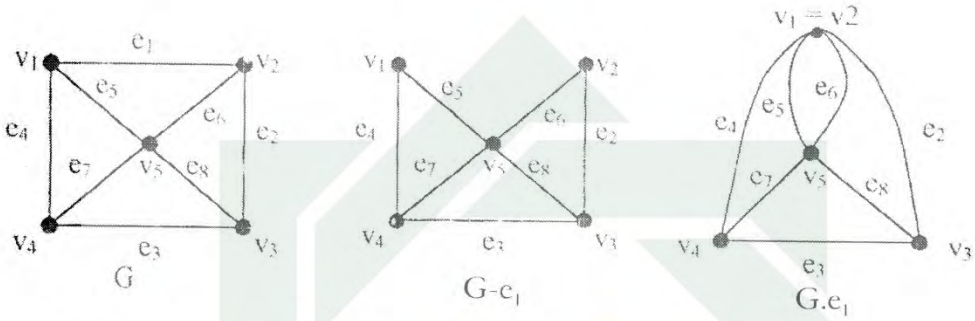
Misalkan e sebuah sisi dari graph G.

Sebuah graph yang diperoleh dari G dengan menghapus sisi e dari G dan menyatukan kedua titik akhir dari e, dilambangkan dengan G.e.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Contoh 6.3

Diketahui graph komplit K_4 berikut:
Gambarlah $G\text{-}e_1$ dan $G.e_1$
Jawab



Perhatikan bahwa banyaknya komponen G sama dengan banyaknya komponen G.e. Begitu pula $|E(G.w)| = |E(G)|-1$ dan $|V(G.w)| = |V(G)|-1$. Sifat-sifat yang berlaku pada pohon rentang diantaranya: (1) Graph G terhubung jika dan hanya jika G memuat pohon rentang. (2) Jika e sebuah sisi di graph G, maka $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G.e)$.

<u>Teorema 6.5</u>
Jika e sebuah sisi di graph G, maka $\tau(G) = \tau(G\text{-}e) + \tau(G.e)$.

Bukti

Misalkan e adalah sebuah sisi di graph G. Setiap pohon rentang G yang tidak memuat sisi e adalah juga pohon rentang di G-e. Begitu pula setiap pohon rentang di G-e adalah pohon rentang di G yang tidak memuat e.

Sehingga, $\tau(G\text{-}e)$ adalah banyaknya pohon rentang di G yang tidak memuat sisi e. Sekarang setiap pohon rentang G yang memuat sisi e, berkorespondensi dengan sebuah pohon rentang G.e. Sehingga, $\tau(G) = \tau(G\text{-}e) + (G.e)$. (terbukti)

Catatan :

1. Teorema 6.5 memberikan prosedur yang sistematis untuk menentukan banyaknya pohon rentang dari sebuah graph. Namun,

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

prosedur tersebut tidak efisien (praktis) untuk graph-graph yang besar.

2. Untuk graph yang komplit dengan n titik, Cayley (1889) menemukan formula berikut : $\tau(K_n) = n^{n-2}$. Misalnya graph komplit degan 5 titik mempunyai $5^3 = 125$ pohon rentang.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Rangkuman

1. Sebuah graph G disebut pohon *(tree)* jika G graph terhubung dan tidak merniliki sikel. Sedangkan sebuah graph yang setiap komponennya pohon disebut hutan *(forest).*
2. Graph bobot adalah graph yang setiap sisinya dikaitkan dengan suatu bilangan real. Sedangkan bobot suatu graph adalah jumlah bobot semua sisinya
3. Untuk mencari panjang lintasan terpendek dari sebuah titik s ke sebuah titik t di graph bobot 0 (dengan bobot setiap sisi 0 bilangan non negatif) digunakan algoritma yang dikembangkan oleh Dijkstra.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Buatlah gambar semua pohon dengan 7 titik dan semua pohon dengan 8 titik.
2. Jika graph G tanpa loop dan setiap dua titik G dihubungkan oleh tepat satu lintasan, maka G adalah pohon. Benar atau salahkah pernyataan tersebut? Mengapa?
3. Jika graph G terhubung tanpa sikel dan u, v $\in$ V(G), maka graph G $\cup$ {uv} memuat tepat satu sikel.
4. Graph G adalah pohon dengan derajat maksimum Δ. Tunjukkan bahwa G mempunyai paling sedikit Δ titik yang berderajat 1.
5. Suatu *hydrocarbon* jenuh adalah sebuah molekul C_mH_n dimana setiap atom karbon mempunyai 4 ikatan, setiap atom hidrogen mempunyai satu ikatan, dan tidak ada barisan ikatan membentuk sikel. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif m, C_mH_n ada hanya jika n=2m+2.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Pohon *(tree)*

Referensi

Al-Qur'an al-karim

Budayasa, *I Ketut. Matematika Diskrit I.* Surabaya: University Press IKIP Surabaya.1997

Kusaeri, Ettie Rukmigarsari. *Matematika Diskrit.*Malang:UIN Malang. 2003

Yusuf, Ahmad Muhammad. *Ensokopedi tematis Ayat Al-qur'an dan Hadits Jilid II* jakarta:Widya Cahaya, 2009

Sunaryo, Arifin. *Sejarah Peradaban Islam Kelas IV.* Jakarta : Media Ilmu, 2011

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id