Paket 8
SIRKIT EULER

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada konsep sirkit Euler. Kajian dalam paket ini meliputi pengertian sirkit Euler, Algoritma Fleury, dan Algoritma Heilholzer.

Dalam paket 8 ini, mahasiswa akan mengaji pengertian sirkit Euler mengidentifikasi algoritma Fleury dan algoritma. Sebelum perkuliahan berlangsung, dosen menampilkan slide materi awal untuk memancing ide-ide kreatif mahasiswa. Mahasiswa juga diberi tugas untuk membaca uraian materi dan mendiskusikannya dengan panduan lembar kegiatan. Dengan dikuasainya dasar-dasar dari paket 1 ini diharapkan dapat menjadi modal bagi mahasiswa untuk mempelajari paket selanjutnya.

Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkulahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan Laptob sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat membatu perkuliahan.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Memahami sirkit Euler

Indikator

Memberikan contoh sirkit Euler

Menerapkan algoritma Fleury dalam pemecahan masalah

Memahami algoritma Heilholzer

Waktu

3 x 50 menit

Materi Pokok

Sirkit Euler

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan awal (20 menit)

1. Brainstorming dengan mengamati slide
2. Penjelasan mengenai pentingnya mempelajari paket

Kegiatan Inti (110 menit)

1. Membagi mahasiswa dalam 3 kelompok
2. Masing-masing kelompok mendiskusikan subtema :
   Kelompok 1 : Sirkit Euler
   Kelompok 2 : Algoritma Fleury
   Kelompok 3 : Algoritma Heilholzer
3. Presentasi hasil diskusi dari masing-masing kelompok
4. Selesai presentasi setiap kelompok, kelompok lain membaerikan klarifikasi
5. Penguatan hasil diskusi dari dosen
6. Dosen memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberikan dorongan psikologis atau saran atau nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya

Lembar Kegiatan

Membuat contoh algoritma Euler

Tujuan

Setelah mempelajari materi ini diharapkan mahasiswa dapat menentukan sirkit Euler pada graph Euler dengan algoritma Fleury atau dengan algoritma Heilholzer

Bahan dan Alat

Proyektor dan Labtob

Langkah Kegiatan

1. Pilihlah seorang pemandu kerja kelompok dan penulis konsep hasil kerja!
2. Diskusikan materi yang telah ditentukan dengan anggota kelompok!
3. Tuliskan hasil diskusi dalam bentuk peta konsep sebagaimana dalam contoh gambar diatas!
4. Tempelkan hasil kerja kelompok di papan tulis atau dinding kelas!
5. Pilihlah satu anggota kelompok untuk presentasi!
6. Presentasikan hasil kerja kelompok secara bergiliran, dengan waktu bergiliran masing-masing 20 menit.
7. Berikan tanggapan atau klarifikasi dari presentasi.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Uraian Materi : Sirkit Euler

SIRKIT EULER

Sebelum menkaji materi ini, marilah kita sejenak renungkan tentang ayat-ayat al qur'an berikut ini dengan seksama.

وَٱلْعَصْرِ ۝١ إِنَّ ٱلْإِنسَٰنَ لَفِى خُسْرٍ ۝٢ إِلَّا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ وَعَمِلُوا۟ ٱلصَّٰلِحَٰتِ
وَتَوَاصَوْا۟ بِٱلْحَقِّ وَتَوَاصَوْا۟ بِٱلصَّبْرِ ۝٣

Demi masa. Sesungguhnya manusia itu benar-benar dalam kerugian. Kecuali orang-orang yang beriman dan mengerjakan amal saleh dan nasehat menasehati supaya mentaati kebenaran dan nasehat menasehati supaya menetapi kesabaran.[1]

Sabar merupakan akhlak terpuji yang harus dimiliki setiap Muslim. Pepatah Arab menyebutkan, "Orang yang bersabar akan memperoleh kemenangan."

Dari segi bahasa, *shabr* artinya menahan dan mengendalikan diri agar tidak "dijajah" hawa nafsu dan emosi. Dalam kitab *Tahdzib Madarik al-Salikan*, Ibnu al-Qayyim mendefinisikan sabar sebagai menahan diri untuk tidak melampiaskan nafsu angkara murka, mengendalikan lidah untuk tidak berkeluh kesah, dan mengontrol anggota tubuh untuk tidak bertindak anarki.

Orang yang sabar tidak hanya bersikap lapang dada saat menghadapi kesulitan dan musibah, tetapi juga teguh pendirian (*istiqamah*) dalam memperjuangkan kebenaran. Selalu dinamis dan optimistis dalam meraih masa depan yang lebih baik dan bermakna.Sabar bisa diklasifikasikan menjadi lima, yaitu sabar dalam ketaatan, sabar dalam menjauhi kemaksiatan, sabar dalam menerima dan menghadapi musibah, sabar dalam menuntut dan mengembangkan ilmu, serta sabar dalam bekerja dan

[1]Al-Qur'an, 103 (al-'ashr), 1-3

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

berkarya.Kelima bentuk kesabaran ini berkaitan erat dengan ketahanan mental spiritual, sehingga kesabaran itu selalu menuntut ketahanan jiwa dan kekayaan mental spiritual yang tangguh.

Dalam menuntut ilmu dan berkarya, misalnya, kesabaran sangat diperlukan karena kehidupan ini selalu berproses, memerlukan waktu, dan tidak instan. Ketika "melamar" menjadi murid Khidir, Nabi Musa AS diminta memenuhi satu syarat saja, yaitu sabar. Dalam banyak hal, ketidaksabaran merupakan awal dari penyimpangan dan kemerosotan moral. Korupsi, misalnya, merupakan wujud dari ketidaksabaran seseorang dalam meraih kekayaan secara halal dan legal. Kemacetan jalan raya sering kali disebabkan oleh ketidaksabaran pengguna jalan untuk disiplin dan antre. Menurut Ali bin Abi Thalib, sabar itu sebagian dari iman. Nilai sabar itu identik kepala pada tubuh manusia. Jika kesabaran telah tiada, berarti iman dalam diri manusia itu telah sirna.

Selain sabar, sifat yang diperlukan bagi ilmuwan muslim adalah sifat teliti. Teliti berarti berhati-hati, tidak gegabah dalam menyelesaikan suatu pekerjaan. Misalnya, dalam mengerjakan soal ulangan atau melakukan suatu pekerjaan. Orang yang memiliki sikap teliti tidak tergesa-gesa meninggalkan pekerjaan yang dilakukan. Teliti merupakan rangkain dari kerja keras, tekun dan ulet. Orang yang sudah bekerja keras dengan tekun dan ulet harus diakhiri dengan ketelitian. Dengan demikian, hasil kerja keras itu akan maksimal.

Misalnya ketika Rasulullah SAW menyikapi perlakuan kasar orang-orang kafir Quraisy terhadap umat Islam yang ada di Mekah, ketika nabi telah hijrah ke Madinah. Ketika itu para sahabat meminta nabi agar segera berperang melawan kezaliman kafir Quraisy. Tetapi nabi tidak tergesa-gesa. Untuk beberapa saat ia menunggu petunjuk dan perintah dari Allah lalu ia bicarakan dengan para sahabatnya tentang strategi apa yang dilakukan.

Berkat ketelitian dan usaha keras dari nabi dan para sahabat, perang Badar yang tidak seimbang (313 orang tentara Islam melawan 1000 tentara kafir Quraisy) akhirnya dimenangkan umat Islam. Dengan demikian, berupayalah dengan kerja keras, tekun, ulet, dan teliti sehingga hasil yang kita peroleh mengalami peningkatan dan akan lebih baik dari hari-hari sebelumnya.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Oleh karena itu, dalam menuntut ilmu marilah kita senantiasa berusaha semaksimal mungin dan bersabar serta teliti.

A. Beberapa Sifat Graph Pohon

Definisi 8.1

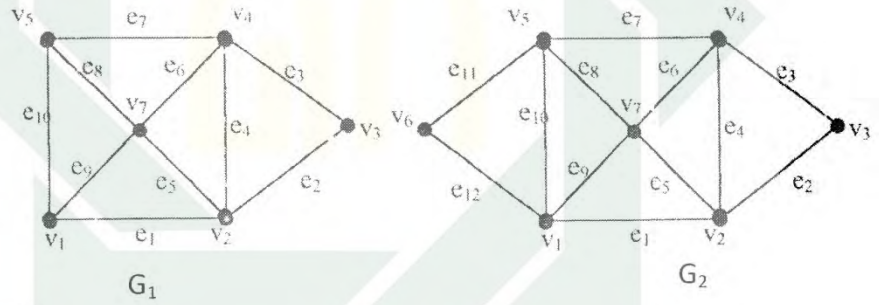
a) Suatu jejak di graph G disebut jejak Euler jika memuat semua sisi graph G.

b) Suatu graph G disebut graph Euler jika memuat sirkit Euler.

Untuk memahami definisi di atas, perhatikan contoh berikut ini:

Contoh 8.1

Tentukan jejak Euler pada graph G_1 dan selidiki apakah graph G_2merupakan graph Euler atau bukan?



Jawab

- Jejak Euler pada graph G_1 adalah: $v_1v_1v_2e_5v_7e_6v_4v_2e_2v_3e_3v_4e_7v_5e_8v_7e_9v_1e_{10}v_5$
- Graph G_2 merupakan graph Euler, karena G_2 mempunyai sirkit Euler. Sirkit Euler tersebut adalah $v_1e_1v_2e_5v_7e_6v_4e_4v_2e_2v_3e_3v_4e_7v_5e_8v_7$ $e_9v_1e_{10}v_5e_{11}v_6e_{12}v_1$.

Toerema 8.2

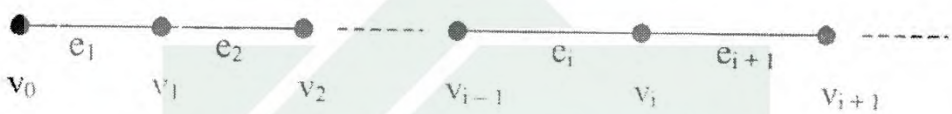
Jika G suatu graph dengan derajad setiap titiknya paling sedikit dua, maka G memuat sikel.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Bukti

Jika G bukan graph sederhana, maka G akan memuat suatu sikel karena sebarang loop adalah sikel dengan panjang 1. Sepasang sisi sejajar (sisi rangkap) memberikan suatu sikel dengan panjang 2.

Sekarang misalkan G graph sederhana, Andaikata v_o adalah sebarang titik di G. Karena $d(v_o) \geq 2$ maka dapat dipilih suatu sisi e_1 yang menghubungkan titik v_1 dengan v_o. Karena $d(v_1) \geq 2$ maka dapat dipilih sisi e_2 yang menghubungkan v_1 dan v_2 yang berbeda dengan v_o.



Dengan mengulangi langkah tersebut, sedemikian hingga pada langkah ke-(i + 1) terdapat sisi e_{i+1} yang menghubungkan v_{i+1} dengan v_i, dan $v_{i+1} \neq v_{i-1}$.

<u>Toerema 8.3</u>

Misalkan G graph terhubung.

G graph Euler jika dan hanya jika derajad setiap titik G genap.

Bukti

i. Akan dibuktikan: jika G graph terhubung dan G graph Euler maka derajad setiap titik G genap.

Karena G graph Euler maka berdasarkan definisi G mernuat sirkit Euler. Katakanlah sirkit Euler tersebut adalah sirkit C yang mempunyai titik awal dan titik akhir di u. Misalkan V sebarang titik di G dengan u dan v terletak pada sirkit C (karena G terhubung dan C memuat semua sisi dari graph G)

Kasus 1, u = v

Telusuri sirkit C pada graph G dengan titik awal u = v. u dan v sebagai titik awal dan titik akhir dari sirkit C, berarti u dan v selalu dituju dan ditinggalkan oleh sisi yang berbeda. Misalnya u dan v dilalui sebanyak k kali, maka banyaknya sisi dari C yang terkait dengan u dan v sebanyak 2k. Karena C memuat semua sisi graph G maka banyaknya sisi di graph G yang terkait dengan titik u dan v sebanyak 2k Jadi d (u) = d (v) adalah genap

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Kasus 2, u ≠ v

Telusuri sirkit C pada graph G dengan titik awal u, maka v merupakan titik internal karena u ≠ v. Karena v titik internal maka v selalu dituju dan ditinggalkan oleh sisi yang berbeda. Misalkan v dilalui sebanyak p kali, maka banyaknya sisi dari C yang terkait dengan v sebanyak 2p. Karena C memuat semua sisi graph G maka banyaknya sisi di graph G yang terkait dengan titik v sebanyak 2p. Jadi d (v) adalah genap.

ii. Jika G graph terhubung dan setiap titiknya berderajad genap maka G graph Euler.

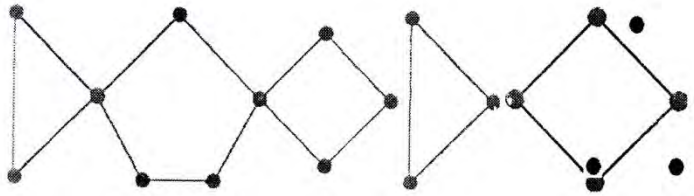
Untuk membuktikan pernyataan ini, akan dilihat dua kasus.

Kasus 1, graph G *tidak mempunyai sisi*

Bila G tidak punya sisi dan G terhubung maka G tentu akan memuat sebuah titik, katakan u dengan derajad O. Dengan demikian sirkit C = u (trivial) yang memuat semua sisi dari G. Jadi G merupakan graph Euler

Kasus 2, *graph G mempunyal sisi*

Karena G terhubung maka G tidak mempunyai titik yang berderajad O. Jika setiap titik berderajad genap maka setiap titik paling sedikit berderajad 2. Ini berarti G mernuat sikel. Sebutlah sikel tersebut C. Dalam hal ini dapat ditinjau dua kemungkinan lagi, (i) C mernuat setiap sisi G. Ini berarti G merupakan graph Euler, (ii) ada sisi G yang tidak termuat dalam C. Bila ini yang terjadi, maka untuk mendapatkan sirkit Euler di G dilakukan langkah-langkah sebagai berikut. Hapus sisi C untuk mernbentuk graph H dengan syarat titik-titik di H sarna dengan titik di G dan titik di H tetap berderajad genap (karena setiap titik yang derajadnya berubah-ubah mempunyai dua sisi yang terkait di titik tersebut). Dengan demikian setiap komponen H merupakan graph Euler.



G H

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Sekarang ambil titik sebarang di C (misalkan titik u). Telusuri sisi-sisi C sampai pada titik yang terdapat pada komponen H yang tidak kosong (misalkan v_1) Selanjutnya telusuri sirkit yang ada pada komponen H yang tak kosong tersebut dengan dimulai dan diakhiri di titik v_1. Proses ini dilanjutkan terus sampai ditemukan lagi komponen H yang tak kosong, hingga pada akhirnya akan kembali ke titik u. Karena setiap sisi dari G telah ditelusuri berarti G memuat sirkit Euler, hingga graph G merupakan graph Euler (terbukti).

Berikut ini akan diberikan dua algoritma untuk menentukan sirkit Euler pada sebuah graph Euler.

B. Algoritma Fleury

Langkah-langkah pada algoritma Fleury adalah sebagai berikut :

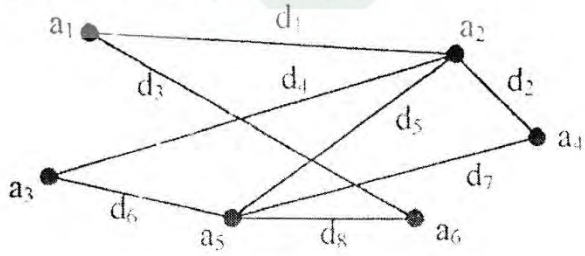
STEP 1 : Pilih sebarang titik v_0 di graph Euler G dan sebut $w_0 = v_0$

STEP 2 : jika jejak $w_i = v_0e_1v_1e_2 \ldots\ldots e_iv_i$ telah terpilih (dengan $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_i$ sedemikian hingga : e_{i+1} terkait dengan v_i dan kecuali tidak ada alternatif lain, e_{i+1} bukan jembatan dari sisi yang terhapus di sub graph G $\{e_1, e_2, \ldots\ldots, e_i\}$ Tulis $w_{i+1} = e_{i+1} + w_i$

STEP 3 : STOP jika w_{i+1} memuat semua sisi G, jika tidak kembali ke STEP 2

Contoh 8.2

Diketahui graph Euler G sebagai berikut :



Gunakan algoritma Fleury untuk menentukan sirkit Euler pada graph G diatas!

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Jawab

STEP 1 : pilih $v_0=a_1$, $w_0=a_1$

STEP 2 : pilih sisi $e_1=d_1$, $w_1=a_1d_1a_2$

STEP 2 : pilih sisi $e_2=d_2$, $w_2=a_1d_1a_2d_2a_4$

STEP 2 : pilih sis $e_3=d_7$, $w_3=a_1d_1a_2d_2a_4d_7a_5$ (walaupun d_7 jembatan di G_2 namun tidak ada pilihan lain)

STEP 2 : pilih sisi $e_4=d_5$, $w_4=a_1d_1a_2d_2a_4d_7a_5d_5a_2$ (d_8 tidak dipilih karena jembatan di G_3, sedangkan d_5 bukan)

STEP 2 : pilih sisi $e_5=d_4$, $w_5=a_1d_1a_2d_2a_4d_7a_5d_5a_2d_4a_3$

STEP 2 : pilih sisi $e_6=d_6$, $w_6=a_1d_1a_2d_2a_4d_7a_5d_5a_2d_4a_3d_6a_5$

STEP 2 : pilih sisi $e_7=d_8$, $w_7=a_1d_1a_2d_2a_4d_7a_5d_5a_2d_4a_3d_6a_5d_8a_6$

STEP 2 : pilih sisi $e_8=d_3$, $w_8=a_1d_1a_2d_2a_4d_7a_5d_5a_2d_4a_3d_6a_5d_8a_6d_3a_1$

STEP 3 : STOP, karena w_8 telah memuat sisi G

Jadi w_8 adalah salah satu sirkit Euler pada graph Euler G, dengan $w_8=a_1d_1a_2d_2a_4d_7a_5d_5a_2d_4a_3d_6a_5d_8a_6d_3a_1$

C. Algoritma Heilholzer

Algoritma Heilholzer dapat juga digunakan untuk menentukan sirkit Euler pada graph Euler. Caranya dengan berawal dari sebarang jejak tutup di E dan mengaitkan jejak berikutnya dengan jejak tersebut sampai semua sisi G termuat.

Adapun langkah-langkah pada algoritma Heilholzer adalah sebagai berikut:

STEP 1 : Pilih sebarang titik v di G dan pilih sebarang jejak tutup Wo di G dengan titik awal dan titik akhir di v. misalkan i = 0 (i merupakan counter)

STEP 2 : Jika E (Wi) =E (G), maka Stop. Ini merupakan sirkit Euler di G. Bila tidak, pilih titik Vi pada w_i yang terkait dengan salah satu sisi di G yang bukan di Wi. Sekarang pilih jejak tutup Wi pada subgraph G - $E(w_i)$ yang berawal dari titik Vi (Wi jejak berikutnya)

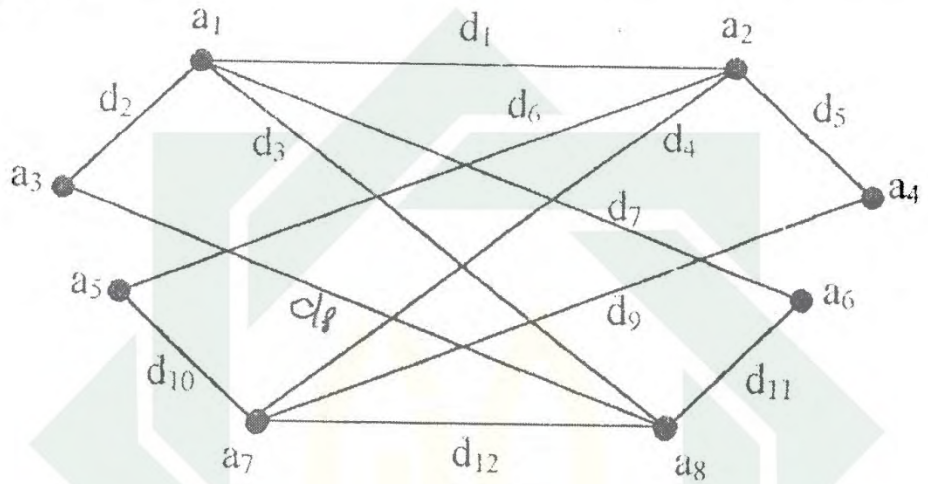
STEP 3 : Misalkan W_{i+1} jejak tutup yang terdiri dari sisi-sisi Wi dan Wi dengan titik awal V melintasi jejak Wi sampai Vi, kemudian melintasi jejak tutup Wi dan kembali ke titik Vi. Dengan

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

demikian jejak w_i lengkap. Misalkan i= i + 1 dan kembali ke STEP 2

Contoh 8.3

Gunakan algoritma Heilholzer untuk menentukan sirkit Euler pada graph berikut .



STEP 1: $v=a_1$, $w_0=a_1d_7a_6d_{11}a_8d_3a_1$

STEP 2: $v_0=a_1$, $w_0=a_1d_1a_2d_4a_7d_{12}a_8d_8a_3d_2a_1$

STEP 3: $w_1=a_1d_7a_6d_{11}a_8d_3a_1d_1a_2d_4a_7d_{12}a_8d_8a_3d_2a_1$

STEP 2: $v_1=a_2$, $w_1=a_2d_5a_4d_9a_7d_{10}a_5d_6a_2$

STEP 3: $w_2=a_1d_7a_6d_{11}a_8d_3a_1d_1a_2d_5a_4d_9a_7d_{12}a_8d_8a_3d_2a_1$

STEP 2: $E(w_2)=E(G)$ STOP W_2 sirkit Euler di G

Jadi sebuah sirkit Euler pada graph G di atas adalah $w_2=$ $a_1d_7a_6d_{11}a_8d_3a_1d_1a_2d_5a_4d_9a_7d_{12}a_8d_8a_3d_2a_1$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Rangkuman

1. (a) Suatu jejak di graph G disebut jejak Euler jika memuat semua sisi graph G. (b) Suatu graph G disebut graph Euler jika memuat sirkit Euler.

2. Jika G suatu graph dengan derajad setiap titiknya paling sedikit dua, maka G memuat sikel.

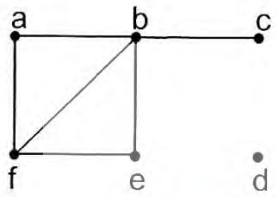
3. Untuk menentukan sirkit Euler pada sebuah graph Euler dapat digunakan Algoritma Fleury.

4. Algoritma Heilholzer dapat juga digunakan untuk menentukan sirkit Euler pada graph Euler. Caranya dengan berawal dari sebarang jejak tutup di E dan mengaitkan jejak berikutnya dengan jejak tersebut sarnpai semua sisi G termuat.

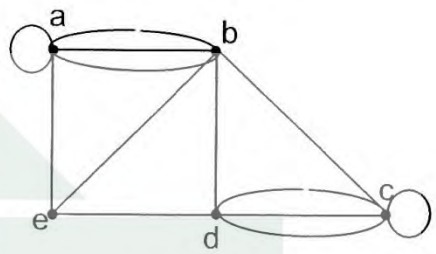
digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Latihan

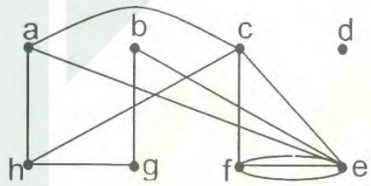
1. Hitunglah jumlah titik, jumlah garis dan derajat masing-masing titik graf berikut ini. Jika ada, tentukan titik terasing dan titik pendan.



(a

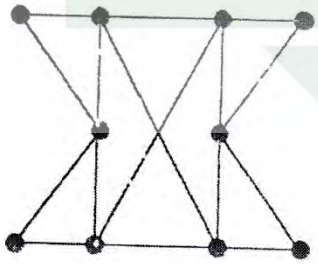


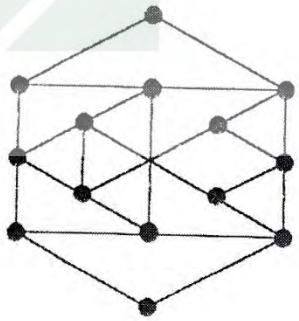
(b



(c

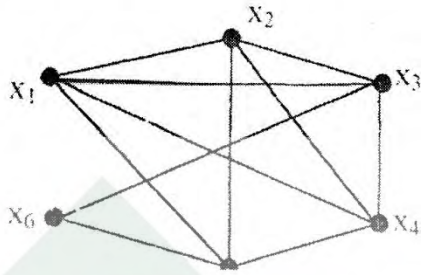
2. Tentukan manakah di antara graph-graph berikut yang mempunyai (a) lintasan Euler dan (b) sirkit Euler. Gunakan algoritma Fleury untuk menentukan suatu lintasan atau sirkit Euler.





digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

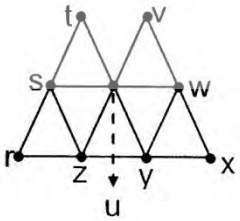
3. Gunakan algoritma Heilholzer untuk rnenentukan sirkit Euler pada graph G berikut.



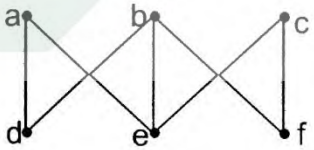
4. Apakah graf pada gambar di bawah mempunyai sirkuit Euler? Jelaskan! Bila jawaban saudara "Ya", maka berikan sirkuit Euler tersebut

A B

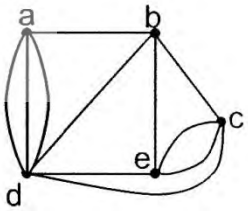
5. Tentukan mana di antara graf-graf berikut ini yang memiliki sirkuit Euler. Carilah sirkuit Euler untuk graf yang memilikinya.



(a



(b



(c

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Referensi

Al-Qur'an al-karim

Budayasa, *I Ketut. Matematika Diskrit I.* Surabaya: University Press IKIP Surabaya.1997

Kusaeri, Ettie Rukmigarsari. *Matematika Diskrit.* Malang:UIN Malang. 2003

Samuel Wibisono. *Matematika Diskrit.* Yogyakarta: Graha Ilmu.2008

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id