Paket 11
Ketebalan Sebuah Graph

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada konsep lanjutan grap planar. Kajian dalam paket ini meliputi ketebalan sebuah graph, graph dual, dan graph polyhedral. Paket ini sebagai lanjutan materi yang sebelumnya mengenai graph planar. Sehingga perlu sedikit mengulang materi sebelumnya mengenai teorema kuratowsky dan formula Euler.

Dalam paket 11 ini, mahasiswa akan mengkaji ketebalan sebuah graph, mengidentifikasi graph dual serta menganalisis graph polyhedrol. Sebelum perkuliahan berlangsung, dosen menampilkan slide berbagai bentuk graph planar untuk memancing ide-ide kreatif mahasiswa dalam upaya meningkatkan motivasi belajar. Mahasiswa juga diberi tugas untuk membaca uraian materi dan mendiskusikannya dengan teman pasangan.

Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkulahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan Laptop sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat membatu perkuliahan, serta kertas plano, spidol dan isolasi sebagai alat memaparkan kreatifitas hasil perkuliahan.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Memahami dan mengerti sifat-sifat graph planar

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat:

1. Mahasiswa dapat memahami ketebalan dari sebuah graph
2. Mahasiswa dapat menganalisis graph dual
3. Mahasiswa dapat menganalisis graph polyhedral

Waktu

3 x 50 menit (150 menit)

Materi Pokok

1. Memahami ketebalan dari sebuah graph
2. Menganalisis graph dual
3. Menganalisis graph polyhedral

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan awal (20 menit)

1. Brainstorming dengan mengamati slide berbagai kejadian mengenai graph planar dalam kehidupan sehari-hari
2. Penjelasan mengenai pentingnya mempelajari paket

Kegiatan Inti (110 menit)

1. Membagi mahasiswa dalam 3 kelompok
2. Masing-masing kelompok mendiskusikan subtema :
   Kelompok 1 : ketebalan dari sebuah graph
   Kelompok 2 : graph dual
   Kelompok 3 : graph polyhedral
3. Presentasi hasil diskusi dari masing-masing kelompok
4. Selesai presentasi setiap kelompok, kelompok lain memberikan klarifikasi
5. Penguatan hasil diskusi dari dosen

6. Dosen memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberikan dorongan psikologis atau saran atau nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya

Lembar Kegiatan

Membuat analisis mengenai ketebalan sebuah graph, graph dual dan graph polyhedral melalui beberapa gambar serta menjelaskan alasannya.

Tujuan

Mahasiswa mampu memahami dan mengerti sifat-sifat graph planar.

Bahan dan Alat

Spidol, papan, kertas plano, LCD, laptop

Langkah Kegiatan

1. Pilihlah seorang pemandu kerja kelompok dan penulis konsep hasil kerja!
2. Diskusikan materi yang telah ditentukan dengan anggota kelompok!
3. Tuliskan hasil diskusi pada kertas folio bergaris!
4. Tempelkan hasil kerja kelompok di papan tulis atau dinding kelas!
5. Pilihlah satu anggota kelompok untuk presentasi!
6. Presentasikan hasil kerja kelompok secara bergiliran, dengan waktu bergiliran masing-masing 20 menit.
7. Berikan tanggapan atau klarifikasi dari presentasi.

Uraian Materi

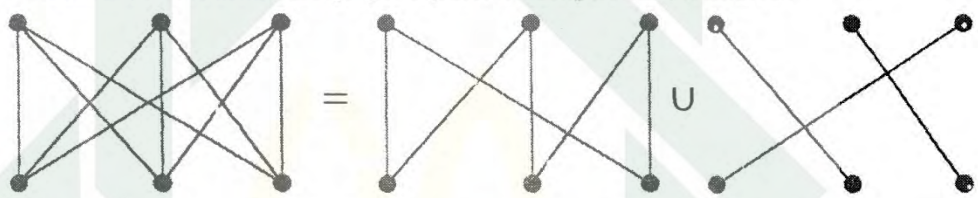
KETEBALAN SEBUAH GRAP

A. Ketebalan dari Sebuah Graph

<u>Definisi 11.1</u>

Ketebalaan (*thickness*) dari sebuah graph G, dinotasikan dengan θ (G) adalah minimum dari bilangan yang menyatakan banyaknya graph bagian-graph bagian planar dan G yang gabungannya sama dengan G.

Gabungan dari dua graph G dan H, ditulis G $\cup$ H adalah graph yang himpunan titiknya V (G) $\cup$ V (H) dan himpunan sisinya E (G) $\cup$ E (H). Misalkan, ketebalan dari graph bipartisi komplit $K_{3,3}$ adalah 2.



$K_{3,3}$ subgraph planar dari $K_{3,3}$ subgraph planar dari $K_{3,3}$

Yang perlu diperhatikan bahwa setiap graph planar G mempunyai ketebalan 1. Menentukan nilai eksak dari θ (G) untuk sembarang graph G merupakan masalah yang sulit. Namun sifat berikut ini memberikan batas nilai θ (G) untuk sembarang graph sederhana, yakni:

"Jika G graph sederhana dengan V (G) $\neq 2$, maka : $\theta (G) \geq \left\lceil \frac{|E(G)|}{3|V(G)|-6} \right\rceil$".

Pembuktian sebagai berikut:

Untuk V(G) = 1 diperoleh E(G) = 0 dan θ (G) = 1, sehingga

$\theta (G) = 1 \geq 0 = \left\lceil \frac{|E(G)|}{3|V(G)|-6} \right\rceil$

Selanjutnya, kita misalkan V(G) $\geq$ 3. Karena setiap subgraph planar dari G mempunyai paling banyak 3V(G)-6 sisi, sedangkan banyaknya sisi G adalah E(G), maka banyaknya subgraph planar dari G yang gabungannya sama dengan G, paling sedikit

$$\left\lceil \frac{|E(G)|}{3|V(G)|-6} \right\rceil$$

Selanjutnya, karena θ (G) bilangan bulat, maka

$$\theta\,(G) = \left\lceil \frac{|E(G)|}{3|V(G)| - 6} \right\rceil$$

yang merupakkan graph sederhana dengan $V(G) \neq 2$.

Beberapa yang perlu diperhatikan adalah

1. Karena graph komplit dengan n titik, K_n, mempunyai ½ n(n-1) sisi, maka untuk $n \neq 2$, diperoleh

$$\theta\,(K_n) \geq \left\lceil \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{3n-6} \right\rceil = \left\lceil \frac{\frac{n(n-1)}{2}+3(n-2)-1}{3n-6} \right\rceil = \left\lceil \frac{(n+7)(n-2)}{6(n-2)} \right\rceil = \left\lceil \frac{n+7}{6} \right\rceil$$

telah ditunjukkan oleh Beineke bahwa untuk $n \neq 4$ (mod 6).

$$\theta\,(K_n) = \left\lceil \frac{n+7}{6} \right\rceil$$

2. Dapat ditunjukkan bahwa graph sederhana G yang tidak memuat sikel dengan panjang 3, memenuhi hubungan berikut: $E(G) \leq 2V(G) - 4$. Sehingga graph bipartisi komplit $K_{m,n}$ memenuhi hubungan berikut:

$$\theta\left(K_{m,n}\right) \geq \left\lceil \frac{mn}{2(m+n-2)} \right\rceil$$

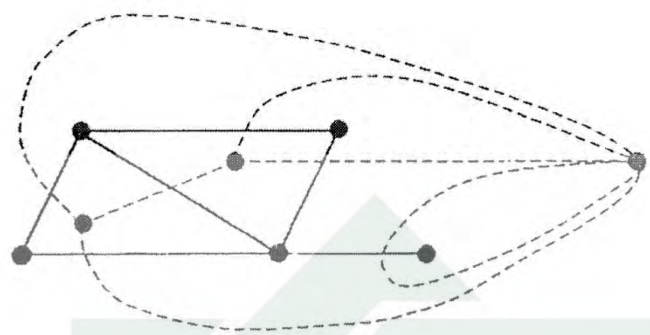
B. Graph Dual

Pandang sebuah graph planar G yang digambar pada bidang sedemikian hingga tidak ada sisi-sisi G yang saling berpotongan, kecuali mungkin pada titik-titik akhir sisi-sisi tersebut. Konstruksi sebuah graph G^* sedemikian hingga:

(i) Setiap titik G^* berkorespondensi dengan sebuah muka dari G.

(ii) Jika sebuah sisi e membatasi muka f_1 dan f_2 di G maka titik-titik G^* yang berkorespondensi dengan f_1 dan f_2 dihubungkan dengan sebuah sisi. Graph G^* yang dikonstruksi sebagaimana di atas, disebut graph dual dari G.

Contoh 11.1

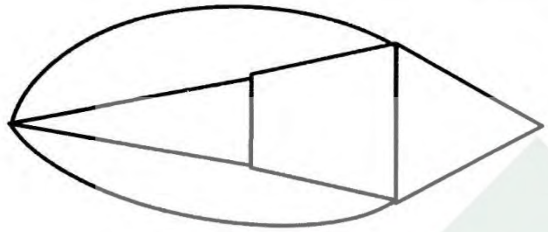


Graph G adalah graph yang digambar tebal, sedangkan dual dari G yakni G^* adalah graph yang digambar dengan garis putus-putus. Berdasarkan uraian di atas, antara unsur-unsur graph G dan G^* terdapat korespondensi satu-satu sebagai berikut:

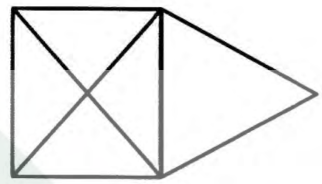
1) Sebuah muka G berkorespondensi dengan sebuah titik G^*. Ini berakibat $|F(G)| = |V(G^*)|$
2) Sebuah sisi G berkorespondensi dengan sebuah sisi G^*. Jadi $|E(G)| = |E(G^*)|$
3) Sebuah muka berderajat k di G berkorespondensi dengan sebuah titik berderajad k di G^*, sehingga $\sum_{f \in F(G)} d(f) = \sum_{V \in V(G)} d(v)$, dengan syarat G tidak
memuat loop dan titik berderajat 1.
4) Sebuah sisi yang terkait dengan sebuah titik yang berderajad satu di G berkorespondensi dengan sebuah gelung di G^*.
5) Sebuah titik berderajat dua di G, berkorespondensi dengan sepasang sisi rangkap di G^*.

Perhatikan bahwa, jika G dan H adalah dua graph planar yang isomorfik, maka belum tentu graph G* dan graph H* isomorfik.

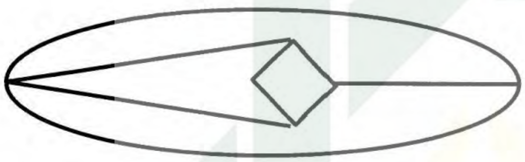
Misalnya dari graph-graph di bawah ini terlihat G ≅ H



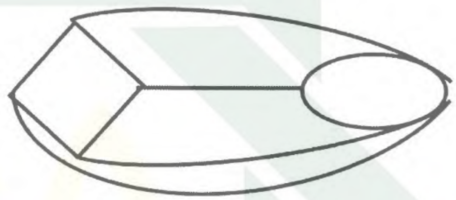
G



H



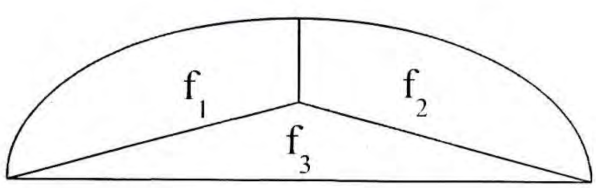
G*

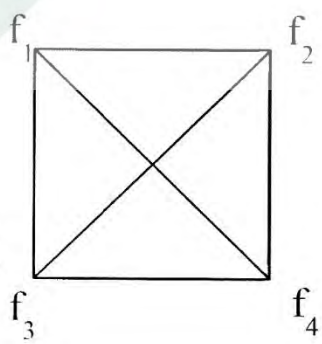


H*

Perhatikan bahwa H* memuat sebuah titik berderajat 5, sedangkan G* tidak memuat titik berderajat 5. Jelas G* dan H* tidak isomatrik.

Adakalanya sebuah graph planar isomatrik dengan dualnya. Graph demikian disebut graph dual-diri (self-dual graph). Graph G di bawah ini adalah sebuah contoh graph dual diri.





Perhatikan bahwa G ≅ G*

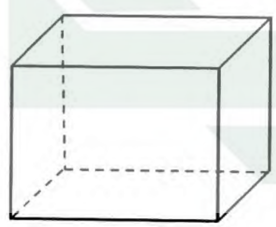
Terdapat hubungan antar banyaknya sisi dan banyaknya titik dari sebuah graph dual, yakni "jika G^* adalah dual graph planar G dan G isomorfik dengan G^* maka $E(G) = 2(V(G) - 1)$.

C. Graph Polyhedral

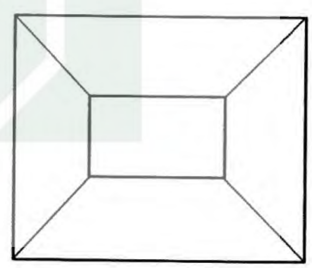
Bangun ruang dimensi 3 (padat) yang dibatasi oleh permukaan-permukaan yang berupa bidang datar polygonal (bidang datar segi-n, $n \geq 3$) disebut polyhedron. Apabila untuk setiap dua "titik interior" polyhedron dihubungkan dengan sebuah ruas garis dan ternyata keseluruhan ruas garis tersebut terletak di "interior" polyhedron, maka polyhedron tersebut disebut polyhedron konveks. Selanjutnya, polyhedron konveks yang setiap "permukaannya" berupa bidang-bodang datar polygonal beraturan yang kongruen disebut polyhedron beraturan. Sebagai contoh, balok "padat" adalah polyhedron dan kubus "padat" adalah polyhedron beraturan.

Titik-titik dan sisi-sisi dari sebuah polyhedron ("skeleton") membentuk sebuah graph sederhana di ruang dimensi 3. Jika polyhedron itu konveks, maka "skleleton (kerangka)nya" berupa graph bidang (planar) sederhana dan terhubung yang disebut polyhedral.

Perhatikan bahwa dalam graph polyhedral, derajat setiap titik paling sedikit 3, begitu pula derajat setiap muka paling sedikit 3.



Polyhedron
(Kubus)



Graph Polyhedral
(Kubus)

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa hanya terdapat 5 macam polyhedron beraturan.

Misalkan G adalah graph bidang (planar) terhubung. Derajat dari setiap titik G adalah $k \geq 3$ dan derajat dari setiap muka G adalah $m \geq 3$.
Berdasak "Lemma Jabat Tangan", diperoleh

$$E(G) = \frac{1}{2}\sum_{v \in V(G)} d(V) = ½\, k\, V(G) \text{ ....}(11.1)$$

Ketebalan Sebuah Graph

Karena setiap sisi membatasi tepat dua muka,

$$\frac{1}{2}\sum_{v \in V(G)} d(V) = 2|E(G)|$$

Selanjutnya, karena $d(f) = m$, $\forall\, f \in F(G)$ dan $E(G) = ½\, k\, V(G)$, diperoleh

$$mF(G) = kV(G)$$

atau

$$F(G) = \frac{k|V(G)|}{m} \text{ ....}(11.2)$$

Dari formula Euler kita tahu bahwa

$$V(G) - E(G) + F(G) = 2 \text{..............................}(11.3)$$

Dari persamaan-persamaan (i), (ii) dan (iii) diperoleh

$$V(G) = \frac{4m}{2m-km+2k} \text{ ....}(11.4)$$

Karena V(G)¯ 0 dan 4m¯ 0,

2m – km + 2k¯ 0,

Ekuivalen dengan

(k - 2)(m - 2)¯ 4 ....(11.5)

Karena k dan m bilangan bulat dengan $k \geq 3$ dan $m \geq 3$, maka semua kemungkinan nilai-nilai k dan m yang memenuhi (11.5) adalah :

$k = 3$ dan $m = 3$, atau

$k = 3$ dan $m = 4$, atau

$k = 3$ dan $m = 5$, atau

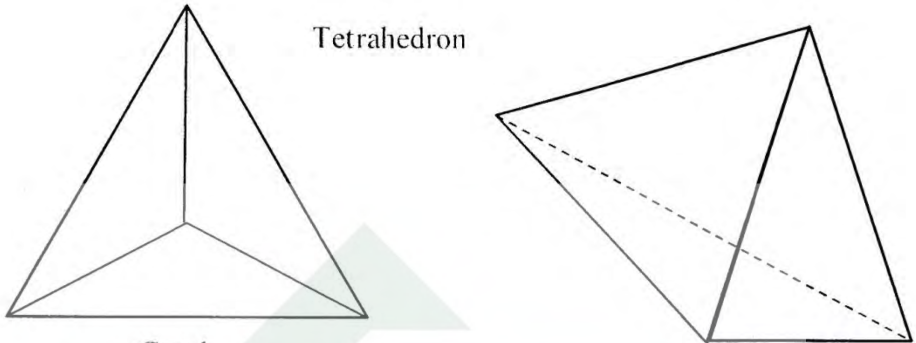
$k = 4$ dan $m = 3$, atau

$k = 5$ dan $m = 3$,

karena hanya ada 5 kemungkinan nilai-nilai k dan m, maka terbukti hanya ada 5 graph polyhedron beraturan.

a) Untuk $k = 3$ dan $m = 3$, dari (11.4) didapat $V(G) = 4$, dari (11.1) didapat $E(G) = 6$ dan dari (11.2) didapat $F(G) = 4$. Sehingga diperoleh polyhedron beraturan berikut, yang disebut "Tetrahedron".

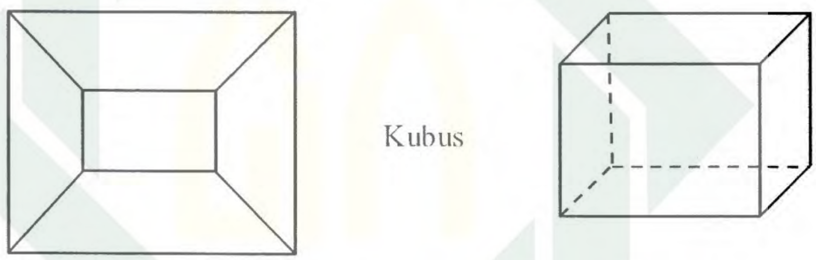
Tetrahedron



Graph

Bangun ruang

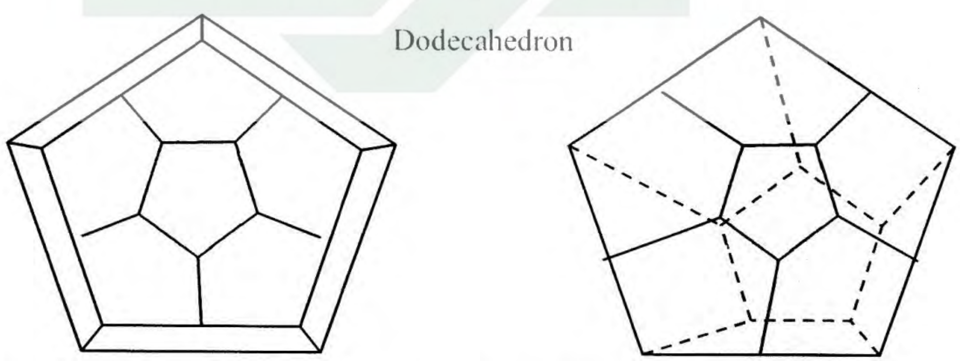
b) Untuk k = 3 dan m = 4 diperoleh V(G) = 8; E(G) = 12 dan F(G) = 8. Sehingga diperoleh polyhedron beraturan yang disebut Kubus.



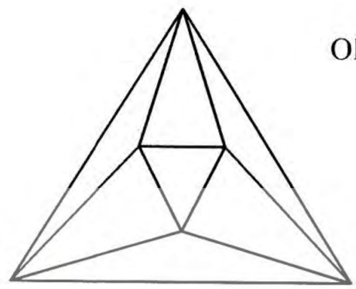
Kubus

c) Untuk k = 3 dan m = 5 diperoleh V(G) = 20; E(G) = 30 dan F(G) = 12. Didapat polyhedron beraturan yang disebut Dodecahedron.

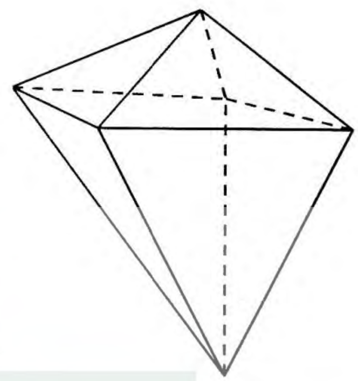
Dodecahedron



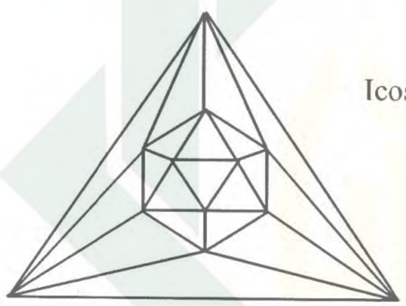
d) Untuk k = 4 dan m = 3 diperoleh V(G) = 6; E(G) = 8. Didapat Oktahedron.



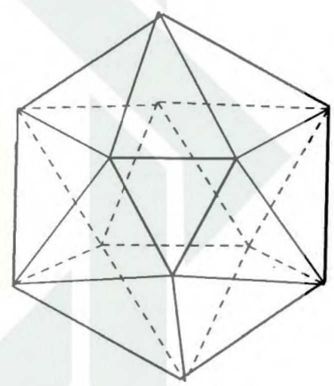
Oktahedron



e) Untuk k = 5 dan m = 3 diperoleh V(G) = 12; E(G) = 30 dan F(G) = 20. Didapat polyhedron beraturan yang disebut Icosahedron.



Icosahedron



Rangkuman

1. Ketebalaan (*thickness*) dari sebuah graph G, dinotasikan dengan θ (G) adalah minimum dari bilangan yang menyatakan banyaknya graph bagian-graph bagian planar dan G yang gabungannya sama dengan G.
2. Graph dual dapat dengan cara mengkonstruk sebuah graph G^* sedemikian hingga: (i) Setiap titik G^* berkorespondensi dengan sebuah muka dari G dan (ii) Jika sebuah sisi e membatasi muka f_1 dan f_2 di G maka titik-titik G^* yang berkorespondensi dengan f_1 dan f_2 dihubungkan dengan sebuah sisi. Graph G^* yang dikonstruksi sebagaimana di atas, disebut graph dual dari G.
3. Adakalanya sebuah graph planar isomatrik dengan dualnya. Graph demikian disebut graph dual-diri (self-dual graph). Graph G di bawah ini adalah sebuah contoh graph dual diri.
4. Bangun ruang dimensi 3 (padat) yang dibatasi oleh permukaan-permukaan yang berupa bidang datar polygonal (bidang datar segi-n, n ≥ 3) disebut polyhedron. Apabila untuk setiap dua "titik interior" polyhedron dihubungkan dengan sebuah ruas garis dan ternyata keseluruhan ruas garis tersebut terletak di "interior" polyhedron, maka polyhedron tersebut disebut polyhedron konveks. Selanjutnya, polyhedron konveks yang setiap "permukaannya" berupa bidang-bodang datar polygonal beraturan yang kongruen disebut polyhedron beraturan.

Latihan

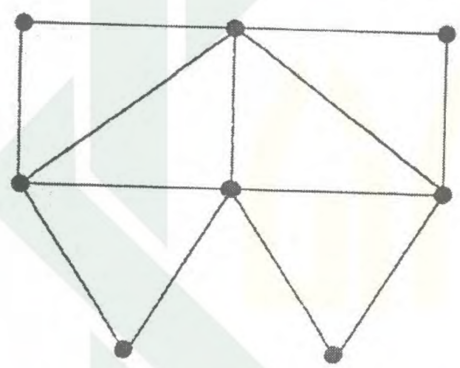
Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Berikan contoh sebuah graph planar G dengan n titik yang isomorfik dengan dualnya!

2. Apakah benar bahwa setiap graph planar sederhana dengan titik kurang dari 12, memuat sebuah titik yang berderajat paling banyak 4? Mengapa?

3. Diberikan sebuah graph planar G. jika G* adalah dual dari G dan G* isomorfik dengan G, buktikan bahwa $E(G) = 2(V(G) - 1)$!

4. Gambarlah graph dual dari graph bidang berikut!



Referensi

Albert. Aplikasi *Graf dan Jaringan Komputer.* artikel ilmiah prodi Teknik Informatika ITB, 2007

Budayasa, *I Ketut. Matematika Diskrit I.* Surabaya: University Press IKIP Surabaya. 1997

Kusaeri, Ettie Rukmigarsari. *Matematika Diskrit.* Malang:UIN Malang. 2003

Seputro, Hugo Toni. *Graf Dalam Berbagai Bidang Ilmu.* artikel ilmiah Prodi Teknik Informatika: ITB, 2010