Paket 12
PEWARNAAN GRAPH

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada konsep pewarnaan graph, pewarnaan titik, algoritma pewarnaan titik dan pewarnaan sisi. Paket ini sebagai kelanjutan dari paket – paket sebelumnya. Oleh karenanya, materi yang telah dipelajari pada paket sebelumnya menjadi sangat penting untuk diingat.

Sebelum perkuliahan berlangsung, dosen menampilkan slide berbagai bentuk contoh pewarnaan titik untuk memancing ide-ide kreatif mahasiswa. Dalam upaya meningkatkan kreatifitas dan nalar mahasiswa, mahasiswa juga diberi tugas membaca uraian materi dan mendiskusikannya dengan panduan lembar kegiatan.

Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan Laptop sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat membatu perkuliahan.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Mahasiswa memahami dan mengerti pewarnaan graph

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat :

1. Mahasiswa dapat mengerti pewarnaan graph
2. Mahasiswa dapat menganalisis algoritma pewarnaan titik
3. Mahasiswa dapat memahami pewarnaan sisi

Waktu

3 x 50 menit (150 menit)

Materi Pokok

1. Mengerti pewarnaan graph
2. Menganalisis algoritma pewarnaan titik
3. Memahami pewarnaan sisi

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan awal (20 menit)

1. Brainstorming dengan mengamati slide berbagai kejadian mengenai pewarnaan graph dalam kehidupan sehari-hari
2. Penjelasan mengenai pentingnya mempelajari paket

Kegiatan Inti (110 menit)

1. Membagi mahasiswa dalam 3 kelompok
2. Masing-masing kelompok mendiskusikan subtema :
   Kelompok 1 : pengertian pewarnaan titik
   Kelompok 2 : algoritma pewarnaan titik
   Kelompok 3 : pewarnaan sisi
3. Presentasi hasil diskusi dari masing-masing kelompok
4. Selesai presentasi setiap kelompok, kelompok lain memberikan klarifikasi
5. Penguatan hasil diskusi dari dosen

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

6. Dosen memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberikan dorongan psikologis atau saran atau nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya

Lembar Kegiatan

Membuat analisa sederhana mengenai ketebalan sebuah graph, graph dual dan graph polyhedral melalui Peta Konsep (*Mind Map*)

Tujuan

Mahasiswa mampu memahami dan mengerti pewarnaan graph.

Bahan dan Alat

Spidol, papan, kertas plano, LCD, laptop

Langkah Kegiatan

1. Pilihlah seorang ketua kelompok kerja kelompok dan penulis konsep hasil kerja!
2. Diskusikan materi yang telah ditentukan dengan anggota kelompok!
3. Tuliskan hasil diskusi dalam kertas!
4. Pilihlah satu anggota kelompok untuk presentasi!
5. Presentasikan hasil kerja kelompok secara bergiliran, dengan waktu bergiliran masing-masing 20 menit.
6. Berikan tanggapan atau klarifikasi dari presentasi.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Uraian Materi

PEWARNAAN GRAPH

A. Pewarnaan Titik

Dalam firman Allah SWT QS. Ar Ruum ayat 22 berbunyi :

وَمِنْ ءَايَٰتِهِۦ خَلْقُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفُ أَلْسِنَتِكُمْ وَأَلْوَٰنِكُمْ ۚ إِنَّ فِى

ذَٰلِكَ لَءَايَٰتٍ لِّلْعَٰلِمِينَ ﴿٢٢﴾

Dan di antara tanda-tanda kekuasaan-Nya ialah menciptakan langit dan bumi dan berlain – lainan bahasamu dan warna kulitmu. Sesungguhnya pada yang demikan itu benar – benar terdapat tanda – tanda bagi orang-orang yang Mengetahui.

Dari sebuah ayat di atas, manusia bisa menarik sebuah hikmah bahwa Allah SWT menciptakan segala sesuatu itu beragam, mempunyai warna – warna yang bisa membuat manusia membedakan mana Si A dan mana Si B.

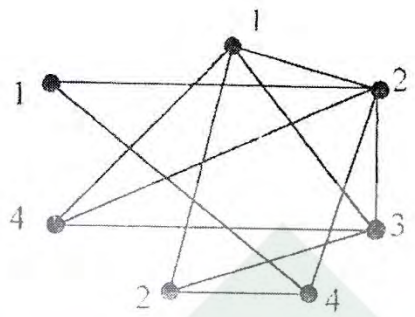
<u>Definisi 12.1</u>

a) Misalkan G graph
   Suatu pewarnaan titik pada graph G, biasanya dinotasikan dengan 1, 2, 3,... pada titik-titik di G dengan satu warna untuk setiap titik sedemikian hingga titik-titik yang terkait ditandai dengan warna yang berbeda.

b) k pewarnaan dari graph G adalah suatu pewarnaan yang terdiri dari k warna yang berbeda. Dalam kasus seperti ini graph G dikatakan dapat diwarnai dengan k warna titik,

Untuk itu, lihatlah ilustrasi pada graph G berikut ini yang mempunyai 4 pewarnaan titik.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id



Definisi 12.1

Bilangan minimum n yang terdapat pada suatu n pewarnaan pada graph G disebut indeks kromatik (bilangan kromatik) dari G yang dinotasikan dengan λ (G). Jika λ (G) = k, maka dapat dikatakan bahwa pada graph G mempunyai k kromatik.

Teorema 12.1

a) Jika graph G mempunyai n titik maka $\lambda(G) \leq n$
b) Jika H subgraph dari G maka $\lambda(H) \leq \lambda(G)$
c) $\lambda(K_n) = n, \forall n \geq 1$
d) Jika graph G memuat K_n sebagai subgraph maka $\lambda(G) \geq 1$

Teorema 12.2

Misalkan G suatu graph yang tak kosong. $\lambda(G) = 2$ jika dan hanya jika G graph bipartisi.

Bukti

(i) Akan ditunjukkan jika $\lambda(G) = 2$ maka G graph bipartisi.

Karena $\lambda(G) = 2$ maka G mempunyai 2 warna. Misalkan X himpunan semua titik yang diwarnai dengan 1 dan Y himpunan semua titik yang diwarna dengan 2. Dengan demikian tidak ada dua titik di X yang terkait dan begitu pula untuk Y. Jadi sebarang sisi di G harus menghubungkan sebuah titik di X dan sebuah titik di Y. Oleh karena itu G adalah graph bipartisi dengan partisi $V = X \cup Y$.

(ii) Akan ditunjukkan jika G graph bipartisi maka $\lambda(G) = 2$.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Misalkan G graph bipartisi $V = X \cup Y$. Tandai warna 1 untuk semua titik di X dan warna 2 untuk semua titik di Y. Dengan demikian akan memberikan dua warna untuk G. Karena G tidak kosong maka $\lambda(G) = 2$.

Teorema 12.3

Untuk sebarang graph G akan berlaku $\lambda(G) \leq \Delta(G) + 1$ dengan $\Delta(G)$ adalah derajat maksimum titik di G.

Bukti

Bukti dari teorema ini dengan mengunakan induksi matematika pada banyaknya titik (n) di G.

Untuk $n = 1$ maka $G = K_1$ berlaku $\lambda(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 0$. Jadi $1 \leq 0 + 1$.

Andaikan bahwa pernyataan tersebut benar untuk semua graph dengan n-1 titik, dengan $n \geq 1$.

Misalkan G suatu graph dengan n titik. Pilih suatu titik v di G sedemikian hingga sub graph G-v mempunyai n-1. Oleh karena itu, dengan asumsi akan berlaku $\lambda(G\text{-}V) \leq \Delta(G\text{-}V) + 1$. Hal ini membolehkan untuk memilih suatu pewarnaan titik dari G-V sebanyak $\Delta(G\text{-}V) + 1$ warna. Sekarang titik V akan mempunyai paling banyak $\Delta(G)$ titik yang terkait di G dan oleh karenanya akan berlaku juga $\Delta(G)$ warna di dalam pewarnaan G-V. Jadi, jika $\Delta(G) = \Delta(G\text{-}V)$ maka ada sekurang-kurangnya satu warna yang tidak digunakan oleh titik-titik selain v dan dapat digunakan untuk mewarnai V. Dengan demikian memberikan suatu $\Delta(G) + 1$ warna untuk G. Disamping itu, jika $\Delta(G) + \Delta(G\text{-}V)$ maka $\Delta(G\text{-}V) \overline{\ } \Delta(G)$ dan warnai titik V dengan warna baru sehingga memberikan $\Delta(G\text{-}V) + 2$ pewarnaan di G yang cukup untuk mewarnai G karena $\Delta(G\text{-}V) + 2 \leq \Delta(G) + 1$ *(terbukti).*

Teorema 12.4

Misalkan G graph terhubung dengan $\Delta(G) \geq 3$. Jika G bukan graph komplit maka $\lambda(G) \leq \Delta(G)$.

Contoh 12

Sekolah MA Sunan Ampel akan membuat jadwal ujian untuk 9 mata pelajaran yaitu A, B, C, D, E, F, G, H, I sedemikian hingga jika seorang

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

siswa mengambil dua mata pelajaran dari 9 mata pelajaran itu, maka dua mata pelajaran itu tidak boleh dijadwal sama.

Tanda (X) pada tabel berikut menyatakan bahwa pasangan dari mata pelajaran itu tidak dijadwal sama. Sekolah berharap mendapatkan jumlah minimum jadwal yang diperlukan dan bagaimana menempatkan mata pelajaran sesuai seperti yang disyaratkan di atas. Pergunakanlah pewarnaan graph dalam menginterpretasikan kasus di atas untuk menentukan jumlah minimum jadwal yang diperlukan dan menempatkan mata pelajaran sesuai jadwal.

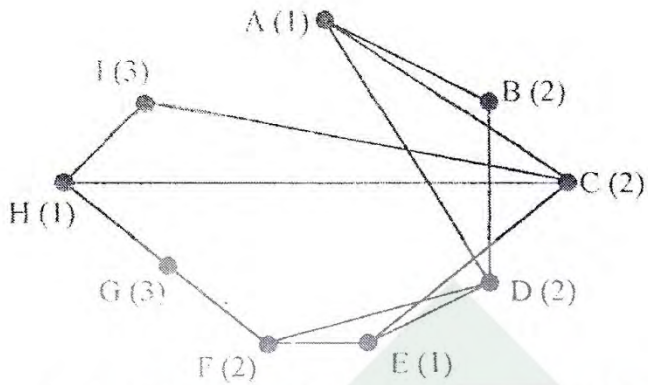
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A		X	X	X					
B	X			X					
C	X				X			X	X
D	X	X			X				
E			X	X		X	X		
F				X	X		X		
G					X	X		X	
H			X				X		X
I			X					X	

Jawab

Dengan menggunakan teori graph, kasus di atas akan diselesaikan dengan memodelkan terlebih dahulu menjadi sebuah graph. Misalkan graph tersebut adalah graph G.

Dalam graph G ini, A, B, C, D, E, F, G, H, dan I adalah titik-titik graph dan tanda silang sebagai sisi-sisi dalam graph G. Dengan demikian tabel di atas dapat dinyatakan sebagai graph berikut ini.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id



Dari graph G di atas, dapat disimpulkan bahwa graph G merupakan graph sederhana, tidak komplit, dengan $\Delta(G) \geq 3$. Sehingga dengan menerapkan teorema 12.1, pada pewarnaan graph akan diperoleh $\lambda(G) \leq \Delta(G)$.

Perhatikan bahwa (1), (2), dan (3) adalah warna-warna pada titik-titik graph G sedemikian hingga dua titik yang berhubungan langsung tidak boleh mendapatkan warna yang sama. Karena minimum ada 3 warna untuk mewarnai titik-titik pada graph di atas sedemikian hingga dua titik yang berhubungan langsung mendapatkan warna yang berbeda maka $\lambda(G) = 3$. Ini berarti ada pewarnaan-3 pada graph G di atas.

Karena titik-titik pada graph G tersebut adalah mata pelajaran, maka ada 3 jenis jadwal ujian yang diperlukan sebagaimana pada tabel berikut:

Jadwal Ujian	Mata Pelajaran
I	A E H
II	C B F
III	D G I

B. Algoritma Pewarnaan Titik

Berikut ini akan disajikan dua algoritma pewarnaan titik, yakni algoritrna *simple sequential* dan algoritma *Wells and Powel.*

1. *Algoritma simple sequential*

Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

INPUT : Graph G dengan n titik

STEP 1 : Label titik G dengan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ Label warna di G yang dapat digunakan adalah 1, 2, 3, ... n.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

STEP 2 : Untuk setiap i dengan i = 1, 2, 3, ... , n, misalkan $C_i = \{1, 2, 3, \ldots, i\}$ adalah warna yang dapat digunakan

STEP 3 : i = 1

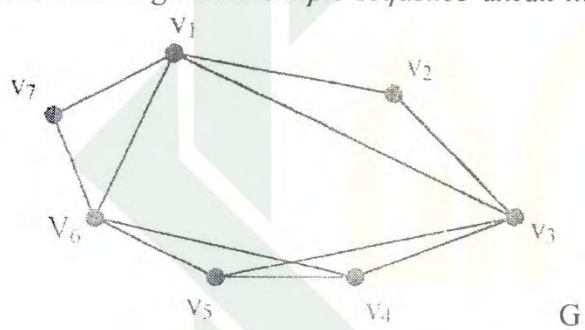
STEP 4 : Misalkan c, warna pertama di C_i dan warnailah v_i dengan c_i.

STEP 5 : Untuk setiap j dengan $j > i$ dan v_i berhubungan langsung dengan v_j, tulis $C_j = C_j - C_i$. Ganti i dengan i + 1 dan jika $i + 1 \leq n$, kembali ke STEP 4.

STEP 6 : Catat setiap titik dan warnanya.

Contoh 12.2

Gunakan algoritma *simple sequence* untuk mewarnai graph G berikut ini.



Jawab

INPUT : Graph G dengan 7 titik

STEP 1 : Label titik di G dengan $v_1, v_2, \ldots, v_6, v_7$. Label warna yang dapat digunakan adalah 1,2,3, ...,6, 7.

STEP 2 : $C_1 = \{1\}$ $C_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$C_2 = \{1,2\}$ $C_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$C_3 = \{1, 2, 3\}$ $C_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$C_4 = \{1, 2, 3, 4\}$

STEP 3 : i = 1

STEP 4 : 1 adalah pertama di C_1, warnai v_1 dengan 1.

STEP 5 : v_1 berhubungan langsung dengan v_2, v_3, v_6, v_7, v_5.

$C_2 = \{1, 2\} - \{1\} = \{2\}$

$C_3 = \{1, 2, 3\} - \{1\} = \{2, 3\}$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$C_5 = 1, 2, 3, 4, 5 - 1 = 2, 3, 4, 5$

$C_6 = 1, 2, 3, 4, 5, 6 - 1 = 2, 3, 4, 5, 6$

$C_7 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 - 1 = 2, 3, 4, 5, 6, 7$

$i = 2$

STEP 4 : 2 adalah warna pertama di C_2, warnai v_2 dengan 2.

STEP 5 : v_2 berhubungan langsung dengan v_3, sehingga:

$C_3 = 2, 3 - 2 = 3$

$i = 3$

STEP 4 : 3 adalah warna pertama di C_3, warnai v_3 dengan 3.

STEP 5 : v_3 berhubungan langsung dengan v_4 dan v_5, sehingga:

$C4 = 1, 2, 3, 4 - 3 = 1, 2, 4$

$C5 = 2, 3, 4, 5 - 3 = 2, 4, 5$

$i = 4$

STEP 4 : 1 adalah warna pertama di C_4, warnai v_4 dengan 1.

STEP 5 : v_4 berhubungan langsung dengan v_5 dan v_6, sehingga:

$C5 = 2, 4, 5 - 1 = 2, 4, 5$

$C6 = 2, 3, 4, 5, 6 - 1 = 2, 3, 4, 5, 6$

$i = 5$

STEP 4 : 2 adalah warna pertama di C_5, warnai v_5 dengan 2.

STEP 5 : v_5 berhubungan langsung dengan v_6, sehingga:

$C6 = 2, 3, 4, 5, 6 - 2 = 3, 4, 5, 6$

$i = 6$

STEP 4 : 3 adalah warna pertama di C_6, warnai v_6 dengan 3.

STEP 5 : v_6 berhubungan langsung dengan v_7, sehingga:

$C_7 = 2, 3, 4, 5, 6, 7 - 3 = 2, 4, 5, 6, 7$

$i = 7$

STEP 4 : 2 adalah wama pertama di C_7, warnai v_7 dengan 2.

STEP 5 : $i = 8$, dan $8 \bar{} 7$ maka ke STEP 6.

STEP 6 : v_1 dan v_4 diwarnai dengan 1

v_2, v_5, v_7 diwarnai dengan 2

v_3 dan v_6 diwarnai dengan 3

2. *Algoritma Wells and Powel*

Algoritma ini merupakan modifikasi dan algoritma *simple sequential*, khususnya pada STEP 1.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

INPUT : G graph sederhana dengan n titik

STEP 1 : Label titik di G dengan $x_i, x_2, ..., x_n$ sedemikian hingga $d(x_i) \geq d(x_{i+1})$ Label warna yang dapat digunakan di G adalah 1, 2, 3, ..., n.

STEP 2 : Untuk setiap i, dengan i = 1, 2, 3, ..., n, misalkan C_i = 1, 2, 3, ... ,i adalah daftar warna-warna yang digunakan untuk mewarnai titik x_i.

STEP 3 : Tulis i = 1

STEP 4 :Misalkan c_i adalah warna pertama pada C_i, kemudian warnai titik x_i dengan c_i.

STEP 5 : Untuk setiap j dengan $i < j$ dan x_i berhubungan langsung dengan x_j di G.

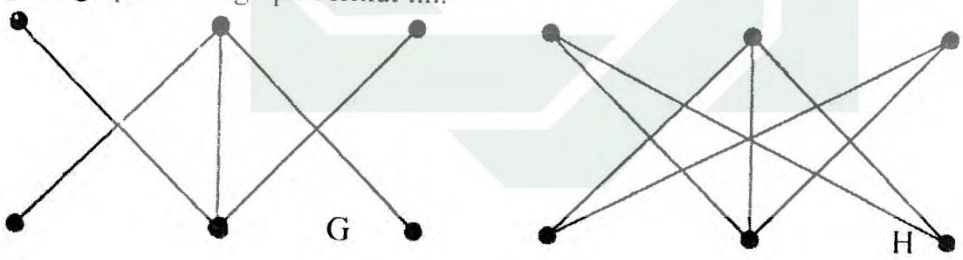
Tuliskan $C_j = C_j - c_i$

Tulis i = i + 1. Jika i = i + 1 ≤ n kembali ke STEP 4 dan jika tidak lanjutkan ke STEP 6.

STEP 6 : Daftar setiap titik di G dan warnanya.

Contoh 12.3

Terapkan algoritma Wells dan Powel untuk memberikan pewarnaan titik pada graph G dan graph berikut ini.



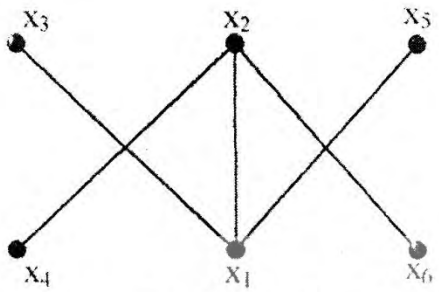
Jawab

INPUT : G graph sederhana dengan 6 titik

STEP 1 : Label titik-titik di G dengan $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Sedemikian hingga $d(x_1) \geq d(x_2) \geq d(x_3) \geq d(x_4) \geq d(x_5) \geq d(x_6)$.

Karena di G ada beberapa titik yang berderajat sama, maka penempatan label titik pada gambar berikut merupakan salah satu diantaranya.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id



STEP 2 : $C_1 = 1$, $C_2 = 1, 2$, $C_3 = 1, 2, 3$, $C_4 = 1, 2, 3, 4$, $C_5 = 1, 2, 3, 4, 5$, dan $C_6 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

STEP 3 : Tulis i = 1

STEP 4 : Warna pertama pada C_1 adalah 1, kemudian warnai titik x_1 dengan 1

STEP 5 : Titik x_1 berhubungan langsung dengan titik-titik x_2, x_3, dan x_5 sehingga:

$C_2 = 1, 2) - 1 = 2$

$C_3 = 1, 2, 3 - 1 = 2, 3$

$C_5 = 1, 2, 3,4, 5 - 1 = 2, 3,4,5$

$i = 1 + 1 = 2 \leq 6$

STEP 4 : Warna pertama pada C_2 adalah 2, kemudian warnai titik x_2 dengan 2

STEP 5 : Titik x_2 berhubungan langsung dengan titik-titik x_4 dan x_6 sehingga:

$C_4 = 1, 2,3, 4 - 2 = 1, 3, 4$

$C_6 = 1, 2, 3, 4, 5, 6 - 1 = 1, 3, 4, 5, 6$

$i = 2 + 1 = 3 \leq 6$

STEP 4 : Warna pertama pada C_3 adalah 2, kemudian warnai titik x_3 dengan 2

STEP 5 : Titik ada x_j, dengan j^- 3 sedemikian hingga x_j berhubungan langsung dengan x_3 $i = 3 + 1 = 4 \leq 6$

STEP 4 : Warna pertama pada C_4 adalah 1, kemudian warnai titik x_4 dengan 1

STEP 5 : Titik ada x_j, dengan x_j^- 4 sedemikian hingga x_j berhubungan langsung dengan x_4

$i = 4 + 1 = 5 \leq 6$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

STEP 4 : Warna pertama pada C_5 adalah 2, kemudian warnai titik x_5 dengan 2

STEP 5 : Titik ada x_j, dengan x_j^- 5 sedemikian hingga x_j berhubungan langsung dengan x_5

$i = 5 + 1 = 6 \leq 6$

STEP 4 : Warna pertama pada C_6 adalah 1, kemudian warnai titik x_6 dengan 1

STEP 5 : Titik ada x_j, dengan x_j^- 6 sedemikian hingga x_j berhubungan langsung dengan x_6

$i = 6 + 1 = 7$ 6

STEP 6 : Daftar setiap titik di G dan warnanya adalah sebagai berikut:

Titik	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Warna	1	2	2	1	2	1

Hasil akhir dari algoritrna ini rnernberikan sebuah pewarnaan titik yang minimal yaitu dengan dua warna. Pada graph G seperti pada gambar sebelumnya dengan semua variasi penempatan label titik di G yang memenuhi STEP 1 ternyata menghasilkan pewarnaan titik yang minimum. Hal ini menunjukkan bahwa algoritma ini lebih baik dari algoritma *simple sequential*. Namun demikian, algoritma ini tidak selalu menghasilkan pewarnaan titik yang minimum.

Hal ini terjadi jika algoritma ini diterapkan pada graph H. Hasil akhir dari algoritma ini bila diterapkan pada graph H akan memberikan pewarnaan titik dengan 3 warna. Padahal $\lambda(H) = 2$, karena H graph bipartisi.

C. Pewarnaan Sisi

Pada bagian ini akan dibahas pewarnaan sisi suatu graph sebagai kelanjutan pewarnaan titik. Untuk itu, ingat kembali bahwa dua sisi dari suatu graph dikatakan terkait jika kedua sisi tersebut mempunyai titik ujung yang sama. Sebagaimana pada pewarnaan titik, maka pada pewarnaan sisi ini diasumsikan bahwa semua graph yang dipakai adalah graph sederhana.

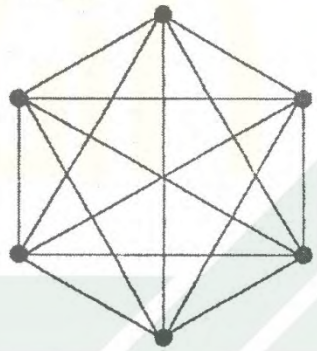
digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Definisi 12.3

Misalkan G graph tak kosong. Suatu pewarnaan sisi G, dilambangkan dengan 1, 2, 3, ... pada sisi G dengan satu warna setiap sisi sedemikian hingga sisi yang saling terkait ditandai dengan warna yang berbeda. k pewarnaan sisi pada graph G merupakan suatu pewarnaan di G yang terdiri dari k warna berbeda. Dalam kasus ini graph G dikatakan mempunyai k pewarnaan sisi. Sedangkan bilangan minimum n untuk suatu n pewarnaan pada graph G dikatakan bilangan kromatik sisi (indeks kromatik sisi) dari G dan dinotasikan dengan $\lambda'(G)$. Jika $\lambda'(G) = k$ maka dikatakan bahwa graph G dengan k-khromatik sisi.

Contoh 12.4

Warnailah sisi graph G berikut ini.

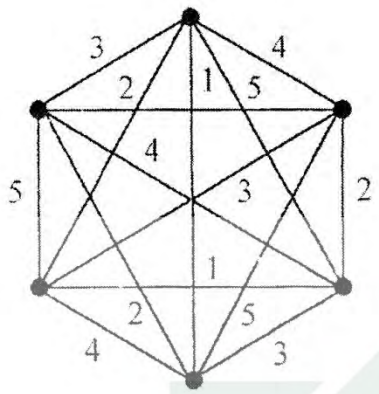


$G = K_6$

Jawab

Warna pada graph G yang dapat digunakan adalah:

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id



Teorema 12.5

Jika $G = K_n$ adalah graph komplit dengan n titik, n 2 $\geq$ 2 maka berlaku:

$$\lambda'(G) = \begin{cases} n-1 & \text{, jika n genap} \\ n & \text{, jika n ganjil} \end{cases}$$

Bukti

Kasus 1, untuk n ganjil.

Gambarlah graph $G = K_n$ dalam bentuk segi-n. Warnai perimeter (sisi perbatasan segi-n) dengan warna yang berbeda untuk setiap sisi. Sekarang setiap sisi internal di G sejajar dengan tepat satu perimeter dan warnai sisi internal dengan warna yang sama dengan perimeter yang sejajar.

Dengan demikian dua sisi pada graph G akan berwarna sama jika dan hanya jika kedua sisi itu sejajar.

Andaikan graph G memiliki pewarnaan sisi n-1. Karena n ganjil maka banyaknya sisi maksimum yang mendapat warna sama adalah $\frac{1}{2}(n-1)$. Hal ini berarti terdapat $(n-1)$. $\frac{1}{2}(n-1)$ sisi $= \frac{1}{2}(n-1)(n-1)$ sisi. Dengan demikian kontradiksi dengan $G = K_n$ yang mempunyai tepat $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ sisi. Jadi pengandaian jika G mempunyai n titik dengan n ganjil maka G mempunyai pewarnaan (n-1) salah, sehingga dapat disimpulkan bahwa terdapat pewarnaan sisi -n di G, untuk n ganjil.

Kasus 2, untuk n genap.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Untuk n = 2 (trivial). Sekarang akan ditinjau untuk n¯ 2. Misalkan v sebuah titik di graph G. Konstruksi graph G-v dengan menghapus titik v sehingga diperoleh graph komplit G-v = K_{n-1}. Karena n genap maka (n-1) ganjil, sehingga diperoleh pewarnaan sisi (n-1) di graph G-v (berdasarkan kasus 1). Dengan pewarnaan ini maka ada warna yang tidak muncul pada setiap titik. Warna ini berbeda satu dengan yang lain. Konstruksi graph G dari suatu graph G-v dengan menghubungkan setiap elemen w (w elemen G-v) ke v di G dengan sebuah sisi. Warnai setiap sisi yang menghubungkan w-v dengan warna yang tidak muncul di w. Hal ini berarti ada pewarnaan sisi –(n-1) di G.

Teorema 12.6

Jika G graph bipartisi yang tak kosong maka $\lambda'(G) = \Delta(G)$.

Bukti dari teorema ini diserahkan ke pembaca sebagai latihan.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Rangkuman

1. Misalkan G graph. Suatu pewarnaan titik pada graph G, dinotasikan dengan 1, 2, 3,... pada titik-titik di G dengan satu warna untuk setiap titik sedemikian hingga titik-titik yang terkait ditandai dengan warna yang berbeda.

2. Dua algoritma pewarnaan titik, yakni algoritrna *simple sequential* dan algoritma *Wells and Powel.*
3. Pewarnaan sisi suatu graph sebagai kelanjutan pewarnaan titik. Untuk itu, dua sisi dari suatu graph dikatakan terkait jika kedua sisi tersebut mempunyai titik ujung yang sama. Sebagaimana pada pewarnaan titik, maka pada pewarnaan sisi ini diasumsikan bahwa semua graph yang dipakai adalah graph sederhana.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

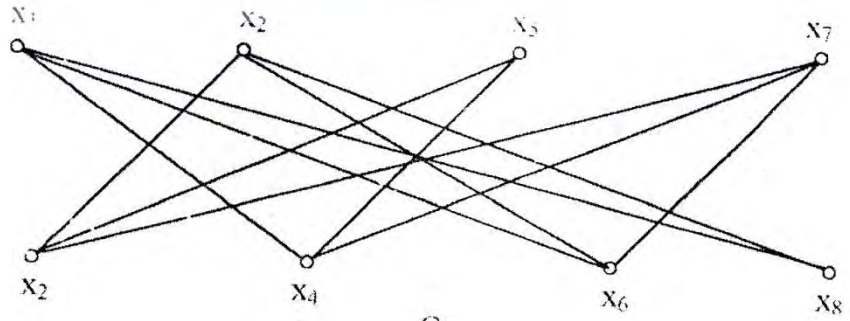
Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Rute perjalanan jamaah haji Indonesia menuju kota Mekkah bisa melalui 7 jalan yang berbeda, yaitu C_1, C_2, C_3, ... , C_7. Akan tetapi di antara ketujuh jalan tersebut terdapat beberapa jalan yang tidak dapat dilewati jika melalui jalan tersebut. Tanda silang (X) pada tabel berikut ini menunjukkan pasangan jalan yang tidak boleh dilewati melalui jalan tersebut. Pergunakanlah pewarnaan graph untuk mendapatkan jumlah minimum tempat yang dapat ditemukan dan bagaimana dapat menyelesaikan kasus di atas secara optimal.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
C_1		X				X	X
C_2	X		X	X			
C_3		X		X	X		
C_4		X	X		X		
C_5			X	X		X	X
C_6	X			X	X		X
C_7					X	X	

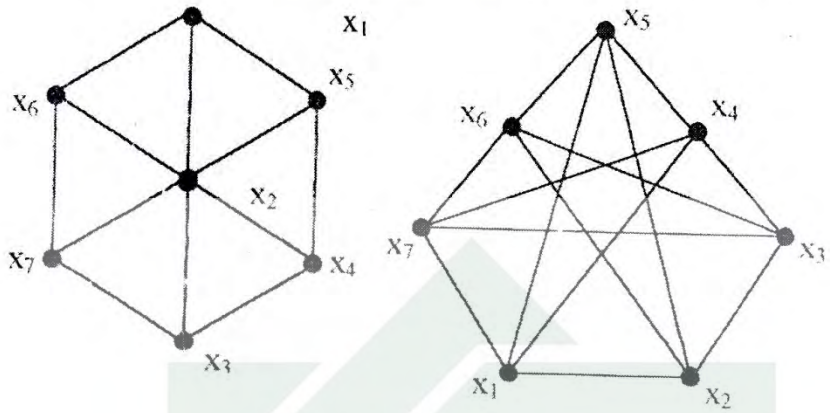
2. Tentukan pewarnaan titik pada graph bipartisi G terhadap gambar berikut dengan menggunakan algoritma pewarnaan *"simple sequential"* pada titik-titik x_1, x_2, x_3, ..., x_8. Tentukan pula pewarnaan titik tersebut dengan menggunakan pewamaan *"Wells dan Powel"*.



G

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

3. Terapkan setiap algoritma pewarnaan titik pada graph berikut:



4. Tunjukkan bahwa jika G graph Hamilton beraturan (dengan 3 titik) maka $\lambda'(G) = 3$
5. Jika G graph terhubung sederhana maka $\lambda(G) = \Delta(G) + 1$ jika dan hanya jika G adalah graph komplit atau G suatu sikel yang panjangnya ganjil.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Referensi

Albert.Aplikasi *Graf dan Jaringan Komputer.* artikel ilmiah prodi Teknik Informatika ITB, 2007

Al-Qur'an al-karim

Budayasa, *I Ketut. Matematika Diskrit I.* Surabaya: University Press IKIP Surabaya.1997

http: //zakylubismy.blogspot.com/2012/06/teori-graf-dan-aplikasinya.html (diakses pada tanggal 01 September 2013)

Kusaeri, Ettie Rukmigarsari. *Matematika Diskrit.* Malang:UIN Malang. 2003

Seputro, Hugo Toni. *Graf Dalam Berbagai Bidang Ilmu.* artikel ilmiah Prodi Teknik Informatika: ITB, 2010

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id