Paket 3
DERANGEMENT
(PENGACAKAN)

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada konsep lanjutan relasi rekursif. Kajian dalam paket ini meliputi pengertian *derangement*, relasi rekursif untuk D_n, mencari formula untuk D_n, sistem relasi rekursif, dan rekursif melibatkan konvolusi. Paket ini sebagai paket lanjutan dari relasi rekursif, sehingga perlu mereview sedikit mengenai relasi rekursif untuk mengingat kembali.

Dalam paket 3 ini, mahasiswa akan mengkaji pengertian derangement, mengidentifikasi relasi rekursif untuk D_n, menganalisis formula untuk D_n, serta menganalisis sistem relasi rekursif, hinga pentingnya relasi rekursif melibatkan konvolusi. Sebelum perkuliahan berlangsung, dosen menampilkan slide berbagai bentuk pengacakan untuk memancing ide-ide kreatif mahasiswa dalam upaya meningkatkan pemahaman terhadap materi. Mahasiswa juga diberi tugas untuk membaca uraian materi dan mendiskusikannya dengan panduan lembar kegiatan. Dengan dikuasainya dasar-dasar dari paket 3 ini diharapkan dapat menjadi modal bagi mahasiswa untuk mempelajari paket selanjutnya.

Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkulahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan Laptop sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat membatu perkuliahan. Selain itu diperlukan kertas plano, spidol dan isolasi sebagai alat memaparkan kreatifitas hasil perkuliahan dengan membuat peta konsep.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Mahasiswa memahami dengan baik *derangement* sebagai permasalahan diskrit dan dapat menyelesaikannya.

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat:

1. Mahasiswa dapat memahami definisi *derangement*
2. Mahasiswa dapat memahami relasi rekursif untuk D_n
3. Mahasiswa dapat menganalisis formula untuk D_n
4. Mahasiswa dapat menganalisis sistem relasi rekursif
5. Mahasiswa dapat menganalisis rekursif yang melibatkan konvolusi

Waktu

3 x 50 menit (150 menit)

Materi Pokok

1. Pengertian *derangement* (pengacakan)
2. Relasi rekursif untuk D_n
3. Mencari Formula D_n
4. Sistem relasi rekursif
5. Rekursif melibatkan konvolusi

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan awal (20 menit)

1. Brainstorming dengan mengamati slide berbagai kejadian mengenai derangement dalam kehidupan sehari-hari
2. Penjelasan mengenai pentingnya mempelajari paket

Kegiatan Inti (110 menit)

1. Dosen mengingatkan kembali materi relasi rekursif pada pertemuan sebelumnya.
2. Membagi mahasiswa dalam 4 kelompok inti
3. Masing-masing kelompok inti mendiskusikan subtema :
   Kelompok 1 : derangement dan relasi rekursif untuk D_n

Kelompok 2 : mencari formula untuk D_n
Kelompok 3 : sistem relasi rekursif
Kelompok 4 : rekursif melibatkan konvolusi

4. Setelah berdiskusi di kelompok inti, para siswa menyebar ke kelompok gabungan yang terdiri dari kelompok 1, kelompok 2, kelompok 3 dan kelompok 4 dan menjelaskan inti materi yang telah didiskusikan di kelompok inti
5. Presentasi hasil diskusi dari masing-masing kelompok inti
6. Selesai presentasi setiap kelompok, kelompok lain memberikan klarifikasi
7. Penguatan hasil diskusi dari dosen
8. Dosen memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberikan dorongan psikologis atau saran atau nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya

Lembar Kegiatan

Melakukan analisa rumus dan penerapan derangement (pengacakan) dalam permasalahan rekursif.

Tujuan

Mahasiswa mampu memahami dengan baik derangement (pengacakan) sebagai permasalahan diskrit dan dapat menyelesaikannya.

Bahan dan Alat

Spidol, papan, kertas plano, LCD, laptop

Langkah Kegiatan

1. Pilihlah seorang pemandu kerja kelompok dan penulis konsep hasil kerja!
2. Diskusikan materi yang telah ditentukan dengan anggota kelompok!
3. Tuliskan hasil diskusi dalam bentuk peta konsep
4. Tempelkan hasil kerja kelompok di papan tulis atau dinding kelas!
5. Pilihlah satu anggota kelompok untuk presentasi!
6. Presentasikan hasil kerja kelompok secara bergiliran, dengan waktu bergiliran masing-masing 20 menit.
7. Berikan tanggapan atau klarifikasi dari presentasi.

Uraian Materi

DERANGEMENT (PENGACAKAN)

A. Pengertian Derangement

Misalkan terdapat n elemen dijajar pada satu baris dan diberi label 1,2,3,….,n. Kemudian ke n elemen itu dipermutasikan pada baris yang sama sedemikian hingga tidak ada satu elemenpun menempati tempatnya semula. Sebuah permutasi yang demikian disebut *derangement*. Contoh : 3142 atau 4321 adalah *derangement* dari 1234 akan tetapi 3124 bukan *derangement* dari 1234, sebab dalam 3124, elemen 4 menempati posisinya semula (posisi ke 4). Begitu juga 4213 bukan *derangement* dari 1234 sebab elemen 2 menempati posisinya semula. Selidiki hanya terdapat 9 *derangement* dari 1234. Terdapat tepat 2 derangement dari 123; yaitu 213 dan 312. Ada berapa *derangement* dari 12345? Secara umum kita tertarik dengan permasalahan berikut: Misalkan D_n menyatakan banyaknya derangement dari n elemen. Berapakan D_n? untuk menjawab pertanyaan ini, pertama-tama akan dicari hubungan rekursif D_n dan selanjutnya kita akan selesaikan hubungan rekursif tersebut dengan fungsi pembangkit eksponensial.

B. Relasi Rekursif untuk D_n

Karena hanya ada permutasi tanpa elemen, $D_n = 1$. Untuk $n = 1$, $D_1 = 0$, sebab tidak ada permutasi dengan satu elemen. Dalam kajian Islam, hal ini seperti yang terkandung di dalam Al-Qur'an mengenai ke-Esaan Allah SWT.

قُلْ هُوَ ٱللَّهُ أَحَدٌ ﴿١﴾ ٱللَّهُ ٱلصَّمَدُ ﴿٢﴾ لَمْ يَلِدْ وَلَمْ يُولَدْ ﴿٣﴾ وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ
كُفُوًا أَحَدٌۢ ﴿٤﴾

(1) Katakanlah: "Dia-lah Allah, yang Maha Esa. (2) Allah adalah Tuhan yang bergantung kepada-Nya segala sesuatu. (3) Dia tiada beranak dan tidak pula diperanakkan, (4) Dan tidak ada seorangpun yang setara dengan Dia.[1]

Allah SWT itu 1 (satu). Dia tidak beranak dan tidak pula diperanakkan, dan tidak ada seorangpun yang setara dengan Dia (0).

Untuk $n = 2$ diperoleh $D_2 = 1$ sebab hanya ada satu permutasi dua elemen dimana setiap elemen tidak menempati tempatnya semula (21 adalah satu-satunya dearangement dari 12).

Untuk $n \geq 2$, kita peroleh relasi rekursif untuk D_n sebagai berikut: (i) Pandanglah sebuah elemen sebarang dari n elemen yang ada. Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan elemen itu adalah elemen n (elemen denga label n). Karena elemen n tidak boleh menempati posisi ke n, maka terdapat n–1 kemungkinan posisi dari elemen ini. Yaitu mungkin pada posisi ke-1 atau ke-2 atau ke-3,...... atau ke n–1. (ii) Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan elemen n ini menempati posisi ke-1. Sekarang ada dua kemungkinan posisi dari elemen 1. Elemen 1 mungkin menempati posisi ke-n atau mungkin tidak.

Kasus 1. Elemen 1 menempati posisi ke n

Elemen	n.... 1
Posisi ke	1 2 3 4 .... n-1 n

Sekarang kita mempunyai n–2 elemen yaitu elemen: 2, 3, . . . n–1 yang harus dijajar sedemikian hingga setiap elemen tidak boleh menempati tempatnya semula : artinya elemen 1 tidak boleh pada posisi ke 1 untuk $2 \leq I \leq n-1$. Ini bisa dilakukan dengan D_{n-2} cara.

Kasus 2. Elemen 1 tidak menempati posisi ke n

[1] Al-Qur'an, 112 (al-Ikhlas), 1-4

Elemen	n 1
Posisi ke	1 2 3 4 . . . . n-1 n

Dalam kasus ini, kita punya n–1 elemen yaitu elemen 1,2,3, . . ., n–1 yang harus dijajar sedemikian hingga elemen 1 tidak pada posisi 3 dan seterusnya elemen n–1 tidak pada posisi (n–1). Ini dapat dilakukan dengan D_{n-1} cara. Jadi banyaknya *derangement* dari n elemen dimana elemen n menempati posisi ke-1 adalah $D_{n-2} + D_{n-1}$. Telah disebut pada bagian (i) hal.41, bahwa ada n–1 kemungkinan posisi dari elemen n. Sehingga diperoleh hubungan

$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$, $n \geq 2$.

Persamaan ini dapat ditulis sebagai berikut :

$D_n = n\,D_{n-1} - D_{n-1} + (n-1)D_{n-2}$

$\equiv$ $D_n - n\,D_{n-1} = -\,(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2})$ . . . . (3.1)

Misalkan $a_n = D_n - n\,D_{n-1}$. Maka (3.1) menjadi

$a_n = -\,a_n$ $(n \geq 2)$.

Karena

$a_1 = D_1 - D_0 = 0 - 1 = -1$,

maka

$a_2 = -\,a_1 = 1$

$a_3 = -\,a_2 = -1$

.

.

.

$a_n = (-1)^n$.

Dengan demikian, relasi rekursif untuk D_n adalah sebagai berikut :

$D_0 = 1$; $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$, $n \geq 1$.

B. Mencari Formula untuk D_n.

Telah ditunjukkan bahwa untuk $n \geq 1$, berlaku hubungan

$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ . . . . (3.2)

Kita akan selesaikan relasi rekursif ini dengan fungsi pembangkit eksponensial. Untuk itu kita misalkan

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{x^n}{n!}$$

Kalikan kedua ruas dari (3.2) dengan $\frac{x^n}{n!}$ dan "diambil sigmanya" untuk $n \geq 1$, diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} nD_n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)_n \frac{x^n}{n!} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.3)$$

Ruas kiri dari (3.3) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{x^n}{n!} - D_0 \frac{x^n}{0!}$$

$$= P(x) - 1.$$

Suku pertama ruas kanan (3.3) adalah

$$\sum_{n=1}^{\infty} nD_n \frac{x^n}{n!} = x \sum_{n=1}^{\infty} D_{n-1} \frac{x^{n-1}}{n-1!} = x\,P(x)$$

Suku kedua ruas kanan (3.3) adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = e - x - 1.$$

Sehingga (3.3) dapat ditulis sebagai berikut :

$$P(x) - 1 = x\,P(x) + e^{-1} - 1.$$

Ekuivalen dengan

$$P(x) = \frac{e^1}{1-x}.$$

Karena $e^{1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$ dan $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, maka

$$P(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right) x^n \text{ (Rumus konvolusi)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n! \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^n}{n!}\right)$$

Dengan demikian

$$D_n = n!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$$

$$= n!\,(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}).$$

Kalau kita coba menyelesaikan relasi rekursif untuk D_n ini dengan fungsi pembangkit biasa, maka akan terbentur dengan persamaan deferensial yang tidak mudah untuk dipecahkan!

C. SISTEM RELASI REKURSIF

Adakalanya suatu permasalahan dapat dimodelkan ke dalam bentuk sistem rekursif. Sistem rekursif melibatkan paling sedikit dua rekursif yang terkait satu sama lainnya. Sebagai ilustrasi ikuti uraian berikut.

Misalkan a_n menyatakan banyaknya barisan biner n-angka yang memuat "0" sebanyak bilangan genap dan "1" sebanyak bilanga genap : b_n menyatakan banyaknya barisan biner n-angka yang memuat "0" sebanyak genap dan "1" sebanyak ganjil : c_n menyatakan banyaknya barisan biner n-angka yang memuat "0" sebanyak ganjil dan "1" sebanyak genap, d_n menyatakan banyaknya barisan biner n-angka yang memuat "0" sebanyak ganjil dan "1" sebanyak ganjil.

Karena setiap barisan biner n-angka yang memuat "0" sebanyak genap dan "1" sebanyak genap dapat diperoleh dari : sebuah barisan biner (n-1)-angka yang memuat "0" sebanyak genap dan "1" sebanyak ganjil dengan 'menambah/menyisipkan' sebuah digit "1" atau sebuah barisan biner (n-1)-angka yang memuat "0" sebanyak ganjil dan "1" sebanyak genap dengan 'menambah/menyisipkan' sebuah digit "0", maka diperoleh hubungan sebagai berikut

$$a_n = b_{n-1} + c_{n-1}.$$

Begitu pula, setiap barisan biner n-angka yang memuat "0" sebanyak genap dan "1" sebanyak ganjil dapat diperoleh dari : sebuah barisan biner (n-1)-angka yang memuat "0" sebanyak genap dan "1" sebanyak genap dengan 'menyisipkan' sebuah digit "1" : atau sebuah barisan biner (n-1)-angka yang memuat "0" sebanyak ganjil dan "1" sebanyak ganjil dengan 'menyisipkan' sebuah digit "0". Sehingga diperoleh hubungan sebagai berikut.

$$b_n = a_{n-1} + d_{n-1}.$$

Dengan argumen yang serupa dapat ditunjukkan bahwa untuk c_n dan d_n, berturut-turut berlaku hubungan sebagai berikut

$$c_n = a_{n-1} + d_{n-1} \text{ dan } d_n = b_{n-1} + c_{n-1}$$

Diperoleh $a_0 = 1$ dan $b_0 = c_0 = d_0 = 0$. Jadi relasi rekursif untuk a_n, b_n, c_n dan d_n diberikan oleh sistem rekursif berikut :

$$a_n = b_{n-1} + c_{n-1}$$
$$b_n = a_{n-1} + d_{n-1}$$
$$c_n = a_{n-1} + d_{n-1}$$
$$d_n = b_{n-1} + c_{n-1}$$

dengan kondisi awal $a_n = 0$, $b_n = c_n = d_n = 0$.

Selanjutnya, kita gunakan fungsi pembangkit untuk menyelesaikan sistem rekursif tersebut. Misalkan A(x), B(x), C(x), dan D(x) berturut-turut adalah fungsi pembangkit biasa dari a_n, b_n, c_n dan d_n. Diperoleh :

$$\begin{aligned} A(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots \\ &= a_0 + (b_0 + c_0)x + (b_1 + c_1)x^2 + \ldots \\ &= a_0 + x(b_0 + b_1 + b_2x^2 + \ldots) + x(c_0 + c_1 + c_2x^2 + \ldots) \\ &= 1 + xB(x) + xC(x) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots \\ &= b_0 + (a_0 + d_0)x + (a_1 + d_1)x^2 + \ldots \\ &= 0 + x(a_0 + a_1 + a_2x^2 + \ldots) + x(d_0 + d_1 + d_2x^2 + \ldots) \\ &= xA(x) + xD(x) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots \\ &= c_0 + (a_0 + d_0)x + (a_1 + d_1)x^2 + \ldots \\ &= 0 + x(a_0 + a_1 + a_2x^2 + \ldots) + x(d_0 + d_1 + d_2x^2 + \ldots) \\ &= xA(x) + xD(x) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(x) &= d_0 + d_1x + d_2x^2 + \ldots \\ &= d_0 + (b_0 + c_0)x + (b_1 + c_1)x^2 + \ldots \\ &= 0 + x(b_0 + b_1 + b_2x^2 + \ldots) + x(c_0 + c_1 + c_2x^2 + \ldots) \\ &= xB(x) + xC(x) ; \end{aligned}$$

Dengan demikian kita punya sistem persamaan :

$$A(x) = 1 + xB(x) + xC(x)$$
$$B(x) = xA(x) + xD(x)$$
$$C(x) = xA(x) + xD(x)$$
$$D(x) = xB(x) + xC(x)$$

Dengan penyelesaian,

$$A(x) = \frac{1-2x^2}{1-4x^2}$$

$$B(x) = \frac{x}{1-4x^2}$$

$$C(x) = \frac{x}{1-4x^2}$$

$$D(x) = \frac{2x^2}{1-4x^2}$$

Selanjutnya kita cari koefisien x^n dalam A(x), B(x), C(x), dan D(x).

Karena

$$A(x) = \frac{1-2x^2}{1-4x^2} = \frac{1}{1+2x^2} - \frac{2x^2}{1-2x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1+2x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-2x} - x\frac{-\frac{1}{2}}{1+2x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-2x}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-2x)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k + \frac{1}{2}x\sum_{k=0}^{\infty}(-2x)^k - \frac{1}{2}x\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k(x)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(2)^k(x)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k(x)^{k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k(x)^{k+1}$$

Maka $a_0 = 1$ dan untuk $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{2}(-2)^n + \frac{1}{2}(2)^n + \frac{1}{2}(-2)^{n-1} - \frac{1}{2}(2)^{n-1}$$

$$= 2(-2)^{n-2} + 2.2^{n-2} - (-2)^{n-2} - 2^{n-2}$$

$$= (-2)^{n-2} + 2^{n-2}$$

Atau

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{, jika } n = 0 \\ 2^{n-2} & \text{, jika } n \text{ genap dan } n \geq 2 \\ 0 & \text{, jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Selanjutnya, karena

$$B(x) = \frac{x}{1-4x^2} = \frac{\frac{1}{4}}{1-2x} - \frac{\frac{1}{4}}{1+2x} = \frac{1}{4}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n\right\},$$

Maka

$$b_n = \frac{1}{2}\left(2^n - (-2)^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{, jika } n \text{ dengan genap} \\ 2^{n-1} & \text{, jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Perhatikan bahwa C(x) = B(x), sehingga diperoleh, $c_n = b_n$. Akhirnya,

$$D(x) = \frac{2x^2}{1-4x^2} = x\left(\frac{-\frac{1}{2}}{1+2x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-2x}\right)$$

$$= x\left\{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n\right\},$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2)^n(x)^{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n(x)^{n+1}$$

Dengan demikian,

$$d_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{2}(-2)^{n-1}$$

$$= \begin{cases} 2^{n-1}, \text{ jika } n > 0 \text{ dengan } n \text{ genap} \\ 0 \quad, \text{ jika } n \text{ ganjil atau } n = 0 \end{cases}$$

D. REKURSIF MELIBATKAN KONVOLUSI

Beberapa permasalahan dalam kombinatorik dapat dimodelkan ke dalam bentuk rekursif yang melibatkan konvolusi, seperti terlihat berikut.

Misalkan diberi sebarang n bilangan $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Kita perintahkan "komputer" untuk mencari hasil kalinya. Terdapat banyak cara untuk mendapatkan hasil kali tersebut. Misalnya untuk n = 3: pertama-tama mungkin "komputer" mengalikan x_1 dan x_2, kemudian mengalikan hasil kalinya dengan x_3; atau mungkin x_2 dan x_3 dikalikan terlebih dahulu, kemudian hasil kalinya dikalikan x_1. Kita bisa bedakan kedua cara ini dengan menyisipkan "tanda kurung" yang sesuai di dalam deretan bilangan x_1, x_2, x_3. Sehingga cara pertama dan kedua, berturut-turut, dapat dituliskan sebagai berikut : $((x_1\ x_2)\ x_3)$ dan $((x_2\ x_3)\ x_1)$. Dalam hal ini komputer "tidak dapat" mengalikan x_1 dengan x_3 terlebih dahulu karena dalam deretan tersebut terdapat bilangan x_2 di antara x_1 dan x_3. Dengan kata lain, komputer hanya mampu mengoperasikan dua bilangan yang letaknya berdekatan setiap kali pengoperasian. Dengan demikian untuk n = 4, terdapat 5 cara yang berbeda seperti berikut : $(((x_1\ x_2)\ x_3)x_4)$, $((x_1\ (x_2\ x_3))\ x_4)$, $(x_1\ ((x_2\ x_3)\ x_4))$, $(x_1\ (x_2\ (x_3\ x_4)))$, $((x_1x_2)(x_3x_4))$. Sedangkan untuk n = 2 terdapat satu cara saja yaitu $(x_1\ x_2)$. Kalau diberi barisan n bilangan pertanyaan yang muncul adalah sebagai berikut : dengan berapa cara berbeda mengistruksikan komputer untuk mendapatkan hasil dari barisan n bilangan tersebut?

Misalkan K_n menyatakan banyak cara untuk mendapatkan hasil kali (dengan aturan di atas) dari barisan n bilangan. Jelas bahwa $K_1 = 1$; $K_2 = 1$; $K_3 = 2$; dan $K_4 = 5$. Selanjutnya, untuk $n \geq 2$, relasi rekursif untuk K_n dapat diperoleh dengan cara berikut :

Perhatikan "perkalian terakhir" yang dilakukan untuk menentukan hasil kali dari n bilangan $x_1, x_2, \ldots, x_n$. ini melibatkan hasil kali dari subperkalian $x_1, \ldots, x_r$ dan $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_r$; dimana $1 \leq r \leq n-1$; yaitu

$((x_1, \ldots, x_r)(x_{r+1}, \ldots, x_n))$.

Di sini kita definisikan

$((x_1)(x_1, \ldots, x_r)) \equiv (x_1(x_2 \ldots x_n))$

Untuk r = 1, dan

$((x_1, \ldots, x_{n-1})(x_n)) \equiv ((x_1, \ldots, x_{n-1})\, x_n)$

Untuk r = n–1.

Karena ada K_r cara untuk mendapatkan hasil kali dari subperkalian $x_1, \ldots, x_r$ dan K_{n-r} cara untuk mendapatkan hasil kali subperkalian $x_{r-1} \ldots x_n$ serta $1 \leq r \leq n-1$, maka

$$K_n = \sum_{r=1}^{n-1} k_r k_{n-r}, \text{ untuk } n \geq 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.4)$$

Kalau kita definisikan $K_0 = 0$, maka (3.4) menjadi

$$K_n = \sum_{r=0}^{n} k_r k_{n-r},\ n \geq 2. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.5)$$

Selanjutnya, kita selesaikan rekursif (3.5) dengan fungsi pembangkit. Untuk itu, misalkan $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n$. Kalikan kedua ruas (3.5) dengan x^n dan "diambil sigmanya" untuk $n \geq 2$, diperoleh

$$\sum_{n=2}^{\infty} k_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\sum_{r=0}^{n} k_r k_{n-r}\Big) x^n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.6)$$

Perhatikan bahwa $\sum_{n=2}^{\infty} k_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n - K_1 x - K_0$

$= P(x) - x,$

dan

$$\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{r=0}^{n} k_r k_{n-r}\Big)\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{r=0}^{n} k_r k_{n-r}\Big)\, x^n$$

$$= P(x)^2.$$

Sehingga (3.6) menjadi

$$P(x) - x = (P(x))^2$$

$$\Leftrightarrow (P(x))^2 - P(x) + x = 0$$

$$\Leftrightarrow P(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.7)$$

K_n adalah koefisien x^n dalam P(x). Untuk mendapatkan koefisien x^n dalam P(x), terlebih dahulu perlu mengekspansi bentuk $\sqrt{1-4x}$. dari teorema binomial diperoleh

$$(1-4)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(-4x) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(-4x)^2 + \ldots + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ r \end{bmatrix}(-4x)^r + \ldots\ldots \quad (3.8)$$

Untuk n ≥ 1, koefisien x^n ruas kanan (3.8) adalah

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ n \end{bmatrix}(-4x)^n = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right).\ldots.\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4)^n$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right).\ldots.\left(-\frac{2n-3}{2}\right)}{n!}(-4)^n$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right).\ldots.\left(-\frac{2n-3}{2}\right)(-1)^n(-4)^n}{n!}$$

$$= \frac{\left[\frac{-1}{2^n}\right](1.3.5.\ldots.(2n-3))4^n}{n!}$$

$$= \frac{-2^n(1.3.5.\ldots.(2n-3)}{n!}$$

$$= \frac{-2}{n} \cdot \frac{2^{n-1}(1.3.5.\ldots.(2n-3))(n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}$$

$$= \frac{-2}{n} \cdot \frac{(1.3.5.\ldots.(2n-3))(2.4.6.\ldots.(2n-2))}{(n-1)!(n-1)!}$$

$$= \frac{-2}{n} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}$$

$$= \frac{-2}{n}\begin{bmatrix}(2n-2) \\ (n-1)\end{bmatrix}.$$

Dengan demikian

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\begin{bmatrix}(2n-2)\\(n-1)\end{bmatrix} x^n$$

Perhatikan ruas kanan (3.8) memuat tanda "±". Jika kita pilih tanda "-" diperoleh

$$P(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\begin{bmatrix}(2n-2)\\(n-1)\end{bmatrix} x^n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\begin{bmatrix}(2n-2)\\(n-1)\end{bmatrix} x^n$$

Sehingga

$$K_n = \frac{1}{n}\begin{bmatrix}(2n-2)\\(n-1)\end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.9)$$

Jika dipilih tanda "+" diperoleh :

$$P(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1-4x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\begin{bmatrix}(2n-2)\\(n-1)\end{bmatrix} x^n\right)$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\begin{bmatrix}(2n-2)\\(n-1)\end{bmatrix} x^n$$

Sehingga

$$K_n = -\frac{1}{n}\begin{bmatrix}(2n-2)\\(n-1)\end{bmatrix}, \; n \geq 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.10)$$

Karena K_n tidak boleh negatif, maka (3.10) tidak memenuhi. Jadi (3.9) adalah solusi (3.5).

Catatan:

Bilangan $K_n = \frac{1}{n}\begin{bmatrix}(2n-2)\\(n-1)\end{bmatrix}$ disebut bilangan Catalan.

Rangkuman

1. Bila terdapat n elemen dijajar pada satu baris dan diberi label 1,2,3,….,n, kemudian ke n elemen itu dipermutasikan pada baris yang sama sedemikian hingga tidak ada satu pun elemen menempati tempatnya semula itulah yang dinamakan *derangement* (pengacakan)

   Relasi rekursif untuk D_n adalah sebagai berikut :

   $$D_0 = 1 \; ; \; D_n = nD_{n-1} + (-1)^n \, , \; n \geq \; 1.$$
2. Adakalanya suatu permasalahan dapat dimodelkan ke dalam bentuk sistem rekursif. Sistem rekursif melibatkan paling sedikit dua rekursif yang terkait satu sama lainnya.
3. Beberapa permasalahan dalam kombinatorik dapat dimodelkan kedalam bentuk rekursif yang melibatkan konvolusi.

LATIHAN

Jawablah pertanyaann-pertanyaan di bawah ini!

1. Desain arsitekur Masjid Karbala berasal dari garis-garis lurus. Gambarlah n buah garis lurus pada bidang datar, sedemikian hingga setiap pasang garis berpotongan di satu titik dan tidak ada tiga garis berpotongan di satu titik. Bila b_n menyatakan banyaknya daerah (region) yang terbentuk, maka tulis dan selesaikan relasi rekursif untuk b_n.
2. Hajad Bin Yusuf seorang tokoh kaligrafi Islam akan membuat kaligrafi dari bentuk lingkaran di sebuah masjid. Sebanyak n buah lingkaran digambar pada sebuah bidang datar (tembok) sedemikian hingga setiap dua lingkaran berpotongan di dua titik yang berbeda dan tidak ada tiga lingkaran berpotongan di satu titik. Banyaknya daerah yang terbentuk dilambangkan dengan R_n.

   (a). Tulis relasi rekursif untuk R_n.

   (b). Cari formula untuk R_n
3. Selesaikan sistem rekursif berikut :

   (a). $a_1 = b_1 = c_1 = 1$

   $a_{n+1} = a_n + b_n + c_n \quad , n \geq 1$

   $b_{n+1} = 4^n - c_n , n \geq 1$

   $c_{n+1} = 4^n - b_n , n \geq 1$

   (b). $a_0 = b_0 = c_0 = 0$

   $a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} , n \geq 1$

   $b_n = b_{n-1} + c_{n-1} + 4^{n-1} , n \geq 1$

   $c_n = c_{n-1} + b_{n-1} + 4^{n-1} , n \geq 1$
4. Diberikan.

   a_n : banyaknya barisan ternair n-angka yang memuat "0" sebanyak bilangan genap dan "1" sebanyak bilangan genap.

   b_n : banyaknya barisan ternair n-angka yang memuat "0" sebanyak bilangan genap dan "1" sebanyak bilangan ganjil.

   c_n : banyaknya barisan ternair n-angka yang memuat "0" sebanyak bilangan ganjil dan "1" sebanyak bilangan genap.

   (a). Tulis sistem rekursif yang memuat a_n, b_n, dan c_n.

   (b). Selesaikan sisem rekursif dalam soal (a).

5. Selesaikan relasi rekursif berikut :

   (a). $a_0 = 1$; $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k-1}$, $n \geq 1$

   (b). $a_0 = a_1 = 1$; $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k a_{n-k-1}$, $n \geq 2$

   (c). $a_0 = a_1 = 1$; $a_n = \sum_{k=0}^{n-2} a_k a_{n-k-2}$ $n \geq 2$

6. Sebuah kubah Masjid Baitul Maqdis berbentuk lingkaran. Gambarlah 2n titik pada sebuah lingkaran kubah tersebut. Pasangkan setiap dua titik pada lingkaran tersebut dengan ruas garis sedemikian hingga tidak ada ruas garis yang saling berpotongan. Misalkan b_n menyatakan banyaknya cara memasangkan ke 2n titik tersebut.

   (a). Tulis relasi rekursif untuk b_n.

   (b). Selesaikan relasi rekursif pada soal (a).

Referensi

Al-Qur'an al-karim

Budayasa, *I Ketut. Matematika Diskrit I.* Surabaya: University Press IKIP Surabaya.1997

Kusaeri, Ettie Rukmigarsari. *Matematika Diskrit.* Malang:UIN Malang. 2003

Samuel Wibisono. *Matematika Diskrit.* Yogyakarta: Graha Ilmu.2008