Paket 4
INKLUSI-EKSKLUSI

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada konsep dasar inklusi-eksklusi. Kajian dalam paket ini meliputi pengertian inklusi-eksklusi, bentuk umum prinsip inklusi-eksklusi, bentuk obyek yang memiliki tepat M sifat, banyak obyek yang memiliki sifat sebanyak genap atau ganjil. Paket ini sebagai pengantar materi sebelumnya.

Dalam paket 4 ini, mahasiswa akan diajak mengkaji pengertian inklusi-eksklusi, mengidentifikasi bentuk umum prinsip inklusi-eksklusi, menganalisis bentuk obyek yang memiliki tepat M sifat, serta menganalisis banyak obyek yang memiliki sifat sebanyak genap atau ganjil. Sebelum perkuliahan berlangsung, dosen menampilkan slide berbagai bentuk inklusi-eksklusi dalam konteks Islam untuk memancing ide-ide kreatif mahasiswa dalam upaya meningkatkan pemahaman dalam kehidupan sehari-hari. Mahasiswa juga diberi tugas untuk membaca uraian materi dan mendiskusikannya dengan panduan lembar kegiatan. Dengan dikuasainya dasar-dasar dari paket 4 ini diharapkan dapat menjadi modal bagi mahasiswa untuk mempelajari paket selanjutnya.

Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkulahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan Laptop sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat membatu perkuliahan, diperlukan pula kertas plano, spidol dan isolasi sebagai alat memaparkan kreatifitas hasil perkuliahan dengan membuat peta konsep.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Mahasiswa memahami dengan baik inklusi-eksklusi sebagai permasalahan diskrit dan dapat menyelesaikannya.

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat :

1. Mahasiswa dapat memahami definisi inklusi-eksklusi
2. Mahasiswa dapat memahami bentuk umum prinsip inklusi-eksklusi
3. Mahasiswa dapat menganalisis bentuk obyek yang memiliki tepat M sifat
4. Mahasiswa dapat menganalisis banyak obyek yang memiliki sifat sebanyak genap atau ganjil

Waktu

3 x 50 menit (150 menit)

Materi Pokok

1. Pengertian inklusi-eksklusi
2. Bentuk umum prinsip inklusi-eksklusi
3. Bentuk obyek yang memiliki tepat M sifat
4. Banyak obyek yang memiliki sifat sebanyak genap atau ganjil

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan awal (20 menit)

1. Brainstorming dengan mengamati slide berbagai kejadian mengenai inklusi-eksklusi berdasarkan konteks islami dan dalam kehidupan sehari-hari
2. Penjelasan mengenai pentingnya mempelajari paket

Kegiatan Inti (110 menit)

1. Dosen menjelaskan pengertian inklusi-eksklusi
2. Membagi mahasiswa dalam 4 kelompok dengan mengambil 1 siswa sebagai pemimpin kelompok
3. Masing-masing pemimpin kelompok maju untuk memilih subtema :

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Inklusi-eksklusi, bentuk umum prinsip inklusi-eksklusi, bentuk obyek yang memiliki tepat M sifat, banyak obyek yang memiliki sifat sebanyak genap atau ganjil

4. Setelah masing-masing pemimpin mendapatkan subtema, mereka disuruh untuk memilih mahasiswa lainnya untuk dijadikan anggota kelompok
5. Masing–masing kelompok berdiskusi mengenai subtema yang didapat, kemudian pemimpin masing-masing kelompok maju untuk presentasi.
6. Pemimpin kelompok presentasi hasil diskusi kelompoknya dan kelompok lainnya mengklarifikasi hasil presentasi melalui pemimpin kelompok masing-masing
7. Penguatan hasil diskusi dari anggota kelompok dan dosen
8. Dosen memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberikan dorongan psikologis atau saran atau nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya

Lembar Kegiatan

Membuat Peta Konsep (*Mind Map*) konsep Inklusi-Eksklusi.

Tujuan

Mahasiswa mampu memahami dengan baik inklusi-eksklusi sebagai permasalahan diskrit dan dapat menyelesaikan menggunakan Peta Konsep melalui kreatifitas ungkapan ide dari anggota kelompok yang dituangkan.

Bahan dan Alat

Spidol, papan, kertas plano, LCD, laptop

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Langkah Kegiatan

1. Pilihlah seorang pemimpin kerja kelompok dan penulis konsep hasil kerja!
2. Diskusikan materi yang telah ditentukan dengan anggota kelompok!
3. Tuliskan hasil diskusi dalam bentuk peta konsep!
4. Tempelkan hasil kerja kelompok di papan tulis atau dinding kelas!
5. Pilihlah satu anggota kelompok atau pemimpin kelompok untuk presentasi!
6. Presentasikan hasil kerja kelompok secara bergiliran melalui masing-masing pemimpin kelompok, dengan waktu bergiliran masing-masing 20 menit.
7. Berikan tanggapan atau klarifikasi dari presentasi melalui pemimpin kelompok.

Uraian Materi

PRINSIP INKLUSI-EKSKLUSI

A. Pendahuluan

Dengan mempelajari Al-qur'an manusia bisa memperoleh banyak pengetahuan yang ada di dunia ini. Akhirnya, manusia bisa lebih memahami bahwa Al-qur'an memang benar-benar sebagai sumber ilmu pengetahuan di bumi ini. Seperti dalam kutipan QS. Al Baqarah ayat 117 berikut. Alloh SWT yang menciptakan segalanya yang ada di alam semesta ini tak terkecuali manusia.

بَدِيعُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ ۖ وَإِذَا قَضَىٰٓ أَمْرًا فَإِنَّمَا يَقُولُ لَهُۥ كُن فَيَكُونُ ﴿١١٧﴾

Allah Pencipta langit dan bumi, dan Bila dia berkehendak (untuk menciptakan) sesuatu, maka (cukuplah) Dia hanya mengatakan kepadanya: "Jadilah!" lalu jadilah ia.[1]

[1] Al-Qur'an. 1 (al-Baqarah), 117

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Salah satu karunia Alloh SWT sang maha pencipta adalah hewan. Beragam jenis hewan Dia ciptakan tanpa ada yang sama satu dengan lainnya. Hewan sendiri terbagi dalam beberapa jenis, seperti unggas, reptil, pisces, serangga, dan mamalia. Setiap jenis hewan dikelompokkan sesuai dengan ciri-cirinya masing-masing.

Misalkan unggas memiliki ciri – ciri berikut : (1) bertelur, (2) berkaki dua, (3) memiliki sayap, (4) tidak memiliki daun telinga dan lain-lain. Reptil memiliki ciri – ciri : (1) bertelur, (2) berkaki empat (3) tidak memiliki daun telinga dan lain-lain, hingga mamalia memiliki ciri – ciri : (1) beranak, (2) memiliki daun telinga, (3) ada yang memiliki sayap, (4) berkaki empat dan sebagainya.

Ilustrasi di atas bila dibawa ke dalam konteks abstrak maka dapat dijelaskan sebagai berikut. Bila ciri – ciri hewan dinyatakan dalam himpunan S, diklasifikasikan ke dalam N kelompok (unggas, reptil, pisces, mamalia, dan serangga), maka $a_1, a_2, \ldots, a_r$ merupakan ciri – ciri dari unggas dan sebagainya.

B. Pengertian Inklusi-Eksklusi

Misalkan S adalah suatu himpunan dari N obyek, simbol $a_1, a_2, \ldots, a_r$ menunjukkan sifat-sifat yang mungkin dimiliki obyek-obyek yang ada di S. Sebuah obyek di S mungkin saja memiliki beberapa (bisa tidak ada atau noll) sifat dari sifat-sifat yang ada. Misalkan banyaknya obyek S yang mempunyai sifat a_1 dilambangkan dengan $N(a_1)$, sedangkan $N(a_1')$ menyatakan banyaknya obyek S yang tidak memiliki sifat a_1. Dengan demikian,

$$N = N(a_1) + N(a_1')$$

Selanjutnya $N(a_i a_j)$ menyatakan banyaknya obyek S yang memiliki sifat a_i dan a_j, dan $N(a_i' a_j')$ melambangkan banyaknya obyek yang tidak memiliki sifat a_i maupun a_j. Begitu pula, $N(a_i' a_j)$ menyatakan banyaknya obyek yang memiliki sifat a_j tetapi bukan sifat a_i. Secara umum $N(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik})$ adalah banyak obyek S yang memiliki sifat-sifat $a_{i1}, a_{i2}, \ldots$, dan a_{ik}.

Misalkan A adalah himpunan bagian dari S yang anggota-anggotanya memiliki sifat a_1 dan B adalah himpunan bagian dari S yang anggota-angggotanya memiliki sifat a_2. Jadi himpunan dari S yang anggota-

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

anggotanya memiliki sifat a_1 dan a_2 adalah $A \cap B$. Begitu pula himpunan bagian dari S yang anggota-anggotanya tidak memiliki sifat a_1 maupun a_2 adalah $A' \cap B'$ yang sama dengan $(A \cup B)'$. Diperoleh $\dot{S} = N$, $\dot{A} = N(a_1)$, $\dot{B} = N(a_2)$ dan $\dot{A'} \cap \dot{B'} = \dot{(A \cup B)'} = N(a_1' a_2')$. Karena $S = (A \cup B) \cup (A \cup B)'$ dan $(A \cup B) \cap (A \cup B)' = \emptyset$, maka $\dot{S} = \dot{(A \cup B)} + \dot{(A \cup B)'}$. Dapat ditunjukkan bahwa,

$$\dot{A \cup B} = \dot{A} + \dot{B} - \dot{A \cap B}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{(A \cup B)'} &= \dot{S} - \dot{A \cup B} \\ &= \dot{S} - (\dot{A} + \dot{B} - \dot{A \cap B}) \\ &= \dot{S} - \dot{A} - \dot{B} + \dot{A \cap B}\end{aligned}$$

Dengan demikian, banyaknya obyek di S yang tidak memiliki sifat a_1 maupun a_2 adalah

$$N(a_1' a_2') = N - N(a_1) - N(a_2) + N(a_1 a_2) \quad \ldots\ldots (4.1)$$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan banyaknya obyek di S yang tidak memiliki sifat $a_1.a_2$, ataupun a_3 adalah

$$N(a_1' a_2' a_3') = N - N(a_1) - N(a_2) - N(a_3) + N(a_1 a_2) + N(a_1 a_3) + N(a_2 a_3) - N(a_1 a_2 a_3) \quad \ldots\ldots (4.2)$$

Persamaan (4.1) dan (4.2) adalah bentuk-bentuk khusus dari suatu prinsip yang disebut prinsip inklusi-eksklusi.

Bentuk umum dari prinsip inklusi-eksklusi akan disajikan di bagian berikut. Sebelumnya mari kita tinjau sejenak formula $\dot{A \cup B} = \dot{A} + \dot{B} - \dot{A \cap B}$ yang telah digunakan untuk memperoleh persamaan (4.1). Untuk menghitung ruas kiri dari formula ini, kita telah "melibatkan" (*to include*) semua elemen A dan semua elemen B, sehingga mendapatkan $\dot{A} + \dot{B}$. Sedangkan dalam menentukan nilai $\dot{A} + \dot{B}$ setiap elemen sekutu dari A dan B dihitung dua kali. Dengan kata lain sebanyak $\dot{A \cap B}$ elemen dihitung dua kali. Sebesar $\dot{A \cap B}$ pula yang harus dikurangkan atau "dikeluarkan" (*to exclude*) dari $\dot{A} + \dot{B}$ untuk memperoleh $\dot{A \cap B}$. Kiranya jelas, istilah "*include*" dan "*exclude*" mengilhami istilah inklusi-eksklusi yang dipakai.

C. Bentuk Umum Prinsip Inklusi-Eksklusi

Secara umum prinsip inklusi-eksklusi (kadang-kadang dikenal sebagai metode Sieve) dapat ditulis dalam terorema 4.3. :

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Teorema 4.3 : (Prinsip Inklusi-eksklusi)

Jika N adalah banyaknya obyek dalam himpunan S dan $a_1, a_2 \ldots a_r$ sifat-sifat yang mungkin dimiliki oleh suatu obyek di S, maka banyaknya obyek di S yang tidak memiliki sifat $a_1, a_2, \ldots, a_r$ adalah

$$N(a_1' a_2' \ldots a_r') = N - \sum_i N(a_i) + \sum_{i,j} N(a_i a_j) - \sum_{i,j,k} N(a_i a_j a_k) \pm \ldots$$
$$+ (-1)^r N(a_1, a_2, \ldots, a_r) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.3)$$

Pada persamaan (4.3), "sigma" pertama mencakup semua $i \in 1, 2, 3, \ldots, r$; "sigma" kedua mencakup semua pasangan i,j, $i \neq j$, $i, j \in 1, 2, 3, \ldots, r$; "sigma" ketiga mencakup semua triple i, j, k, $i, j, k \in 1, 2, 3, \ldots, r$ dan i, j, k berbeda; dan seterusnya.

Bukti Teorema 4.3

Ruas kiri dari persamaan (4.3) menyatakan banyak obyek di S yang tidak memiliki sifat $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Untuk menunjukkan bahwa ruas kiri sama dengan ruas kanan dalam (4.3), cukup ditunjukkan bahwa : setiap obyek yang tidak memiliki sifat a_1; sifat a_2 ...., ataupun sifat a_r tepat dihitung sekali dalam menghitung ruas kanan (4.3). Selanjutnya, setiap obyek yang memiliki paling sedikit satu sifat, dihitung sebanyak nol kali dalam menghitung ruas kanan (4.3).

Pandang sebuah obyek di S. Misalkan x sebuah obyek di S. Jika obyek x tidak memiliki sifat dari sifat-sifat yang ada, maka obyek ini dihitung tepat sekali dalam menghitung N, di ruas kanan (4.3); dan tidak dihitung dalam menghitung suku-suku yang lain dalam ruas kanan (4.3).

Jika obyek x dalam S memiliki sebanyak $p \geq 1$ sifat dari sifat yang ada, maka obyek ini dihitung sebanyak :

$\begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} = 1$ kali dalam menghitung N,

$\begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}$ kali dalam menghitung $\sum_i N(a_i)$

$\begin{bmatrix} P \\ 2 \end{bmatrix}$ kali dalam menghitung $\sum_{i,j} N(a_i a_j)$

$\sum_{i,j,k} N(a_i a_j a_k)$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$\begin{bmatrix} P \\ 3 \end{bmatrix}$ kali dalam menghitung

.

.

.

.

dan seterusnya.

Dengan demikian dalam menghitung ruas kanan (4.3), obyek ini dihitung sebanyak n kali dimana

$$n = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P \\ 3 \end{bmatrix} + \ldots\ldots + (-1)^r \begin{bmatrix} P \\ r \end{bmatrix}.$$

Karena $\begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ untuk t^{-} p, maka

$$n = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P \\ 3 \end{bmatrix} + \ldots\ldots + (-1)^p \begin{bmatrix} P \\ p \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya karena

$$\begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P \\ 3 \end{bmatrix} + \ldots\ldots + (-1)^p \begin{bmatrix} P \\ p \end{bmatrix} = 0$$

Jadi n = 0. Dengan demikian teorema terbukti.

Catatan :

Dari Teorema Binomial diperoleh

$$(1 + x)^p = \sum_{k=0}^{p} \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} x^k. \quad (*)$$

Subtitusikan x dengan –1 pada (*), sehingga didapat :

$$0 = (1 + (-1))^p = \sum_{k=0}^{p} \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} (-1)^k.$$

Atau

$$0 = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P \\ 3 \end{bmatrix} + \ldots\ldots + (-1)^p \begin{bmatrix} P \\ p \end{bmatrix}$$

Beberapa contoh aplikasi dari prinsip inklusi-eksklusi diberikan berikut ini.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Contoh 4.1.

Adam berjalan menuju sebuah bukit Jabal Nur yang berada di Mekah. Dia pun berjalan dan menghitung setiap langkah sampai di atas bukit. Setelah sampai di atas bukit, ternyata sudah 1000 langkah. Amir salah satu teman Adam mencoba mengidentifikasi bilangan 1000 yang dipakai Adam untuk melangkah tersebut. Ada berapa bilangan bulat dari 1 sampai 1000 yang

(a). tidak habis dibagi 3 atau 5?
(b). tidak habis dibagi 3, 5 atau 7?

Penyelesaian :

Misalkan L = 1, 2, 3, . . . , 1000, dan a_1 : sifat habis dibagi 3; a_2 : sifat habis dibagi 5; serta a_3 : sifat habis dibagi 7.

Yang ditanyakan adalah : (a) $N(a_1'a_2')$; (b) $N(a_1'a_2'a_3')$.

Diketahui bahwa N = S = 1000. Selanjutnya kita peroleh,

$N(a_1)$ = banyaknya anggota S yang habis dibagi 3
= [1000/3] = 333

$N(a_2)$ = banyaknya anggota S yang habis dibagi 5
= [1000/5] = 200

$N(a_3)$ = banyaknya anggota S yang habis dibagi 7
= [1000/7] = 142

$N(a_1a_2)$ = banyaknya anggota S yang habis dibagi 3 dan 5
= [1000/15] = 66

$N(a_1a_3)$ = [1000/21] = 47, $N(a_2a_3)$ = [1000/35] = 28, dan $N(a_1a_2a_3)$ = [1000/105] = 9.

Dengan prinsip inklusi-eksklusi didapat :

(a). $N(a_1'a_2') = N - N(a_1) - N(a_2) + N(a_1\ a_2)$
$= 1000 - 333 - 200 + 66 = 533$;

(b). $N(a_1'a_2'a_3') = N - N(a_1) - N(a_2) - N(a_3) + N(a_1\ a_2) + N(a_1\ a_3) + N(a_2\ a_3) - N(a_1\ a_2\ a_3)$
$= 1000 - 333 - 200 - 142 + 66 + 47 + 28 - 9 = 475$

Contoh 4.2.

Muhammad mempunyai n bola yang berbeda ditempatkan ke dalam k kotak yang berbeda. Berapakan peluang bahwa tidak terdapat kotak yang kosong?

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Penyelesaian :

Misalkan S adalah himpunan semua kejadian yang mungkin. E_i adalah kejadian kotak ke-i kosong dan a_i adalah sifat bahwa kejadian E_i muncul. Dalam hal ini $i \in 1,2,\ldots,k$.

Diperoleh, $N = |S| = k^n$. Demikian pula : $N(a_i) = (k-1)^n$; $N(a_ia_j) = (k-2)^n$; $N(a_ia_ja_k) = (k-3)^n$; . . . dan seterusnya. Selanjutnya terdapat $\binom{k}{1}$ cara memilih a_i, $\binom{k}{2}$ cara memilih sifat a_i dan a_j, $\binom{k}{3}$ cara memilih sifat a_i, a_j, dan a_k, dan seterusnya. Sehingga banyaknya cara menempatkan (mendistribusikan) n bola ke dalam n kotak sedemikian hingga tidak ada kotak yang kosong adalah

$$N(a_1'a_2'\ldots a_k') = k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n + \ldots + (-1)^n\binom{k}{k}(k-k)^n.$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-2)^i$$

Dengan demikian, peluang tidak ada kotak kosong adalah

$$\frac{N(a_1'a_2'\ldots a_k')}{N} = k^{-n}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-2)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(1-\frac{i}{k})^n.$$

Contoh 4.3.

Gunakan prinsip inklusi-eksklusi untuk menentukan banyaknya solusi bulat dari persamaan berikut :

$x_1 = x_2 = x_3 = 20$, $0 \le x_i \le 5 \ \forall\ i \in 1, 2, 3$

Penyelesaian :

Misalkan S adalah himpunan semua solusi bulat dari persamaan $x_1 = x_2 = x_3 = 20$, $0 \le x_i \le 5 \ \forall\ i \in 1, 2, 3$. Dapat ditunjukkan bahwa $N = |S| = \binom{3+20-1}{20} = \binom{22}{20}$. Untuk setiap $i \in 1, 2, 3$, misalkan a_i menyatakan sifat $x_i \ge 6$. Sehingga :

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$N(a_1)$ = banyaknya anggota S yang mempunyai sifat a_1.

= banyaknya solusi bulat $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, $x_1 \geq 6$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

= banyaknya solusi bulat $x_1 - 6 + x_2 + x_3 = 14$, $x_1 - 6 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

= banyaknya solusi bulat $x_1' + x_2 + x_3 = 14$, $x_1' \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

$= \binom{3+14-1}{14} = \binom{16}{14}$.

$N(a_2)$ = banyaknya anggota S yang mempunyai sifat a_2.

= banyaknya solusi bulat $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 6$, $x_3 \geq 0$

= banyaknya solusi bulat $x_1 + x_2 - 6 + x_3 = 14$, $x_1 \geq 0$, $x_2 - 6 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

= banyaknya solusi bulat $x_1 + x_2' + x_3 = 14$, $x_1 \geq 0$, $x_2' \geq 0$, $x_3 \geq 0$

$= \binom{3+14-1}{14} = \binom{16}{14}$.

Dengan cara yang sama diperoleh $N(a_3) = \binom{16}{14}$.

Selanjutnya :

$N(a_1a_2)$ = banyaknya anggota S yang mempunyai sifat a_1 dan a_2.

= banyaknya solusi bulat $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, $x_1 \geq 6$, $x_2 \geq 6$, $x_3 \geq 0$

= banyaknya solusi bulat $x_1 - 6 + x_2 - 6 + x_3 = 8$, $x_1 - 6 \geq 0$, $x_2 - 6 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

= banyaknya solusi bulat $x_1' + x_2' + x_3 = 8$, , $x_1' \geq 0$, $x_2' \geq 0$, $x_3 \geq 0$

$= \binom{3+8-1}{8} = \binom{10}{8}$.

Dengan cara yang sama diperoleh $N(a_1a_3) = N(a_2a_3) = \binom{10}{8}$.

$N(a_1a_2a_3)$ = banyaknya anggota S yang mempunyai sifat a_1, a_2 dan a_2.

= banyaknya solusi bulat $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, $x_1 \geq 6$, $x_2 \geq 6$, $x_3 \geq 6$

= banyaknya solusi bulat $x_1 - 6 + x_2 - 6 + x_3 - 6 = 2$, $x_1 - 6 \geq 0$, $x_2 - 6 \geq 0$, $x_3 - 6 \geq 0$

= banyaknya solusi bulat $x_1' + x_2' + x_3' = 2$, $x_1' \geq 0$, $x_2' \geq 0$, $x_3' \geq 0$

$= \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2}$.

Menurut prinsip inklusi-eksklusi, diperoleh :

$N(a_1', a_2', a_3') = N - N(a_1) + N(a_2) + N(a_3) - N(a_1a_2) - N(a_1a_3) - N(a_2a_3)$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$$+ N(a_1 a_2 a_3)$$
$$= \binom{22}{20} - \binom{16}{14} + \binom{16}{14} + \binom{16}{14} - \binom{10}{8} - \binom{10}{8} - \binom{10}{8} + \binom{4}{2}$$
$$= \binom{22}{20} - 3\binom{16}{14} - 3\binom{10}{8} + \binom{4}{2}$$

Jadi banyak solusi bulat dari persamaan

$$x_1 = x_2 = x_3 = 20 \text{ , } 0 \leq x_i \leq 5 \ \forall \ i \in 1, 2, 3$$

adalah

$$\binom{22}{20} - 3\binom{16}{14} - 3\binom{10}{8} + \binom{4}{2}.$$

D. Bentuk Obyek Yang Memiliki Tepat M Sifat

Misalkan S adalah himpunan N obyek, dan $a_1, a_2, \ldots, a_r$, adalah sifat-sifat dari obyek-obyek yang terdapat di dalam S. Adakalanya kita ingin mengetahui banyaknya obyek di S yang memiliki tepat m sifat. Misalkan pula a_m banyaknya obyek S yang memiliki tepat $m \leq r$ sifat. Selanjutnya, untuk $t \geq 1$, didefinisikan S_t sebagai berikut.

$$S_t = \sum N(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots a_{it},),$$

dimana "sigma" mencakup semua kemungkinan memilih t sifat $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots a_{it},)$ dari r sifat yang ada. Hubungan e_m dan s_m dapat dilihat pada teorema berikut :

TEOREMA 4.4:

Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_r$, adalah sifat-sifat yang mungkin dimiliki oleh suatu obyek di himpunan S. Banyak obyek S yang memiliki tepat $m \leq r$ sifat adalah

$$e_m = s_m - \binom{m+1}{1} s_{m+1} + \binom{m+2}{2} s_{m+1} - \binom{m+3}{3} s_{m+1} + \ldots + (-1)^p \binom{m+p}{p}$$
$$s_{m+p} + \ldots + (-1)^{r-m} \binom{m+r-m}{r-m} s_r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.4)$$

Bukti :

Seperti halnya bukti Teorema 4.3, untuk membuktikan Teorema 4.4 cukup ditunjukkan bahwa : (i) setiap obyek S yang memiliki kurang dari m sifat, tidak dihitung dalam menghitung ruas kiri maupun ruas kanan (4.4); (ii) setiap obyak S yang memiliki tepat m sifat, dihitung tepat satu kali dalam menghitung ruas kiri dan ruas kanan (2.1); dan (iii) setiap obyek S

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

yang memiliki lebih dari m sifat, dihitung nol kali dalam menghitung ruas kiri dan ruas kanan (4.4).

Pandang sebuah obyek sembarang di S, misalnya obyek x. Kita tinjau tiga kasus, (i) obyek x memiliki kurang dari m sifat; (ii) obyek x memiliki tepat m sifat; dan (iii) obyek x memiliki lebih dari m sifat.

Jika obyek ini memiliki kurang dari m sifat, maka jelas obyek tersebut "tidak dihitung" dalam menghitung e_m. Selanjutnya, karena obyek x dihitung sekali dalam menghitung S_m; dihitung nol kali dalam menghitung S_{m+k}. Untuk $k \geq 1$, maka obyek ini dihitung tepat satu kali dalam menghitung ruas kanan (4.4).

Jika obyek x memiliki lebih dari m sifat, misalnya m+j sifat, jelas obyek ini tidak dihitung dalam menghitung e_m, Akan ditunjukkan bahwa obyek ini dihitung sebanyak nol kali dalam menghitung ruas kanan (4.4). Perhatikan bahwa obyek tersebut dihitung sebanyak $\binom{m+j}{m}$ dalam menghitung S_m, $\binom{m+j}{m+1}$ dalam menghitung S_{m+1}, $\binom{m+j}{m+2}$ dalam menghitung S_{m+2}, $\binom{m+j}{m+3}$ dalam menghitung S_{m+3}, dan seterusnya. Secara umum, obyek tersebut dihitung sebanyak $\binom{m+j}{m+p}$ dalam menghitung S_{m+p}, untuk $p \leq j$.

Sedangkan untuk $p > j$, obyek tersebut tidak dihitung dalam menghitung S_{m+p}, karena sudah dimisalkan obyek tersebut memiliki m+j sifat. Dengan demikian, dalam menghitung ruas kanan (4.4) obyek x tersebut dihitung sebanyak

$$\binom{m+j}{m} - \binom{m+j}{m+1}\binom{m+1}{1} + \binom{m+j}{m+2}\binom{m+2}{2} - \binom{m+j}{m+3}\binom{m+3}{3} + \dots$$
$$+ (-1)^p \binom{m+j}{m+p}\binom{m+p}{p} + \dots + (-1)^j \binom{m+j}{m+j}\binom{m+j}{j} \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

Dapat ditunjukkan bahwa

$$\binom{m+j}{m+p}\binom{m+p}{p} = \binom{m+j}{m}\binom{j}{p}.$$

Sehingga bentuk (4.5) menjadi

$$\binom{m+j}{m} - \binom{m+j}{m}\binom{j}{1} + \binom{m+j}{m}\binom{j}{2} - \binom{m+j}{m}\binom{j}{3} + \dots + (-1)^j \binom{m+j}{m}\binom{j}{j}$$
$$= \binom{m+j}{m}\left(\binom{j}{0} - \binom{j}{1} + \binom{j}{2} - \binom{j}{3} + \dots + (-1)^j \binom{j}{j}\right) \quad \dots\dots\dots\dots (4.6)$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Karena

$$\binom{j}{0} - \binom{j}{1} + \ldots + (-1)^j \binom{j}{j} = 0,$$

Maka

$$\binom{m+j}{m}\left(\binom{j}{0} - \binom{j}{1} + \binom{j}{2} - \binom{j}{3} + \ldots + (-1)^j \binom{j}{j}\right)$$

$$= \binom{m+j}{m} . 0$$

= 0 .Teorema terbukti.

Catatan :

i Perhatikan bahwa

$$\binom{m+j}{m+p} - \binom{m+p}{p} = \frac{(m+j)!}{(m+p)!(j-p)!} \cdot \frac{(m+p)!}{p!\,m!}$$

$$= \frac{(m+j)!}{m!\,j!} \cdot \frac{j!}{p!\,(j-p)!}$$

$$= \binom{m+j}{m}\binom{j}{p}.$$

ii Jika S_0 = N, maka prinsip inklusi-eksklusi adalah kejadian khusus Teorema 4.4 (yaitu untuk m = 0).

Salah satu aplikasi dari Teorema 4.4, dapat dilihat pada contoh berikut ini.

Contoh 4.4:

Pada hari Raya Idul Fitri sebanyak n pasang suami istri hadir dalam suatu acara Halal Bi Halal yang di adakan oleh UIN Sunan Ampel Surabaya. Halal Bi Halal dilakukan serentak dan seorang pria harus bersalaman dengan seorang wanita.

(a). Berapakah peluang terdapat tepat satu pasang suami istri bersalaman bersama dalam acara halal bi halal tersebut?

(b). Berapakah peluang terdapat tepat tiga pasang suami istri bersalaman bersama dalam pesta dansa tersebut?

Penyelesaian :

Misalkan S adalah himpunan semua pasangan suami istri yang bersalaman yang mungkin, dan a_i menyatakan sifat dimana suami ke-i berpasangan dengan istrinya, maka N = S= n!. selanjutnya kita peroleh.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$N(a_i)$ = banyaknya pasangan yang mungkin dimana pasangan ke-i adalah pasangan suami istri

= banyaknya permutasi (n–1) elemen

= (n–1)!

Begitu pula,

$N(a_ia_j)$ = banyaknya pasangan yang mungkin dimana pasangan ke-i dan ke-j adalah pasangan-pasangan suami istri

= banyaknya permutasi (n–2) elemen

= (n–2)!

Secara umum diperoleh $N(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots a_{ik}) = (n-k)!$

Karena ada $\binom{n}{k}$ cara memilih k sifat dari n sifat yang ada, maka

$$S_k = \sum N(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots a_{ik}) = \binom{n}{k}(n-k)!$$

(a). Dari Teorema 4.4(r=n, m=1), diperoleh

$$e_1 = s_1 - \binom{2}{1}s_2 + \binom{3}{2}s_3 \mp \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}s_n$$

$$= \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{2}{1}\binom{n}{2}(n-2)! + \binom{3}{1}\binom{n}{3}(n-3)! \mp \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}(n-n)!$$

$$= \frac{n!}{1!(n-1)!}(n-1)! - \frac{2!}{1!1!}\frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)! + \frac{3!}{2!1!}\frac{n!}{3!(n-3)!}(n-3)! \mp \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n!}{(n-1)!1!}0!$$

$$= n!\,[\,1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \mp \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1!}{(n-1)}].$$

Dengan demikian, peluang terdapat tepat satu pasang suami istri bersalaman bersama adalah

$$\frac{e_1}{N} = [\,1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \mp \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1!}{(n-1)}].$$

(b). Dari Teorema 4.4 (r=n, m=3), diperoleh

$$e_3 = s_3 - \binom{4}{1}s_4 + \binom{5}{2}s_5 \mp \ldots + (-1)^{n-3}\binom{n}{n-3}s_n$$

$$= \binom{n}{3}(n-3)! - \binom{4}{1}\binom{n}{4}(n-4)! + \binom{5}{2}\binom{n}{5}(n-5)! \mp \ldots + (-1)^{n-3}\binom{n}{n-3}\binom{n}{n}(n-n)!$$

$$= \frac{n!}{3!(n-3)!}(n-3)! - \frac{4!}{1!3!}\frac{n!}{4!(n-4)!}(n-4)! + \frac{5!}{2!3!}\frac{n!}{5!(n-5)!}(n-5)! \mp \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n!}{(n-3)!3!}0!$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$$= \frac{n!}{3!}\left[\,1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \mp \ldots + (-1)^{n-3}\frac{1!}{(n-3)}\right].$$

Dengan demikian, peluang terdapat tepat satu pasang suami istri bersalaman bersama adalah

$$\frac{e_1}{N} = \frac{n!}{3!}\left[\,1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \mp \ldots + (-1)^{n-3}\frac{1!}{(n-3)}\right].$$

E. Banyak Obyek Yang Memiliki Sifat Sebanyak Genap Atau Ganjil

Disini kita tertarik dengan obyek-obyek dari S yang mempunyai sifat sebanyak bilangan genap ataupun ganjil. Berapa banyakkah obyek-obyek dari S yang memiliki sifat sebanyak genap atau ganjil? Jawaban dari pertanyaan tersebut diberikan dalam teorema berikut. Dalam teorema berikut, e_m dan S_m, untuk suatu m, sama seperti di dalam teorema 4.4.

Teorema 4.5

Jika di dalam himpunan S terdapat r sifat, maka banyaknya obyek S yang memiliki sifat sebanyak bilangan genap adalah

$$e_0 + e_2 + e_4 + \ldots = \frac{1}{2}\left[s_0 + \sum_{t=0}^{r}(-2)^t s_t\right]$$

dan banyaknya obyek S yang memiliki sifat sebanyak bilangan ganjil adalah

$$e_1 + e_3 + e_5 + \ldots = \frac{1}{2}\left[s_0 - \sum_{t=0}^{r}(-2)^t s_t\right]$$

Bukti :

Misal $E(x) = \sum_{m=0}^{\infty} e_m x^m$ adalah fungsi pembangkit biasa dari barisan (e_m). Dari Teorema 4.4, diperoleh

$$\begin{aligned}
E(x) = {} & [s_0 - s_1 + s_2 - s_3 + \ldots + (-1)^r s_r] \\
& + \left[s_1 - \binom{2}{1}s_2 + \binom{3}{2}s_3 - \ldots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}s_r\right]x \\
& + \left[s_2 - \binom{4}{1}s_3 + \binom{4}{2}s_4 - \ldots + (-1)^{r-2}\binom{r}{r-2}s_r\right]x^2 \\
& \;\;\vdots \\
& + \left[s_m - \binom{m+1}{1}s_{m+1} + \binom{m+2}{2}s_{m+2} - \ldots + (-1)^{r-m}\binom{r}{r-m}s_r\right]x^m
\end{aligned}$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

.

.

.

$+ s_r x^r$

atau,

$$E(x) = s_0 + s_1[x-1] + s_2\left[x^2 - \binom{2}{1}x + 1\right] + \ldots$$
$$\ldots + s_m\left[x^m - \binom{m}{1}x^{m-1} + \binom{m}{2}x^{m-2} + \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}x + (-1)^m\right] +$$
$$\ldots + s_r\left[x^r - \binom{r}{1}x^{r-1} + \binom{r}{2}x^{r-2} + \ldots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}x + (-1)^r\right].$$

Sehingga,

$$E(x) = \sum_{m=0}^{r} s_m (x-1)^m.$$

Dengan demikian,

$$E(1) = \begin{cases} s_0, \text{jika } m = 0 \\ \quad ; \text{dan} \\ 0, \text{jika } m \geq 0 \end{cases} \qquad E(-1) = \sum_{m=0}^{r} s_m (-2)^m.$$

Karena $E(x) = \sum_{m=0}^{\sim} e_m x^m$. maka

$$\sum_{i=0}^{\sim} e_{2i} = \frac{1}{2}[E(1) + E(-1)] = \frac{1}{2}\left[s_0 + \sum_{m=0}^{r}(-2)^m s_m\right],$$

Dan

$$\sum_{i=0}^{\sim} e_{2i} = \frac{1}{2}[E(1) - E(-1)] = \frac{1}{2}\left[s_0 - \sum_{m=0}^{r}(-2)^m s_m\right].$$

Teorema terbukti.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Rangkuman

1. Pengertian Inklusi-Eksklusi sebelumnya mari kita tinjau sejenak formula $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ yang telah digunakan untuk memperoleh persamaan (4.1). Untuk menghitung ruas kiri dari formula ini, kita telah "melibatkan" (*to include*) semua elemen A dan semua elemen B, sehingga mendapatkan $|A|+|B|$. Sedangkan dalam menentukan nilai $|A|+|B|$ setiap elemen sekutu dari A dan B dihitung dua kali. Dengan kata lain sebanyak $|A \cap B|$ elemen dihitung dua kali. Sebesar $|A \cap B|$ pula yang harus dikurangkan atau "dikeluarkan" (*to exclude*) dari $|A|+|B|$ untuk memperoleh $|A \cap B|$. Kiranya jelas, istilah "*include*" dan "*exclude*" mengilhami istilah inklusi-eksklusi yang dipakai.
2. Secara umum prinsip inklusi-eksklusi (kadang-kadang dikenal sebagai metode Sieve) dapat ditulis dalam prinsip Inklusi-Eksklusi
3. Misalkan S adalah himpunan N obyek, dan $a_1, a_2, \ldots, a_r$, adalah sifat-sifat dari obyek-obyek yang terdapat di dalam S. Adakalanya kita ingin mengetahui banyaknya obyek di S yang memiliki tepat m sifat. Misalkan pula a_m banyaknya obyek S yang memiliki tepat $m \leq r$ sifat. Selanjutnya, untuk $t \geq 1$, didefinisikan S_t sebagai berikut.

$$S_t = \sum N(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots a_{it}),$$

dimana "sigma" mencakup semua kemungkinan memilih t sifat $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots a_{it})$ dari r sifat yang ada.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Isa selalu melakukan sholat malam setiap hari. Setelah sholat, dia selalu berdzikir 10000 kali. Tentukan banyak bilangan bulat dari 1 sampai dengan 10000 yang tidak habis dibagi 4, 6, 7, atau 10.
2. Tentukan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai dengan 1000000 yang tidak habis dibagi bilangan kuadrat sempurna atau bilangan cacah pangkat tiga.
3. Tentukan banyaknya permutasi dari 1,2,3,4,5,6 sedemikian hingga pola-pola "124" dan "35" tidak muncul.
4. Ismail sekolah di STSN (Sekolah Tinggi Sandi Negara). Dia pun mendapatkan tugas dari Bank Syariah untuk membuat sandi database Bank tersebut. Sebuah kata sandi dengan panjang 9 dibentuk dari angka-angka 0, 1 dan 2 sedemikian hingga tiap angka muncul tiga kali dan tiga angka berturutan dalam kata sandi tersebut tidak boleh sama. Ada berapa kata sandi yang dapat dibentuk?
5. Beberapa bulan ini, delapan kecelakaan terjadi dalam seminggu. Ini merupakan berita duka bagi kita sesama manusia. Dengan prinsip inklusi dan eksklusi, hitung probabilitas bahwa terdapat paling sedikit satu kecelakaan tiap hari.
6. Untuk suatu bilangan cacah n, banyaknya solusi bulat dari persamaan $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$, $x_i \geq 0$, $\forall\, i \in 1, 2, \ldots, k$ adalah $\binom{n+k-1}{n}$. Gunakan prinsip inklusi dan eksklusi untuk menentukan banyaknya solusi bulat dari setiap pertanyaan berikut.
   (a). $x_1 + x_2 + x_3 = 18$, $0 \leq x_i \leq 7$, $\forall\, i \in 1, 2, 3$;
   (b). $x_1 + x_2 + x_3 = 14$, $1 \leq x_i \leq 7$, $\forall\, i \in 1, 2, 3$;
   (c). $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, $1 \leq x_1 \leq 6$, $0 \leq x_2 \leq 7$, $4 \leq x_3 \leq 8$, $2 \leq x_4 \leq 6$;
   (d). $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 28$, $i \leq x_1 \leq 5i$, $\forall\, i \in 1, 2, 3, 4, 5$;
7. Terdapat 10 orang pilot dan 5 pesawat terbang di bandar udara Saudi Arabia. kesepuluh pilot tersebut ditugasi atasannya untuk menerbangkan kelima pesawat tersebut bersama-sama ke bandara udara Juanda Indonesia. Ada berapa cara yang mungkin untuk memasukkan pilot-pilot tersebut kedalam pesawat?

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

8. Tentukan banyaknya permutasi dari 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 sedemikian hingga.
   (a). tidak ada bilangan ganjil menempati tempatnya semula
   (b). terdapat tepat 3 bilangan menempati tempatnya semula
   (c). terdapat tepat 6 bilangan menempati tempatnya semula
9. Hitunglah banyaknya permutasi dari 1, 2, 3, . . ., n sedemikian hingga terdapat tepat k bilangan menempati tempatnya semula.
10. Misalkan Q_n menyatakan permutasi dari 1, 2, 3, . . ., n sedemikian hingga pola – pola: 12, 23, 24, . . . (n–1)n tidak muncul. Tentukan Q_n.
11. Jika $D_n = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}$ Buktikan bahwa $Q_n = D_n + D_{n-1}$.
12. Dua bilangan prima disebut <u>prima relatif</u> jika kedua bilangan tersebut hanya memiliki tepat satu faktor sekutu yaitu 1. Contoh : 6 dan 7 adalah prima relatif : tetapi 6 dan 9 bukan.
    Euler mendefinisikan fungsi Ø (n) sebagai berikut. Ø (n) menyatakan banyaknya bilangan bulat positif kurang dari n yang prima relatif terhadap n.
    (a). Misal $P_1, P_2, \ldots, P_k$ adalah faktor-faktor prima dari n dan semua $P_1, P_2, \ldots, P_k$ berbeda. Gunakan prinsip inklusi-eksklusi untuk menunjukkan bahwa.

$$\emptyset(n) = n - n\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k}\right) + n\left(\frac{1}{p_1p_2} + \frac{1}{p_1p_3} + \ldots\right)$$

$$\vdots$$

$$+ (-1)^k n\left(\frac{1}{p_1p_2\ldots p_k}\right)$$

    (b). Hitunglah Ø(10), Ø(90), Ø(105) !
    (c). Tunjukkan bahwa

$$\emptyset(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_3}\right)!$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Referensi

Al-Qur'an al-karim

Budayasa, *I Ketut. Matematika Diskrit I.* Surabaya: University Press IKIP Surabaya.1997

Kusaeri, Ettie Rukmigarsari. *Matematika Diskrit.* Malang:UIN Malang. 2003

Maman Kh, *Pola Berpikir Sains.* Bogor:QMM Publishing, 2012

Yusuf, Ahmad Muhammad. *Ensokopedi tematis Ayat Al-qur'an dan Hadits Jilid II* jakarta:Widya Cahaya, 2009

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id