Paket 5
PENGANTAR TEORI GRAPH

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ini difokuskan pada konsep dasar teori Graph. Kajian dalam paket ini meliputi pengertian graph, subgraph, lintasan dan sikel, derajat titik, dan penyajian graph dalam matrik.

Dalam paket 5 ini, mahasiswa akan mempelajari materi dapat memahami pengertian graph, istilah-istilah dalam graph, pengertian subgraph, menentukan jalan, lintasan, sikel, sirkit dari suatu graph, derajat suatu titik, dan membuat suatu matriks bila diketahui gambar graphnya (begitu pula sebaliknya) Dengan dikuasainya dasar-dasar dari paket 5 ini diharapkan dapat menjadi modal bagi mahasiswa untuk mempelajari paket selanjutnya.

Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkulahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan Labtob sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat membatu perkuliahan. Dalam paket ini juga disertai dengan latihan-latihan yang dapat melatih mahasiswa dalam mempelajari teori graph.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Memahami konsep teori graph

Indikator

Memahami pengertian graph
Memahami pengertian subgraph
Menentukan sikel dan sirkit
Menyajikan graph dalam matrik

Waktu

3 x 50 menit

Materi Pokok

Teori Graph

Kegiatan Perkuliahan

Kegiatan awal (20 menit)

1. Brainstorming dengan mengamati slide
2. Penjelasan mengenai pentingnya mempelajari paket

Kegiatan Inti (110 menit)

1. Membagi mahasiswa dalam 4 kelompok
2. Masing-masing kelompok mendiskusikan subtema :
   Kelompok 1 : pengertian graph
   Kelompok 2 : pengertian subgraph
   Kelompok 3 : sikel dan sirkit
   Kelompok 4 : graph dalam matrik
3. Presentasi hasil diskusi dari masing-masing kelompok
4. Selesai presentasi setiap kelompok, kelompok lain membaerikan klarifikasi
5. Penguatan hasil diskusi dari dosen
6. Dosen memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Kegiatan Penutup (15 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberikan dorongan psikologis atau saran atau nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya

Lembar Kegiatan

Membuat gambar graph dan menyajikannya dalam bentuk matrik.

Tujuan

Setelah mempelajari materi ini diharapkan mahasiswa dapat memahami pengertian graph, istilah-istilah dalam graph, pengertian subgraph, menentukan jalan, lintasan, sikel, sirkit dari suatu graph, derajat suatu titik, dan membuat suatu matriks bila diketahui gambar graphnya (begitu pula sebaliknya).

Bahan dan Alat

Proyektor, Labtob, kertas plano, spidol dan isolasi.

Langkah Kegiatan

1. Pilihlah seorang pemandu kerja kelompok dan penulis koknsep hasil kerja!
2. Diskusikan materi yang telah ditentukan dengan anggota kelompok!
3. Tuliskan hasil diskusi dalam bentuk peta konsep sebagaimana dalam contoh gambar diatas!
4. Tempelkan hasil kerja kelompok di papan tulis atau dinding kelas!
5. Pilihlah satu anggota kelompok untuk presentasi!
6. Presentasikan hasil kerja kelompok secara bergiliran, dengan waktu bergiliran masing-masing 20 menit.
7. Berikan tanggapan atau klarifikasi dari presentasi.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Uraian Materi : Teori Graph

PENGANTAR TEORI GRAPH

Sebelum mempelajari materi ini, marilah kita baca dan kaji bersama ayat Al-qur'an berikut ini.

ٱدۡعُ إِلَىٰ سَبِيلِ رَبِّكَ بِٱلۡحِكۡمَةِ وَٱلۡمَوۡعِظَةِ ٱلۡحَسَنَةِۖ وَجَٰدِلۡهُم بِٱلَّتِي هِيَ أَحۡسَنُۚ
إِنَّ رَبَّكَ هُوَ أَعۡلَمُ بِمَن ضَلَّ عَن سَبِيلِهِۦۖ وَهُوَ أَعۡلَمُ بِٱلۡمُهۡتَدِينَ ١٢٥

Serulah (manusia) kepada jalan Tuhan-mu dengan hikmah dan pelajaran yang baik dan bantahlah mereka dengan cara yang baik. Sesungguhnya Tuhanmu dialah yang lebih mengetahui tentang siapa yang tersesat dari jalan-Nya dan dialah yang lebih mengetahui orang-orang yang mendapat petunjuk.[1]

Dalam beberapa penjelasan, tafsir ayat sebetulnya lebih tepat dijadikan sebagai dasar dakwah. Namun Quraish Shihab mengatakan dalam tafsir Al-Misbah bahwa dalam ayat ini terdapat etika pergaulan sosial dan belajar yang menarik dan rasional, di antaranya :

1. Menyeru dengan hikmah dan cara yang baik

Dalam beberapa tafsir, hikmah yang dimaksudkan di atas adalah ilmu. Hal ini bermaksud menjelaskan kepada para penyeru agar menyerukan kebaikan dengan ilmu, tidak dengan kebodohan. Sehingga kebenaran akan seruan tersebut dapat dipertanggung jawabkan.

Sedangkan cara yang baik merupakan metode penyampaian yang didasarkan dengan siapa yang menjadi sasaran dan akhlaq dalam menyampaikan. Imam Ali mengatakan, berbicaralah sesuai dengan kemampuan mereka (si pendengar).

Oleh karena itu, konsep sosial yang dimaksudkan di sini, hendaknya kita memiliki kepedulian untuk amar ma'ruf dan nahi munkar, namun dengan hikmah dan *mau'idzotul hasanah.* Karena itu bukan tugas seorang ustadz atau ustadzah, melainkan tugas setiap muslim.

---

[1]Al-qur'an, 16 (an-Nahl), 125

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

2. Membantah dengan cara yang paling baik

Dalam ayat ini Allah mengajarkan kepada kita untuk dapat membantah dengan cara yang paling baik. Membantah dengan cara yang paling baik bukanlah sebuah anjuran untuk membantah, namun dengan sebuah metode dialog yang baik.

Dan ini menjadi pelajaran untuk kita dalam kehidupan sosial untuk dapat mendahulukan akhlaq saat kita berlainan pendapat. Karena realita yang ada menunjukkan bahwa karena perbedaan pendapat sering menjadi bumerang untuk memecah belah persatuan.

Setelah memahami ayat-ayat di atas, mari kita lanjutkan memahami pada ayat berikutnya:

وَهُوَ ٱلَّذِى مَدَّ ٱلْأَرْضَ وَجَعَلَ فِيهَا رَوَٰسِىَ وَأَنْهَٰرًا ۖ وَمِن كُلِّ ٱلثَّمَرَٰتِ جَعَلَ فِيهَا
زَوْجَيْنِ ٱثْنَيْنِ ۖ يُغْشِى ٱلَّيْلَ ٱلنَّهَارَ ۚ إِنَّ فِى ذَٰلِكَ لَءَايَٰتٍ لِّقَوْمٍ يَتَفَكَّرُونَ ﴿٣﴾

Dan Dia-lah Tuhan yang membentangkan bumi dan menjadikan gunung-gunung dan sungai-sungai padanya. Dan menjadikan padanya semua buah-buahan berpasang-pasangan, Allah menutupkan malam kepada siang. Sesungguhnya pada yang demikian itu terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi kaum yang memikirkan.[2]

Ayat tersebut menjelaskan bahwa yang ada di alam semesta ini diciptakan secara berpasangan. Berpasangan dapat diartikan saling terhubung antara satu dengan lainnya. Berhubungan tentunya ada titik yang menjadi titik awal, titik akhir, dan pengubungnya. Dapatkah Saudara mengilustrasikan-nya? Teori graph akan membahas secara rinci bagaimana hubungan antara titik-titik (verteks) tersebut menjadi sebuah sistem. Mari kita hayati makna ayat Al-qur'an tersebut dengan mempelajari meteri berikut ini!

[2]Al-qur'an, 13 (ar-Ra'd), 3

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Pengertian Graph

Definisi 5.1

Sebuah graph G terdiri atas dua himpunan hingga yakni:

a) V(G) yang unsur-unsumya disebut titik dari suatu graph, sering hanya dinotasikan dengan V dengan V(G) tidak boleh kosong.

b) E(G) yang unsur-unsumya disebut sisi dari suatu graph, sering hanya dinotasikan dengan E. E(G) mungkin suatu himpunan kosong, sedemikian hingga setiap unsur e dalam E(G) adalah sebuah pasangan tak berurutan dan titik-titik di V(G).

Misalkan u dan v adalah titik-titik 0 dan sisi e = u, v (sering ditulis e = uv) adalah sisi dari G. Dalam hal ini dikatakan bahwa sisi e menghubungkan titik-titik u dan v, titik u dan titik v berhubungan langsung *(adjacent)* di G, u dan v adalah titik-titik akhir dari sisi e, sisi e terkait *(incident)* dengan titik u dan v.

Sebuah graph G dapat dilambangkan dalam bentuk diagram. Setiap titik G digambarkan dengan sebuah noktah dan setiap sisi yang menghubungkan dua titik di G digambarkan dengan sebuah kurva sederhana (ruas garis) dengan titik-titik akhir di kedua titik tersebut.

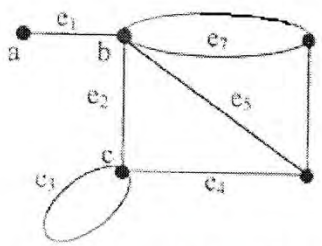
Contoh 5.1

Misalkan G adalahsebuah graph dengan V(G) = [u, v, w, x, y, z] dan E(G) = [e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7], dimana e1 = uv, e2 = uw, e3 = ux, e4 = vx, e5 = wx, e6 = xy, e7 = xz. Gambarlah dalam bentuk diagram graph G tersebut!

Jawab

Dalam bentuk diagram, graph G di atas dapat dipresentasikan seperti terlihat pada gambar berikutini.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id



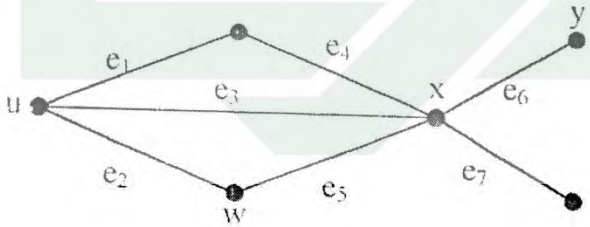
Sebuah sisi dalam graph G yang menghubungkan sebuah titik u dengan dirinya sendiri disebut *gelung (loop).* Sedangkan dalam suatu graph bila terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi-sisi tersebut disebut *sisi rangkap.*

Contoh 5.2

Misalkan G sebuah graph dengan himpunan titik V = a, b, c, d, e dan himpunan sisi E = e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 dimana e_1 = ab, e_2= bc, e_3 = cc, e_4 = cd, e_5= bd, e_6 = de, e_7 = be, e_8 = be. Gambarlah graph G dalam bentuk diagram!

Jawab

Dalam bentuk diagram, graph G tersebut dapat digambar seperti berikut ini. Pada gambar dibawah, graph G dengan 5 titik dan 8 sisi. Sisi e_3 disebut gelung (loop). Sisi-sisi e_7 dan e_8 disebut sisi rangkap.



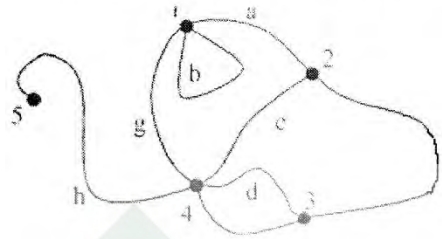
Contoh 5.3

Misalkan H sebuah graph dengan himpunan titik v = 1, 2, 3,4, 5, 6 dan himpunan sisi E = a, b, c, d, e, f, g, h dan sisi-sisi yang diberikan oleh : a = 12, b = 11, C = 23, d = 34, e = 24, f = 34, g = 14, h = 45. Gambarlah graph H dalam bentuk diagram!

Jawab

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Graph H dalam bentuk diagram dapat sebagai berikut:



Definisi 5.2

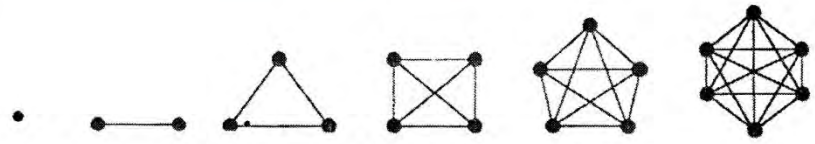
a) Sebuah graph yang tidak memiliki gelung dari sisi rangkap disebut *graph sederhana.*
b) Sebuah graph yang memiliki sisi rangkap tetapi tidak memiliki gelung disebut *graph rangkap (multi graph).*

Ilustrasi dari definisi 5.2 ini, dapat dilihat pada contoh 5.1, contoh 5.2, dan contoh 5.3. Graph G pada contoh 5.1 merupakan graph sederhana, sedangkan graph G pada contoh 5.2 dan contoh 5.3 bukan graph sederhana.

Definisi 5.3

Sebuah graph komplit dengan n titik, dilambangkan dengan K, adalah graph sederhana dimana untuk setiap dua titik dari ke-n titik-titik tersebut dihubungkan dengan sebuah sisi.

Gambar di bawah ini mengilustrasikan graph komplit K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

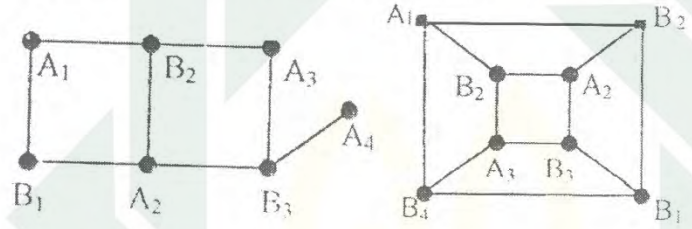
digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Definisi 5.4

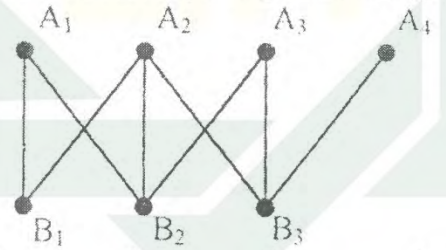
a) Sebuah graph G disebut graph bipartisi jika V(G) dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian A dan B sedemikian hingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di A dan sebuah titik di B. Dalam hal ini (A, B) bipartisi dari G.

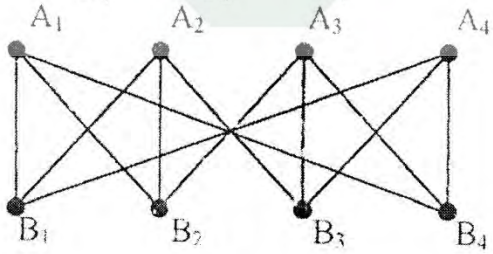
b) Sebuah graph G disebut graph bipartisi komplit (dilambangkan dengan $K_{m,n}$) apabila G graph sederhana dan bipartisi dengan partisi (A, B) sedemikian hingga setiap titik di A berhubungan langsung dengan setiap titik di B.

Gambar berikut ini menunjukkan graph bipartisi.



Agar lebih mudah, gambar tersebut dapat digambar ulang menjadi:





Dari beberapa graph yang diuraikan di atas, ada sebuah graph khusus yang tidak memiliki sisi. Graph semacam ini disebut graph kosong. Salah satu contoh bentuk gambar dari graph kosong adalah berikut:

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

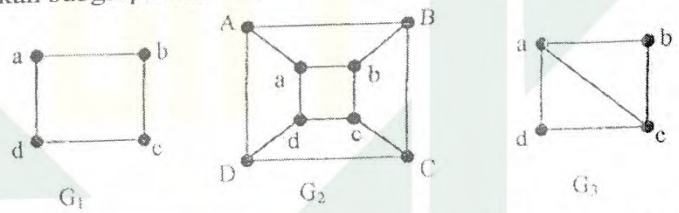
Subgraph

Definisi 5.5

Misalkan H sebuah graph dengan himpunan titik V(H) dan himpunan sisi E(H). Misalkan pula G sebuah graph dengan himpunan titik V(G) dan himpunan sisi E(G). H dikatakan subgraph dari G jika $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$ ditulis $H \subseteq G$

Contoh 5.4

Pada gambar berikut, G_1 merupakan subgraph dari G_2 dan G_3, namun G_3 *bukan merupakan subgraph dari G_2.*

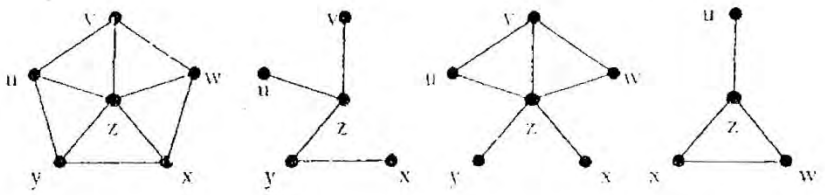


Berdasarkan definisi 5.5 di atas, jika $H \subseteq G$ dan $V(H) = V(G)$ maka H disebut graph bagian rentang (*spanning suhgraph)* dari G. Jika misalkan $V_1 \subseteq V(G)$ maka graph bagian dari G yang dibangun oleh V_1 dilambangkan dengan $G(V_1)$ merupkan sebuah graph bagian dari G yang himpunan titiknya adalah V_1 dan himpunan sisinya beranggotakan semua sisi G yang mempunyai titik-titik akhir di V_1

Contoh 5.5

Perhatikan gambar graph G, graph H_1, graph H_2, dan graph H_3 berikut. Graph H_2 merupakan graph bagian rentang dari graph G, sedangkan graph H_1 merupakan graph bagian dari graph G (bukan rentang), sedangkan graph H_3 merupakan graph bagian dari G yang dibangun oleh V_1 = [u, x, w, z]

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id



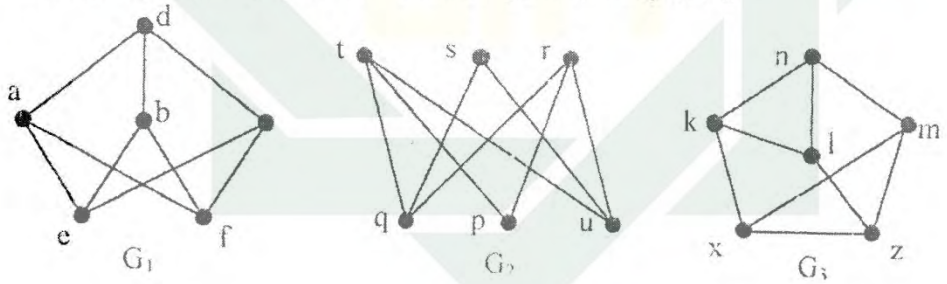
Definisi 5.6

Dua graph G dan H dikatakan isomorfik (ditulis G ∞ H) bila:

i. Terdapat korespondensi satu-satu antara V(G) dan V(H).
ii. Banyaknya sisi yang menghubungkan dua titik u dan v di V(G) sama dengan banyaknya sisi yang menghubungkan dua titik di V(H) yang berkorespondensi dengan titik-titik u dan v.

Contoh 5.6

Pada graph G_1, G_2, dan G_3 di bawah ini, graph G_1 isomorfik dengan G_2 melalui korespondensi satu-satu a↔t, b↔s, c↔r, d↔q, e↔p, f↔u. Sedangkan graph G_3 tidak isomorfik dengan G_1 maupun G_2.



Lintasan dan Sikel

Definisi 5.7

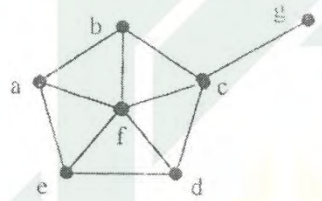
Misalkan G adalah sebuah graph. Sebuah jalan *(walk)* di G adalah sebuah barisan berhingga (tak kosong) $w = v_0e_1v_1e_2v_2 \ldots e_kv_k$: yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik akhir sisi e_i (untuk $1 \leq i \leq k$).

Berdasarkan definisi 5.7 tersebut, jika $w = v_0e_1v_1e_2 \ldots e_kv_k$ maka w merupakan jalan dari v_0 ke v_k atau jalan (v_o, v_k). Titik v_0 dan titik v_k

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir w. Sedangkan titik-titik v_1, v_2, ... , e_{k-1} disebut titik-titik intemal dari w, dan k disebut panjang dari w. Dengan demikian panjang dari jalan w adalah banyaknya sisi dalam w.

Jika semua sisi e_1, e_2, e_3, ... e_k dalam jalan w berbeda, maka w disebut **jejak *(trail)*.** Sedangkan jika semua titik v_0, v_1, v_2, ... v_k dalam jalan w juga berbeda, maka w disebut sebuah **lintasan *(path)*.** Sebuah jalan w dengan panjang positif disebut tertutup, jika titik awal dan titik akhir dari w identik (sama). Jejak tutup semacam ini disebut sirkit.Uraian di atas dapat diperjelas melalui gambar berikut.



Jalan : a f b f c d c
Jalan tutup : a b f c g c f e a
Jejak : a f e d f b
Jejak tutup : a f e d c f b a
Lintasan : a e f c g
Sikel : a c d c f a

Sebuah sirkit di graph G yang memuat semua sisi G disebut sirkit Euler.

Definisi 5.8

Sebuah graph yang memuat sirkit Euler disebut graph Euler.

Dari pengertian jejak di atas, jika terdapat sebuah jejak tertutup *(closed trail)* yang titik awal dan semua titik intemalnya berbeda maka jejak semacam ini disebut *sikel (cycle).* Banyaknya sisi dalam suatu sikel disebut panjang dari sikel tersebut.

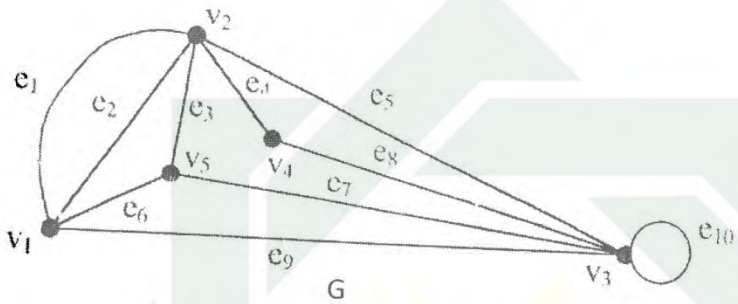
digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Definisi 5.9

Sebuah sikel yang memuat semua titik sebuah graph disebut sikel Hamilton dan graph yang memuat sikel Hamilton disebut graph Hamilton

Contoh 5.7

Perhatikan gambar graph berikut.



a) Hitunglah panjang jalan dari $w_1 = v_1e_1v_2e_5v_3e_{10}v_3e_5v_2e_3$ dan $w_2 = v_1e_1v_2e_1 v_1e_1v_2$!
b) Cari sebuah jalan tertutup dengan panjang 8!
c) Cari sebuah jejak tertutup dengan panjang 7!
d) Cari sebuah lintasan dari v_1 ke v_5
e) Berapakah panjang lintasan terpanjang?
f) Cari sebuah sirkit Euler di G (jika ada)!
g) Apakah G merupakan graph Hamilton?

Jawab

Gambar graph dalam bentuk diagram adalah sebagai berikut :

a) Panjang jalan w_1 adalah 5 dan panjang jalan w_2 adalah 3
b) Jalan tertutup dengan panjang 9 di antaranya:
   $w_3 = v_1e_1v_2e_4v_4e_8v_3e_{10}v_3e_5v_2e_3v_5e_7v_3e_9v_1$,
   $w_4 = v_2e_1v_1e_6v_5e_7v_3e_{10}v_3e_9v_1e_6v_5e_7v_3e_5v_2$.
c) Salah satu jejak tertutup di G dengan panjang 7 adalah $v_1e_1v_2e_5v_3e_{10}v_3e_8v_4e_4v_2e_3v_5e_6v_1$.
d) Salah satu lintasan di G adalah $v_1e_9v_3e_7v_5e_3v_2$.
e) Lintasan terpanjang di G salah satunya adalah lintasan $v_5e_6v_1e_9v_3e_8v_4e_8v_4e_4v_2$ dengan panjang 4.

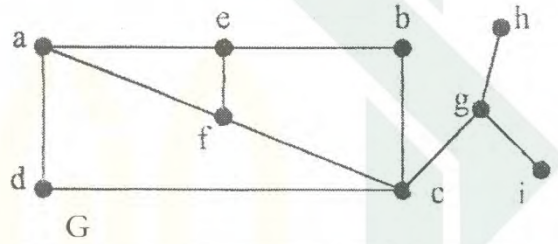
digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

f) Tidak dapat ditemukan sirkit Euler pada graph G, karena tidak ada jejak tutup yang memuat semua sisi G.
g) Graph G bukan graph Hamilton

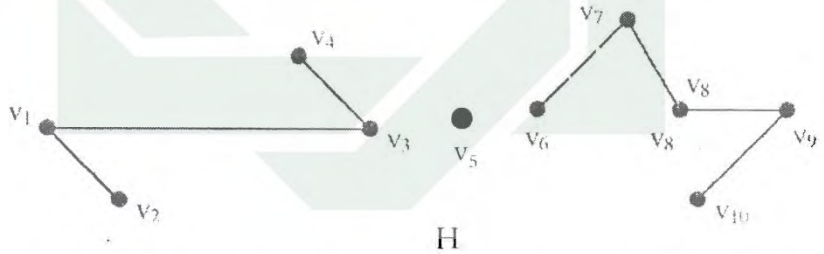
Definisi 5.10

Sebuah graph G dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik u dan v di G terdapat jalan di G yang menghubungkan kedua titik tersebut.

Ingkaran dari pernyataan di atas, graph G disebut graph tak terhubung, bila terdapat dua titik u dan v di G yang menghubungkan kedua titik tersebut. Untuk memperjelas definisi di atas, perhatikan beberapa gambar berikut.



G adalah graph terhubung dan H adalah graph tak terhubung.



Sebuah komponen dari graph G adalah sebuah graph bagian terhubung maksimal dari G. Jadi setiap graph terhubung hanya mempunyai satu komponen, sedangkan graph tak terhubung memiliki lebih dari satu komponen. Pada gambar di atas, graph G memiliki satu komponen, sedangkan graph H memiliki tiga komponen

Derajat Titik

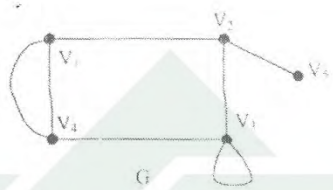
Misalkan y adalah sebuah titik di graph G. Banyaknya sisi G yang terkait di titik v disebut derajad tirik v dan dilambangkan dengan d(v). Pada

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

perhitungan derajad suatu titik, titik yang terkait dengan loop (gelung) dihitung dua kali.

Contoh 5.8

Perhatikan graph berikut ini, kemudian selanjutnya hitunglah derajad dari *masing-masing titiknya*



Jawab

Derajad masing-masmg titik dari graph G di atas adalah $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 4$, $d(v_4) = 3$, dan $d(v_5) = 1$.

Berdasarkan kasus ini $d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) = 14 = 2$ x (banyaknya sisi di G)

Teorema 5.11 (Lemma Jabat Tangan)

Untuk setiap graph G dengan e sisi dan n titik, yakni $v_1, v_2, \ldots, v_n$ berlaku

$$\sum_{i=1}^{n} d(vi) = 2e$$

Bukti

Karena setiap sisi dari graph G mempunyai dua titik ujung, maka masing-masing sisi akan menyumbangkan tepat dua pada perhitungan jumlah dari derajad titik. Dengan kata lain ketika derajad dan suatu titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Teorema Akibat 5.12

Banyaknya titik yang berderajad ganjil dalam suatu graph adalah genap.

Bukti

Pandang sebarang graph G. Misalkan V_1 dan V_2 berturut-turut adalah himpunan semua titik G yang berderajad genap dan ganjil. Dengan demikian $v(G)=v_1 \cup v_2$ Sehingga $\sum_{v=v1} d(v) + \sum_{v=v2} d(v) = \sum_{v=v(i)} d(v) = 2e$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Karena untuk setiap titik v ϵ v_1, d(v) genap maka $\sum_{v=v1} d(v)$ genap. Akibatnya, $\sum_{v=v2} d(v)$ harus genap.

Catatan

Barisan bilangan bulat non negatif (d_1, d_2, d_3, ... d_n) adalah barisan derajad dari sebuah graph jika dan hanya jika $\sum_{i=1} di$ genap.

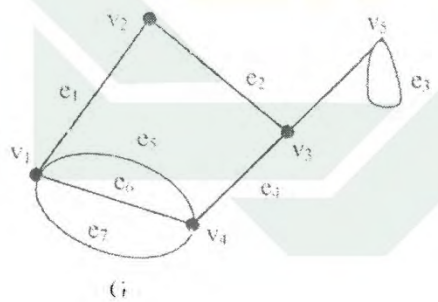
Penyajian Graph dalam Matrik

Ada dua matriks yang akan digunakan dalam penyajian graph, yakni matriks berhubungan langsung *(adjacency matrix)* dan matriks keterkaitan *(incidence matrix).*

Definisi 5.13

Matriks berhubungan langsung dari G adalah matriks bujur sangkar berordo n, yakni matriks A(G) = (aij) dimana unsur ajj menyatakan banyaknya sisi yang menghubungkan titik V_i dan titik V_j.

Ilustrasi dari definisi 5.13 tersebut adalah sebagai berikut:



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Perhatikan bahwa A(G) adalah matriks simetris. Kalau graph G tidak punya gelung maka setiap unsur A(G) yang terletak pada diagonal utama adalah nol. Jika G graph sederhana, maka unsur-unsur dari *A(G)* adalah nol atau satu

Jika diberikan sebuah matriks simetris A berordo n dengan setiap unsur A adalah bilangan bulat non negatif maka pasti terdapat sebuah graph G dengan matriks berhubungan langsung A(G).

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Contoh 5.9

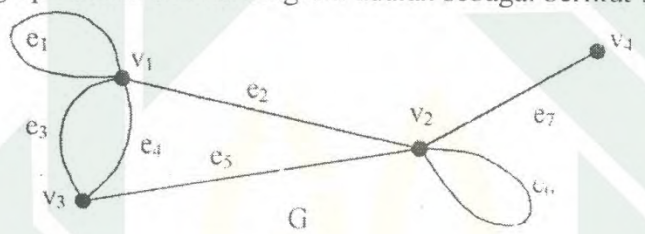
Diketahui matriks A sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambarlah sebuah graph G berdasarkan matriks A!

Jawab

Gambar graph dalam bentuk diagram adalah sebagai berikut :



Teorema 5.14

Misalkan G adalah graph dengan V(G) = $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Jika A adalah matriks berhubungan langsung dari G, maka unsur A^k untuk suatu bilangan bulat positif k yang terletak di baris ke-i dan kolom ke-j menyatakan banyaknya jalan di G dengan panjang k yang menghubungkan titik Vi dan titik vj

Contoh 5.10

Diketahui matriks A sebagai berikut : Perhatikan kembali matriks A pada contoh 5.9

$$A^2 = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa unsur A^2 yang terletak di baris ke-i dan kolom ke-j menyatakan banyaknya jalan - (v_i, V_j) di graph G dengan panjang dua. Misalkan, unsur A^2 yang terletak di baris ke-l dan kolom ke-2 adalah 4.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Jadi, ada 4 jalan (v_1, v_2) di graph G dengan panjang dua, yakni $v_1e_1v_1e_2v_2$, $v_1e_2v_2v_2e_6v_2$, $v_1e_3v_3e_5v_2$, $v_1e_4v_3e_5v_2$.

Ada 5 jalan – (v_3, v_3) di G dengan panjang dua, yaitu $v_3e_5v_2e_5v_3$, $v_3e_4v_1e_4v_3$, $v_3e_4v_1e_4v_3$, $v_1e_4v_3e_5v_2$, $v_3e_3v_1e_3v_3$, $v_3e_3v_1e_4v_3$, $v_3e_4v_1e_3v_3$.

Definisi 5.15

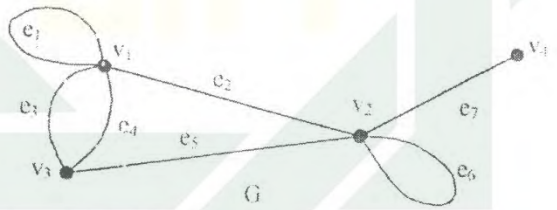
Misalkan G sebuah graph dengan n buah titik, $V(G) = v_1, v_2, \ldots v_n$ dan $E(G) = e_1, e_2, \ldots e_n$

Matriks berkaitan *(incidence matrix)* dari G adalah matriks $M(G) = m_{ij}$ berordo n x s dimana:

$$m_{ij} \begin{cases} 0, \text{ jika sisi } e_j \text{ tidak terkait dengan } v_i \\ 1, \text{ jika sisi } e_j \text{ terkait dengan } v_i \text{ dan } e_3 \text{ bukan gelung} \\ 2, \text{ jika sisi } e_j \text{ terkait } v_i \text{ dan } e_j \text{ gelung} \end{cases}$$

Contoh 5.11

Diketahui graph G seperti berikut ini



Carilah matriks keterkaitan dari graph G!

Jawab

Matriks berkaitan *(incidence matrix)* dari graph G adalah

$$M(G) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{matrix} \end{array}$$

Perhatikan bahwa jumlah semua unsur M *(G)* yang terletak di baris i menyatakan derajad dari titik Vi di graph G, sedangkan jumlah semua unsur M (G) yang terletak di suatu kolom selalu 2.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Rangkuman

1. Sebuah graph G terdiri atas dua himpunan hingga yakni:
   a) V(G) yang unsur-unsumya disebut titik dari suatu graph, sering hanya dinotasikan dengan V (V(G) tidak boleh kosong).
   b) E(G) yang unsur-unsumya disebut sisi dari suatu graph, sering hanya dinotasikan dengan E. E(G) mungkin suatu himpunan kosong, sedemikian hingga setiap unsur e dalam E(G) adalah sebuah pasangan tak berurutan dan titik-titik di V(G).
2. Sebuah sisi dalam graph G yang menghubungkan sebuah titik u dengan dirinya sendiri disebut *gelung (loop).* Sedangkan dalam suatu graph bila terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi-sisi tersebut disebut *sisi rangkap*
3. Jika semua sisi e_1, e_2, e_3, ... e_k dalam jalan w berbeda, maka w disebut **jejak** ***(trail).*** Sedangkan jika semua titik v_0, v_1, v_2, ... v_k dalam jalan w juga berbeda, maka w disebut sebuah **lintasan** ***(path).*** Sebuah jalan w dengan panjang positif disebut tertutup. Jika titik awal dan titik akhir dari w identik (sama). Jejak tutup semacam ini disebut sirkit.
4. Barisan bilangan bulat non negatif (d_1, d_2, d_3, ... d_n) adalah barisan derajad dari sebuah graph jika dan hanya jika $\sum_{i=1} di$ genap.
5. Ada dua matriks yang akan digunakan dalam penyajian graph, yakni matriks berhubungan langsung *(adjacency matrix)* dan matriks keterkaitan *(incidence matrix).*

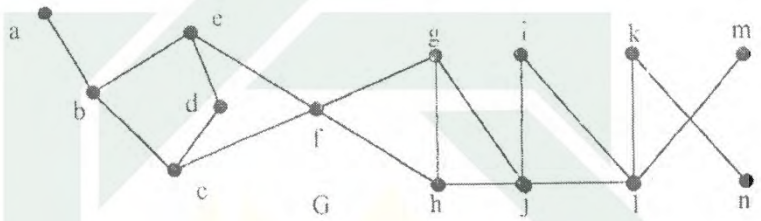
digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Gambarlah sebuah graph G dengan ketentuan sebagai berikut:
   a) mempunyai 5 titik, tanpa sikel dan terhubung
   b) mempunyai 6 titik dan terdiri dari dua komponen

2. Perhatikan graph G di bawah ini!

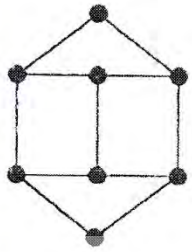


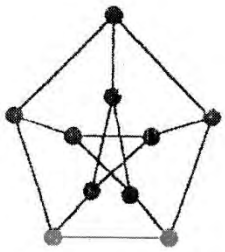
   a) Cari sebuah jalan tertutup dengan panjang 10!
   b) Cari sebuah jejak terbuka dengan panjang 12!
   c) Cari sebuah jejak tertutup dengan panjang 7!
   d) Cari sebuah lintasan dari a ke n!
   e) Cari panjang sikel terpanjang dalam G!
   f) Berapakah panjang lintasan terpanjang?
   g) Cari sebuah sirkit pada G, jika ada!
   h) Apakah G graph Hamilton?
   i) Cari sebuah graph bagian (subgraph) bukan rentang dari G!
   j) Cari sebuah subgraph rentang dari G!
   k) Tulis subgraph yang dibangun oleh (a, b, d, f, j, k, l)

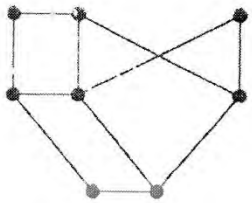
3. Buatlah semua graph bipartisi komplit non isomorphic yang mempunyai titik paling banyak 7!

4. Manakah dari graph-graph berikut yang bipartisi?

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

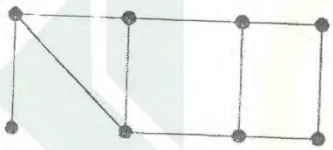




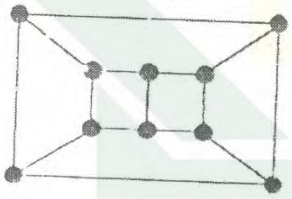


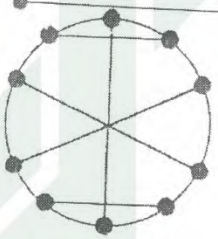
5. a) Apakah graph sederhana dengan satu titik terhubung?
   b) Diketahui graph sederhana G_1 dan G_2. Jika banyaknya sisi G, sama dengan banyaknya sisi G_2, maka haruskah banyaknya sisi G_1 sama dengan banyaknya titik G_2?

6. Tentukan manakah pasangan graph-graph berikut yang isomorfik?
   a)



   b)





7. Apakah barisan-barisan bilangan berikut merupakan barisan derajad dari suatu graph? Mengapa?
   a) 6,5,4,3,3,2,2,2
   b) 5, 4, 4, 3, 3, 2, 1,0
   c) 3,3,3,3,3,3
   d) 5,4,3,2, 1,0

8. Sebuah graph G beraturan dengan 40 sisi. Berapakah banyaknya titik di G?

9. Sebuah graph G mempunyai 20 sisi. Jika setiap titik G mempunyai derajad paling sedikit 4, maka tentukan maksimum banyaknya sisi G!

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

10. Jawablah pertanyaan berikut:
    a) Mungkinkah dalam suatu pesta yang dihadiri 19 orang, masing-masing yang hadir mengetahui tepat 5 orang yang lainnya?
    b) Apakah benar dalam suatu pesta banyaknya orang yang telah berjabatan tangan sebanyak bilangan ganjil adalah genap? Mengapa?

11. Gambarlah graph G yang matriks berhubungan langsungnya sebagai berikut:

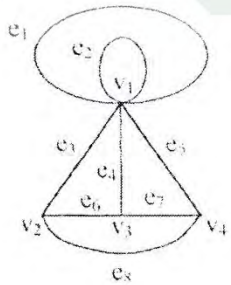
a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

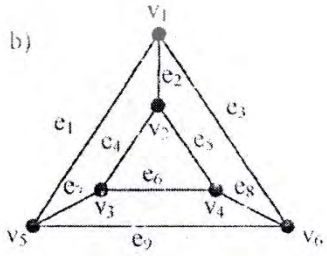
c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

12. Tulislah matriks berhubungan langsung dan matriks keterkaitan dari graph berikut ini!

a)



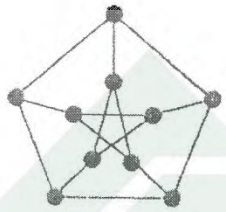
b)



digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

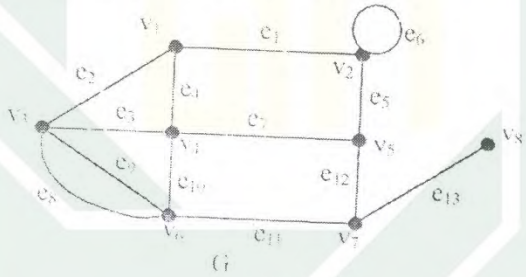
13. Gambar sebuah graph yang panjang sikel terpanjangnya 9 dan panjang sikel terpendeknya 4!

14. Perhatikan graph G yang dikenal sebagai Petersen Graph.



a) Carilah sebuah jejak dengan panjang 5
b) Carilah sebuah jalan dengan panjang 9
c) Carilah sebuah sikel dengan panjang 5, 6, 8, dan 9

15. Misalkan graph G disajikan seperti gambar berikut:



a) Carilah sebuah graph H dari G yang isomorfik dengan K_3!
b) Apakah ada suatu subgraph G yang isomorfik dengan K_4?

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Referensi

Al-Qur'an al-karim

Budayasa, *I Ketut. Matematika Diskrit I.* Surabaya: University Press IKIP Surabaya.1997

Kusaeri, Ettie Rukmigarsari. *Matematika Diskrit.*Malang:UIN Malang. 2003

Yusuf, Ahmad Muhammad. *Ensokopedi tematis Ayat Al-qur'an dan Hadits Jilid II* jakarta:Widya Cahaya, 2009

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id