

BAB II KAJIAN TEORI

A. Proses Matematisasi Vertikal dan Horizontal

Secara bahasa, kata matematisasi berasal dari *mathematisation* atau *mathematization*. Kata *mathematisation* maupun *mathematization* merupakan kata benda dari kata kerja *mathematise* atau *mathematize* yang artinya adalah mematematikakan⁷. Terdapat beberapa definisi “matematisasi” yang diungkapkan oleh para ahli. Menurut Vom Hofe mengatakan bahwa matematisasi adalah transformasi situasi dunia nyata ke dalam suatu masalah matematika melalui siklus pemodelan⁸. Selain itu, matematisasi adalah suatu aktivitas membuat model situasi dunia nyata secara matematis, dimana siswa terlebih dahulu mengekstraksikan informasi dari situasi masalah yang diberikan, kemudian membuat model dari situasi tersebut (*model of situation* ke *model for the situation*)⁹. Selanjutnya, matematisasi berarti memahami masalah dan mendeskripsikannya dalam bahasa matematika, sehingga penting agar dapat mengidentifikasi variabel-variabel dalam masalah kontekstual yang diberikan dan membentuk hubungan-hubungan di antara variabel-variabel¹⁰. Jadi, arti sederhana dari matematisasi adalah suatu proses untuk mematematikakan suatu fenomena. Mematematikakan bisa diartikan sebagai memodelkan suatu fenomena secara matematis (dalam arti mencari matematika yang relevan terhadap suatu fenomena) ataupun membangun suatu konsep matematika dari suatu fenomena¹¹.

Mengacu pada definisi yang dikemukakan oleh Vom Hofe dari beberapa definisi yang telah disebutkan. Selain itu, kata proses

⁷ Wijaya Ariyadi, *Pendidikan Matematika Realistik Suatu Alternatif Pendekatan Pembelajaran Matematika*, (Yogyakarta: Graha Ilmu, 2012), 41

⁸ Predinger, “Why Johnny Can’t Apply Multiplication? Revising Choice of Operation with Fraction”, *International Elektronik Journal of Mathematics Education* 6 (2), (2008), 65-88

⁹ Murata, A. & Kattubadi, S, “Grade 3 Students mathematization through modeling: situation models and solution models with multi-digit abstraction problem solving”, *The Journal of the mathematics behavior*, 31, (2012), 15-28

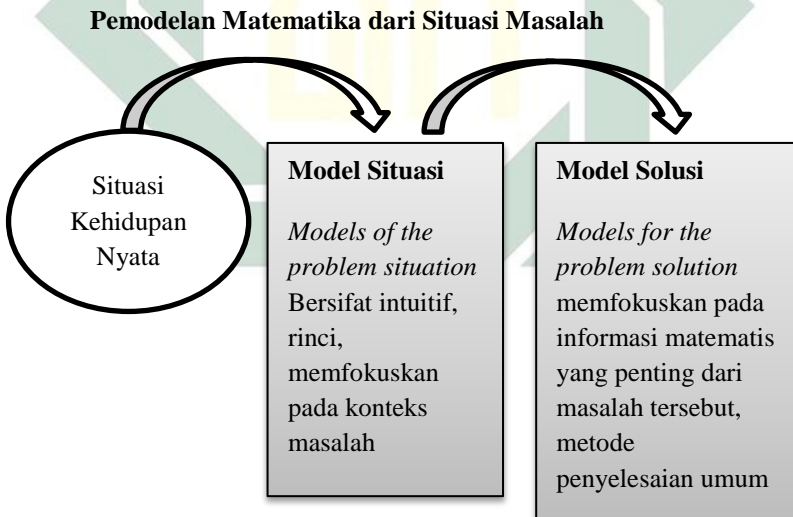
¹⁰ Kaur, B, Har, Y, B, & Kapur, M, *Mathematical Problem Solving Year Book 2009*. Association of Mathematics Educators, (Singapura: World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd)

¹¹ Wijaya Ariyadi, *Pendidikan Matematika Realistik Suatu Alternatif Pendekatan Pembelajaran Matematika*, (Yogyakarta: Graha Ilmu, 2012), 41

menurut Eades didefinisikan sebagai tahap–tahap atau fase–fase yang dilakukan seseorang dalam melakukan sesuatu untuk mencapai suatu tujuan tertentu. Oleh karena itu proses matematisasi dalam penelitian ini didefinisikan sebagai tahap–tahap atau fase–fase yang dilalui seseorang dalam melakukan suatu transformasi situasi dunia nyata ke dalam suatu masalah matematika melalui siklus pemodelan.

Sedangkan Murata dan Kattubadi menggambarkan proses matematisasi sebagai suatu proses memodelkan situasi secara matematis yang mensyaratkan siswa untuk mengekstraksikan informasi dari situasi tersebut. Kemudian, proses ini memfokuskan pada informasi yang spesifik terhadap situasi tersebut, meskipun tidak harus matematis untuk proses penyelesaiannya (*model of situation*). Selanjutnya, siswa mengembangkan informasi kuantitatif berdasarkan pengalaman mereka untuk digunakan dalam *problem solving (model for situation)*.

Matematisasi



Gambar 2.1 Matematisasi Konseptual Murata

Model ini tidak menunjukkan proses matematisasi sebagai sebuah siklus. Namun demikian, model Murata ini juga diadaptasi oleh pandangan Freudental tentang matematika¹². Mengacu pada konsep Murata terhadap proses matematisasi yaitu transformasi masalah nyata/ sehari-hari ke dalam bentuk model matematika selanjutnya model matematika digunakan untuk menentukan metode penyelesaiannya.

Konsekuensi pandangan Freudental tentang matematika dalam kerangka konseptual adalah pada aktivitas pembelajaran matematika di kelas. Dari pandangannya, dapat dinyatakan bahwa kelas matematika bukanlah tempat memindahkan matematika dari guru ke siswa, melainkan tempat siswa menemukan kembali ide dan konsep matematika melalui eksplorasi soal-soal kontekstual atau masalah nyata. Dengan demikian, siswa tidak dipandang sebagai penerima pasif, tetapi siswa harus diberi kesempatan untuk menemukan kembali ide dan konsep matematika di bawah bimbingan guru¹³.

Dalam menemukan kembali ide dan konsep matematika, setiap siswa melalui proses matematisasi terhadap masalah kontekstual yang diberikan. Namun demikian, penting untuk ditekankan bahwa penelitian ini tidak untuk mengungkapkan bagaimana aktivitas proses matematisasi siswa menemukan kembali ide dan konsep matematika dalam *setting* pembelajaran dengan pendekatan matematika realistik, tetapi untuk mengungkapkan bagaimana aktivitas mereka dalam proses matematisasi ketika memecahkan masalah yang diberikan, tanpa terikat pada suatu pendekatan pembelajaran tertentu.

Treffers dan Goffree membedakan matematisasi menjadi dua komponen, yaitu matematisasi horizontal dan matematisasi vertikal. Matematisasi horizontal adalah aktivitas mental seseorang dalam mentransformasikan masalah kontekstual ke dalam matematika. Matematisasi horizontal berkaitan dengan proses generalisasi (*generalizing*) yang diawali dengan mengidentifikasi konsep matematika berdasarkan keteraturan (*regularities*) dan hubungan

¹² Murata dan kattubadi, Op. Cit., hal.15-28

¹³ Pattahuddin, S. M., "Pengembangan Peserta Didik Melalui Implementasi Pendidikan Matematika Realistik". (makalah yang disajikan pada workshop sehari yang diselenggarakan oleh Himpunan Mahasiswa Pendidikan Matematika STKIP PGRI Jombang, Jombang, 2011).

(*relation*) yang ditemukan melalui visualisasi dan skematisasi masalah. Jadi, pada matematisasi horizontal ini siswa mencoba menyelesaikan soal-soal dari dunia nyata, dengan menggunakan bahasa dan simbol mereka sendiri, dan masih bergantung pada model. Proses ini mencakup kegiatan berikut :

- a. Mengidentifikasi konsep matematika yang relevan dengan masalah dunia nyata. Dalam hal ini, siswa menyebutkan dan mengungkapkan konsep matematika yang menurutnya relevan dengan masalah kontekstual yang diberikan.
- b. Merepresentasikan masalah dengan berbagai cara yang berbeda, termasuk mengorganisasi masalah sesuai dengan konsep matematika yang relevan, serta merumuskan asumsi yang tepat. Dalam hal ini, siswa membuat skema, memvisualisasikan masalah dalam bentuk gambar, atau mengungkapkan kembali masalah dengan menggunakan kalimatnya sendiri.
- c. Mencari hubungan antara bahasa masalah dengan simbol dan bahasa formal matematika agar masalah nyata dapat dipahami secara matematis. Dalam hal ini, siswa menyebutkan kata-kata atau kalimat yang terdapat dalam masalah yang diberikan, disertai dengan bahasa formal matematika yang menurutnya berkaitan dengan kata atau kalimat yang terdapat dalam masalah tersebut.
- d. Mencari keteraturan hubungan dan pola yang berkaitan dengan masalah. Dalam hal ini, siswa menunjukkan cara memperoleh jawaban melalui visualisasi berupa gambar atau model yang disertai dengan penjelasan tentang ketrkaitan gambar atau model yang dibuat terhadap masalah yang diberikan.
- e. Menerjemahkan masalah ke dalam bentuk matematika, yaitu dalam bentuk model matematika. Dalam hal ini, ketika selesai membaca soal, siswa secara langsung menuliskan model matematika¹⁴.

Berbeda dengan matematisasi vertikal yang merupakan bentuk formalisasi (*formalizing*) dimana model matematisasi horizontal menjadi landasan dalam pengembangan konsep matematika yang lebih formal melalui proses matematisasi vertikal. Dengan kata lain, kedua jenis matematisasi ini tidak dapat dipisahkan secara berurutan

¹⁴Wijaya Ariyadi, Op. Cit., hal.42

tetapi keduanya terjadi secara bergantian dan bertahap. Sedangkan, aktivitas-aktivitas dalam proses matematisasi vertikal adalah¹⁵:

- a. Menggunakan berbagai representasi matematis yang berbeda. Dalam hal ini, siswa menuliskan beberapa model matematika yang menunjukkan atau mendeskripsikan masalah yang diberikan.
- b. Menggunakan simbol, bahasa dan proses matematika formal. Dalam hal ini, siswa menyelesaikan masalah yang diberikan dengan menggunakan simbol-simbol matematika, bahasa matematika, dan dengan algoritma penyelesaian.
- c. Melakukan penyesuaian dan pengembangan model matematika, mengombinasikan dan menggabungkan berbagai model. Dalam hal ini, siswa membuat model matematika, kemudian merevisinya agar sesuai dengan masalah yang diberikan dan menggabungkan model-model matematika yang telah mereka buat agar dapat menemukan solusi dari masalah tersebut.
- d. Membuat argumentasi matematis. Dalam hal ini, siswa memberikan argument yang logis menurut siswa untuk mendukung pernyataan atau siswa memberikan alasan untuk menunjukkan bahwa pernyataan yang diberikan sebagai jawaban dari masalah yang diberikan itu sudah benar.
- e. Menggeneralisasikan. Dalam hal ini, siswa menggunakan fakta-fakta atau ide-ide dari masalah yang diberikan untuk membentuk opini yang dianggap valid dalam situasi berbeda; membuat pernyataan umum tentang masalah yang diberikan tanpa memperhatikannya secara rinci atau detail; atau menggunakan ide yang terdapat dalam masalah yang diberikan dengan membuat suatu masalah serupa pada suatu situasi yang lebih luas daripada situasi semula¹⁶.

B. Materi Lingkaran

1. Luas dan Keliling Lingkaran

Materi yang dipilih adalah lingkaran pada sub bab materi keliling dan luas lingkaran sesuai dengan kurikulum KTSP SMP 2006. Lingkaran merupakan himpunan titik pada bidang

¹⁵ Wijaya Ariyadi, Op. Cit., hal.43

¹⁶ Ibid hal.43

yang mempunyai jarak tertentu (sama) dari suatu titik tertentu, titik tertentu itu disebut pusat lingkaran¹⁷.

a. Keliling lingkaran

Keliling sebuah lingkaran sama dengan π dikalikan dengan diameter lingkaran atau 2π dikalikan dengan jari-jari lingkaran.

Jika K adalah keliling lingkaran dan d adalah diameternya, maka $\frac{K}{d} = \pi$

Jadi, $K = \pi d$

Karena $d = 2r$, maka $K = \pi \times 2r$
 $= 2\pi r$

Untuk setiap lingkaran berlaku rumus:

$$\text{Keliling} = \pi d$$

atau

$$\text{keliling} = 2\pi r$$

Dengan $d = \text{diameter}$, $r = \text{jari - jari}$ dan $\pi = \frac{22}{7}$ atau 3,14

b. Luas Lingkaran

Luas Lingkaran adalah luas daerah yang dibatasi oleh busur lingkaran atau keliling lingkaran.

Luas sebuah daerah lingkaran sama dengan π dikalikan dengan kuadrat dari panjang jari - jari lingkaran itu.

Jika L adalah luas lingkaran dan r adalah jari-jarinya, maka untuk $r = \frac{1}{2}d$, luas lingkaran dapat dinyatakan dengan:

$$\text{Luas} = \pi r^2$$

Dengan $d = \text{diameter}$, $r = \text{jari - jari}$ dan $\pi = \frac{22}{7}$
 atau 3,14

¹⁷ Nuharini, Dewi, *Matematika Konsep dan Aplikasinya*, (Jakarta: Departemen, 2008)

2. Contoh Kesalahan Proses Matematisasi Horizontal dan Vertikal Materi Lingkaran

- Soal: Terdapat sebuah kaleng susu yang alasnya memiliki panjang diameter adalah 7,4 cm dan tingginya 7,5 cm. label kaleng susu yang sedang dibuka terbuat dari kertas. Tentukan luas label tersebut!

- Diketahui: $d = 7,4 \text{ cm}$
 $t \text{ kaleng susu} = 7,5 \text{ cm}$
(dikatakan mengalami kesalahan dalam salah satu tahapan pada proses matematisasi horizontal apabila siswa salah menuliskan apa yang diketahui dari soal)

- Ditanya: Luas Label

- Jawab: Bentuk label kaleng susu berbentuk persegi panjang maka luas label = panjang x lebar ($p \times l$)

Panjang label kaleng susu = keliling lingkaran

Lebar label kaleng susu = tinggi kaleng

(Matematisasi horizontal karena aktifitas yang ditunjukkan di atas merupakan transformasi masalah kontekstual ke dalam model matematika)

$$p = \text{Kell. Lingkaran} = \pi d$$

$$= \frac{22}{7} \cdot 7,4$$

$$= 23,24 \text{ cm}$$

$$l = t. \text{ Kaleng} = 7,5$$

(dikatakan mengalami kesalahan dalam salah satu tahapan pada proses matematisasi vertikal apabila siswa salah menggabungkan atau mengkombinasikan konsep

$$\begin{aligned}
 & \text{L. Label Kaleng} && \text{= } p \times l \\
 & && \text{= } 23,24 \text{ cm} \times 7,5 \text{ cm} \\
 & && \text{= } 174,27 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

(Matematisasi Vertikal karena aktifitas yang ditunjukkan di atas merupakan proses formalisasi konsep matematika berdasarkan pengetahuan dan keterampilan yang dimiliki dimana model yang diperoleh pada matematisasi horizontal menjadi landasan menyelesaikan masalah yang diberikan).

C. Kesalahan Proses Matematisasi Vertikal dan Horizontal

Setiap proses belajar mengajar selalu diharapkan sesuai dengan yang diinginkan. Namun kenyataannya sering menunjukkan ketidakpuasan dari yang diperoleh. Ketidakpuasan ini terjadi dikarenakan seringkali terjadi kesalahan-kesalahan pada siswa dalam mengerjakan soal, khususnya dalam mengerjakan soal-soal matematika kontekstual. Jika suatu kesalahan telah dilakukan dan tidak segera diatasi maka kesalahan yang dilakukan akan terus berlanjut. Apalagi bila kesalahan tersebut berkaitan dengan hal yang dasar, maka kesalahan tersebut akan terus dibawa ke jenjang pendidikan yang selanjutnya.

Kesalahan-kesalahan dalam menyelesaikan soal matematika dapat disebabkan oleh segi-segi kognitif maupun non kognitif. Segi kognitif meliputi hal-hal yang berhubungan dengan kemampuan intelektual siswa dan cara menelaah atau memproses matematika dalam pikirannya. Sedangkan segi non kognitif meliputi semua faktor diluar kemampuan intelektual siswa seperti: cara belajar, keadaan emosional dalam menyelesaikan soal, keterampilan guru dalam mengajar dan kondisi fisik siswa pada saat mengerjakan soal matematika¹⁸.

Menurut Rahardjo dan Waluyati kesulitan-kesulitan itu menyebabkan kesalahan-kesalahan dalam menyelesaikan soal cerita meliputi kesalahan memahami soal, kesalahan membuat model atau

¹⁸ Rosyidi, Abdul Haris, *Analisis Kesalahan Siswa Kelas II MTs Al Khoiriyah dalam Menyelesaikan Soal Cerita yang Terkait dengan Sistem Persamaan Linear Dua Peubah*, (Surabaya: Tesis UNESA, 2005)

kalimat matematika, kesalahan melakukan perhitungan, dan kesalahan menginterpretasi jawaban kalimat matematika.¹⁹

Dalam penelitian ini kesalahan-kesalahan dalam menyelesaikan soal cerita atau kontekstual pada materi bangun datar lingkaran digolongkan berdasarkan letak dan jenis kesalahan. Letak kesalahan siswa ditinjau dari beberapa hal di bawah ini, antara lain:

1. Kesalahan dalam memahami soal (memahami soal merupakan tahap pada proses matematisasi horizontal yang dilakukan oleh siswa). Ada beberapa kesalahan antara lain:
 - a. Kesalahan menentukan apa yang diketahui dari soal.
Indikatornya adalah:
 - 1). Tidak menuliskan apa yang diketahui, atau
 - 2). Salah menuliskan apa yang diketahui, atau
 - 3). Tidak lengkap menuliskan apa yang diketahui.
 - b. Kesalahan menentukan hal yang ditanyakan
Indikatornya adalah:
 - 1). Tidak menuliskan apa yang ditanyakan, atau
 - 2). Salah menuliskan apa yang ditanyakan, atau
 - 3). Tidak lengkap menuliskan apa yang ditanyakan.
2. Kesalahan dalam membuat model matematika (membuat model merupakan tahap pada proses matematisasi horizontal yang dilakukan oleh siswa).
Indikatornya adalah:
 - a. Tidak membuat model matematika, atau
 - b. Salah membuat model matematika, atau
 - c. Tidak lengkap membuat model matematika.
3. Kesalahan dalam menyelesaikan model matematika yang benar (menyelesaikan model matematika merupakan tahap pada proses matematisasi vertikal yang dilakukan oleh siswa).
Indikatornya adalah:
 - a. Tidak menyelesaikan model matematika yang dibuat, baik model tersebut benar atau salah.
 - b. Jika model matematika yang dibuat sudah benar, siswa salah menyelesaikan model matematika yang dibuat.
 - c. Jika model matematika yang dibuat salah, maka salah atau benar siswa menyelesaikan model matematika yang dibuat,

¹⁹ Rahardjo, Marsudi dan Waluyati, Astuti, *Pembelajaran Soal Cerita Operasi Hitung Campuran di Sekolah Dasar*, (Yogyakarta: Kementerian Pendidikan Nasional, 2011)

siswa dikategorikan salah dalam menyelesaikan model matematika yang benar.

4. Kesalahan dalam menuliskan jawaban akhir soal yang sesuai dengan permintaan soal (menuliskan jawaban akhir soal yang sesuai dengan permintaan soal merupakan tahap pada proses matematisasi vertikal yang dilakukan oleh siswa).

Indikatornya adalah:

- a. salah menuliskan satuan yang ada pada apa yang diketahui dan jawaban akhir soal, atau
- b. tidak menuliskan satuan yang ada pada apa yang diketahui dan jawaban akhir soal.

Jenis Kesalahan siswa ditinjau dari beberapa hal, antara lain:

1. Kesalahan fakta

Indikatornya adalah:

- a. Salah menuliskan satuan yang ada pada apa yang diketahui atau jawaban akhir soal, atau
- b. Tidak menuliskan satuan yang ada pada apa yang diketahui atau jawaban akhir soal.

2. Kesalahan Konsep, yaitu kesalahan yang dibuat siswa tentang konsep-konsep yang terkait dengan soal cerita dunia nyata.

Indikatornya adalah:

- a. Salah mengidentifikasikan apa yang diketahui dari soal.
- b. Salah menerapkan apa yang diketahui ke dalam model matematika.
- c. Salah dalam membuat variabel yang digunakan untuk membuat model.
- d. Membuat model matematika tanpa memuat keterangan variabel yang dibuat.
- e. Salah dalam mengidentifikasikan konsep yang terkait dengan soal.

3. Kesalahan operasi yaitu kesalahan yang dilakukan siswa dalam melakukan operasi atau perhitungan, baik operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian maupun pembagian.

Indikatornya adalah:

- a. Tidak dapat menggunakan operasi dengan benar.
- b. Tidak cermat dalam menghitung.

4. Kesalahan prinsip yaitu kesalahan yang dibuat siswa dalam menggunakan prinsip-prinsip yang terkait dengan materi

- a. Salah dalam menerapkan prinsip.

Ada pula kesalahan yang dilakukan oleh siswa dapat diidentifikasi melalui proses matematisasi horizontal dan vertikal. Adapun analisis kesalahan matematisasi horizontal, antara lain:

- a. Kesalahan siswa dalam mengidentifikasi konsep matematika yang relevan dengan masalah dunia nyata yaitu kesalahan siswa dalam memahami soal dan siswa tidak paham konsep matematika yang relevan dengan masalah dunia nyata. Adapun kesalahan yang dilakukan pada langkah memahami soal dapat diketahui dari tepat atau tidaknya siswa menuliskan apa yang diketahui dan apa yang diminta dalam soal, tidak mengindahkan syarat-syarat atau cara interpretasi soal kurang tepat, tidak lengkap dalam menuliskan apa yang diketahui.
- b. Kesalahan siswa merepresentasikan masalah dengan berbagai cara yang berbeda, termasuk mengorganisasi masalah sesuai dengan konsep matematika yang relevan, serta merumuskan asumsi. Siswa pada tahap ini mengalami kesulitan dalam menggambarkan apa yang dibayangkannya dari pengerjaan soal.
- c. Kesalahan siswa mencari hubungan antara bahasa masalah dengan simbol dan bahasa formal matematika. Dalam hal ini siswa kesulitan mengaitkan persoalan yang diberikan dengan menggunakan simbol yang relevan.
- d. Kesalahan siswa mencari keteraturan hubungan dan pola yang berkaitan dengan masalah.
- e. Kesalahan siswa dalam menerjemahkan masalah ke dalam bentuk matematika. Pada tahap ini siswa kesulitan menerjemahkan bahasa masalah ke dalam bahasa matematika disertai penyelesaian matematis untuk memperoleh jawaban dari persoalan.

Sedangkan kesalahan-kesalahan yang dapat dilakukan pada proses matematisasi vertikal adalah:

- a. Kesalahan siswa pada representasi matematis. Dalam hal ini siswa kesulitan menuliskan beberapa model matematika yang menunjukkan atau mendiskripsikan persoalan yang diberikan.
- b. Kesalahan dalam penggunaan simbol, bahasa dan proses matematika formal. Dalam hal ini siswa menyelesaikan masalah yang diberikan dengan kesalahan dalam penggunaan simbol-simbol matematika, bahasa matematika dan algoritma penyelesaian.

- c. Kesalahan dalam penyesuaian dan pengembangan model matematika, mengkombinasikan dan menggabungkan berbagai model. Dalam hal ini siswa mengalami kesalahan dalam menggabungkan dan mengkombinasikan berbagai model matematika dengan persoalan yang diberikan.
- d. Kesalahan dalam berargumentasi matematis. Dalam hal ini siswa kesulitan ataupun salah memberikan argument yang logis atau memberikan alasan untuk menunjukkan bahwa pernyataan yang diberikan sebagai jawaban dari masalah yang diberikan itu telah benar.
- e. Kesalahan dalam mengeneralisasikan. Dalam hal ini siswa kesulitan atau salah dalam menggunakan ide-ide dari masalah yang diberikan untuk membuat masalah serupa pada situasi yang lebih luas dari situasi semula.

D. Kajian Tentang Analisis Kesalahan

Adapun manfaat analisis kesalahan adalah sebagai berikut :

1. Analisis kesalahan bermanfaat sebagai sarana peningkatan pembelajaran pada materi tertentu.
2. Analisis kesalahan dapat menumbuhkembangkan wawasan baru dalam mengajar dalam mengatasi kesulitan memahami konsep yang dihadapi para guru.
3. Banyak sedikitnya penemuan kesalahan dapat membantu mengetahui materi pembelajaran dan melaksanakan pembelajaran.²⁰

Langkah-langkah menganalisis kesalahan:

1. Mengumpulkan data berupa kesalahan yang dibuat siswa.
2. Mengidentifikasi dan mengklasifikasi kesalahan dengan cara mengenali dan memilah kesalahan. Adapun dalam penelitian ini berdasarkan langkah penyelesaian masalah Polya.
3. Menyusun peringkat kesalahan seperti mengurutkan kesalahan berdasarkan frekuensi atau keseringannya.
4. Menjelaskan kesalahan dan menggolongkan jenis kesalahan dan menjelaskan penyebab kesalahan.²¹

²⁰ Herdian Dwi Rusdianto, *Analisis kesalahan siswa kelas VII G SMPN1 Tulangan dalam menyelesaikan masalah perbandingan bentuk masalah cerita*. (Skripsi IAIN Sunan Ampel Surabaya, 2010),hal.21

²¹ Ibid hal.23