

BAB II KAJIAN TEORI

A. Penalaran Matematis

1. Penalaran

Shurter dan Pierce menyatakan bahwa istilah penalaran merupakan terjemahan dari “*reasoning*” yang didefinisikan sebagai proses pencapaian kesimpulan logis berdasarkan fakta dan sumber yang relevan. Penalaran juga merupakan aktivitas berpikir untuk menarik suatu kesimpulan atau proses berpikir dalam rangka membuat suatu pernyataan baru berdasar pada beberapa pernyataan yang kebenarannya sudah dibuktikan atau diasumsikan sebelumnya.¹ Dengan demikian, penalaran berhubungan dengan informasi dan pernyataan-pernyataan yang sudah dibuktikan kebenarannya.

Menurut Keraft, penalaran merupakan proses berpikir yang berusaha menghubungkan fakta-fakta yang diketahui sebelumnya menuju suatu kesimpulan. Sedangkan Suriasumantri menyatakan penalaran merupakan suatu proses berpikir dalam menarik sesuatu kesimpulan yang berupa pengetahuan.² Selain itu, menurut Copi, penalaran merupakan kegiatan, proses atau aktivitas berpikir untuk menarik suatu kesimpulan atau membuat suatu pernyataan baru berdasarkan pada beberapa pernyataan yang diketahui benar ataupun yang dianggap benar yang disebut premis.³ Hal ini sejalan dengan pendapat Stenberg yang mendefinisikan penalaran sebagai suatu proses penggambaran kesimpulan dari prinsip-prinsip dan dari bukti-bukti.⁴ Dengan kata

¹ Mulin Nu'man, “Penanaman Karakter Penalaran Matematis dalam Pembelajaran Matematika Melalui Pola Pikir Induktif-Deduktif”, *FOURIER*, 1:2, (Oktober, 2012), h. 87.

² Iis Holisin, “Analisis Penalaran Siswa Perempuan Sekolah Dasar (SD) Berkemampuan Matematika Tinggi dalam Menyelesaikan masalah Pecahan”, *eduMath*, 1:2, (November, 2015), h. 2.

³ Anisatul Hidayati dan Suryo Widodo, “Proses Penalaran Matematis Siswa dalam Memecahkan Masalah Matematika Pada Materi Pokok Dimensi Tiga Berdasarkan Kemampuan Siswa Di SMA Negeri 5 Kediri”, *Jurnal Math Educator Nusantara*, 1:2, (November, 2015) h.132.

⁴ Nor Sholeh, dkk, “Kemampuan Penalaran Deduktif Siswa Kelas VII Pada Pembelajaran Model-Eliciting Activities”, *Unnes Journal of Mathematics Education*, 3:1, (Maret, 2014), h. 36.

lain, penalaran merupakan aktivitas berpikir seseorang dalam membuat suatu kesimpulan.

Penalaran adalah proses mengambil kesimpulan atau membentuk pendapat berdasarkan fakta-fakta tertentu yang telah tersedia atau berdasarkan konklusi-konklusi tertentu yang telah terbukti kebenarannya. Fakta-fakta tertentu adalah data-data, peristiwa-peristiwa, hubungan, dan kenyataan yang digunakan dalam proses penalaran. Sedangkan yang dimaksud konklusi-konklusi yang telah terbukti kebenarannya adalah premis-premis aksiomatik, kaidah-kaidah berpikir dan hasil-hasil kesimpulan yang ditemukan lewat pembuktian sebelumnya.⁵ Penalaran juga merupakan proses berpikir yang berusaha menghubungkan-hubungkan fakta yang diketahui menuju kepada suatu kesimpulan yang sebelumnya tidak diketahui.

R.G. Soekadijo membuat kronologi mengenai terjadinya penalaran. Proses berfikir dimulai dari pengamatan indera atau observasi empirik. Proses itu di dalam pikiran menghasilkan sejumlah pengertian dan proposisi sekaligus. Berdasarkan pengamatan-pengamatan indera yang sejenis, pikiran menyusun proposisi yang sejenis pula.⁶ Proses ini dapat dikatakan sebagai penalaran yaitu bahwa berdasarkan sejumlah proposisi yang diketahui dan dianggap benar maka dapat digunakan untuk membuat sebuah proposisi baru yang sebelumnya tidak diketahui.

Sudjadi menyatakan terdapat beberapa ciri penalaran di antaranya yaitu:⁷ *Pertama*, adanya suatu pola berpikir yang secara luas disebut logika. Dalam hal ini maka dapat dikatakan bahwa dalam tiap bentuk penalaran mempunyai logikanya tersendiri. Selain itu, dapat disimpulkan bahwa kegiatan penalaran merupakan suatu proses berpikir logis, di mana berpikir logis di sini harus diartikan sebagai kegiatan berpikir

⁵ Khalimi, *Logika : Teori dan Aplikasi*, (Jakarta:Gaung Persada Press, 2011), h. 180

⁶ Ulul Azmi, Skripsi : “*Profil Kemampuan Penalaran Matematika dalam Menyelesaikan Masalah Matematika Ditinjau dari Kemampuan Matematika pada Materi Persamaan Garis Lurus Kelas VIII SMP YPM 4 Bohar Sidoarjo*”, (Surabaya: Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, 2013), h.8

⁷ Dede Sudjadi, *Kemampuan Penalaran dan Pemecahan Masalah Matematis Siswa*, diakses dari <http://dedesudjadimath.blogspot.co.id/2011/11/kemampuan-penalaran-dan-pemecahan.html>, pada tanggal 1 November 2016.

menurut suatu pola tertentu, atau dengan perkataan lain menurut logika tertentu.

Kedua, penalaran adalah sifat analitik dari proses berpikirnya. Penalaran merupakan suatu kegiatan berpikir yang menyandarkan diri kepada suatu analisis dan kerangka berpikir logika penalaran yang bersangkutan. Artinya, penalaran ilmiah merupakan suatu kegiatan analisis yang mempergunakan logika ilmiah, dan demikian juga penalaran lainnya yang mempergunakan logikanya tersendiri pula.

Berdasarkan beberapa pendapat ahli di atas, dapat disimpulkan bahwa penalaran adalah suatu proses atau aktivitas berpikir untuk menarik kesimpulan yang benar berdasarkan pada beberapa pernyataan yang kebenarannya telah dibuktikan sebelumnya.

2. Penalaran Matematis

Matematis dalam KBBI (Kamus Besar Bahasa Indonesia) artinya bersangkutan dengan matematika, bersifat matematika, atau sangat pasti dan tepat. Berbicara tentang matematika, materi matematika dan penalaran merupakan dua hal yang tidak dapat dipisahkan. Hal itu dikarenakan, materi matematika dipelajari melalui penalaran dan penalaran dipahami dan dilatihkan melalui belajar materi matematika.⁸ Dengan kata lain, penalaran sangat berhubungan dengan matematika.

Istilah penalaran matematika atau biasa yang dikenal dengan penalaran matematis dalam beberapa literatur disebut dengan *mathematical reasoning*. Penalaran matematis adalah proses memahami ide matematis secara lebih mendalam, mengamati data dan menggali ide yang tersirat, menyusun konjektur, analogi dan generalisasi, menalar secara logik.⁹ Menurut Ahmad Thontowi penalaran matematika adalah proses berpikir secara logis dalam menghadapi problema dengan mengikuti ketentuan ketentuan yang ada. Proses penalaran matematika diakhiri dengan memperoleh kesimpulan.¹⁰ Maka

⁸ Nor Sholeh, dkk, Op.Cit., h.36

⁹ Rohana, "Peningkatan Kemampuan penalaran matematis Mahasiswa calon Guru Melalui Pembelajaran Reflektif", *Infinity Jurnal Ilmiah Program Studi Matematika STKIP Bandung*, 4:1, (Februari, 2015), h. 108

¹⁰Widayanti Nurma Sa'adah, Skripsi: "Peningkatan Kemampuan Penalaran Matematis Siswa Kelas VIII SMP Negeri 3 Banguntapan dalam Pembelajaran Matematika Melalui

dari itu, penalaran matematis merupakan proses membuat kesimpulan berdasarkan pada permasalahan matematika atau pernyataan-pernyataan matematika.

Jennifer Lawson menyatakan bahwa “*Mathematical reasoning: thinking through math problems logically in order to arrive at solutions. It involves being able to identify what is important and unimportant in solving a problem and to explain or justify a solution*.”¹¹ Pernyataan tersebut diartikan bahwa penalaran matematis adalah berpikir mengenai permasalahan-permasalahan matematika secara logis untuk memperoleh penyelesaian. Penalaran matematis juga mensyaratkan kemampuan untuk memilah apa yang penting dan tidak penting dalam menyelesaikan sebuah permasalahan dan untuk menjelaskan atau memberikan alasan atas sebuah penyelesaian.

Penalaran matematis merupakan proses pengambilan kesimpulan tentang sejumlah ide berdasarkan fakta-fakta yang ada melalui pemikiran yang logis dan kritis dalam menyelesaikan masalah matematika. Menurut NCTM, penalaran matematis menjadi salah satu kemampuan yang dimiliki individu dalam mempelajari matematika.¹² Dengan demikian, penalaran matematis dapat dikatakan sebagai fondasi dalam memahami matematika.

Penalaran matematis diperlukan mahasiswa untuk menentukan apakah sebuah pernyataan dalam matematika dapat dikatakan benar atau salah dan digunakan untuk membangun suatu pernyataan baru matematika. Melalui penalaran, mahasiswa akan memiliki kemampuan berpikir kritis, berargumen secara logis, dan menyusun justifikasi untuk suatu penyelesaian masalah.

Baroody mengungkapkan ada empat alasan mengapa penalaran penting untuk matematika dan kehidupan sehari-hari, yaitu:¹³

- a. *The reasoning needed to do mathematics*, penalaran diperlukan untuk mengerjakan matematika. Ini artinya

Pendekatan Pendidikan Matematika Realistik Indonesia (PMRI)”, (Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta, 2010), h.21

¹¹Jennifer Lawson, *Hand On Mathematics*, (Canada: Portage and main Press, 2008), h. 3

¹²Rohana, Op. Cit., h. 109

¹³Ibid, h. 109

penalaran berperan penting dalam pengembangan dan aplikasi matematika.

- b. *The need for reasoning in school mathematics*, penalaran dibutuhkan dalam pelajaran matematika di sekolah. Hal ini jelas terlihat bahwa untuk menguasai konsep matematika dengan benar diperlukan penalaran dalam pembelajaran matematika.
- c. *Reasoning involved in other content area*, artinya keterampilan-keterampilan penalaran dapat diterapkan pada ilmu-ilmu lainnya. Dapat dikatakan bahwa penalaran menunjang pengembangan ilmu lainnya.
- d. *Reasoning needed for everyday life*, artinya penalaran berguna untuk kehidupan sehari-hari. Ini berarti penalaran berguna untuk mengatasi masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Berdasarkan beberapa pendapat para ahli di atas, dapat disimpulkan bahwa penalaran matematis adalah suatu proses berpikir mengenai permasalahan matematika dalam menarik kesimpulan yang benar berdasarkan pada beberapa pernyataan matematika yang kebenarannya telah dibuktikan sebelumnya.

3. Jenis-jenis Penalaran Matematis

Menurut Sumarmo, penalaran dapat digolongkan dalam dua jenis, yaitu penalaran induktif dan penalaran deduktif.¹⁴ Berikut ini penjelasan dari penalaran induktif dan penalaran deduktif:

a. Penalaran Induktif

Penalaran induktif dapat diartikan sebagai penarikan kesimpulan yang bersifat umum atau khusus berdasarkan data yang teramati. Seseorang menggunakan penalaran induktif jika orang tersebut berpikir dari hal-hal yang bersifat khusus ke hal-hal umum.

Baroody menyatakan bahwa penalaran induktif dimulai dengan memeriksa kasus tertentu kemudian ditarik kesimpulan secara umum.¹⁵ Sementara itu, Keraft menyatakan bahwa penalaran induktif adalah suatu proses berpikir untuk mengambil simpulan yang berangkat dari

¹⁴Cita Dwi Rosita, "Kemampuan Penalaran dan Komunikasi Matematis : Apa, Mengapa, dan Bagaimana Ditingkatkan pada Mahasiswa", *Jurnal Euclid*, 1:1, h.34.

¹⁵Ibid, h. 34

satu atau sejumlah fenomena individual. Pada intinya penalaran induktif yaitu menarik kesimpulan dari khusus ke umum.

Dalam penalaran induktif diperlukan aktivitas mengamati contoh-contoh yang spesifik untuk memperoleh suatu kesimpulan. Dengan demikian penalaran induktif merupakan aktivitas penarikan kesimpulan yang bersifat umum berdasarkan pada data-data berupa contoh-contoh khusus yang diamati. Nilai kebenaran suatu penalaran induktif dapat benar atau salah tergantung pada argumen selama penarikan kesimpulan.

Dalam pelaksanaannya, penalaran induktif dapat dilakukan secara sederhana dengan mencoba-coba. Hal ini sesuai dengan pernyataan Nahrowi Adjie yang menyatakan bahwa penalaran induktif dimulai dari percobaan – percobaan atau contoh-contoh dan dari contoh – contoh tersebut dicari pola atau ciri kesamaannya untuk dapat disusun menjadi suatu kesimpulan yang berupa rumus atau teorema dugaan.¹⁶ Pada prinsipnya penalaran induktif dalam menyelesaikan masalah matematika tanpa menggunakan rumus, melainkan dengan memperhatikan informasi yang diperoleh. Dari informasi tersebut akan diproses sehingga membentuk kerangka atau pola yang dapat ditarik menjadi sebuah kesimpulan. Kegiatan yang mencakup penalaran induktif yaitu:¹⁷

- 1) Transduktif: menarik kesimpulan dari satu kasus atau sifat khusus yang satu diterapkan pada kasus khusus lainnya.
- 2) Analogi: penarikan kesimpulan berdasarkan keserupaan data atau proses.
- 3) Generalisasi: penarikan kesimpulan umum berdasarkan sejumlah data yang teramati.
- 4) Memperkirakan jawaban, solusi, atau kecenderungan
- 5) Memberi penjelasan terhadap model, fakta, sifat, hubungan, atau pola yang ada

¹⁶Abdul Gofur, Skripsi: “Peningkatan Kemampuan Penalaran Induktif Matematik Siswa Melalui Model Pembelajaran Kooperatif Tipe Group Investigation (GI), (Jakarta: UIN Syarif Hidayatullah, 2014), h.18

¹⁷Mulin Nu'man, Op. Cit., h. 88

- 6) Menggunakan pola hubungan untuk menganalisis situasi, dan menyusun konjektur

b. Penalaran Deduktif

Penalaran deduktif adalah penarikan kesimpulan berdasarkan aturan yang disepakati. Nilai kebenaran dalam penalaran deduktif bersifat mutlak benar atau salah dan tidak keduanya bersama-sama. Jacobs menyatakan “*deductive reasoning is a method of drawing conclusions from facts that we accept as true by using logic*”.¹⁸ Artinya, penalaran deduktif adalah suatu cara penarikan kesimpulan dari pernyataan atau fakta-fakta yang dianggap benar dengan menggunakan logika. Beberapa kegiatan yang tergolong pada penalaran deduktif di antaranya adalah:¹⁹

- 1) Melaksanakan perhitungan berdasarkan aturan atau rumus tertentu;
- 2) Menarik kesimpulan logis berdasarkan aturan inferensi, memeriksa validitas argumen, membuktikan, dan menyusun argumen yang valid;
- 3) Menyusun pembuktian langsung pembuktian tak langsung dan pembuktian dengan induksi matematika.

4. Indikator Penalaran Matematis

Elvis, dkk, menyatakan bahwa “*His reasoning works when trying to understand problem, making connections and representations between concepts in the problem to his previous knowledge, making conjectures and generalization, and trying to prove conjectures he made.*”²⁰ Artinya, penalaran siswa bekerja ketika mereka mencoba memahami masalah, membuat koneksi, dan representasi konsep-konsep dari pengetahuan sebelumnya, membuat konjektur dan generalisasi, dan mencoba membuktikan konjektur yang telah mereka buat.

¹⁸Intan Nadiroh, “Penerapan Pembelajaran CO-OP CO-OP dengan Menggunakan Media *Wingeom* untuk Meningkatkan Penalaran Pembelajaran Siswa MI Tarbiyatul Huda”. *Jurnal Penelitian dan Kajian Keislaman*, 4:1, (Juni: 2016). H. 18

¹⁹Cita Dwi Rosita, Op. Cit. h. 35

²⁰E. Elvis Napitupulu, dkk, “Cultivating Upper Secondary Students’ Mathematical Reasoning-Ability and Attitude Towards Mathematics Through Problem-Based Learning”, *Journal on Mathematics Education*, 7:2, (Juli, 2016), h. 118

Menurut NCTM penalaran matematis terjadi ketika siswa:²¹

- a. Mengamati pola atau keteraturan;
- b. Merumuskan generalisasi dan konjektur berkenaan dengan keteraturan yang diamati
- c. Menilai/menguji konjektur;
- d. Mengkonstruksi dan menilai argumen matematika;
- e. Menggambarkan (menvalidasi) konklusi logis tentang sejumlah ide dan keterkaitannya.

Peraturan Dirjen Dikdasmen Depdiknas Nomor 506/C/Kep/PP/2004 tanggal 11 November 2004 tentang rapor pernah diuraikan bahwa indikator siswa memiliki kemampuan dalam penalaran yaitu mampu:²²

- a. Mengajukan dugaan;
- b. Melakukan manipulasi matematika;
- c. Menyusun bukti, memberikan alasan atau bukti terhadap kebenaran solusi;
- d. Menarik kesimpulan dari pernyataan;
- e. Memeriksa kesahihan suatu argumen;
- f. Menemukan pola atau sifat dari gejala matematis untuk membuat generalisasi.

Menurut Sumarmo, indikator kemampuan penalaran matematis yaitu:²³

- a. Menarik kesimpulan yang logik;
- b. Memberikan penjelasan dengan menggunakan model, fakta, sifat-sifat, dan hubungan;
- c. Memperkirakan jawaban dan proses solusi;
- d. Menggunakan pola dan hubungan untuk menganalisis situasi matematik;
- e. Menarik analogi dan generalisasi;
- f. Menyusun dan menguji konjektur;
- g. Memberikan lawan contoh;
- h. Mengikuti aturan inferensi, memeriksa validitas argument;
- i. Menyusun argumen yang valid;
- j. Menyusun pembuktian langsung, tak langsung dan menggunakan induksi matematika.

²¹Rohana, Op. Cit., h.109

²²Ikhsan, Loc., Cit., h.126

²³Risma Amelia, Op. Cit., h. 100

Herman mengatakan bahwa kemampuan penalaran matematis merupakan salah satu kemampuan berpikir tingkat tinggi. Sedangkan kegiatan yang termasuk dalam kemampuan penalaran matematis meliputi:²⁴

- a. Menarik kesimpulan dari suatu data;
- b. Menggeneralisasi dan menarik kesimpulan umum dari pola, data, atau proses;
- c. Menganalogikan suatu permasalahan;
- d. Memperkirakan suatu model;
- e. Menjelaskan penyelesaian dari sebuah masalah;
- f. Menggunakan pola hubungan untuk menganalisis dan menyusun konjektur;
- g. Transduktif: menarik kesimpulan khusus dari satu kasus dan diterapkan untuk kasus lainnya.

Indikator penalaran matematis siswa yang diuraikan oleh Sulistiawati sebagai berikut.²⁵

- a. Memperkirakan jawaban dan proses solusi;
- b. Menganalisis pernyataan pernyataan dan memberikan penjelasan/alasan yang dapat mendukung atau bertolak belakang;
- c. Mempertimbangkan validitas dari argumen yang menggunakan berpikir deduktif atau induktif;
- d. Menggunakan data yang mendukung untuk menjelaskan mengapa cara yang digunakan serta jawaban adalah benar;
- e. Memberikan penjelasan dengan menggunakan model, fakta, sifat-sifat, dan hubungan.

Malloy menyatakan "*the traditional view of mathematical reasoning as superior computational and analytical skill has been revised to accomodate processes that are important in today's era. These include gathering evidence, analyzing data, making conjectures, constructing argument, drawing and validating logical conclusion and proving assertions.*"²⁶ Artinya, penalaran matematis tidak hanya kemampuan untuk berhitung dan analisis, melainkan juga mencakup beberapa proses, antara lain: mengumpulkan bukti, analisis data, membuat dugaan,

²⁴Anisatul Hidayati dan Surya widodo, Op. Cit.,h.133

²⁵Ibid, h.133

²⁶Lyn D English, *Mathematical and Analogical Reasoning of Young Learners*, (London: Laurence Earlbaum Associates Publisher, 2004), h.13

membangun argumen, menarik kesimpulan yang logis, serta membuktikan pernyataan.

Berdasarkan beberapa sumber referensi tentang indikator penalaran matematis, maka indikator penalaran matematis mahasiswa yang digunakan oleh peneliti dalam penelitian ini yaitu mengajukan dugaan, menyusun pembuktian dengan menggunakan induksi matematika, memberikan alasan terhadap kebenaran solusi, menarik kesimpulan dari pernyataan, dan memeriksa kesahihan suatu argumen. Berikut ini tabel indikator penalaran matematis mahasiswa dalam melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika:

Tabel 2.1

Indikator Penalaran Matematis Mahasiswa dalam Melakukan Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika

Indikator penalaran Matematis	Indikator Penalaran Matematis Mahasiswa Dalam Melakukan Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika
Mengajukan Dugaan	Membuat bentuk umum sesuai contoh. Menjelaskan proses memperoleh bentuk umum.
Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika	Melakukan pembuktian induksi matematika dengan menggunakan prinsip induksi matematis.
Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi	Menjelaskan alasan yang logis terhadap hasil pembuktian yang sudah dilakukan.
Menarik Kesimpulan dari Pernyataan	Membuat kesimpulan secara logis atau membuat pernyataan baru dari beberapa informasi yang diperoleh.
Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen	Melakukan pemeriksaan jawaban dengan tepat.

B. Induksi Matematika

Induksi matematika merupakan salah satu jenis metode pembuktian dalam matematika. Doerr mengemukakan bahwa induksi matematika berawal pada akhir abad ke-19. Perkembangan induksi matematika dipelopori oleh R.Dedekind dan G.Peano.²⁷ Pembuktian dengan induksi matematika dipergunakan untuk membuktikan bahwa suatu pernyataan adalah benar untuk setiap bilangan bulat positif. Metode pembuktian ini didasarkan pada suatu teorema dalam Teori Bilangan yang dikenal dengan nama Prinsip Induksi Matematis.²⁸ Prinsip induksi matematis ini selalu digunakan dalam melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika.

Prinsip induksi matematis adalah sebuah metode pembuktian yang ampuh dalam menetapkan keabsahan pernyataan yang berlaku untuk semua bilangan asli. Hal ini sejalan dengan pendapat Jacobs yang menyatakan bahwa prinsip induksi Matematika dianggap sebagai salah satu dasar aksioma dalam beberapa teori matematika yang melibatkan bilangan asli.²⁹ Prinsip induksi matematis tidak dapat digunakan untuk menemukan suatu rumus tetapi hanya sekedar untuk melakukan pembuktian. Kebenaran yang diperoleh pada prinsip induksi matematis merupakan kebenaran yang berlaku dalam semesta pembicaraannya. Berikut gambar yang menunjukkan prinsip induksi matematis:

Prinsip Induksi Matematis

Misalkan $P(n)$ adalah suatu pernyataan yang kebenarannya ditentukan oleh n . Jika $P(n)$ memenuhi dua sifat berikut:

1. $P(n)$ itu benar untuk $n = 1$;
2. untuk setiap bilangan asli k , jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ juga benar,

Maka $P(n)$ bernilai benar untuk setiap bilangan asli n .

Gambar 2.1
Prinsip Induksi Matematis

Berdasarkan gambar 2.1, Langkah-langkah untuk membuktikan suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n dengan

²⁷Miksalmina, "Penerapan Induksi Matematika Dalam Pembuktian Matematika", -, 3:2, (Desember, 2012), h. 70

²⁸Frans Susilo, *Landasan Matematika*, (Yogyakarta:Graha Ilmu, 2012), h. 51

²⁹Miksalmina, Op. Cit., h. 70

menggunakan prinsip induksi matematis, yaitu: *pertama*, membuktikan bahwa $P(1)$ benar; *kedua*, membuktikan $P(k + 1)$ benar, dengan $n = k$. Jika dari langkah pertama dan kedua terbukti benar, maka dapat disimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n .

Contoh Soal Induksi Matematika

Buktikan dengan induksi matematika bahwa

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

adalah benar untuk setiap n bilangan asli.

Penyelesaian:

$$P(n): 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

1. Membuktikan bahwa $P(1)$ benar.

$$P(1): 1 = \frac{1}{2}(1)(1 + 1) = \frac{1}{2}(2) = 1$$

$\therefore P(1)$ benar

2. Asumsikan benar untuk $n = k$ sehingga

$$P(k): 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{1}{2}k(k + 1)$$

Akan dibuktikan benar pula untuk $n = k + 1$ sehingga

$$\begin{aligned} P(k + 1): 1 + 2 + 3 + \dots + (k + 1) &= \frac{1}{2}(k + 1)((k + 1) + 1) \\ &= \frac{1}{2}(k + 1)(k + 2) \end{aligned}$$

Bukti:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{1}{2}k(k + 1)$$

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{1}{2}k(k + 1) + (k + 1) \\ &= (k + 1) \left[\frac{1}{2}k + 1 \right] \\ &= (k + 1) \frac{1}{2}(k + 2) \\ &= \frac{1}{2}(k + 1)(k + 2) \end{aligned}$$

$\therefore P(k + 1)$ benar

Jadi, berdasarkan langkah (1) dan (2) benar maka $P(n): 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ merupakan pernyataan yang benar untuk setiap n bilangan asli.

C. Gaya Berpikir

1. Berpikir

Berpikir menurut KBBI (Kamus Besar Bahasa Indonesia) merupakan suatu kegiatan yang menggunakan akal untuk mempertimbangkan dan memutuskan sesuatu. De Bono mendefinisikan berpikir sebagai keterampilan mental yang memadukan kecerdasan dengan pengalaman.³⁰ Melalui kegiatan berpikir, dapat menentukan kecerdasan seseorang itu digunakan.

De Bono memberikan empat gagasan untuk berpikir menjadi benar, yaitu:³¹

- a) Berpikir dalam perspektif emosi untuk memperoleh kebenaran emosional seperti kejujuran, keberanian, keadilan, tanggung jawab;
- b) Menemukan kebenaran logis dengan menyusun pikiran yang kecil-kecil melalui langkah-langkah tertentu;
- c) Berpikir dengan kebenaran yang unik, yaitu kebenaran yang dianggap mutlak meskipun karena keterbatasan pembandingnya;
- d) Kebenaran pengenalan yaitu kebenaran yang diperoleh berdasarkan fenomena atau gejala yang sudah dikenal.

Wahyu setiawan menyatakan berpikir merupakan suatu aktivitas mental untuk membantu memecahkan masalah, membuat keputusan, atau memenuhi rasa keingintahuan.³² Sedangkan menurut Manullang dan Milfayetty, berpikir adalah sebuah proses mencari kebenaran, walaupun hasilnya terbatas pada sudut pandang, atau tergantung pada indra. Sejalan dengan pendapat Mukhtar, menyatakan bahwa berpikir merupakan kegiatan untuk menemukan pengetahuan yang benar, dan untuk

³⁰Susana Depary dan Mukhtar, "Model Pembelajaran dan Gaya Berpikir Terhadap Hasil Belajar Fisika", *Jurnal Teknologi Pendidikan*, 6:1, (April, 2013), h. 96

³¹Ibid, h. 96-97

³²Wahyu Setiawan, "Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kritis Matematis Siswa SMP dengan Menggunakan Model Penemuan Terbimbing", *Jurnal Ilmiah UPT P2M STKIP Siliwangi*, 2:1, (Mei, 2015), h. 93

menemukan pengetahuan yang benar itu menggunakan proses berpikir dalam menarik suatu kesimpulan yang berupa pengetahuan. Hal ini dapat dikatakan bahwa dengan berpikir dapat menuntun seseorang untuk memutuskan sesuatu atau membuat kesimpulan

Suryabrata menyatakan bahwa berpikir adalah meletakkan bagian pengetahuan yang diperoleh manusia. Pengetahuan yang dimaksud mencakup konsep, gagasan, dan pengertian yang dimiliki atau diperinci manusia.

Menurut Dryde dan Vos kemampuan manusia berpikir dikarenakan berfungsinya otak sebagai organ luar yang terdiri dari triliun sel-sel yang saling bertukar informasi sehingga memungkinkan manusia untuk bertindak sesuai dengan pikirannya.³³ Hal ini sejalan dengan pendapat Sieger yang menyatakan bahwa berpikir adalah pemrosesan informasi. Ketika anak merasakan (*perceive*), melakukan penyandian (*encoding*), merepresentasikan, dan menyimpan informasi dari dunia sekelilingnya, maka mereka sedang melakukan proses berpikir.³⁴ Berdasarkan pengertian berpikir yang diungkapkan oleh beberapa ahli diatas, dapat disimpulkan bahwa berpikir merupakan aktivitas mental yang dilakukan seseorang dalam mencari kebenaran, pengetahuan, dan memecahkan masalah.

2. Gaya Berpikir Model Gregorc

Gaya bukan sebuah kemampuan, tetapi lebih pada sebuah kesenangan dalam menggunakan kemampuan yang dimiliki. Sebuah kemampuan berhubungan dengan seberapa baik seseorang dapat mengerjakan sesuatu. Gaya berhubungan dengan bagaimana seseorang suka menggunakan kemampuannya untuk mengerjakan sesuatu.

Gaya berpikir merupakan cara mengelola dan mengatur informasi yang diperoleh individu dalam pikirannya.³⁵ Produk dari gaya berpikir berupa kecerdasan yang berbeda-beda untuk setiap orang. Kecerdasan ini sangat ditentukan oleh kebiasaan

³³Susana Depary dan Mukhtar , Op. Cit., h. 97

³⁴Darma Andreas Ngilawajan, "Proses Berpikir Siswa SMA dalam Memecahkan Masalah Matematika Materi Turunan Ditinjau dari Gaya Kognitif *Field Independent* dan *Field Dependent*", *Pedagogia*, 2:1, (Februari, 2013), 72

³⁵Herlina, dkk, "Proses Berpikir Kreatif Siswa Tipe Sekuensial Abstrak dan Acak Abstrak pada Pemecahan Masalah Biologi", *Edu-Sains*, 5:1, (Januari, 2016), h.21

seseorang dalam mengatur dan mengelolah informasi yang diperoleh melalui gaya berpikirnya.³⁶ Dengan kata lain, gaya yang dimiliki oleh masing-masing orang akan mempengaruhi kecerdasan seseorang dalam berpikir.

Gaya berpikir diperkenalkan oleh Anthony Gregorc. Anthony Gregorc merupakan seorang professor di bidang kurikulum dan pengajaran di Universitas Connecticut Amerika.³⁷ Menurut Gregorc, terdapat dua hal penting yang perlu diketahui tentang bagaimana anak menangkap pelajaran. Kedua hal tersebut ialah persepsi atau cara seseorang menerima informasi dan pengaturan atau cara seseorang menggunakan informasi yang telah dipersepsikan.³⁸ Kedua hal ini selalu digunakan individu dalam menerima dan mengelola informasi didalam pikirannya.

Persepsi adalah cara seseorang menerima informasi atau menangkap sesuatu hal, secara pribadi atau individu. Persepsi-persepsi ini membentuk apa yang kita pikirkan, mendefinisikan apa yang penting bagi kita, dan selanjutnya juga akan menentukan bagaimana kita mengambil keputusan. Menurut Gregorc, persepsi yang dimiliki setiap orang ada dua macam, yaitu persepsi konkret dan persepsi abstrak.

Persepsi konkret atau nyata membuat seseorang lebih cepat menangkap informasi yang nyata dan jelas, secara langsung melalui kelima inderanya, yaitu penglihatan, penciuman, peraba, perasa, dan pendengaran.³⁹ Seseorang tidak mencari arti yang tersembunyi atau mencoba menghubungkan suatu konsep. Kata kunci dari presepsi konkret adalah sesuatu adalah seperti apa adanya. Sedangkan persepsi abstrak memungkinkan seseorang lebih cepat dalam menangkap sesuatu yang abstrak atau kasat mata, dan mengerti apa yang tidak bisa dilihat sesungguhnya.⁴⁰ Apabila menggunakan persepsi abstrak ini, mereka akan menggunakan kemampuan intuisi, intelektual dan imajinasinya.

³⁶Hartono B dan Subaer, "Profil Kreativitas Mahasiswa Berdasarkan Gaya Berpikirmya dalam Memecahkan Masalah Fisika di Universitas Negeri Makassar", *Indonesian Journal of Applied Physics*, 5:1, (April, 2015), h. 2

³⁷Bobbi Deporter dan Mike Hernacki, "*Quantum Learning*", Diterjemahkan oleh Alwiyah Abdurrahman, (Bandung: Kaifa, 2015), h. 124

³⁸Yayasan lembaga SABDA, "*Gaya Belajar*", diakses dari <http://www.sabda.org/publikasi/e-binaanak/047>, pada tanggal 30 November 2016, h. 1

³⁹Ibid, h.1

⁴⁰Ibid, h. 1

Kata kunci dari persepsi abstrak adalah sesuatu tidaklah selalu seperti apa yang terlihat.

Setelah seseorang menerima informasi yang masuk, maka ia akan mengatur dan menggunakan informasi yang dipersepsikan tersebut. Menurut Gregorc, kemampuan seseorang untuk mengatur persepsi adalah sekuensial (teratur, menurut suatu aturan, bertahap) dan random (acak, yang mana saja).⁴¹ Metode pengaturan sekuensial membiarkan pikiran seseorang untuk mengatur informasi secara berurutan, linear atau bertahap. Orang-orang yang memiliki kemampuan pengaturan sekuensial yang kuat mungkin lebih suka mempunyai suatu rencana. Kata kunci dari pengaturan sekuensial adalah ikutilah langkah-langkah tersebut. Sedangkan pengaturan random membuat pikiran seseorang mengatur informasi tanpa memperhatikan rangkaian tertentu, seperti memulai di tengah-tengah atau memulai di akhir bagian dan kembali kepermulaan. Individu yang bertipe random biasanya lebih menyukai cara belajar yang spontan, tidak harus berurutan, seolah-olah mereka tidak mempunyai suatu rencana tertentu. Kata kunci pengaturan random adalah lakukan saja.

Berdasarkan kategori-kategori tentang bagaimana anak menangkap pelajaran, Gregorc memadukan persepsi dan kemampuan pengaturan informasi menjadi empat kelompok gaya berpikir yang meliputi gaya berpikir Sekuensial Konkret (SK), gaya berpikir Sekuensial Abstrak (SA), gaya berpikir Acak Konkret (AK), dan gaya berpikir Acak Abstrak (AA).⁴² Adapun karakteristik yang dimiliki oleh masing-masing gaya berpikir yaitu:

a) Gaya Berpikir Sekuensial Konkret (SK)

Pemikir Sekuensial Konkret (SK) berpegang pada kenyataan dan mengelola informasi dengan cara yang teratur, linear dan sekuensial. Bagi para pemikir sekuensial konkret, realitas terdiri dari apa yang dapat mereka ketahui melalui indera fisik mereka, yaitu indera penglihatan, peraba, pendengaran, perasa dan penciuman. Gaya berpikir ini memperhatikan dan mengingat realitas dengan mudah dan mengingat fakta-fakta, informasi, rumus-rumus, dan

⁴¹Ibid, h. 1

⁴²Ibid, h. 146

aturan-aturan khusus yang mudah.⁴³ Orang yang bertipe ini menerima informasi sesuai kenyataan dan mengatur secara linear.

Catatan atau makalah adalah cara baik bagi orang-orang dengan tipe berpikir sekuensial konkret ini untuk belajar. Pelajar dengan tipe berpikir ini harus mengatur tugas-tugas menjadi proses tahap demi tahap dan berusaha keras untuk mendapatkan kesempurnaan pada setiap tahap.⁴⁴ Selain itu, orang dengan tipe pemikir ini cenderung menghafal dan lebih menyukai hal-hal yang konkret.⁴⁵ Dengan kata lain, ia membutuhkan banyak contoh atau peragaan dan semua ini disajikan dalam bentuk yang sistematis dan berurutan.

Beberapa karakteristik lain dari individu dengan tipe SK, yaitu: menerapkan gagasan dengan cara yang praktis, menghasilkan sesuatu yang konkret dari gagasan yang abstrak, mencermati sesuatu sampai hal yang sekecil-kecilnya, menginterpretasi sesuatu secara harfiah atau logika, sulit berhadapan dengan ide-ide abstrak, sulit bekerja dalam kelompok, sulit bekerja dengan orang yang tidak memiliki pendirian, dan sulit mengikuti pengarahan yang petunjuknya tidak lengkap.⁴⁶ Istilah kunci bagi individu SK adalah satu demi satu dan nyata.

b) Gaya Berpikir Sekuensial Abstrak (SA)

Individu dengan tipe SA mempunyai kemampuan penalaran yang tinggi, kritis, dan analitis karena memiliki daya imajinasi yang kuat. Berbeda dengan individu SK, individu SA mudah menangkap pelajaran atau informasi yang bersifat abstrak sehingga tidak memerlukan peragaan yang konkret. Individu SA lebih menyukai pelajaran atau informasi yang disajikan secara sistematis dan membutuhkan informasi sebanyak mungkin sebelum mereka membuat suatu keputusan dan waktu yang cukup agar dapat menyelesaikan pekerjaannya.⁴⁷ Orang yang

⁴³Bobbi Deporter dan Mike Hernacki, Op. Cit., h. 128

⁴⁴Ibid, h. 128

⁴⁵Yayasan lembaga SABDA, Loc. Cit., h. 1

⁴⁶Thobias dan Chintya Ulrich, *Cara Mereka Belajar*, (Jakarta: Pionir Jaya, 2009), h. 20

⁴⁷Olivia, Op. Cit., h.27

bertipe ini dapat menerima informasi yang kasat mata dan mengatur secara linear.

Pemikir SA suka berpikir dalam konsep dan menganalisis informasi. Mereka sangat menghargai orang-orang dan peristiwa-peristiwa yang teratur rapi. Proses berpikir mereka logis, rasional, dan intelektual sehingga mereka lebih mudah menyelesaikan masalah.⁴⁸ Dengan kata lain, orang yang bertipe ini memiliki kecerdasan yang tinggi.

Pemikir sekuensial abstrak biasanya tidak mau menerima begitu saja segala informasi tanpa melakukan cek dan ricek. Orang yang memiliki gaya berpikir ini umumnya senang dengan dunia teori, segala sesuatu dihubungkan dengan teori yang mereka baca. Berdasarkan teori-teori yang mereka baca, mereka mau berargumentasi panjang lebar tentang hal-hal yang mereka bicarakan.⁴⁹ Maka dari itu, Realitas bagi pemikir SA adalah dunia teori dan pemikiran abstrak.

Beberapa karakteristik lain yang dimiliki oleh individu dengan tipe SA, yaitu: mengumpulkan data sebelum menganalisa, menganalisis dan meneliti gagasan, mudah memahami sesuatu apabila mempelajarinya dengan mengamati, sulit bekerja dengan batasan waktu, dan sulit mengerjakan sesuatu yang memiliki peraturan yang spesifik.⁵⁰ Istilah kunci bagi individu SA adalah satu demi satu, imajinatif, dan abstrak.

c) Gaya Berpikir Acak Konkret (AK)

Pemikir Acak Konkret (AK) mempunyai sikap eksperimental yang diiringi dengan perilaku yang kurang terstruktur. Seperti pemikir sekuensial konkret, mereka berdasarkan pada kenyataan, tetapi ingin melakukan pendekatan coba salah (*trial and error*).⁵¹ Dengan kata lain, mereka cenderung bersikap coba-coba, senang menemukan alternatif dan mengerjakan segala sesuatu dengan cara mereka sendiri.

⁴⁸Bobbi Deporter dan Mike Hernacki, Op. Cit., h. 134

⁴⁹Ibid, hal. 134.

⁵⁰Thobias dan Chintya Ulrich, Op. Cit., h. 20

⁵¹Bobbi Deporter dan Mike Hernacki, Op. Cit., h. 130

Waktu bukanlah prioritas bagi orang-orang bertipe seperti ini, dan mereka cenderung tidak memperdulikannya, terutama ketika terlibat dalam situasi yang menarik. Mereka lebih terorientasi pada proses dari pada hasil.⁵² Akibatnya, hasil pekerjaan yang diperoleh tidak berjalan sesuai dengan yang mereka rencanakan.

Beberapa karakteristik individu dengan tipe AK, yaitu: memberi sumbangsih berupa gagasan yang tak lazim dan kreatif, berpikir cepat tanpa bantuan orang lain, berani mengambil resiko, menggunakan pengalaman hidup yang nyata untuk belajar, sulit menghadapi hal-hal yang rutin, dan sulit mengulang sesuatu yang sudah dikerjakan.⁵³ Istiah kunci individu dengan tipe AK adalah spontan dan nyata.

d) Gaya Berpikir Acak Abstrak (AA)

Pemikir Acak Abstrak (AA) menyerap ide-ide, informasi, dan kesan serta mengaturnya dengan refleksi. Kadang-kadang hal ini memakan waktu yang lama hingga orang lain tidak menyangka bahwa orang dengan tipe pemikir acak abstrak mempunyai reaksi atau pendapat. Mereka dapat mengingat dengan sangat baik jika informasi dibuat sesuai kesukaannya. Perasaan juga dapat lebih meningkatkan atau mempengaruhi belajar mereka.⁵⁴ Dengan kata lain, orang berpemikir acak abstrak cenderung menggunakan perasaan dalam belajar.

Pemikir acak abstrak mengalami peristiwa secara holistik, mereka perlu melihat keseluruhan sekaligus, bukan bertahap. Dengan alasan istilah, mereka akan terbantu jika mengetahui bagaimana segala sesuatu terhubung dengan keseluruhannya sebelum informasi tersebut diproses. Mereka bekerja dengan baik dalam situasi-situasi yang kreatif dan harus bekerja lebih giat dalam situasi yang lebih teratur.⁵⁵ Selain itu, mereka memiliki banyak pilihan dan solusi, seringkali menggunakan cara yang berbeda dalam

⁵²Bobbi Deporter dan Mike Hernacki, Op. Cit., h 130

⁵³Thobias dan Chintya Ulrich, Op. Cit., h. 35

⁵⁴Bobbi Deporter dan Mike Hernacki, Op. Cit., h 132

⁵⁵Ibid, h 132

melakukan sesuatu.⁵⁶ Istilah kunci bagi individu AA adalah spontan dan imajinatif.

D. Hubungan Penalaran Matematis Mahasiswa dengan Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika dan Gaya Berpikir Model Gregorc

Penalaran matematis adalah suatu proses berpikir tentang permasalahan matematika dalam menarik kesimpulan yang benar berdasarkan pada beberapa pernyataan matematika yang kebenarannya telah dibuktikan sebelumnya. Beberapa pernyataan matematika ini dapat diperoleh berdasarkan informasi-informasi yang ada. Selain itu, pernyataan matematika dalam pembuktian menggunakan induksi matematika terletak pada langkah kesatu dan langkah kedua dari prinsip induksi matematis. Pada langkah kesatu membuktikan bahwa $P(1)$ benar. Pada langkah kedua membuktikan bahwa untuk setiap bilangan asli k , jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ juga benar. Langkah kesatu dan kedua merupakan pernyataan-pernyataan yang kebenarannya sudah dibuktikan sebelumnya. Dari langkah satu dan dua dapat dibuat sebuah kesimpulan yang mutlak dan benar.

Terdapat dua jenis penalaran matematis yaitu penalaran induktif dan penalaran deduktif. Penalaran induktif dan penalaran deduktif ini dapat digunakan dalam melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika.

Penalaran induktif biasanya digunakan untuk mengembangkan pengetahuan yang bersifat empiris. Dengan penalaran induktif, mahasiswa akan sampai pada suatu pernyataan yang dikenal dengan istilah konjektur artinya yang belum tentu benar secara mutlak.⁵⁷ Pada induksi matematika, penalaran induktif digunakan untuk menghasilkan sebuah dugaan sementara. Jika dugaan sementara mereka menyatakan bahwa suatu pernyataan itu bernilai benar untuk setiap bilangan asli maka mahasiswa akan melakukan penalaran deduktif. Penalaran deduktif biasanya digunakan untuk mengembangkan pengetahuan yang bersifat abstrak. Dengan penalaran deduktif, kebenaran yang diperoleh merupakan kebenaran

⁵⁶Olivia, Op. Cit., h. 29

⁵⁷Kementerian Pendidikan Dan Kebudayaan Indonesia, *Matematika Buku Guru Kelas XII*, (Jakarta: Kementerian Pendidikan Dan Kebudayaan, 2015), h. 144

mutlak.⁵⁸ Penalaran deduktif dilakukan mahasiswa melalui pembuktian menggunakan induksi matematika.

Selain itu, penggunaan penalaran deduktif, menuntun mahasiswa untuk membuktikan suatu pernyataan secara bertahap dari umum ke khusus. Namun, terkadang mahasiswa bekerja secara mundur atau mulai dari tengah-tengah dalam melakukan pembuktian induksi matematis. Mahasiswa seperti ini melakukan pembuktian dari yang akan dibuktikan ke yang diketahui. Proses berpikir secara bertahap dan mundur dikenal dengan istilah sekuensial (linear) dan acak. Jika digunakan kemampuan sekuensial maka kita akan mengatur informasi secara linear, langkah demi langkah. Kemampuan sekuensial memungkinkan seseorang memilih rencana kemudian mengikuti setiap rencana. Pemikir acak dapat memulai atau mengerjakan sesuatu ditengah atau diakhir dengan cara bekerja mundur.⁵⁹ Gaya-gaya berpikir seperti inilah yang termasuk dari empat jenis gaya berpikir yang diperkenalkan oleh Gregorc. Beliau mengelompokkan gaya berpikir tersebut menjadi empat kelompok yaitu sekuensial konkret, sekuensial abstrak, acak konkret, dan acak abstrak.⁶⁰

E. Permasalahan

Permasalahan dalam KBBI (Kamus Besar bahasa Indonesia) merupakan suatu hal yang menjadikan masalah atau hal yang dimasalahkan. Menurut John Dewey menyatakan bahwa permasalahan secara faktual dapat berupa kesulitan yang dirasakan oleh seseorang. Permasalahan dapat juga diartikan sebagai sesuatu yang menghalangi tercapainya tujuan. Berdasarkan pengertian permasalahan diatas, dapat dikatakan bahwa permasalahan merupakan sesuatu hal yang dianggap sulit dan dapat menghalangi seseorang dalam mencapai tujuan. Permasalahan berasal dari kata dasar masalah. Masalah menurut KBBI merupakan sesuatu yang harus diselesaikan. Masalah dapat diartikan sebagai suatu situasi dimana individu atau kelompok dalam melakukan suatu tugas tidak tersedia proses penyelesaian masalahnya. Dalam hal ini berarti,

⁵⁸ Ibid, h. 144

⁵⁹ Dedy Setyawan dan Abdul Rahman, “Eksplorasi Proses Konstruksi Pengetahuan Matematika Berdasarkan Gaya Berpikir”, *Jurnal Sainsmat*, 2:2, (September, 2013),. h. 145

⁶⁰ Ibid, h. 146

pertanyaan tersebut tidak dapat dijawab dengan prosedur yang rutin, tetapi perlu kerja keras untuk mencari jawabannya. Maka dari itu, penyelesaian masalah merupakan suatu proses penerimaan tantangan dan kerja keras untuk menyelesaikan masalah tersebut. Dengan demikian, aspek penting dari masalah adalah adanya penyelesaian yang diperoleh tidak hanya dikerjakan dengan prosedur rutin, tetapi perlu penalaran lebih luas dan rumit.⁶¹ Masalah dalam matematika dapat dikelompokkan menjadi beberapa macam. Polya mengelompokkan masalah ditinjau dari cara menganalisis masalah, yaitu:⁶²

1. Masalah untuk menemukan, dapat berupa teoritis atau praktis, konkret atau abstrak. Dengan demikian kita harus mencari semua variabel masalah tersebut, kita harus mencoba untuk mendapatkan, menghasilkan, atau mengkonstruksi semua jenis objek yang dapat dipergunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut. Untuk itu, kita harus merumuskan bagian pokok dari masalah yang nantinya sangat diperlukan sebagai landasan untuk dapat menyelesaikan masalah ini.
2. Masalah yang berkaitan dengan pembuktian adalah untuk menunjukkan bahwa suatu pernyataan itu benar atau salah dan tidak keduanya. Bagian pokok dari masalah jenis ini adalah rumusan hipotesis dan konklusi dari suatu teorema yang harus dibuktikan kebenarannya. Hipotesis dan konklusi tersebut merupakan landasan yang sangat diperlukan untuk dapat menyelesaikan masalah jenis ini.

Berdasarkan paparan teori permasalahan diatas, dalam penelitian ini, permasalahan diartikan sebagai sesuatu hal yang dianggap sulit dan dapat menghalangi individu dalam membuktikan pernyataan matematika yang terbukti benar atau tidak.

⁶¹Endang Setyo Winarni dan Sri harmani, *Matematika untuk PGSD*, (Bandung: Remaja Rosdakarya, 2012), h.116

⁶²Ibid, h.116-117