BAB IV
HASIL PENELITIAN

Pada BAB IV ini, peneliti akan mendeskripsikan dan menganalisis data tentang proses penalaran matematis mahasiswa dalam melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika ditinjau dari gaya berpikir model Gregorc. Indikator penalaran matematis yang diamati dalam penelitian ini adalah mengajukan dugaan, menyusun pembuktian dengan menggunakan induksi matematika, memberikan alasan terhadap kebenaran solusi, menarik kesimpulan dari pernyataan, dan memeriksa kesahihan suatu argumen. Sedangkan data dalam penelitian ini berupa data hasil tes penalaran matematis mahasiswa dalam melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika dan data hasil wawancara subjek penelitian dengan peneliti.

Subjek penelitian dalam penelitian ini adalah mahasiswa yang memiliki gaya berpikir model Gregorc yaitu sekuensial konkret, sekuensial abstrak, acak konkret, dan acak abstrak. Peneliti memberikan angket gaya berpikir model Gregorc pada mahasiswa semester 2 pendidikan matematika UIN Sunan Ampel Surabaya pada tanggal 14-16 Maret 2017.

Berdasarkan hasil angket gaya berpikir model Gregorc, peneliti memilih 2 mahasiswa yang memiliki gaya berpikir sekuensial konkret, 2 mahasiswa yang memiliki gaya berpikir sekuensial abstrak, 2 mahasiswa yang memiliki gaya berpikir acak konkret, dan 2 mahasiswa yang memiliki gaya berpikir acak abstrak. Pemilihan 8 subjek penelitian ini, dilakukan berdasarkan beberapa pertimbangan yaitu, hasil skor gaya berpikir yang memiliki nilai sama atau mendekati sama, berdiskusi dengan dosen dan teman sejawat untuk mengetahui kemampuan mahasiswa dalam matematika. Adapun subjek penelitian yang terpilih adalah sebagai berikut:

Tabel 4.1
Daftar Subjek Penelitian

No.	Inisial Subjek	Gaya Berpikir	Kode
1.	AN	Sekuensial Konkret	
2.	MAP	Sekuensial Konkret	
3.	IMF	Sekuensial Abstrak	
4.	YRS	Sekuensial Abstrak	
5.	WJA	Acak Konkret	

6.	KL	Acak Konkret	S_6
7.	SR	Acak Abstrak	S_7
8.	AF	Acak Abstrak	S_8

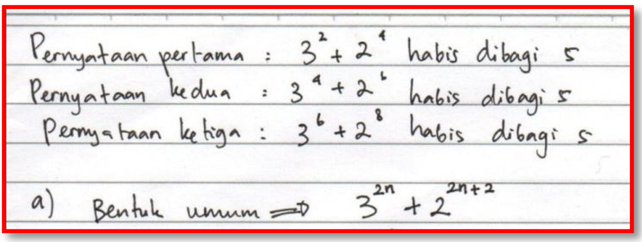
Setelah pemilihan subjek, peneliti memberikan lembar tes penalaran matematis kepada 8 subjek penelitian. Adapun soal tes penalaran matematis yang diberikan kepada subjek sebagai berikut:

> Firman diminta oleh guru Matematika untuk membuat pernyataan matematika dalam bentuk umum yang berhubungan dengan kelipatan 5, bilangan berpangkat, operasi penjumlahan dan bilangan asli. Pada pernyataan pertama, Firman menulis $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5. Pada pernyataan kedua, Ia menulis $3^4 + 2^6$ habis dibagi 5. Pada pernyataan ketiga, Ia menulis $3^6 + 2^8$ habis dibagi 5. dan begitu seterusnya.
>
> a. Berdasarkan contoh-contoh pernyataan matematika yang dibuat oleh Firman, maka bagaimana bentuk umum dari pernyataan tersebut sehingga pernyataan tersebut habis dibagi 5 untuk setiap n bilangan asli?
> b. Buktikan bahwa bentuk umum pernyataan tersebut habis dibagi 5 untuk setiap n bilangan asli!
> c. Tuliskan kesimpulan yang kamu peroleh dari penyelesaian soal tersebut!

A. Penalaran Matematis Mahasiswa Sekuensial Konkret Dalam Melakukan Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika

1. Deskripsi Data Subjek S_1

a) Mengajukan Dugaan


Pernyataan pertama : $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5
Pernyataan kedua : $3^4 + 2^6$ habis dibagi 5
Pernyataan ketiga : $3^6 + 2^8$ habis dibagi 5

a) Bentuk umum $\Rightarrow$ $3^{2n} + 2^{2n+2}$

Gambar 4.1
Jawaban Tertulis Subjek S_1 dalam Mengajukan Dugaan

Berdasarkan gambar 4.1 subjek S_1 menuliskan kembali contoh-contoh pernyataan yang sudah dibuat oleh Firman yaitu pernyataan pertama $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5, pernyataan kedua $3^4 + 2^6$ habis dibagi 5, dan pernyataan ketiga $3^6 + 2^8$ habis dibagi 5. Kemudian, contoh-contoh tersebut subjek S_1 memperoleh bentuk umum $3^{2n} + 2^{2n+2}$ yang habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli. Berikut ini petikan hasil wawancara subjek S_1 dalam mengajukan dugaan:

$P_{1.1.1}$: Informasi-informasi apa saja yang kamu peroleh dari`soal ini?

$S_{1.1.1}$: Informasi yang saya peroleh itu, pernyataan pertama $3^2 + 2^4$, pernyataan kedua itu $3^4 + 2^6$, dan pernyataan ketiga $3^6 + 2^8$ dan semua hasil dari ketiga pernyataan tersebut merupakan kelipatan 5.

$P_{1.1.2}$: Terus, apa yang kamu pikirkan setelah mendapatkan informasi tersebut?

$S_{1.1.2}$: Dari informasi tersebut, kemudian saya memikiran bentuk umum yang sesuai dengan ketiga pernyataan tersebut

$P_{1.1.3}$: Jadi bagaimana bentuk umum dari pernyataan tersebut sehingga habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli?

$S_{1.1.3}$: Bentuk umumnya itu $3^{2n} + 2^{2n+2}$

$P_{1.1.4}$: Coba jelaskan proses memperoleh bentuk umum $3^{2n} + 2^{2n+2}$!

$S_{1.1.4}$: Pernyataan pertama kan $3^2 + 2^4$, padahal n=1, pernyataan kedua kan $3^4 + 2^6$, padahal n=2. Jadi untuk 3 itu pangkat 2×1 .sedangkan untuk 2 itu pangkat 4. Kita lihat kalau selisih pangkat dari 2 dan 3 itu sebanyak 2, sehingga untuk 2 itu pangkatnya $2(1) + 2 = 4$. Pernyataan kedua $3^4 + 2^6$. Untuk 3 itu pangkat $2 \times 2 = 4$. sedangkan untuk 2 itu pangkat 6. 4 dan 6 itu juga selisih 2, 6 dapat diperoleh dengan $4 + 2$ sehingga untuk 2 itu pangkatnya $2(2) + 2$. Begitu juga untuk pernyataan ketiga $3^6 + 2^8$. Untuk 3 itu pangkat $2 \times 3 = 6$, 6 dan 8 juga selisih 2, 8 dapat diperoleh dengan $6 + 2$ sehingga untuk 2 itu pangkatnya $2(3) + 2$. Jadi untuk mencari pernyatan ke-n atau bentuk umumnya yaitu $3^{2n} + 2^{2n+2}$.

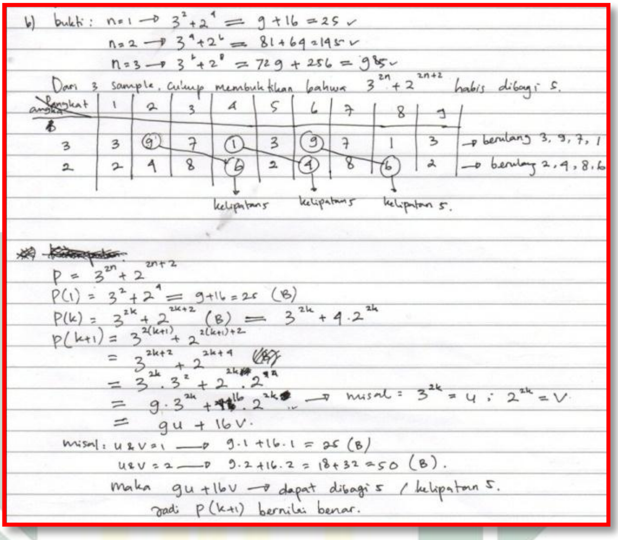
$P_{1.1.5}$: Mengapa kamu berpikir seperti itu?

$S_{1.1.5}$: Karena ini sudah kelihatan kalau dia itu berpola. Jadi, kita perlu melihat polanya saja untuk mencari bentuk umumnya.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_1 memperoleh informasi dari soal berupa pernyataan-pernyatan matematika yang habis dibagi 5. Setelah mengetahui informasi tersebut, subjek S_1 mulai memikirkan bentuk umum yang sesuai dengan contoh yang dihasilkan oleh Firman. Menurut subjek S_1, bentuk umum yang sesuai dengan contoh-contoh pernyataan Firman yaitu $3^{2n} + 2^{2n+2}$. Subjek S_1 memperoleh bentuk umum tersebut dengan memperhatikan pola dari ketiga pernyataan.

Berdasarkan petikan wawancara $S_{1.1.4}$, subjek S_1 mengatakan bahwa nilai pangkat dari 3 adalah $2n$ dan nilai pangkat dari 2 adalah $2n + 2$. Untuk 2n subjek S_1 menggunakan pola $2 = 2 \times 1$ dan $4 = 2 \times 2$ sehingga pola untuk ke-n adalah $2 \times n$. Sedangkan untuk $2n + 2$, subjek S_1 menggunakan pola $4 = 2 \times 1 + 2$ dan $6 = 2 \times 2 + 2$ sehingga pola untuk ke-n adalah $2 \times n + 2$.

b) Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika



b) bukti: $n=1 \rightarrow 3^2+2^4 = 9+16 = 25$ ✓

$n=2 \rightarrow 3^4+2^6 = 81+64 = 145$ ✓

$n=3 \rightarrow 3^6+2^8 = 729+256 = 985$ ✓

Dari 3 sample, cukup membuktikan bahwa $3^{2n}+2^{2n+2}$ habis dibagi 5.

~~angka~~ pangkat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	3	9	7	1	3	9	7	1	3	→ berulang 3, 9, 7, 1
2	2	4	8	6	2	4	8	6	2	→ berulang 2, 4, 8, 6

kelipatan 5 kelipatan 5 kelipatan 5.

$P = 3^{2n}+2^{2n+2}$

$P(1) = 3^2+2^4 = 9+16 = 25$ (B)

$P(k) = 3^{2k}+2^{2k+2}$ (B) $= 3^{2k}+4 \cdot 2^{2k}$

$P(k+1) = 3^{2(k+1)}+2^{2(k+1)+2}$

$= 3^{2k+2}+2^{2k+4}$

$= 3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2k} \cdot 2^4$

$= 9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k} \rightarrow$ misal: $3^{2k} = u$; $2^{2k} = v$

$= 9u + 16v$.

misal: $u \& v = 1 \rightarrow 9 \cdot 1 + 16 \cdot 1 = 25$ (B)

$u \& v = 2 \rightarrow 9 \cdot 2 + 16 \cdot 2 = 18+32 = 50$ (B).

maka $9u+16v \rightarrow$ dapat dibagi 5 / kelipatan 5.

jadi $P(k+1)$ bernilai benar.

Gambar 4.2
Jawaban Tertulis Subjek S_1 dalam Melakukan Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika

Berdasarkan gambar 4.2, subjek S_1 membuktikan bentuk umum $3^{2n}+2^{2n+2}$ dengan mensubtitusikan nilai n=1,2,3 ke $3^{2n}+2^{2n+2}$. Hasil substitusi yang dilakukan oleh subjek S_1 menghasilkan sebuah bilangan yang habis dibagi 5. Jadi berdasarkan contoh-contoh tersebut, subjek S_1 membuat kesimpulan bahwa $3^{2n}+2^{2n+2}$ habis dibagi 5.

Subjek S_1 juga melakukan pembuktian dengan induksi matematika. Subjek S_1 memisalkan $P = 3^{2n}+2^{2n+2}$. Langkah pertama, Subjek S_1 mensubstitusikan nilai n=1 ke $3^{2n}+2^{2n+2}$. Dari substitusi tersebut subjek S_1 menghasilkan bilangan 25 sehingga subjek S_1 menulis huruf B. Kemudian untuk langkah kedua, subjek S_1 mensubstitusikan nilai n=k ke $3^{2n}+2^{2n+2}$ sehingga menghasilkan $3^{2k}+2^{2k+2}$. Subjek S_1 menguraikan 2^{2k+2} menjadi $4 \cdot 2^{2k}$. Pada tahap ini, subjek S_1 juga menuliskan huruf B. Langkah selanjutnya, subjek S_1

mensubstitusikan $n = k + 1$ ke $3^{2n} + 2^{2n+2}$ sehingga $3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2}$. Kemudian, subjek S_1 melakukan distributif dan penjumlahan pada nilai pangkatanya sehingga persamaanya menjadi $3^{2k+2} + 2^{2k+4} = 3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2k} \cdot 2^4 = 9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k}$.

Subjek S_1 membuat memisalkan $3^{2k} = u$ dan $2^{2k} = v$ sehingga $9u + 16v$. Lalu, subjek S_1 memisalkan u dan v bernilai 1 sehingga $9 + 16 = 25$. Subjek S_1 menulis huruf B lagi. Selain itu, subjek S_1 juga memisalkan u dan bernilai 2 sehingga $18 + 32 = 50$. Subjek S_1 menulis huruf B lagi. Melihat contoh tersebut subjek S_1 menulis $9u + 16v$ dapat dibagi 5 atau kelipatan 5. Jadi, menurut subjek S_1, $P(k + 1)$ bernilai benar. Berikut ini petikan wawancara subjek S_1 dalam melakukan pembuktian induksi matematika:

$P_{1.1.6}$	:	Terus, itu (*menunjuk jawaban subjek*) ada kotak-kotak itu bagaimana maksudnya?
$S_{1.1.6}$	:	Kotak-kotak ini dapat membuat lebih mudah untuk mengetahui polanya mbak. Pada baris pertama itu menyatakan nilai pangkatnya, saya mengambil nilai *n* dari 1 sampai 9. Kemudian untuk kolom pertama itu menyatakan bilangan pokoknya yaitu 3 dan 2. Jika 3 kita pangkatkan dengan n=1 sampai n=9 maka akan kelihatan hasil pada posisi satuan mengalami pengulangan yaitu 3,9,7,1 begitu juga dengan 2 jika kita pangkatkan dengan n=1 sampai n=9 maka akan kelihatan hasil pada posisi satuan mengalami pengulangan yaitu 2,4,8,6. 9+6=15 kelipatan 5. 9 diperoleh dari 3^2 dan 6 itu satuan dari $2^4 = ..6$. 2 dan 4 selisih 2. Kemdian 1+4=5 kelipatan 5. 1 dapat diperoleh dari satuan $3^4 = ..1$ dan 4 itu satuan dari $2^6 = ..4$. 4 dan 6 selisih 2. Jadi, setiap 3 dan 2 pangkat bilangan genap dan nilai pangkat dari 2 itu ditamabh 2 dari nilai pangkat bilangan 3 maka hasilnya merupakan kelipatan 5. Sebenarnya dari 3

contoh yang ditunjukkan dapat membuktikan bahwa $3^{2n} + 2^{2n+2}$ habis dibagi 5.

$P_{1.1.7}$: Bagaimana cara kamu membuktikan bahwa $3^{2n} + 2^{2n+2}$ habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli?

$S_{1.1.7}$: Ya bisa seperti tadi. Tetapi secara umumnya saya menggunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa $3^{2n} + 2^{2n+2}$ habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli.

$P_{1.1.8}$: Jadi, kamu memilih pembuktian jenis induksi matematika.

$S_{1.1.8}$: Iya mbak.

$P_{1.1.9}$: Mengapa kamu memilih jenis pembuktian induksi matematika?

$S_{1.1.9}$: Karena semua angkanya menggunakan bilangan asli.

$P_{1.1.10}$: Jadi, apakah kalau berkaitan dengan bilangan asli kamu langsung berpikir menggunakan induksi matematika?

$S_{1.1.10}$: Iya mbak.

$P_{1.1.11}$: Coba jelaskan proses pembuktian induksi matematika?

$S_{1.1.11}$: Untuk P(1) itu *n* nya diganti 1 sehingga $3^{2(1)} + 2^{2(1)+2} = 3^2 + 2^4 = 9 + 16 = 25$ dan itu benar (*menunjuk huruf B)* karena kelipatan 5. Kemudian n=k, $3^{2k} + 2^{2k+2}$ dianggap benar. Lalu, untuk $P(k+1)$, $3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2}$ lalu hasilnya $3^{2k+2} + 2^{2k+4}$ kemudian kita uraikan sehingga $3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2n} \cdot 2^4 = 9 \cdot 3^{2n} + 16 \cdot 2^{2n+2}$. Kita dapat memisalkan $3^{2k} = u, 2^{2k} = v$ sehingga $9u + 16v$. Misalkan u & $v = 1$ diasumsikan benar maka $9 \cdot 1 + 16 \cdot 1 = 25$ habis dibagi 5. u & $v = 2$ diasumsikan benar maka $9 \cdot 2 + 16 \cdot 2 = 18 + 32 = 50$ habis dibagi . dari u dan v ini maka dapat disimpulkan

$9u + 16v$ bernilai benar atau dapat dibagi 5 atau kelipatan 5. Jadi, $P(k+1)$ bernilai benar.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_1 menjelaskan proses pembuktian secara induktif. Subjek S_1 membuat sebuah kotak dengan baris pertama menyatakan nilai pangkat yaitu bilangan asli 1-9 dan kolom pertama menyatakan bilangan pokok yaitu 3 dan 2. Subjek S_1 menggunakan cara ini agar lebih mengetahui polanya. Subjek S_1 melakukan operasi bilangan berpangkat dan hanya menuliskan nilai satuan. Dari hasil tersebut, subjek S_1 mengetahui nilai satuan bilangan berpangkat dari 3 dan 2 berulang yaitu 3,9,7,1 dan 2,4,6,8. Subjek S_1 menjumlahkan nilai satuan bilangan berpangat genap dari 3 dan 2 yang menghasilkan kelipatan 5. Subjek S_1 menjelaskan bahwa setiap 3 dan 2 memiliki pangkat genap dan nilai pangkat dari 2 ditambah 2 dari nilai pangkat dari 3 maka hasilnya selalu merupakan bilangan genap. Dengan cara ini, subjek S_1 dapat mengatakan bahwa $3^{2n} + 2^{2n+2}$ habis dibagi 5.

Subjek S_1 juga melakukan pembuktian secara deduktif yaitu dengan menggunakan pembuktian induksi matematika. Subjek S_1 memilih menggunakan pembuktian induksi matematika karena berhubungan dengan bilangan asli.

Penjelasan dari petikan wawancara $S_{1.1.11}$ dalam melakukan pembuktian induksi matematika tidak jauh berbeda dengan yang sudah dijelaskan peneliti pada gambar 4.2. Namun, dari hasil wawancara tersebut diperoleh informasi bahwa subjek S_1 menuliskan huruf B artinya bahwa pernyataan tersebut benar habis dibagi 5 atau kelipatan 5. Subjek S_1 menganggap bahwa n=k juga benar. Selain itu, dari substitusi nilai u dan v yang masing-masing bernilai 1 atau 2 sehingga menghasilkan bilangan yang habis dibagi 5 subjek S_1 menyimpulkan bahwa $9u + 16v$ bernilai benar. Jadi P(k+1) benar.

c) **Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi**

Pada indikator ini, subjek S_1 diharapkan dapat memberikan alasan terhadap kebenaran solusi yang telah dibuatnya. Berikut ini petikan wawancara subjek S_1 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi:

$P_{1.1.12}$: Mengapa dari $3^{2(k+1)}$ bisa menjadi 3^{2k+2} dan $2^{2(k+1)}$ bisa menjadi 2^{2k+2}?

$S_{1.1.12}$: Itu menggunakan sifat distributif pada aljabar.

$P_{1.1.13}$: Terus, mengapa dari 3^{2k+2} menjadi $3^{2k} \cdot 3^2$ dan 2^{2k} menjadi $2^{2k+2} \cdot 2^4$?

$S_{1.1.13}$: Itu menggunakan sifat eksponen mbak yang $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

$P_{1.1.14}$: Mengapa u dan v masing-masing di misalkan masing-masing 1? Kalau u dan v berbeda angka apakah bisa menghasilkan kelipatan 5?

$S_{1.1.14}$: lebih mudah saja mbak kalau pakai angka 1,,Hmm bisa saja mbak.

$P_{1.1.15}$: Berikan contohnya?

$S_{1.1.15}$: Misal $u = 1$ dan $v = 2$ berarti 9 ditambah.. oh iya tidak bisa mbak. Tapi ini antara 3 dan 2 memiliki pangkat sama yaitu 2k. Jadi, nilainya harus sama.

$P_{1.1.16}$: Hmm sekarang gini tadi kan u= 2, berarti $3^{2k} = 2$.. 3 pangkat berapa ya yang menghasilkan 2?

$S_{1.1.16}$: Oh iya mbak saya salah. Memberikan contoh pemisalan u dan v nya.

$P_{1.1.17}$: Terus, adakah cara lain untuk membuktikan P(k+1) benar?

$S_{1.1.17}$: Hmm, saya belum menemukan cara lain mbak. Tapi sebenarnya dinalar aja bisa mbak, kan 9 +16 itu 25 habis dibagi 5 otomatis dikali berapapun itu habis dibagi 5.

$P_{1.1.18}$: Hmm seperti itu, adakah alasan lain?

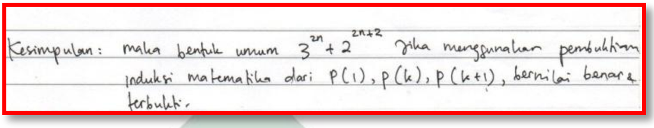
$S_{1.1.18}$: Hmm tidak ada mbak.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_1 menggunakan sifat distributif dan sifat eksponen dalam menguraikan operasi bilangan berpangkat. Selain itu, pada petikan wawancara $S_{1.1.15}$, subjek S_1 menyatakan bahwa nilai dari pemisalan u dan v harus memiliki nilai yang sama sehingga $9u + 16v$ akan habis dibagi 5. Subjek S_1 menyadari contoh substisusi yang diberikan salah akan tetapi subjek S_1 tetap menjelaskan bahwa jika 9+16=25 habis dibagi 5 maka dikali berapapun akan menghasilkan bilangan yang habis dibagi 5. Hal ini dapat dilihat pada petikan wawancara $S_{1.1.17}$. Berikut ini lanjutan petikan wawancara subjek S_1 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi:

$P_{1.1.19}$	:	Terus, mengapa langkah-langkahnya harus membuktikan bahwa P(1) benar, P(k) dan P(k+1) benar?
$S_{1.1.19}$	:	Kan, ini untuk semua bilangan asli. Jadi n=1 juga ikut. Terus n=k ini kan sebatas perubahan variabel saja. Sedangkan k+1 itu untuk menunjukkan bahwa semua *n* bilangan asli memenuhi.
$P_{1.1.20}$	:	Apakah langkah-langkah P(1) benar, P(k) dan P(k+1) benar itu merupakan syarat-syart induksi matematika?
$S_{1.1.20}$	:	Iya mbak.
$P_{1.1.21}$	:	Terus maknanya dari P(1) benar itu apa?
$S_{1.1.21}$	:	Jika n=1 kita substitusikan ke $3^{2n} + 2^{2n+2}$ menghasilkan 25 yang habis diagi 5, maka asumsi awalnya benar
$P_{1.1.22}$	:	Terus, kalau maknanya P(k) dan P(k+1) itu apa?
$S_{1.1.22}$	:	Untuk P(k) itu *n* nya diganti *k* jadi $3^{2k} + 2^{2k+2}$diasumsikan benar, dan P(k+1) itu berasal dari yang diketahui P(1) dan P(k), kalau keduanya benar maka perlu dibuktikan P(k+1) benar.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_1 sudah mengetahui proses langkah-langkah dari pembuktian induksi matematika. Selain itu, subjek S_1 menyatakan bahwa jika untuk n=1 benar maka kemungkinan awalnya pernyataan iu benar. Namun, subjek S_1 masih belum bisa mengetahui secara pasti arti dari P(k+1) benar. Hal ini dapat dilihat dari petikan wawancara $S_{1.1.22}$ bahwa subjek S_1 sedikit menjelaskan kembali langkah-langkah pembuktian induksi matematika, bukan memberikan arti dari P(k+1).

d) Menarik Kesimpulan dari Pernyataan


Kesimpulan: maka bentuk umum $3^{2n} + 2^{2n+2}$ jika menggunakan pembuktian induksi matematika dari P(1), P(k), P(k+1), bernilai benar & terbukti.

Gambar 4.3
Jawaban Tertulis Subjek S_1 dalam Membuat Kesimpulan

Berdasarkan gambar 4.3, subjek S_1 sudah dapat membuat kesimpulan bahwa bentuk umum $3^{2n} + 2^{2n+2}$ jika dibuktikan menggunakan induksi matematika bernilai benar dan terbukti. Untuk lebih jelas mengetahui cara subjek S_1 dalam membuat kesimpulan, maka dilakukan wawancara. Berikut ini petikan wawancara subjek S_1 dalam membuat kesimpulan:

$P_{1.1.23}$: Apa yang dapat kamu simpulkan setelah mengerjakan soal ini?

$S_{1.1.23}$: Maka bentuk umum dari ketiga pernyataan diatas itu yang dapat dibagi 5 atau kelipatan 5 yaitu $3^{2n} + 2^{2n+2}$dan jika dibuktikan dengan induksi matematika P(1), P(k) dan P(k+1) bernilai benar dan terbukti.

$P_{1.1.24}$: Bagaimana cara kamu memperoleh sebuah kesimpulan seperti ini?

$S_{1.1.24}$: Dari pertanyaan a dan pertanyaan b saya gabungkan sehingga diperoleh kesimpulan seperti ini.

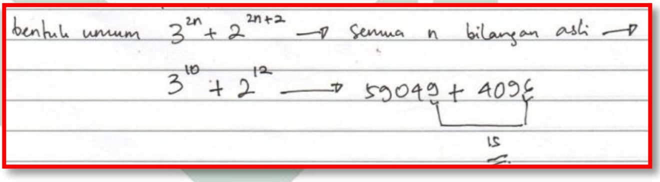
Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_1 menjelaskan kesimpulan sesuai dengan gambar 4.3. Subjek S_1 tidak menjelaskan arti dari nilai *n* dan *k*. Akan tetapi, subjek S_1 sudah memahami nilai *n* dan *k* merupakan bilangan asli. Hal ini dapat dilihat pada petikan wawancara $S_{1.1.9}$ diatas yang menyatakan bahwa alasan memilih menggunakan pembuktian induksi matematika karena semua angkanya menggunakan bilangan asli. Subjek S_1 memperoleh kesimpulan dengan menggabungkan jawaban dari pertanyaan a dan pertanyaan b. Hal ini sesuai dengan petikan wawancara $S_{1.1.24}$.

e) **Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen**

Pada indikator ini, subjek S_1 diharapkan bisa memeriksa kembali kebenaran dari suatu argumen atau jawaban yang sudah ditemukan. Berkut ini petikan wawancara subjek S_1 dalam memeriksa kembali jawabannya:

$P_{1.1.25}$	:	Bagaimana cara kamu memeriksa bahwa jawaban yang kamu peroleh sudah benar?
$S_{1.1.25}$	:	Ya melihat kembali proses jawaban atau bisa kita substitusikan nilai n=5 maka $3^{10} + 2^{12} = 59049 + 4096, \quad 9 + 6 = 15.$ Maka untuk n=5 habis dibagi 5.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat dillihat bahwa subjek S_1 melakukan pemeriksaan kembali jawabanya dengan mensubstitusikan nilai n=5 ke $3^{2n} + 2^{2n+n}$. Dari substitusi tersebut, subjek S_1 mengahsilkan sebuah bilangan yang habis dibagi 5. Untuk lebih jelasnya, subjek S_1 menuliskan proses pemeriksaan tersebut dilembar jawaban.



Gambar 4.4
Jawaban Tertulis Subjek S_1 dalam Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen

Berdasarkan gambar 4.4, subjek S_1 menulis kembali bentuk umum yang sesuai dengan pernyataan Firman. Setelah itu mensubstitusikan nilai n=5 ke bentuk umum tersebut. Lalu, subjek S_1 menjumlahkan nilai satuannya sehingga menghasilkan 15 yang artinya habis dibagi 5. Dengan kata lain, subjek S_1 dapat menunjukkan bahwa $3^{10} + 2^{12}$ habis dibagi 5.

f) Permasalahan yang Dihadapi Subjek

Dalam mengerjakan soal ini, tentunya ada suatu permasalahan yang dihadapi subjek S_1 sehingga membuat subjek S_1 mengalami sebuah masalah. Berikut ini petikan wawancara subjek S_1 tentang permasalahan yang dihadapi subjek S_1 selama menyelesaikan soal:

$P_{1.1.26}$	:	Pemasalahan apa saja yang kamu hadapi selama melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika?
$S_{1.1.26}$	:	membuktikan P(k+1) benar. Bagaimanapun caraya dari P(1) dan P(k) diolah sehingga habis dibagi 5.
$P_{1.1.27}$	:	Jadi, pada titik manakah kamu merasakan bingung?
$S_{1.1.27}$	:	Dari $9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k}$ agar dapat dirubah dan memunculkan $3^{2k} + 2^{2k+2}$
$P_{1.1.28}$	:	Itu sajakah?
$S_{1.1.28}$	:	Iya mbak.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_1 hanya mengalami permasalahan pada tahap membuktikan P(k+1) benar. Subjek S_1 mengalami kesulitan ketika menguraikan $9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k}$ sehingga muncul $3^{2k} + 2^{2k+2}$. Hal ini sesuai dengan petikan wawancara $S_{1.1.27}$.

2. Analisis Data Subjek S_1

Berdasarkan paparan data diatas, berikut ini ialah hasil analisis penalaran matematis subjek S_1 dalam melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika yaitu:

a) Mengajukan Dugaan

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_1 menuliskan kembali informasi-informasi yang diperoleh yaitu pernyataan-pernyataan matematika yang habis dibagi 5. Kemudian, subjek S_1 mulai berpikir dalam mencari bentuk umum yang sesuai dengan contoh. Subjek S_1 menghasilkan bentuk umum $3^{2n} + 2^{2n+2}$ dengan melihat kembali informasi yang diperoleh. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa bagi para pemikir sekuensial konkret mengelola informasi dengan cara yang teratur, linear dan sekuensial.

Subjek S_1 menggunakan pola untuk memperoleh bentuk umum yang dinginkan Firman. Pola yang dilihat oleh subjek S_1 yaitu pola dari nilai pangkat. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa bagi para pemikir sekuensial konkret, realitas terdiri dari apa yang dapat mereka ketahui melalui indera fisik mereka, yaitu indera penglihatan. Sedangkan menurut Thobias dan Chintya Ulrich menyatkan bahwa anak sekuensial konkret mampu mencermati sesuatu sampai hal yang sekecil-kecilnya.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_1 dalam mengajukan dugaan yaitu dengan menuliskan kembali informasi yang diperoleh, melihat suatu pola yang ada sehingga menghasilkan pernyataan baru yang diinginkan.

b) Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_1 melakukan pembuktikan dengan dua cara. Cara pertama, subjek S_1 menggunakan pembuktian secara induktif yaitu mensubstitusikan nilai n ke bentuk umum yang dihasilkan. Subjek S_1 membuat tabel bilangan berpangkat untuk lebih mudah menunjukkan bahwa hasil bilangan berpangkat dari 3 dan 2 akan menghasilkan bilangan yang habis dibagi 5. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa bagi para pemikir sekuensial konkret lebih menyukai hal-hal yang konkret. Cara kedua, subjek S_1 menggunakan pembuktian induksi matematika. Subjek S_1 memilih pembuktian menggunakan induksi matematika karena berhubungan dengan bilangan asli.

Subjek S_1 melakukan pembuktian induksi matematika dengan menggunakan prinsip induksi matematis yaitu membuktikan P(1) benar, P(k) dan P(k+1) benar. Pada tahap P(1) terbukti benar. Pada tahap P(k) diasumsikan benar. Pada tahap membuktikan P(k+1), subjek S_1 menggunakan pemisalan. Pemisalan yang digunakan dalam proses ini yaitu $3^{2k} = u$ dan $2^{2k} = v$. Subjek S_1 memisalkan nilai u dan v yaitu masing-masing bernilai 1 atau 2. Dari pemisalan dan substitusi nilai u dan v menghasilkan bilangan yang habis dibagi 5 sehingga subjek S_1 yakin bahwa P(k+1) terbukti. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir sekuensial konkret lebih menyukai hal-hal yang konkret dan berpegang teguh pada kenyataan. Namun, subjek S_1 mengalami kesalahan konsep yaitu tidak ada nilai 3^{2k} dan 2^{2k} yang menghasilkan 1 atau 2 dengan *k* anggota bilangan asli.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_1 dalam melakukan pembuktian induksi matematika yaitu dengan menggunakan metode substitusi, menggunakan prinsip induksi matematis, menggunakan pemisalan pada salah satu tahapan proses induksi matematika, dan menggunakan metode substitusi lagi.

c) **Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi**

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa. Subjek S_1 menggunakan sifat distributif dan sifat bilangan berpangkat dalam menguraikan operasi bilangan. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir sekuensial konkret mengingat realitas, informasi, rumus-rumus, dan aturan-aturan dengan mudah.

Subjek S_1 juga menggunakan pemisalan u dan v seperti penjelasan diatas. Subjek S_1 menjelaskan bahwa jika nilai pangkatnya sama maka hasil bilangan berpangkatnya pasti sama. Padahal, tidak semua nilai pangkatnya sama maka hasil dari bilangan berpangkat juga sama. Dalam hal ini, subjek S_1 mengalami kesalahan konsep.

Subjek S_1 mengetahui prinsip induksi matematis atau langkah-langkah dari induksi matematika. Subjek S_1 menjelaskan bahwa arti P(1) benar yaitu benar untuk n=1, arti P(k) hanya mengganti huruf n menjadi k dan diasumsikan benar, akan tetapi subjek S_1 tidak dapat menjelaskan arti dari pembuktian P(k+1) benar. Subjek S_1 belum memahami sepenuhnya arti dari langkah-langkah induksi matematika. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir sekuensial konkret cenderung menghafal.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_1 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi ada yang sesuai konsep dan logis, dan ada juga yang tidak sesuai konsep.

d) Menarik Kesimpulan dari Pernyataan

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_1 dapat membuat sebuah kesimpulan. Kesimpulan ini diperoleh subjek S_1 dengan menggabungkan informasi dari petanyaan a dan pertanyaan b. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir sekuensial konkret, mengelola informasi dengan cara yang teratur dan linear.

e) Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_1 melakukan pemeriksaan kembali suatu argumen dengan melihat kembali hasil pekerjaan yang sudah dilakukan. Subjek S_1 juga melakukan substitusi salah satu nilai bilangan asli ke bentuk umum. Subjek S_1 hanya menggunakan penjumlahan nilai satuan dari masing-masing hasil bilangan berpangkat untuk menunjukkan bahwa pernyataan tersebut habis dibagi 5.

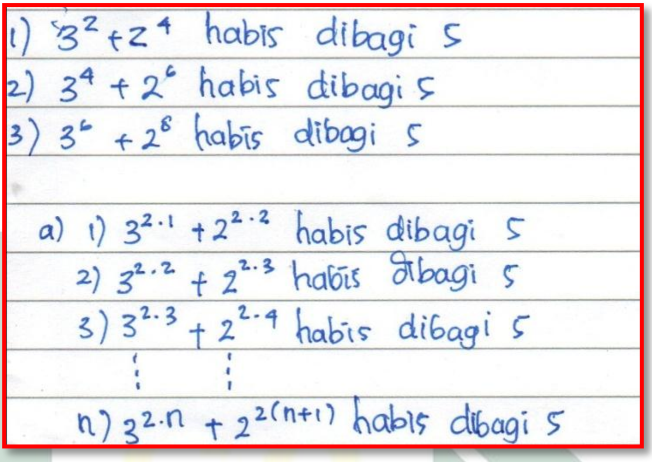
Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_1 dalam memeriksa kesahihan suatu argumen dengan cara memeriksa jawaban, melakukan substitusi, dan melihat nilai satuan.

f) Permasalahan yang Dihadapi Subjek

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_1 mengalami masalah pada tahap pembuktian P(k+1). Subjek S_1 mengalami kesulitan dalam menguraikan $9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k}$. Hal ini sejalan dengan pendapat Polya yang menyatakan bahwa salah satu masalah yang dihadapi seseorang adalah masalah yang berkaitan dengan pembuktian yaitu menunjukkan bahwa suatu pernyataan itu benar atau salah dan tidak keduannya. Selain itu, subjek S_1 juga mengalami kesalahan konsep pada tahap ini. Subjek S_1 tidak mengetahui bahwa konsep yang digunakan salah.

3. Deskripsi Data Subjek S_2

a) Mengajukan Dugaan


1) $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5
2) $3^4 + 2^6$ habis dibagi 5
3) $3^6 + 2^8$ habis dibagi 5

a) 1) $3^{2 \cdot 1} + 2^{2 \cdot 2}$ habis dibagi 5
2) $3^{2 \cdot 2} + 2^{2 \cdot 3}$ habis dibagi 5
3) $3^{2 \cdot 3} + 2^{2 \cdot 4}$ habis dibagi 5
$\vdots$ $\vdots$
n) $3^{2 \cdot n} + 2^{2(n+1)}$ habis dibagi 5

Gambar 4.5
Jawaban Tertulis Subjek S_2 dalam Mengajukan Dugaan

Berdasarkan gambar 4.5 subjek S_2 menuliskan kembali pernyataan-pernyataan yang sudah dibuat oleh Firman yaitu pernyataan pertama $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5, pernyataan kedua $3^4 + 2^6$ habis dibagi 5, dan pernyataan ketiga $3^6 + 2^8$ habis dibagi 5. Subjek S_2 memisalkan pernyataan pertama menjadi 1, pernyataan kedua menjadi 2, dan pernyataan ketiga menjadi 3, serta pernyataan ke-n menjadi n.

Subjek S_2 memperoleh bentuk umum dengan melakukan penjabaran nilai pangkat dari 3 dan 2 yaitu $2 = 2 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2 \cdot 4$ dan sampai ke-n. Subjek S_2 memperoleh pernyataan ke-n yaitu bentuk umum $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$ yang habis dibagi 5 untuk setiap n bilangan asli. Berikut ini petikan hasil wawancara subjek S_2 dalam mengajukan dugaan:

$P_{2.1.1}$: Informasi-informasi apa saja yang kamu peroleh dari`soal ini?
$S_{2.1.1}$: Soalnya sulit mbak
$P_{2.1.2}$: Kok malah jawab soalnya sulit. Informasi

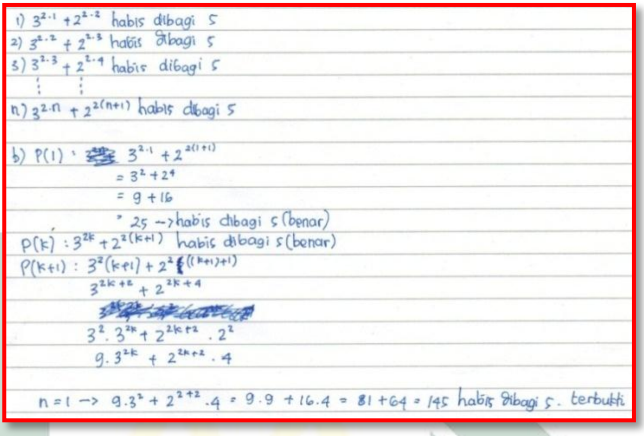
		yang kamu peroleh dari soal itu apa saja?
$S_{2.1.2}$	:	Yang pertama ada 3 bentuk operasi penjumlahan berpangkat yang masing-maisng bentuk tersebut habis dibagi 5. Yang kedua, kita di suruh mencari bentuk umum pernyataan tersebut itu seperti apa. Kemudian yang ketiga kita disuruh untuk membuktikan pernyataan tersebut. Kemudian yang terakhir kita diminta untuk membuat kesimpulan yang berhubungan dengan soal ini.
$P_{2.1.3}$	:	Terus, apa yang kamu pikirkan setelah mendapatkan informasi tersebut?
$S_{2.1.3}$	:	yang saya pikirkan itu bentuk umum dari ketiga pernyataan tersebut.
$P_{2.1.4}$	:	Jadi bagaimana bentuk umum dari pernyataan tersebut sehingga habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli?
$S_{2.1.4}$	:	Bentuk umum dari pernyataan tersebut itu ketemu $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$
$P_{2.1.5}$	:	Coba jelaskan proses memperoleh bentuk umum $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$!
$S_{2.1.5}$	:	Yang pertama saya amati dari pernyataan 1, pernyataan 2, dan pernyataan 3. Ternyata itu membentuk pola. Jadi saya mencari polanya. Setelah itu tulis rumusnya.
$P_{2.1.6}$	:	Yang diamati yang bagian sebelah mana?
$S_{2.1.6}$	:	Yang pangkatnya mbak.
$P_{2.1.7}$		Contoh polanya itu bagaimana?
$S_{2.1.7}$		Polanya itu yang dari 3 pangkat sesuatu. Yang pertama 3 pangkat 2. Kemudian yang kedua 3 pangkat 4. Kemudian yang ketiga 3 pangkat 6, $2 = 2 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$. Jadi untuk 3 itu 3 pangkat 2n (3^{2n}). Sedangkan untuk 2 pangkat sesuatu. Yang pertama 2 pangkat 4. Kemudian yang kedua 2 pangkat 6, kemudian yang ketiga 2 pangkat 8. $4 = 2 \cdot 2 = 2(1+1)$, $6 = 2 \cdot 3 = 2(2+1)$, $8 = 2 \cdot 4 = 2(3+1)$. Jadi

		untuk 2 itu 2 pangkat 2(n+1). Maka bentuk umumnya $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$
$P_{2.1.8}$	:	:engapa kamu berpikir seperti itu?
$S_{2.1.8}$	:	Karena nilai pangkat dari 2 dan 3 itu memiliki pola atau selisih sama sehingga saya melihat pola yang terjadi untuk menghasilkan suatu bentuk umum dari ketiga pernyatan tersebut.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_2 memperoleh informasi dari soal berupa tiga pernyataan matematika yang masing-masing pernyataan tersebut habis dibagi 5. Subjek S_2 mengetahui perintah soal yaitu mencari bentuk umum dan melakukan pembuktian induksi matematika serta membuat kesimpulan yang logis. Subjek S_2 mulai memikirkan bentuk umum dari ketiga pernyataan tersebut. Subjek S_2 menemukan bentuk umumnya dari pernyataan tersebut yaitu $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$.

Berdasarkan petikan wawancara $S_{2.1.7}$, subjek S_2 melihat pola nilai pangkat dari 3 yaitu $2 = 2 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$ sehingga untuk ke-n yaitu $2n$ dan nilai pangkat dari 2 yaitu 8. $4 = 2 \cdot 2 = 2(1 + 1)$, $6 = 2 \cdot 3 = 2(2 + 1)$, $8 = 2 \cdot 4 = 2(3 + 1)$ sehingga untuk ke-n yaitu $2n + 2$. Subjek S_2 memperoleh bentuk umum tersebut dengan memperhatikan pola dari ketiga pernyataan.

b) Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika



1) $3^{2.1}+2^{2.2}$ habis dibagi 5
2) $3^{2.2}+2^{2.3}$ habis dibagi 5
3) $3^{2.3}+2^{2.4}$ habis dibagi 5
⋮ ⋮
n) $3^{2.n}+2^{2(n+1)}$ habis dibagi 5

b) P(1) : $3^{2.1}+2^{2(1+1)}$
$= 3^2+2^4$
$= 9+16$
$= 25$ → habis dibagi 5 (benar)
P(k) : $3^{2k}+2^{2(k+1)}$ habis dibagi 5 (benar)
P(k+1) : $3^{2(k+1)}+2^{2((k+1)+1)}$
$3^{2k+2}+2^{2k+4}$
$3^2 . 3^{2k}+2^{2k+2} . 2^2$
$9 . 3^{2k}+2^{2k+2} . 4$

n = 1 → $9 . 3^2+2^{2+2} . 4 = 9 . 9+16 . 4 = 81+64 = 145$ habis dibagi 5. terbukti

Gambar 4.6
Jawaban Tertulis Subjek S_2 dalam Melakukan Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika

Berdasarkan gambar 4.6, subjek S_2 membuktikan bentuk umum $3^{2n}+2^{2(n+1)}$ dengan menggunakan induksi matematika. Subjek S_2 memisalkan $P(n) = 3^{2n}+2^{2(n+1)}$. Untuk P(1), Subjek S_2 mensubstitusikan nilai n=1 ke $3^{2n}+2^{2(n+1)}$ sehingga diperoleh $3^2+2^{2(1+1)} = 3^2+2^4 = 9+16 = 25$. Bilangan 25 merupakan bilangan yang habis dibagi 5. Subjek S_2 menulis benar pada pernyataan (1). Untuk P(2), Subjek S_2 mensubstitusikan nilai n=k ke $3^{2n}+2^{2n+2}$ sehingga menghasilkan $3^{2k}+2^{2k+2}$ habis dibagi 5 dan mengasumsikan benar. Untuk P(k+1), subjek S_2 mensubstitusikan $n = k+1$ ke $3^{2n}+2^{2n+2}$ sehingga $3^{2(k+1)}+2^{2(k+1)+2}$.

Subjek S_2 melakukan sifat distributif dan penjumlahan pada nilai pangkat sehingga diperoleh $3^{2k+2}+2^{2k+4} = 3^{2k} \cdot 3^2+2^{2k} \cdot 2^4 = 9 \cdot 3^{2k}+2^{2k+2} \cdot 4$ Lalu, subjek S_2 mensubstitusikan nilai n=1 ke hasil akhir dari P(k+1) sehingga menghasilkan bilangan 145. 145 adalah bilangan yang habis diagi 5. Jadi, subjek S_2 menyatakan bahwa

$P(k+1)$. Berikut ini petikan wawancara subjek S_2 dalam melakukan pembuktian induksi matematika:

$P_{2.1.9}$	:	Terus, Bagaimana cara kamu membuktikan bahwa $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$ habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli?
$S_{2.1.9}$	:	Saya menggunakan pembuktian dengan induksi matematika.
$P_{2.1.10}$	:	Mengapa kamu memilih jenis pembuktian induksi matematika?
$S_{2.1.10}$	:	Karena dulu waktu SMA pernah diajarkan seperti ini.
$P_{2.1.11}$	:	Adakah suatu ciri-cirinya dari pembuktian induksi matematika?
$S_{2.1.11}$	:	Hmm biasanya itu yang berkaitan dengan bilangan asli selalu menggunakan induksi matematika.
$P_{2.1.12}$	:	Coba jelaskan proses pembuktian induksi matematika?
$S_{2.1.12}$	:	Yang pertama kita misalkan n=1 dan itu harus benar. Jadi n=1 kita substitusikan ke rumus umumnya akan diperoleh hasil 25 yang habis dibagi 5.jadipernyataan satu benar. Kemudian misalkan n=k dan itu diasumsikan benar sehingga menjadi $3^{2k} + 2^{2(k+1)}$habis dibagi 5. Kemudian yang ketiga, kita membuktikan n=k+1 dengan mensubstitusikan ke bentuk umum tadi sehingga $3^{2(k+1)} + 2^{2[(k+1)+1]} = 3^{2k+2} + 2^{2k+4} = 3^2 \cdot 3^{2k} + 2^{2k+2} \cdot 2^2 = 9 \cdot 3^{2k} + 2^{2k+2} \cdot 4$. Karena saya bingung untuk menguraikan ya saya coba substitusi n=1 maka diperoleh $9 \cdot 3^2 + 2^{2+2} \cdot 4 = 9 \cdot 9 + 16 \cdot 4 = 81 + 64 = 145$ habis dibagi 5. Maka $9 \cdot 3^{2k} + 2^{2k+2} \cdot 4$ habis dibagi 5 sehingga P(k+1) benar.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_2 memilih pembuktian induksi matematika dalam membuktikan bentuk umum $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$. Subjek S_2 mengenal pembuktian induksi matematika pada waktu SMA. Subjek S_2 menyebutkan ciri-ciri dari induksi matematika yaitu berhubungan dengan bilangan asli.

Pada petikan wawancara $S_{2.1.12}$, subjek S_2 melakukan pembuktian induksi matematika dengan tiga langkah yaitu memisalkan n=1, n=k dan n=k+1. Penjelasan untuk petikan wawancara ini hampir sama dengan yang dijelaskan oleh peneliti diatas. Namun, pada petikan wawancara $S_{2.1.12}$, dapat diketahui bahwa subjek S_2 mengalami kesulitan dalam menguraikan $9 \cdot 3^{2k} + 2^{2k+2} \cdot 4$ sehingga ia menggunakan metode substitusi untuk menunjukkan bahwa P(k+1) habis dibagi 5.

c) **Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi**

Pada indikator ini, subjek S_2 diharapkan dapat memberikan alasan terhadap kebenaran solusi yang telah dibuatnya. Berikut ini petikan wawancara subjek S_2 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi:

$P_{2.1.13}$	:	Mengapa dari $3^{2(k+1)}$ bisa menjadi 3^{2k+2} dan $2^{2(k+1)}$ bisa menjadi 2^{2k+2}?
$S_{2.1.13}$	:	pakai sifat distributif pada aljabar. $a(b + c) = ab + ac$
$P_{2.1.14}$	:	Terus, mengapa dari 3^{2k+2} menjadi $3^{2k} \cdot 3^2$ dan 2^{2k+4} menjadi $2^{2k+2} \cdot 2^2$?
$S_{2.1.14}$	:	Pakai sifat yang ini lho mbak $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
$P_{2.1.15}$	:	Ohh gitu, terus, kenapa kamu langsung mensubstitusikan n=1?
$S_{2.1.15}$	:	Hmm karena saya itu bingung menguraikan mbak biar muncul bentuk umum P(k). Lah akhirnya saya mnecoba substitusikan n=1 ke hasil akhir P(k+1). Ternyata hasilnya juga habis dibagi 5. Jadi $9 \cdot 3^2 + 2^{2+2} \cdot 4$ habis dibagi 5. Terbukti.
$P_{2.1.16}$	:	Apakah tidak cara lain selain mensubstitusikan?
$S_{2.1.16}$	:	Sebenarnya ada, tapi saya tidak tau mbak.
$P_{2.1.17}$	:	Oh gitu, Apakah langkah-langkah harus

membuktikan P(1) benar, P(k) dan P(k+1) benar?

$S_{2.1.17}$: Iya mbak..

$P_{2.1.18}$: Mengapa langkah-langkahnya harus seperti itu?

$S_{2.1.18}$: Ya karena saya diajarkan oleh guru saya seperti itu.

$P_{2.1.19}$: Terus maknanya dari P(1) benar itu apa?

$S_{2.1.19}$: Ya kalau hasil substitusi n=1 benar mak P(1) benar.

$P_{2.1.20}$: Yakin?

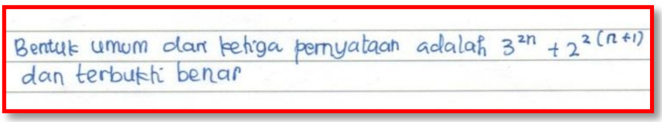
$S_{2.1.20}$: Kayaknya iya mbak.

$P_{2.1.21}$: Terus, kalau maknanya P(k) dan P(k+1) itu apa?

$S_{2.1.21}$: Untuk P(k) itu Cuma mengganti *n* menjadi k jadi $3^{2k} + 2^{2k+2}$diasumsikan benar, dan P(k+1) yang berarti membuktikan setiap bilangan selanjutnya juga benar.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_2 menggunakan sifat distributif dan sifat eksponen dalam menguraikan bilangan. Selain itu, subjek S_2 mensubstitusikan n=1 ke hasil akhir P(k+1) untuk membuktikan bahwa P(k+1) habis dibagi 5. Subjek S_2 mengetahui langkah-langkah dari induksi matematika yaitu P(1) benar, P(k) dan P(k+1) benar. Subjek S_2 mengartikan bahwa jika n=1 benar maka kemungkinan *n* yang lain juga benar. Selain itu, subjek S_2 menyatakan pembuktian P(k+1) artinya membuktikan setiap bilangan selanjutnya juga benar.

d) Menarik Kesimpulan dari Pernyataan


Bentuk umum dari ketiga pernyataan adalah $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$
dan terbukti benar

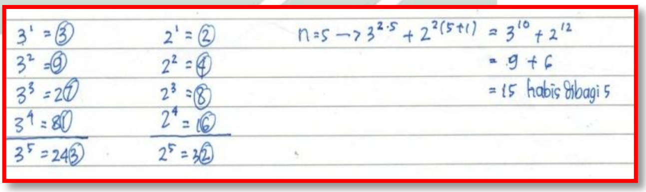
Gambar 4.7
Jawaban Tertulis Subjek S_2 dalam Membuat Kesimpulan

Berdasarkan gambar 4.7, subjek S_2 dapat membuat kesimpulan yaitu bentuk umum dari ketiga pernyataan adalah $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$ dan terbukti benar. Berikut ini petikan wawancara subjek S_2 dalam membuat kesimpulan:

$P_{2.1.22}$	:	Apa yang dapat kamu simpulkan setelah mengerjakan soal ini?
$S_{2.1.22}$	:	Bentuk umum dari ketiga pernyataan tersebut adalah $3^{2n} + 2^{2n+2}$ habis dibagi 5 dan terbukti kebenaranya
$P_{2.1.23}$	:	Bagaimana cara kamu memperoleh sebuah kesimpulan seperti ini?
$S_{2.1.23}$	:	Dari contoh-contoh yang sudah diberikan yaitu pernyataan kesatu, kedua, dan ketiga.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_2 menjelaskan kesimpulan sesuai dengan gambar 4.7. Subjek S_2 tidak menjelaskan arti dari nilai *n* Akan tetapi, subjek S_2 sudah memahami nilai *n* adalah bilangan asli. Hal ini dapat dilihat pada petikan wawancara $S_{2.1.11}$ diatas yang menyatakan bahwa alasan memilih menggunakan pembuktian induksi matematika karena berhubungan dengan bilangan asli. Subjek S_2 memperoleh kesimpulan seperti itu dengan melihat contoh-contoh pernyataan matematika yang ada pada soal.

e) Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen



Gambar 4.8
Jawaban Tertulis Subjek S_2 dalam Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen

Berdasarkan gambar 4.8, subjek S_2 dalam memeriksa jawabannya dengan mensubstitusikan nilai n=5 ke $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$. Subjek S_2 mendaftarkan hasil dari 3^n dan 2^n dimana n=1,2,3,4,5. Subjek S_2 melingkari nilai satuan dari hasil bilangan berpangkat terebut. Oleh karena itu, hasil dari substitusi n=5 menghasilkan 9+6=15 yang habis dibagi 5. Berikut ini petikan wawancara subjek S_2 dalam memeriksa kembali jawabannya:

$P_{2.1.24}$: Bagaimana cara kamu memeriksa bahwa jawaban yang kamu peroleh sudah benar?

$S_{2.1.24}$: Kalau induksi matematika sendiri saya tidak yakin dengan jawabn saya karena menurut saya itu belum sempurna. Tetapi kalau kita mensubstitusikan n=5 maka $3^{10} + 2^{12} = \ldots.9 + \ldots.6$, $9 + 6 = 15$ habis dibagi 5. Jadi ya bentuk umumnya sudah benar untuk setiap *n* bilangan asli

$P_{2.1.25}$: Kok bisa $3^{10} + 2^{12} = \ldots.9 + \ldots.6$?

$S_{2.1.25}$: Gini. $3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = \ldots.3$ ini terjadi pengulangan pada nilai satuan. Pengulangan berhenti pada pangkat ke-4. Sehinga untuk 3^{10} dapat diperoleh $10: 4$ itu bersisa 2. Kemudian kita lihat satuan dari 3^2 sehingga satuan dari 3^{10} adalah 9. Begitu juga untuk $2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = \ldots.2$ ini terjadi pengulangan pada nilai satuan. Pengulangan berhenti pada pangkat ke-4. Sehinga untuk 2^{12} dapat diperoleh $12: 4$ itu bersisa 0. Kemudian kita lihat satuan dari 2^4 sehingga satuan dari 2^{12} adalah 6. Maka dari itu, $3^{10} + 2^{12} = \ldots.9 + \ldots.6 = \ldots 5$

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat dillihat bahwa subjek S_2 tidak yakin dengan pembuktian induksi matematika yang sudah dilakukannya. Subjek S_2 memriksa jawaban dengan mensubstitusikan nilai n=5 ke bentuk umum. Subjek S_2 hanya menggunakan nilai satuan dari hasil bilangan berpangkat. Kemudian, Subjek S_2 menjumlahkan nilai satuan tersebut sehingga menghasilkan bilangan 15 yang habis dibagi 5.

f) Permasalahan yang Dihadapi Subjek

Dalam mengerjakan soal ini, tentunya ada suatu permasalahan yang dihadapi subjek S_2 sehingga membuat subjek S_2 mengalami sebuah masalah. Berikut ini petikan wawancara subjek S_2 tentang permasalahan yang dihadapi subjek S_2 selama menyelesaikan soal:

$P_{2.1.26}$	:	Pemasalahan apa saja yang kamu hadapi selama melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika?
$S_{2.1.26}$	:	Ya itu tadi mbak. Saya bingung menguraikan $9 \cdot 3^{2k} + 2^{2k+2} \cdot 4$ biar muncul $3^{2k} + 2^{2k+2}$
$P_{2.1.27}$	:	Itu sajakah?
$S_{2.1.27}$	:	Iya mbak.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_2 hanya mengalami permasalahan pada tahap menguraikan $9 \cdot 3^{2k} + 2^{2k+2} \cdot 4$. Subjek S_2 ingin memunculkan bentuk umum $3^{2k} + 2^{2k+2}$ dalam membuktikan P(k+1) . Hal ini sesuai dengan petikan wawancara $S_{2.1.26}$.

4. Analisis Data Subjek S_2

Berdasarkan paparan data diatas, berikut ini ialah hasil analisis penalaran matematis subjek S_2 dalam melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika yaitu:

a) Mengajukan Dugaan

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_2 menuliskan kembali informasi-informasi yang diperoleh yaitu pernyataan-pernyataan matematika yang habis dibagi 5. Subjek S_2 menyebutkan perintah soal yaitu tentang mencari bentuk umum dan melakukan pembuktian. Kemudian, subjek S_2 mulai berpikir untuk mencari bentuk umum yang sesuai dengan contoh. Subjek S_2 menghasilkan bentuk umum $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$dengan melihat kembali informasi yang diperoleh. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa bagi para pemikir sekuensial konkret mengelola informasi dengan cara yang teratur, linear dan sekuensial.

Subjek S_2 menggunakan pola untuk memperoleh bentuk umum yang dinginkan Firman. Pola yang dilihat oleh subjek S_2 yaitu pola dari nilai pangkat. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa bagi para pemikir sekuensial konkret, realitas terdiri dari apa yang dapat mereka ketahui melalui indera fisik mereka, yaitu indera penglihatan. Sedangkan menurut Thobias dan Chintya Ulrich menyatakan bahwa anak sekuensial konkret mampu mencermati sesuatu sampai hal yang sekecil-kecilnya.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_2 dalam mengajukan dugaan yaitu dengan menuliskan kembali informasi yang diperoleh, melihat suatu pola yang ada sehingga menghasilkan pernyataan baru yang diinginkan.

b) Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_2 melakukan pembuktikan menggunakan induksi matematika. Subjek S_2 memilih pembuktian menggunakan induksi matematika karena berhubungan dengan bilangan asli. Subjek S_2 melakukan pembuktian induksi matematika dengan menggunakan langkah-langkah dari induksi matematika yaitu P(1) benar, P(k) dan P(k+1) benar.

Pada tahap P(1) terbukti benar. Pada tahap P(k+1) diasumsikan benar. Pada tahap membuktikan P(k+1) benar, proses pembuktian secara deduktif yang dilakukan oleh subjek S_2 berhenti di $9 \cdot 3^{2k} + 2^{2k+2} \cdot 4$. Subjek S_2 melakukan substitusi pada hasil akhir dari P(k+1) untuk meyakinkan bahwa P(k+1) terbukti benar. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir sekuensial konkret lebih menyukai hal-hal yang konkret dan berpegang teguh pada kenyataan.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_2 dalam melakukan pembuktian induksi matematika yaitu dengan menggunakan langkah-langkah dari induksi matematika dan menggunakan metode substitusi.

c) Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_2 juga menggunakan sifat distributif dan sifat bilangan berpangkat dalam menguraikan operasi bilangan. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir sekuensial konkret mengingat realitas, informasi, rumus-rumus, dan aturan-aturan dengan mudah.

Subjek S_2 juga menggunakan metode substitusi pada hasil akhir dari P(k+1) untuk menunjukkan bahwa P(k+1) benar. Subjek S_2 mengetahui langkah-langkah dari induksi matematika. Subjek S_2 menjelaskan bahwa arti P(1) benar yaitu jika hasil substitusi n=1 benar mak P(1) benar, arti P(k) hanya mengganti huruf *n* menjadi *k* dan disumsikan benar, dan arti dari pembuktian P(k+1) benar yaitu membuktikan bahwa bilangan selanjutnya juga benar. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir sekuensial konkret lebih menyukai hal-hal yang konkret dan berpegang teguh pada kenyataan.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_2 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi sesuai konsep dan logis.

d) Menarik Kesimpulan dari Pernyataan

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_2 dapat membuat sebuah kesimpulan. Kesimpulan ini diperoleh subjek S_2 dari informasi yang diperoleh yaitu pernyataan-pernyataan matematika yang dibuat oleh Firman. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir sekuensial konkret, mengelola informasi dengan cara yang teratur dan linear.

e) Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_2 memeriksa keshahihan suatu argumen dengan melakukan substitusi salah satu nilai bilangan asli ke bentuk umum. Subjek S_2 hanya menggunakan penjumlahan nilai satuan dari masing-masing hasil bilangan berpangkat untuk menunjukkan bahwa pernyataan tersebut habis dibagi 5.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_2 dalam memeriksa kesahihan suatu argumen dengan memeriksa jawaban, melakukan substitusi, dan melihat nilai satuan.

f) Permasalahan yang Dihadapi Subjek

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_2 mengalami masalah pada tahap pembuktian P(k+1). Subjek S_2 mengalami kesulitan dalam menguraikan $9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k}$. Hal ini sejalan dengan pendapat Polya yang menyatakan bahwa salah satu masalah yang dihadapi seseorang adalah masalah yang berkaitan dengan pembuktian yaitu menunjukkan bahwa suatu pernyataan itu benar atau salah dan tidak keduannya.

5. Triangulasi Data

Berdasarkan deskripsi dan analisis diatas, peneliti melakukan triangulasi sumber untuk mengetahui keabsahan data dari kedua sumber. Berikut ini triangulasi sumber penalaran matematis subjek S_1 dan subjek S_2 dalam melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika:

Tabel 4.2
Triangulasi Data Penalaran Matematis Subjek S_1 dan Subjek S_2 dalam Melakukan Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika

Indikator	Subjek S_1	Subjek S_2
Mengajukan Dugaan	• Menulis informasi yang diperoleh dari soal. • Menghasilkan bentuk umum $3^{2n} + 2^{2n+2}$. • Menggunakan pola.	• Menulis informasi yang diperoleh dari soal. • Menghasilkan bentuk umum $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$. • Menggunakan pola.
Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika	• Menggunakan 2 cara pembuktian yaitu dengan metode substiusi dan pembuktian induksi matematika. • Menggunakan induksi matematika	• Menggunakan induksi matematika karena berhubungan dengan bilangan asli. • Menggunakan prinsip induksi matematis. • Menuliskan kata

	karena berhubungan dengan bilangan asli. • Menggunakan prinsip induksi matematis. • Menuliskan huruf B untuk menyatakan bahwa pada langkah tersebut terbukti benar. • Menggunakan pemisalan tetapi terjadi kesalahan konsep. • Menggunakan metode substitusi. • Pembuktian yang dilakukan belum sempurna.	"benar" untuk menyatakan bahwa pada langkah tersebut terbukti benar. • Berhenti pada tahap $9 \cdot 3^{2k} + 2^{2k+2} \cdot 4$. • Menggunakan metode substitusi • Pembuktian yang dilakukan belum sempurna.
Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi	• Menggunakan sifat distributif dan sifat bilangan berpangkat. • Menggunakan pemisalan tetapi terjadi kesalahan konsep. • Menggunakan metode substitusi untuk menunjukkan pernyataan tersebut benar. • Mengetahui langkah-langkah	• Menggunakan sifat distributif dan sifat bilangan berpangkat. • Menggunakan metode substitusi untuk menunjukkan pernyataan tersebut benar. • Mengetahui langkah-langkah induksi matematika. • Dapat menjelaskan arti dari langkah-langkah induksi matematika.

	induksi matematika. • Belum dapat menjelaskan semua arti dari langkah-langkah induksi matematika.	
Menarik Kesimpulan dari Pernyataan	• Dapat membuat suatu pernyataan baru. • Menggabungkan informasi dari pertanyaan a dan pertanyaan b untuk memperoleh pernyataan baru.	• Dapat membuat suatu pernyataan baru. • Menggunakan informasi yang diperoleh untuk memperoleh pernyataan baru.
Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen	• Memeriksa ulang hasil pekerjaan yang sudah dilakukan. • Menggunakan metode substitusi. • Menggunakan nilai satuan	• Menggunakan metode substitusi. • Menggunakan nilai satuan

Berdasarkan tabel 4.2 dapat dilihat bahwa data subjek S_1 dan subjek S_2 memiliki kesamaan dan konsisten sehingga data yang diambil dapat dikatakan valid. Pada indikator mengajukan dugaan, kedua subjek sama-sama menuliskan informasi terlebih dahulu dilembar jawaban, kedua subjek dapat membuat bentuk umum yang hampir sama. Kedua subjek sama-sama menggunakan pola dalam memperoleh suatu bentuk umum yang diinginkan.

Pada indikator menyusun pembuktian dengan menggunakan induksi matematika, kedua subjek memilih menggunakan induksi matematika karena berhubungan dengan bilangan asli. Kedua subjek menerapkan prinsip induksi matematis. Kedua subjek sama-sama memberi tanda huruf B atau benar untuk menyatakan bahwa pada langkah tersebut terbukti benar. Kedua subjek menggunakan metode substitusi untuk meyakinkan pembuktian yang sudah dilakukan menghasilkan jawaban yang benar. Namun, kedua subjek belum bisa melakukan pembuktian induksi matematika dengan tepat. Hal ini disebabkan, subjek S_1 mengalami kesalahan konsep sedangkan subjek S_2 tidak dapat melakukan pembuktian P(k+1) secara deduktif.

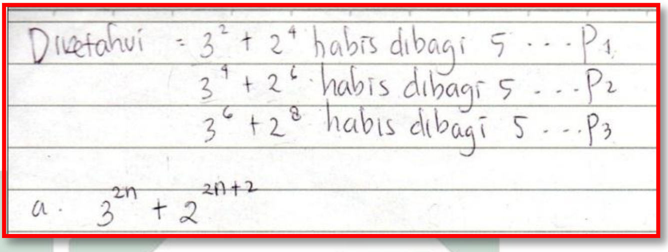
Pada indikator memberikan alasan terhadap kebenaran solusi, kedua subjek mengetahui langkah-langkah dari induksi matematika. Namun, subjek S_1 belum dapat menjelaskan semua arti dari setiap langkah-langkah induksi matematika. Sedangkan subjek S_2 dapat menjelaskan arti dari setiap langkah-langkah induksi matematika. Kedua subjek menggunakan sifat distributif dan bilangan berpangkat untuk menguraikan jawaban. Subjek S_1 menggunakan pemisalan tetapi ia mengalami kesalahan konsep. Kedua subjek menggunakan metode substitusi untuk meyakinkan proses pembuktian yang sudah dilakukan.

Pada indikator menarik kesimpulan dari pernyatan, kedua subjek dapat membuat kesimpulan atau pernyataan baru. Kedua subjek menggunakan informasi yang diperoleh dari soal untuk membuat pernyataan baru. Sedangkan pada indikator memeriksa keshahihan suatu argumen, kedua subjek menggunakan metode substitusi untuk melihat hasil yang diperoleh sudah benar atau sesuai soal. Kedua subjek menggunakan nilai satuan untuk mengetahui bilangan tersebut habis dibagi 5. Selain itu, subjek S_1 juga melakukan pemeriksaan ulang hasil pekerjaan yang sudah dilakukan.

B. Penalaran Matematis Mahasiswa Sekuensial Abstrak dalam Melakukan Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika

1. Deskripsi Subjek S_3

a) Mengajukan Dugaan



Diketahui = $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5 ... P_1
$3^4 + 2^6$ habis dibagi 5 ... P_2
$3^6 + 2^8$ habis dibagi 5 ... P_3

a. $3^{2n} + 2^{2n+2}$

Gambar 4.9
Jawaban Tertulis Subjek S_3 dalam Mengajukan Dugaan

Berdasarkan gambar 4.9 subjek S_3 menuliskan diketahui dari soal yaitu $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5 sebagai pernyataan 1, $3^4 + 2^6$ habis dibagi 5 sebagai pernyataan 2, dan $3^6 + 2^8$ habis dibagi 5 sebagai pernyataan 3. Subjek S_3 memisalkan pernyataan 1 sebagai P_1, pernyataan 2 sebagai P_2, dan pernyataan 1 sebagai P_3. Dari pernyataan tersebut subjek S_3 memperoleh bentuk umum $3^{2n} + 2^{2n+2}$ yang habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli. Berikut ini petikan hasil wawancara S_3 dalam mengajukan dugaan:

$P_{3.1.1}$: Informasi-informasi apa saja yang kamu peroleh dari`soal ini?

$S_{3.1.1}$: Ehhh, dari soal saya mendapatkan informasi bahwa ada bentuk umum yang berhubungan dengan kelipatan 5, bilangan berpangkat, operasi penjumlahan dan bilangan asli. Selain itu, ada 3 pernyataan dan kita disuruh untuk membuat bentuk umum dari pernyataan tersebut.

$P_{3.1.2}$: Terus, apa yang kamu pikirkan setelah mendapatkan informasi tersebut?

$S_{3.1.2}$: Setelah mendapatkan informasi tersebut, saya berpikir bagaimana membuat satu kesatuan atau satu kesimpulan tentang ketiga pernyataan tersebut sehingga menghasilkan bentuk umumnya.

$P_{3.1.3}$: Jadi bagaimana bentuk umum dari pernyataan tersebut sehingga habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli?

$S_{3.1.3}$: Saya memperoleh bentuk umumnya itu $3^{2n} + 2^{2n+2}$

$P_{3.1.4}$: Coba jelaskan proses memperoleh bentuk umum $3^{2n} + 2^{2n+2}$!

$S_{3.1.4}$: Disinikan pernyataan satu, $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5. Pernyataan kedua $3^4 + 2^6$ habis dibagi 5. Pernyataan ketiga $3^6 + 2^8$ habis dibagi 5. Dari ketiga pernyataan sudah mencolok ada suatu pola yang unik dari ketiga pernyataan yang diketahui, yaitu dimana bilangan pokok dari bilangan berpangkat yaitu 3 dan 2. Kemudian pangkat dari bilangan pokok tersebut merupakan bilangan genap yang saling berurutan. Pernyataan pertama 2 dan 4 (*menunjuk nilai pangkatnya*). Pernyataan kedua 4 dan 6 (*menunjuk nilai pangkatnya*), pernyataan ketiga 6 dan 8 (*menunjuk nilai pangkatnya*). Karena kelipatan 2 dapat ditulis dengan 2n, dimana *n* anggota bilangan asli. Dan untuk nilai pangkat dari 2 itu kita lihat polanya selalu lebih 2 dari 2n (nilai pangkat dari 3). Sehingga saya dapat menyimpulkan bentuk umumnya yaitu $3^{2n} + 2^{2n+2}$.

$P_{3.1.5}$: Mengapa kamu berpikir seperti itu?

$S_{3.1.5}$: Ya karena kelihatan dari ketiga pernyataan yang diketahui membentuk suatu pola.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_3 memperoleh informasi dari soal berupa bentuk umum yang berhubungan dengan kelipatan 5, bilangan berpangkat, operasi penjumlahan dan bilangan asli. Selain itu, ada 3 pernyataan matematika yang habis dibagi 5. Setelah mengetahui informasi tersebut, subjek S_3 memikirkan bentuk umum yang sesuai dengan contoh yang dihasilkan oleh Firman. Menurut subjek S_3, bentuk umum yang sesuai dengan contoh-contoh pernyataan Firman yaitu $3^{2n} + 2^{2n+2}$. Subjek S_3 memperoleh bentuk umum tersebut dengan memperhatikan pola dari ketiga pernyataan.

Berdasarkan petikan wawancara $S_{3.1.4}$, subjek S_3 melihat suatu pola pada nilai pangkat dari 3 dan 2. subjek S_3 mengatakan bahwa pangkat dari 3 dan 2 merupakan bilangan kelipatan 2 yang berurutan yaitu 2 dan 4, 4 dan 6, 6 dan 8. Kemudian, subjek S_3 memisalkan bilangan kelipatan 2 dengan 2n, n anggota bilangan asli. Sedangan nilai pangkat dari 2, subjek S_3 menyatakan bahwa nilainya selalu lebih 2 dari 2n sehingga 2n+2. Lalu, Subjek S_3 menyimpulkan bahwa bentuk umum dari pernyataan tersebut adalah $3^{2n} + 2^{2n+2}$.

b) Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika

b 1) Dibuktikan utk n = 1 (n bil. asli) pd bentuk umum

$3^{2n} + 2^{2n+2} = 3^{2\cdot 1} + 2^{2\cdot 1+2}$

$= 3^2 + 2^4 = 9 + 16 = 25 : 5 = 5$ (habis dibagi 5)

Benar utk n = 1

2) Untuk n = k, diasumsikan benar

Jadi, $3^{2k} + 2^{2k+2}$ habis dibagi 5 atau bisa ditulis

$3^{2n} + 2^{2n+2} = 5a$, $a \in$ bil. asli

Utk membuktikan pernyataan itu benar, maka akan dibuktikan

3) utk n = k+1

$3^{2n} + 2^{2n+2} = 3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2}$ $\quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$= 3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2k+2+2}$

$= 3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2k+4}$

$= 3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2k} \cdot 2^4$

$= 9 \cdot 3^{2k} + 16\ 2^{2k}$

$= 9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k} - 20 \cdot 2^{2k} + 20 \cdot 2^{2k}$

$= 9 \cdot 3^{2k} + 36 \cdot 2^{2k} - 20 \cdot 2^{2k}$

$= 9(3^{2k} + 2^{2k} \cdot 2^2) - 20 \cdot 2^{2k}$

$= 9(3^{2k} + 2^{2k+2}) - 20 \cdot 2^{2k}$

$= 9(5a) - 4 \cdot 5 \cdot 2^{2k}$

$= 5(9a - 4 \cdot 2^{2k})$

Terbukti

Karena telah terbukti 5 x ... maka $3^{2n} + 2^{2n+2}$ habis dibagi 5

Gambar 4.10
Jawaban Tertulis Subjek S_3 dalam Melakukan Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika

Berdasarkan gambar 4.10, subjek S_3 membuktikan bentuk umum $3^{2n} + 2^{2n+2}$ dengan induksi matematika. Langkah pertama, subjek S_3 membuktikan *n=1*, *n* bilangan asli. Subjek S_3 mensubstitusikan n=1 ke $3^{2n} + 2^{2n+2}$ sehingga diperoleh persamaan $3^2 + 2^4 = 9 + 16 = 25$. Subjek S_3 membagi 25 dengan 5 menghasilkan 5 sehingga habis dibagi 5 habis dibagi 5.

Pada langkah pertama, subjek S_3 menulis benar untuk n=1. Langkah kedua, subjek S_3 mengasumsikan bahwa n=k benar sehingga $3^{2k} + 2^{2k+2}$ habis dibagi 5. lalu, subjek S_3 juga mengganti $3^{2n} + 2^{2n+2}$ menjadi $5a$, a anggota bilangan asli. Langkah ketiga, subjek S_3 mensubstitusikan n=k+1 ke $3^{2n} + 2^{2n+2}$ sehingga diperoleh $3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2}$.

Subjek S_3 melakukan sifat distributif, sifat bilangan pangkat sehingga diperoleh $3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2k+2+2} = 3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2k+4} = 3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2k} \cdot 2^4 = 9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k}$. Lalu, subjek S_3 melakukan manipulasi matematika dengan menambahkan dan mengurangkan $20 \cdot 2^{2k}$ sehingga diperoleh $9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k} - 20 \cdot 2^{2k} + 20 \cdot 2^{2k}$. Subjek S_3 menjumlahkan $16 \cdot 2^{2k}$ dan $20 \cdot 2^{2k}$ sehingga diperoleh $9 \cdot 3^{2k} + 36 \cdot 2^{2k} - 20 \cdot 2^{2k}$. Lalu, subjek S_3 melakukan distributif kembali sehingga subjek $9(3^{2k} + 4 \cdot 2^{2k}) - 20 \cdot 2^{2k} = 9(3^{2k} + 2^{2k} \cdot 2^2) - 20 \cdot 2^{2k} = 9(3^{2k} + 2^{2k+2}) - 20 \cdot 2^{2k}$. Dengan melihat langkah kedua $(3^{2k} + 2^{2k+2} = 5a)$ sehingga subjek S_3 menuliskan $9(5a) - 20 \cdot 2^{2k}$. Kemudian, subjek S_3 menguraikan bilangan 20 dan melakukan distributif lagi sehingga diperoleh $9(5a) - 4 \cdot 5 \cdot 2^{2k} = 5(9a - 4 \cdot 2^{2k})$. Menurut subjek S_3, P(k+1) terbukti benar karena sudah terbukti $5 \times$ ... maka $3^{2n} + 2^{2n+2}$ habis dibagi 5 untuk setiap n bilangan asli. Berikut ini petikan wawancara subjek S_3 dalam melakukan pembuktian induksi matematika:

$P_{3.1.6}$	:	Bagaimana cara kamu membuktikan bahwa $3^{2n} + 2^{2n+2}$ habis dibagi 5 untuk setiap n bilangan asli.
$S_{3.1.6}$	:	Langkah pertama yaitu membuktikan $n = 1$ benar.
$P_{3.1.7}$	:	Sebelum membuktikan itu, kamu memilih pembuktian jenis apa?

$S_{3.1.7}$	:	Jenis pembuktian induksi matematika mbak.
$P_{3.1.8}$	:	Mengapa kamu memilih jenis pembuktian induksi matematika?
$S_{3.1.8}$	:	Menurut sepengetahuan saya, Jika kita disuruh melakukan pembuktian tentang bilangan asli, ya pakai induksi matematika.
$P_{3.1.9}$	:	Apakah harus dengan induksi matematika?
$S_{3.1.9}$	:	Hmm iya,, seingat saya iya mbak..
$P_{3.1.10}$	:	Ok, sekarang coba jelaskan proses pembuktian induksi matematika?
$S_{3.1.10}$	:	Gini, yang pertama dari bentuk umumnya kita akan membuktikan benar untuk n=1.Berarti kita akan mensubstitusikan $n = 1$ ke bentuk umum $3^{2n} + 2^{2n+2}$, sehingga $3^2 + 2^4 = 9 + 16 = 25$, 25 ini kita bagi dengan 5 sesuai soalnya, ternyata menghasilkan angka 5. Maka dapat dikatakan untuk $n = 1$ habis dibagi 5. Jadi, untuk $n = 1$ benar. Kemudian langkah selanjutnya kita membuat $n = k$. Untuk $n = k$ kita asumsikan benar habis dibagi 5 sehingga kita ganti n menjadi k maka diperoleh $3^{2k} + 2^{2k+2}$ itu harus habis dibagi 5 atau bisa ditulis $3^{2n} + 2^{2n+2} = 5a,\ a \in bilangan\ asli$ dan n=k. Kemudian untuk membuktikan pernyataan itu benar maka akan dibuktikan untuk $n = k + 1$ benar. Sehingga kita substitusikan $n = k + 1$ ke $3^{2k} + 2^{2k+2}$ diperoleh $3^{2k} + 2^{2k+2} = 3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2}$ kemudian kita distributifkan 2(k+1) sehingga menghasilkan $3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2k+2+2}$. Kemudian berdasarkan sifat $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ seperti itu, sehingga 3^{2k+2} menjadi $3^{2k} \cdot 3^2$. Selanjutnya $3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2k+2+2} = 3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2k+4} = 3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2k} \cdot 2^4$ berdasarkan sifat $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Kemudian $3^2 = 9$ dan $2^4 = 16$ maka

diperoleh $9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k}$. Nah untuk langkah selanjutnya, untuk proses pembuktian apakah pernyataan $9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k}$ menghasilkan 5a, maka kita membutuhkan bilangan yang merupakan kelipatan dari 5. Kemudian saya mengambil 20, karena 20 merupakan kelipatan 5. Jadi, $9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k}$ dapat kita tulis menjadi $9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k} - 20 \cdot 2^{2k} + 20 \cdot 2^{2k}$. Lalu, $16 \cdot 2^{2k} + 20 \cdot 2^{2k} = 36 \cdot 2^{2k}$itu berdasarkan sifat $ax + bx = (a + b)x$ sehingga menghasilkan $9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k} - 20 \cdot 2^{2k} + 20 \cdot 2^{2k} = 9 \cdot 3^{2k} + 36 \cdot 2^{2k} - 20 \cdot 2^{2k}$ kemudian 9 kan faktor dari 36 sehingga 9 saya keluarkan dan menjadi $9 \cdot 3^{2k} + 36 \cdot 2^{2k} - 20 \cdot 2^{2k} = 9(3^{2k} + 2^{2k} \cdot 2^2) - 20 \cdot 2^{2k} = 9(3^{2k} + 2^{2k+2}) - 20 \cdot 2^{2k}$. Nah bentuk $3^{2k} + 2^{2k+2}$ itu kan merupakan bentuk $5a$ dengan a anggota bilangan asli dan 20 dapat kita jabarkan menjadi 4 kali 5. Jadi, akan diperoleh $9(3^{2k} + 2^{2k+2}) - 20 \cdot 2^{2k} = 9(5a) - 4 \cdot 5 \cdot 2^{2k}$. Kemudian angka 5 nya saya keluarkan atau distributif menjadi $9(5a) - 4 \cdot 5 \cdot 2^{2k} = 5(9a - 4 \cdot 2^{2k})$. Sehingga sudah terbukti bahwa $5(9a - 4 \cdot 2^{2k})$ juga kelipatan 5. Maka terbukti bahwa $3^{2n} + 2^{2n+2}$ habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_3 memilih menggunakan pembuktian induksi matematika karena berhubungan dengan bilangan asli. Pada petikan wawancara $S_{3.1.10}$, subjek S_3 melakukan pembuktian induksi matematika dengan tiga langkah yaitu membuktikan n=1, n=k dan n=k+1 benar. Penjelasan untuk petikan wawancara ini hampir sama dengan yang dijelaskan oleh peneliti diatas.

c) Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi

Pada indikator ini, subjek S_3 diharapkan dapat memberikan alasan terhadap kebenaran solusi yang telah dibuatnya. Berikut ini petikan wawancara subjek S_3 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi:

$P_{3.1.11}$	:	Mengapa kok kamu memilih $3^{2n} + 2^{2n+2} = 5a,\ a \in bilangan\ asli$?
$S_{3.1.11}$	:	Ya karena setiap bilangan yang habis dibagi 5 merupakan kelipatan 5.
$P_{3.1.12}$	:	Mengapa dari $3^{2(k+1)}$ menjadi $3^{2k} \cdot 3^2$?
$S_{3.1.12}$	:	Ya karena setelah di distributifkan menghasilkan 3^{2k+2}.
$P_{3.1.13}$	:	Mengapa kamu memilih bilangan 20?
$S_{3.1.13}$	:	Awalnya, saya itu mencoba angka yang pas mbak biar muncul $3^{2k} + 2^{2k+2}$, jadi, ya ketemunya menggunakan angka 20.
$P_{3.1.14}$	:	oh gitu, lalu mengapa kamu menambahkan dan mengurangkan $20 \cdot 2^{2k}$?
$S_{3.1.14}$	:	Ya karena ketika kita menambahkan dan mengurangkan $20 \cdot 2^{2k}$ akan menghasilkan 0, jadi kembali ke semula (*menunjuk* $9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k}$)
$P_{3.1.15}$	:	Mengapa kamu memiih penambahan dan pengurangannya terdapat 2^{2k}?
$S_{3.1.15}$	:	Ya karena saya membutuhkan 2^{2k} untuk menuju $3^{2k} + 2^{2k+2}$.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_3 memisalkan $3^{2n} + 2^{2n+2} = 5a$ karena makna habis dibagi 5 yaitu kelipatan 5. Pada petikan wawancara $S_{3.1.12}$, subjek S_3 juga menggunakan sifat distributif, sifat asosiatif dan sifat bilangan berpangkat dalam menguraikan operasi bilangan berpangkat.

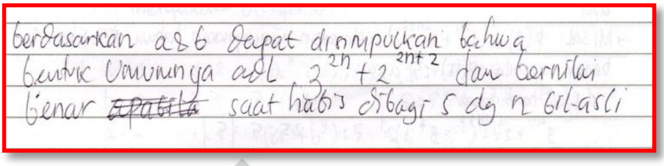
Subjek S_3 juga melakukan manipulasi matematika dengan menambahkan dan mengurangkan $20 \cdot 2^{2k}$. Bagi subjek S_3 dengan menambahkan dan mengurangkan $20 \cdot 2^{2k}$ tidak ada bedanya karena hasilnya sama dengan nol. Sedangkan alasan subjek S_3 memilih 20, karena subjek S_3

membutuhkan bilangan yang merupakan kelipatan 5 dan sesuai dengan solusi yang diharapkan. Selain itu, subjek S_3 memilih 2^{2k} karena hanya ingin memunculkan $3^{2k} + 2^{2k+2}$. Berikut ini lanjutan petikan wawancara subjek S_3 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi:

$P_{3.1.16}$	:	Terus, mengapa langkah-langkahnya harus membuktikan bahwa P(1) benar, P(k) dan P(k+1) benar?
$S_{3.1.16}$	:	Sebenarnya sih gag harus, kita bisa ambil P(2) atau P(3), tapi pada umumnya induksi matematika itu selalu di mulai P(1), kemudian P(k) dan P(k+1).
$P_{3.1.17}$	:	Jadi, itu merupakan suatu proses pembuktian induksi matematika?
$S_{3.1.17}$	:	Iya mbak.
$P_{3.1.18}$	:	Terus maknanya dari P(1) benar itu apa?
$S_{3.1.18}$	:	Hmm maknanya itu, pernyataan itu benar untuk n=1, sehingga kita dapat membuktikan untuk n=2,3,4 juga benar.
$P_{3.1.19}$	:	Terus, kalau maknanya P(k) dan P(k+1) itu apa?
$S_{3.1.19}$	:	Untuk P(k) menurut saya ya tidak ada mbak. Itu Cuma mengganti *n* menjadi k. Dan P(k+1) itu kan k bilangan asli, lah setiap bilngan asli ditambah satu benar maka bilangan selanjutnya juga benar mbak

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_3 menyatakan bahwa langkah-langkah dari pembuktian induksi matematika tidak harus dimulai dari P(1) benar. Namun, pada umumnya langkah-langkahnya memang seperti itu. Selain itu, subjek S_3 mengetahui arti dari langkah-langkah induksi matematika. Menurut subjek S_3, arti P(1) benar yaitu pernyataan tersebut benar untuk n=1. Sedangkan arti dari P(k+1) benar yaitu pernyataan tersebut benar untuk setiap bilangan asli selanjutnya.

d) Menarik Kesimpulan dari Pernyataan


berdasarkan a & b dapat disimpulkan bahwa bentuk umumnya adl $3^{2n}+2^{2n+2}$ dan bernilai benar ~~apabila~~ saat habis dibagi 5 dg n bil-asli

Gambar 4.11
Jawaban Tertulis Subjek S_3 dalam Membuat Kesimpulan

Berdasarkan gambar 4.11, subjek S_3 membuat kesimpulan bahwa bentuk umumnya adalah $3^{2n}+2^{2n+2}$ bernilai benar saat habis dibagi 5 dengan *n* bilangan asli. Subjek S_3 dapat membuat kesimpulan seperti itu berdasarkan jawaban dari pertanyaan a dan b. Untuk lebih, maka dilakukan wawancara dengan subjek S_3. Berikut ini petikan wawancara subjek S_3 dalam membuat kesimpulan:

$P_{3.1.20}$: Apa yang dapat kamu simpulkan setelah mengerjakan soal ini?

$S_{3.1.20}$: Yang dapat saya simpulkan yaitu, bahwa bentuk umum yang dihasilkan Firman adalah $3^{2n}+2^{2n+2}$ habis dibagi 5 dengan *n* anggota bilangan asli dan bernilai benar.

$P_{3.1.21}$: Bagaimana cara kamu memperoleh sebuah kesimpulan seperti ini?

$S_{3.1.21}$: Saya melihat dari informasi soal dan pertanyaan *a* dan *b*. Pertanyaan *a* menghasilkan bentuk umum $3^{2n}+2^{2n+2}$ yang dapat menghasilan pernyataan matematika seperti contoh dan pernyataan itu bernilai benar untuk setiap *n* bilangan asli melalui pembuktian induksi matematika.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_3 memperoleh kesimpulan dengan menggabungkan jawaban dari informasi yang diperoleh dan jawaban dari pertanyaan a dan pertanyaan b. Hal ini sesuai dengan petikan wawancara $S_{3.1.21}$.

e) Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen

Pada indikator ini, subjek S_3 diharapkan bisa memeriksa kembali kebenaran dari suatu argumen atau jawaban yang sudah ditemukan. Berikut ini petikan wawancara subjek S_3 dalam memeriksa kembali jawabannya:

$P_{3.1.22}$	:	Bagaimana cara kamu memeriksa bahwa jawaban yang kamu peroleh sudah benar?
$S_{3.1.22}$	:	Ya mengecek kembali proses atau langkah-langkah yang sudah saya lakukan.
$P_{3.1.23}$	:	Adakah cara lain?
$S_{3.1.23}$	:	Hmm bisa juga dengan substitusi lagi. Misal n=2 maka hmm (*subjek sambil berpikir*), $2 \times 2 = 4$ dan $2 \times 2 = 4$. jadi $3^4 = 81$ ditambah $2^6 = 64$, jadi, $3^4 + 2^6 = 81 + 16 = \cdots 5$. Karena belakangnya 5 jadi habis dibagi 5

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat dillihat bahwa subjek S_3 melakukan pemeriksaan kembali langkah-langkah yang sudah dilakukan. Selain itu, subjek S_3 mengecek kembali jawabannya dengan mensubstitusikan n=2 ke $3^{2n} + 2^{2n+n}$. Selama mengecek jawaban tersebut, subjek S_3 hanya melakukan proses pekerjaan didalam pikiran tanpa menuliskan di lembar jawaban.

f) Permasalahan yang Dihadapi Subjek

Dalam mengerjakan soal ini, tentunya ada suatu permasalahan yang dihadapi subjek S_3 sehingga membuat subjek S_3 mengalami sebuah masalah. Berikut ini petikan wawancara subjek S_3 tentang permasalahan yang dihadapi subjek S_3 selama menyelesaikan soal:

$P_{3.1.24}$	:	Pemasalahan apa saja yang kamu hadapi selama melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika?
$S_{3.1.24}$	:	Permasalahaan yang saya hadapi tadi itu, pada saat membuktikan P(k+1) benar. saya bingung menguraikan $9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k}$ menuju ke $3^{2k} + 2^{2k+2}$. Tetapi, sekarang tidak jadi masalah bagi saya mbak.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_3 hanya mengalami permasalahan pada tahap membuktikan P(k+1) benar. Subjek S_3 mengalami kesulitan pada titik menguraikan $9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k}$ menuju $3^{2k} + 2^{2k+2}$. Hal ini sesuai dengan petikan wawancara $S_{3.1.25}$. Namun sekarang, subjek S_3 tidak memiliki permasalahan karena subjek S_3 sudah berhasil membuktikan bahwa P(k+1) benar.

2. **Analisis Data Subjek S_3**

Berdasarkan paparan data diatas, berikut ini ialah hasil analisis penalaran matematis subjek S_3 dalam melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika yaitu:

a) **Mengajukan Dugaan**

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_3 memperoleh informasi dari soal yaitu bentuk umum yang berhubungan dengan kelipatan 5, bilangan berpangkat, operasi penjumlahan dan bilangan asli. Selain itu, subjek S_3 juga memperoleh pernyataan-pernyataan matematika yang habis dibagi 5. Kemudian, subjek S_3 berpikir dalam mencari bentuk umum yang dapat mewakili ketiga pernyataan yang sudah dibuat oleh Firman. Subjek S_3 menghasilkan bentuk umum $3^{2n} + 2^{2n+2}$ dengan melihat kembali informasi yang diperoleh. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa bagi para pemikir sekuensial abstrak lebih menyukai pelajaran atau informasi yang disajikan secara sistematis, membutuhkan informasi sebanyak mungkin dan dapat menyelesaikan pekerjaannya.

Subjek S_3 menggunakan pola untuk memperoleh bentuk umum yang dinginkan Firman. Subjek S_3 melihat pola dari bilangan pokok dan nilai pangkat. Subjek S_3 melihat nilai pangkatnya merupakan bilangan kelipatan 2 yang dapat ditulis dengan 2n, dimana *n* anggota bilangan asli. Maka dari itu, Subjek S_3 memperoleh nilai pangkat dari 3 yaitu 2n dan nilai pangkat dari 2 yaitu 2n+2. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir sekuensial abstrak suka berpikir dalam konsep dan menganalisis informasi.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_3 dalam mengajukan dugaan yaitu dengan menuliskan kembali informasi yang diperoleh, melihat suatu pola yang saling berhubunngan, memikirkan suatu konsep bilangan kelipatan 2, menghasilkan pernyataan baru yang diinginkan.

b) **Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika**

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_3 menggunakan pembuktian induksi matematika. Subjek S_3 memilih pembuktian menggunakan induksi matematika karena berhubungan dengan bilangan asli.

Subjek S_3 melakukan pembuktian induksi matematika dengan menggunakan prinsip induksi matematis yaitu membuktikan P(1) benar, P(k) dan P(k+1) benar. Pada tahap P(1) terbukti benar. Pada tahap mengasumsikan P(k) benar, subjek S_3 menggunakan konsep kelipatan 5. Subjek S_3 menuliskan bilangan kelipatan 5 yaitu $5a$, dengan a anggota bilangan asli. Pada tahap membuktikan P(k+1) benar, subjek S_3 melakukan manipulasi matematika dengan menambahkan dan mengurangkan $20 \cdot 2^{2k}$ untuk memperoleh hasil akhir P(k+1) yang merupakan bilangan kelipatan 5. Subjek S_3 berhasil membuktikan bahwa P(k+1) benar habis dibagi 5. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir sekuensial abstrak memiliki proses berpikir mereka logis, rasional, dan intelektual sehingga mereka lebih mudah menyelesaikan masalah.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_3 dalam melakukan pembuktian induksi matematika yaitu dengan menggunakan prinsip induksi matematis, menggunakan konsep kelipatan 5, melakukan manipulasi matematika pada pembuktian P(k+1), dan menggunakan konsep kelipatan 5 lagi.

c) **Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi**

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa. Subjek S_3 menggunakan bentuk umum kelipatan 5 sebagai bentuk dari bilangan yang habis dibagi 5. Subjek S_3 juga menggunakan sifat distributif dan sifat bilangan berpangkat dalam menguraikan operasi bilangan. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan realitas bagi pemikir sekuensial abstrak adalah teori dan pemikiran abstrak.

Subjek S_3 melakukan manipulasi matematik yaitu dengan menambahkan dan mengurangkan $20 \cdot 2^{2k}$. Dengan manipulasi matematika tersebut subjek S_3 yakin bahwa tidak akan mengubah jawaban aslinya. Alasan subjek S_3 memilih 20 karena 20 ada bilangan kelipatan 5. Selain itu, alasan memilih 2^{2k} karena subjek S_3 membutuhkan hasil akhir yang terdapat bentuk umum dari P(k). Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa pemikir sekuensial mempunyai penalaran yang tinggi, kritis, dan analitis.

Subjek S_3 mengetahui prinsip induksi matematis atau langkah-langkah dari induksi matematika. Subjek S_3 dapat menjelaskan arti dari langkah-langkah induksi matematika. Subjek S_3 menjelaskan bahwa arti P(1) benar yaitu benar untuk n=1, arti P(k) hanya mengganti huruf *n* menjadi *k* dan disumsikan benar, dan arti P(k+1) benar yaitu untuk bilangan selanjutnya juga benar.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_3 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi sesuai konsep dan logis.

d) Menarik Kesimpulan dari Pernyataan

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_3 dapat membuat sebuah kesimpulan atau pernyataan baru dengan tepat. Kesimpulan ini diperoleh subjek S_3 dengan menggabungkan informasi dari petanyaan a dan pertanyaan b. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir sekuensial abstrak menyukai informasi yang disajikan dengan cara sistematis.

e) Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_3 melakukan pemeriksaan kembali suatu argumen dengan melihat kembali hasil pekerjaan yang sudah dilakukan. Subjek S_3 juga melakukan substitusi n=2 ke bentuk umum. Subjek S_3 melakukan operasi substitusi tersebut didalam pikirannya tanpa menulis dilembar jawaban. Subjek S_3 hanya menggunakan penjumlahan nilai satuan untuk menunjukkan bahwa pernyataan tersebut habis dibagi 5. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir sekuensial abstrak memiliki pemikiran yang abstrak.

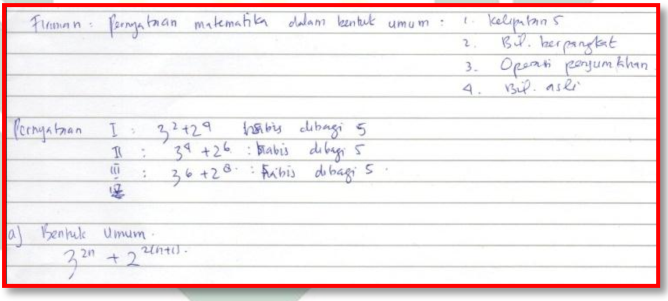
Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_3 dalam memeriksa kesahihan suatu argumen dengan memeriksa jawaban, melakukan substitusi, dan melihat nilai satuan.

f) Permasalahan yang Dihadapi Subjek

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_3 awalnya mengalami masalah pada tahap pembuktian P(k+1). Subjek S_3 mengalami kesulitan dalam menguraikan $9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k}$. Namun, pada akhirnya subjek S_3 berhasil melakukan pembuktian dengan benar sehingga tidak ada masalah lagi dalam melakukan pembuktian induksi matematika.

3. Deskripsi Subjek S_4

a) Mengajukan Dugaan



Firman : Pernyataan matematika dalam bentuk umum : 1. kelipatan 5
2. Bil. berpangkat
3. Operasi penjumlahan
4. Bil. asli

Pernyataan I : 3^2+2^4 habis dibagi 5
II : 3^4+2^6 : habis dibagi 5
III : 3^6+2^8 : habis dibagi 5.

a) Bentuk Umum.
$3^{2n}+2^{2(n+1)}$.

Gambar 4.12
Jawaban Tertulis Subjek S_4 dalam Mengajukan Dugaan

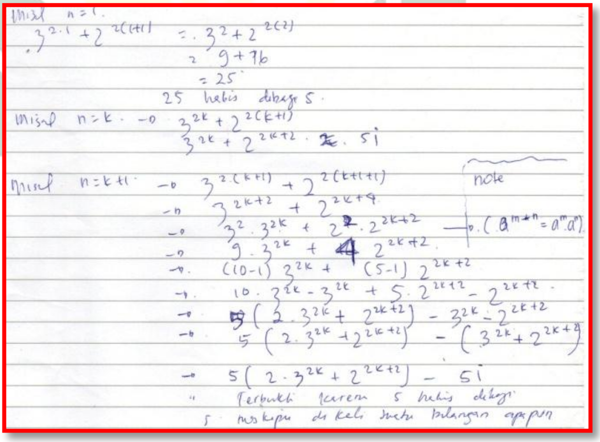
Berdasarkan gambar 4.12, subjek S_4 menuliskan informasi dari soal yaitu kelipatan 5, bilangan berpangkat, operasi penjumlahan, dan bilangan asli. Subjek S_4 juga menuliskan 3 pernyataan yaitu pernyataan pertama : $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5, pernyataan kedua : $3^4 + 2^6$ habis dibagi 5, pernyataan pertama: $3^6 + 2^8$ habis dibagi 5. Subjek S_4 memislkan pernyataan pertama, kedua, dan ketiga dengan huruf romawi yaitu I, II, III. Subjek S_4 menghasilkan bentuk umum yaitu $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$. Berikut ini petikan hasil wawancara S_4 dalam mengajukan dugaan:

$P_{4.1.1}$	:	Informasi-informasi apa saja yang kamu peroleh dari`soal ini?
$S_{4.1.1}$	:	Pernyataan matematika dalam bentuk umum mengandung kelipatan 5, bilangan berpangkat, operasi penjumlahan, dan bilangan asli.
$P_{4.1.2}$	:	Selain itu, adakah informasi lain yang kamu peroleh?
$S_{4.1.2}$	:	Itu, pernyataan pertama berbunyi $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5, pernyataan kedua berbunyi $3^4 + 2^6$ habis dibagi 5, dan pernyataan ketiga $3^6 + 2^8$ habis dibagi 5.
$P_{4.1.3}$	:	Terus, apa yang kamu pikirkan setelah mendapatkan informasi tersebut?
$S_{4.1.3}$	:	Setelah mendapatkan informasi tersebut, saya berpikir mencari bentuk umum yang dapat mewakili contoh-contoh diatas.
$P_{4.1.4}$	:	Terus, bagaimana bentuk umum dari pernyataan tersebut sehingga habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli?
$S_{4.1.4}$	:	bentuk umumnya itu $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$ mbak
$P_{4.1.5}$	:	Coba jelaskan proses memperoleh bentuk umum $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$!
$S_{4.1.5}$	:	Gini mbak. Pernyataan satu, $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5. Pernyatana kedua $3^4 + 2^6$ habis dibagi 5. Pernyataan ketiga $3^6 + 2^8$ habis dibagi 5. Lah dari ketiga contoh tersebut kan kelihatan kalau pangkat dari 3 itu kelipatan 2 yang merupakan bilangan genap. Jadi untuk nilai pangkat dari 3 yaitu $2n$. Dan jika kita lihat nilai pangkat dari 2 selalu 2 dikalikan n berikutnya sehingga nilai pangkat dari 2 yaitu $2n + 2$. maka dapat bentuk umum yang diperoleh yaitu $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$.

$P_{4.1.6}$	:	Mengapa kamu berpikir cara seperti ini?
$S_{4.1.6}$	:	Lebih mudah saja mbak kalau bermain pola.
$P_{4.1.7}$	:	Apakah ada cara lain untuk mendapatkan bentuk umum selain melihat pola?
$S_{4.1.7}$	:	Sebenarnya ada mbak, kita bisa menggunakan barisan aritmatika sosial tapi itu ribet mbak.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_4 memperoleh informasi dari soal yaitu kelipatan 5, bilangan berpangkat, operasi penjumlahan, bilangan asli, dan 3 contoh pernyataan matematika yang habis dibagi 5. Berdasarkan petikan wawancara $S_{4.1.5}$, subjek S_4 melihat suatu pola pada nilai pangkat dari 3 yaitu kelipatan 2 dan pola pada nilai pangkat dari 2 yaitu 2 dikali dengan nilai n berikutnya. Dengan begitu, subjek S_4 menemukan bentuk umum$3^{2n} + 2^{2(n+1)}$ yang habis dibagi 5 untuk setiap n bilangan asli. Subjek S_4 merasa lebih mudah menggunakan pola daripada konsep barisan aritmatika.

b) Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika


misal $n = 1$.
$3^{2.1} + 2^{2(1+1)} = 3^2 + 2^{2(2)}$
$= 9 + 16$
$= 25$
25 habis dibagi 5.
misal $n = k$. $\rightarrow 3^{2k} + 2^{2(k+1)}$
$3^{2k} + 2^{2k+2} = 5i$
misal $n = k+1$. $\rightarrow 3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1+1)}$
$\rightarrow 3^{2k+2} + 2^{2k+4}$
$\rightarrow 3^2 . 3^{2k} + 2^2 . 2^{2k+2}$ $\rightarrow (a^{m+n} = a^m . a^n)$ note
$\rightarrow 9 . 3^{2k} + 4\ 2^{2k+2}$
$\rightarrow (10-1)\ 3^{2k} + (5-1)\ 2^{2k+2}$
$\rightarrow 10 . 3^{2k} - 3^{2k} + 5 . 2^{2k+2} - 2^{2k+2}$
$\rightarrow 5(2 . 3^{2k} + 2^{2k+2}) - 3^{2k} - 2^{2k+2}$
$\rightarrow 5(2 . 3^{2k} + 2^{2k+2}) - (3^{2k} + 2^{2k+2})$
$\rightarrow 5(2 . 3^{2k} + 2^{2k+2}) - 5i$
" Terbukti karena 5 habis dibagi 5 meskipun di kali suatu bilangan apapun

Gambar 4.13
Jawaban Tertulis Subjek S_4 dalam Melakukan Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika

Berdasarkan gambar 4.13, subjek S_4 membuktikan bentuk umum $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$ dengan induksi matematika. Subjek S_4 menggunakan 3 permisalan dalam melakukan pembuktian induksi matematika. Pemisalan pertama, subjek S_4 memisalkan n=1 sehingga dieperoleh $3^{2\cdot 1} + 2^{2(1+1)} = 3^2 + 2^{2(2)} = 9 + 16 = 25$. 25 merupakan bilangan yang habis dibagi 5. Kemudian, subjek S_4 memisalkan n=k sehingga diperoleh $3^{2k} + 2^{2(k+1)} = 3^{2k} + 2^{2k+2}$. Subjek S_4 memisalkan $3^{2k} + 2^{2k+2} = 5i$. Kemudian, subjek S_4 memisalkan n=k+1 sehingga diperoleh $3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1+1)} = 3^{2k+2} + 2^{2k+4} = 3^2 \cdot 3^{2k} + 2^2 \cdot 2^{2k+2} = 9 \cdot 3^{2k} + 4 \cdot 2^{2k+2}$. Subjek S_4 menguraikan bilangan 9 menjadi 10-1 dan bilangan 4 menjadi 5-1 sehingga $(10-1) \cdot 3^{2k} + (5-1) \cdot 2^{2k+2} = 10 \cdot 3^{2k} - 3^{2k} + 5 \cdot 2^{2k+2} - 2^{2k+2} = 5(2 \cdot 3^{2k} + 2^{2k+2}) - (3^{2k} + 2^{2k+2}) = 5(2 \cdot 3^{2k} + 2^{2k+2}) - 5i$. Subjek S_4 berhasil membuktikan n=k+1 karena 5 dikali berapapun akan selalu habis dibagi 5. Berikut ini petikan wawancara subjek S_4 dalam melakukan pembuktian induksi matematika:

$P_{4.1.8}$	:	Ok, terus bagaimana cara kamu membuktikan bahwa $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$ habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli.
$S_{4.1.8}$	:	Dengan induksi matematika
$P_{4.1.9}$	:	Mengapa kamu memilih jenis pembuktian induksi matematika?
$S_{4.1.9}$	:	Soalnya dulu waktu SMA kelas 3 pernah diajarkan induksi matematika dan soalnya hampir sama seperti ini tapi saya sedikit lupa prosesnya.
$P_{4.1.10}$	:	Adakah ciri-ciri khusus dari pembuktian induksi matematika?
$S_{4.1.10}$	:	hmm tidak tau mbak.
$P_{4.1.11}$	:	Ok, sekarang coba jelaskan proses pembuktian induksi matematika yang sudah kamu lakukan!
$S_{4.1.11}$	:	Gini, langkah pertama membuktikan benar untuk n=1.Berarti substitusikan $n = 1$ ke $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$, sehingga $3^2 + 2^4 = 9 + 16 = 25$, 25 habis dibagi 5 sehingga $n = 1$

benar. langkah kedua mengasumsikan $n = k$ benar habis dibagi 5, sehingga diperoleh $3^{2k} + 2^{2(k+1)} = 3^{2k} + 2^{2k+2}$. Kita dapat memisalkan $3^{2k} + 2^{2k+2} = 5i$, $i \in$ bilangan asli. Langkah ketiga akan dibuktikan untuk $n = k + 1$ benar. Sehingga kita substitusikan $n = k + 1$ ke $3^{2k} + 2^{2k+2}$ diperoleh $3^{2k} + 2^{2k+2} = 3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2}$ kemudian kita distributifkan $2(k + 1)$ sehingga menghasilkan $3^{2k+2} + 2^{2k+4}$. Untuk 3^{2k+2} dapat kita jabarkan menjadi $3^{2k} \cdot 3^2$ dan untuk 2^{2k+4} dapat dijabarkan menjadi $2^2 \cdot 2^{2k+2}$. Selanjutnya $3^2 = 9$ dan $2^2 = 4$. Bilangan 9 dapat kita urai menjadi $9 = 10 - 1$ dan bilangan 4 dapat diurai menjadi $4 = 5 - 1$ sehingga menghasilkan $9 \cdot 3^{2k} + 4 \cdot 2^{2k+2} = (10 - 1) \cdot 3^{2k} + (5 - 1) \cdot 2^{2k+2}$. Kemudian didistributifkan sehingga menghasilkan $10 \cdot 3^{2k} - 3^{2k} + 5 \cdot 2^{2k+2} - 2^{2k+2}$. Kita ketahui 10 adalah kelipatan 5 sehingga kita asosiatifkan dan distributifkan sehingga menjadi $5(2 \cdot 3^{2k} + 2^{2k+2}) - 3^{2k} - 2^{2k+2}$. Kemudian dapat kita lihat $-3^{2k} - 2^{2k+2}$ memiliki kemiripan dengan bentuk umum $n = k$ akan tetapi hanya berbeda pada tanda. Untuk itu, kita lakukan sifat distributif sehingga menjadi $-3^{2k} - 2^{2k+2} = -(3^{2k} + 2^{2k+2})$. Berdasarkan yang diketahui $3^{2k} + 2^{2k+2} = 5i\ , i \in$ bilangan asli. Jadi untuk $n = k + 1$ dipeeroleh $5(2 \cdot 3^{2k} + 2^{2k+2}) - 5i$. Karena 5 dikali berapapun habis dibagi 5, 5i habis dibagi 5, dan kelipatan 5 dikurangi dengan kelipatan 5 juga habis dibai 5 sehingga $5(2 \cdot 3^{2k} + 2^{2k+2}) - 5i$ habis dibagi 5. Maka terbukti $n = k + 1$ habis dibagi 5

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_4 memilih menggunakan pembuktian induksi matematika karena waktu SMA pernah mendapatkan materi dan soal yang hampir seperti soal yang diberikan peneliti. Namun, subjek S_4 sedikit lupa dengan prosesnya. Subjek S_4 tidak mengetahui ciri-ciri khusus dari pembuktian induksi matematika.

Pada petikan wawancara $S_{4.1.11}$, subjek S_4 melakukan pembuktian induksi matematika dengan tiga langkah yaitu memisalkan dan membuktikan n=1, n=k dan n=k+1 benar. Penjelasan untuk petikan wawancara ini hampir sama dengan yang dijelaskan oleh peneliti diatas. Namun, pada petikan wawancara tersebut, subjek S_4 menyatakan bahwa n=1 benar karena 25 habis dibagi 5. Kemudian, subjek S_4 mengasumsikan bahwa n=k benar dan menghasilkan $3^{2k} + 2^{2k+2} = 5i,\ i \in$ bilangan asli . Kemudian membuktikan n=k+1 benar dengan menghasilkan bilangan kelipatan 5.

c) **Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi**

Pada indikator ini, subjek S_4 diharapkan dapat memberikan alasan terhadap kebenaran solusi yang telah dibuatnya. Berikut ini petikan wawancara subjek S_4 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi:

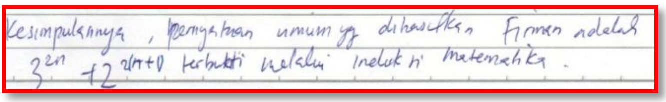
$P_{4.1.12}$	:	Mengapa kok kamu memilih $5i$?
$S_{4.1.12}$	:	Ya karena habis dibagi 5 maka bilangan itu kelipatan 5.
$P_{4.1.13}$	:	Mengapa dari 3^{2k+2} bisa menjadi $3^{2k} \cdot 3^2$ begitu juga dari 2^{2k+4}menjadi $2^2 \cdot 2^{2k+2}$?
$S_{4.1.13}$	:	Itu seperti sifat $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
$P_{4.1.14}$	:	Mengapa kamu memilih penguraian angka 9 dan 4 menjadi $10 - 1$ dan $5 - 1$?
$S_{4.1.14}$	:	Ya karena tujuan saya mencari angka atau bilangan yang merupakan kelipatan 5 yaitu 10 dan 5 sehingga saya memilih $10 - 1$ dan $5 - 1$.
$P_{4.1.15}$	:	Terus, mengapa langkah-langkahnya harus membuktikan bahwa P(1) benar, P(k) dan P(k+1) benar?
$S_{4.1.15}$	:	Sebenarnya sih gag harus, kita bisa ambil P (2) atau P(3), tapi lebih mudah P(1), kemudian P(k) dan P(k+1).

$P_{4.1.16}$	:	Jadi, apakah itu merupakan suatu langkah pembuktian induksi matematika?
$S_{4.1.16}$	:	hmmm iya mbak.
$P_{4.1.17}$	:	Terus maknanya dari P(1) benar itu apa?
$S_{4.1.17}$	:	Hmm ya kalau pada n=1 benar , maka kemungungkinan selanjutnya juga benar.
$P_{4.1.18}$	:	Kalau maknanya P(k) dan P(k+1) apa?
$S_{4.1.18}$	:	Ya kalau P(k) itu saya menganggap bahwa n=k benar dan setelah menganggap itu benar apakah untuk P(k+1) atau bilangan selanjutnya juga benar? Sehingga perlu dilakukan pembuktian mbak.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_4 memisalkan $3^{2n}+2^{2n+2}=5i$, dengan i anggota bilangan asli. subjek S_4 memilih $5i$ karena makna habis dibagi 5 yaitu kelipatan 5. Pada petikan wawancara $S_{4.1.13}$, subjek S_4 juga menggunakan sifat distributif, sifat asosiatif, dan sifat bilangan berpangkat selama menguraikan jawaban. Selain itu, subjek S_4 juga menguraikan 9 menjadi 10-1 dan 4 menjadi 5-1 karena ia ingin mendapatkan bilangan kelipatan 5.

Subjek S_4 menjelaskan bahwa langkah-langkah dari pembuktian induksi matematika tidak harus dimulai dari P(1) benar. Subjek S_4 juga mengetahui bahwa lagkah induksi matematika terdapat pembuktian P(k) dan P(k+1) benar. Subjek S_4 mengetahui arti dari langkah-langkah induksi matematika. Subjek S_4 menjelaskan arti P(1) benar yaitu pernyataan tersebut benar untuk n=1 dan kemumngkinan benar untuk bilangan selanjutnya. Selain itu, subjek S_4 menjelaskan arti pemmbuktian P(k+1) benar yaitu untuk menunjukkan bahwa bilangan selanjutnya juga benar atau tidak.

d) **Menarik Kesimpulan dari Pernyataan**


Kesimpulannya , pernyataan umum yg dihasilkan firman adalah $3^{2n}+2^{2(n+1)}$ terbukti melalui induksi matematika .

Gambar 4.14
Jawaban Tertulis Subjek S_4 dalam Membuat Kesimpulan

Berdasarkan gambar 4.14, subjek S_4 membuat kesimpulan bahwa pernyataan umum yang dihasilkan Firman adalah $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$ dan terbukti benar melalui induksi matematika. Berikut ini petikan wawancara subjek S_4 dalam membuat kesimpulan:

$P_{4.1.19}$: Apa yang dapat kamu simpulkan setelah mengerjakan soal ini?

$S_{4.1.19}$: Pernyataan umum yang dihasilkan Firman adalah $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$ dan terbukti melalui induksi matematika.

$P_{4.1.20}$: Bagaimana cara kamu memperoleh sebuah kesimpulan seperti ini?

$S_{4.1.20}$: Saya menggabungkan informasi yang saya peroleh dan kerjakan yang berada pada pertanyaan a dan b. Dimana pertanyaan a menghasilkan pernyataan umum $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$ dan pertanyaan b dapat dibuktikan kebenaran $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$ habis dibagi 5 untuk setiap n bilangan asli melalui induksi matematika.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_4 memperoleh kesimpulan dengan menggabungkan informasi dari soal dan dari jawaban a dan jawaban b. Hal ini sesuai dengan petikan wawancara $S_{4.1.20}$.

e) Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen

Pada indikator ini, subjek S_4 diharapkan bisa memeriksa kembali kebenaran dari suatu argumen atau jawaban yang sudah ditemukan. Berikut ini petikan wawancara subjek S_4 dalam memeriksa kembali jawabannya:

$P_{4.1.21}$: Bagaimana cara kamu memeriksa bahwa jawaban yang kamu peroleh sudah benar?

$S_{4.1.21}$: Bisa dilakukan substitusi n=4 ke bentuk $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$.

$P_{4.1.22}$: Coba apakah $n = 4$ habis dibagi 5?

$S_{4.1.22}$: 2 dikali 4 = 8 dan 2 dikali 5= 10 sehingga $3^8 + 2^{10} = \ldots.1 + \ldots.4 = \ldots.5$. karena satuannya ditempati angka 5 maka habis dibagi 5.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat dillihat bahwa subjek S_4 mengecek jawabannya dengan mensubstitusikan n=2 ke $3^{2n} + 2^{2n+n}$. Selama mengecek jawaban tersebut, subjek S_4 melakukan perhitungan dengan kalkulator dan mengambil nilai satuan saja. Dari substitusi tersebut subjek S_4 mendapatkan nilai satuannya adalah bilangan 5 sehingga habis dibagi 5.

f) Permasalahan yang Dihadapi Subjek

Dalam mengerjakan soal ini, tentunya ada suatu permasalahan yang dihadapi subjek S_3 sehingga membuat subjek S_3 mengalami sebuah masalah. Berikut ini petikan wawancara subjek S_3 tentang permasalahan yang dihadapi subjek S_3 selama menyelesaikan soal:

$P_{4.1.23}$	:	Pemasalahan apa saja yang kamu hadapi selama melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika?
$S_{4.1.23}$	:	Permasalahaan yang saya hadapi tadi itu, saya sedikit lupa alur pembuktiannya dan saya kesulitan dalam membuktikan P(k+1) benar.
$P_{4.1.24}$	:	Pada titik manakah kamu merasa ada sebuah masalah dalam melakukan pembuktian induksi matematika?
$S_{4.1.24}$	:	Itu, tadi awalnya saya berhenti di $9 \cdot 3^{2k} + 4 \cdot 2^{2k+2}$. Saya berpikir cukup lama untuk menguraikan angka 9 dan 4 agar merujuk pada $3^{2k} + 2^{2k+2}$
$P_{4.1.25}$	:	Ohh gitu, terima kasih
$S_{4.1.25}$	:	Sama-sama mbak.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_4 lupa alur atau proses pembuktian induksi matematika dan mengalami permasalahan pada tahap membuktikan P(k+1) benar. Subjek S_4 mengalami kesulitan pada titik menguraikan $9 \cdot 3^{2k} + 4 \cdot 2^{2k+2}$ menuju $3^{2k} + 2^{2k+2}$. Hal ini sesuai dengan petikan wawancara $S_{4.1.24}$.

Subjek S_4 berpikir cukup lama dalam menguraikan angka-angka tersebut. Namun sekarang, subjek S_4 tidak memiliki permasalahan karena subjek S_4 sudah berhasil membuktikan bahwa P(k+1) benar.

4. Analisis Data Subjek S_4

Berdasarkan paparan data diatas, berikut ini ialah hasil analisis penalaran matematis subjek S_4 dalam melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika yaitu:

a) Mengajukan Dugaan

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_3 memperoleh informasi dari soal yaitu pernyataan matematika dalam bentuk umum yang berhubungan dengan kelipatan 5, bilangan berpangkat, operasi penjumlahan dan bilangan asli. Selain itu, subjek S_4 juga memperoleh pernyataan-pernyataan matematika yang habis dibagi 5. Kemudian, subjek S_4 berpikir mencari bentuk umum yang dapat mewakili ketiga pernyataan yang sudah dibuat oleh Firman. Subjek S_4 menghasilkan bentuk umum $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$ dengan melihat kembali informasi yang diperoleh. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa bagi para pemikir sekuensial abstrak lebih menyukai pelajaran atau informasi yang disajikan secara sistematis dan membutuhkan informasi sebanyak mungkin sebelum mereka membuat suatu keputusan dan waktu yang cukup agar dapat menyelesaikan pekerjaannya.

Subjek S_4 menggunakan pola untuk memperoleh bentuk umum yang dinginkan Firman. Subjek S_4 melihat pola dari bilangan pokok dan nilai pangkat. Subjek S_4 melihat nilai pangkatnya merupakan bilangan kelipatan 2 yang dapat ditulis dengan 2n, dimana *n* anggota bilangan asli. Maka dari itu, Subjek S_4 memperoleh nilai pangkat dari 3 yaitu 2n. Sedangakan nilai pangkat dari 2 selalu 2 dikali dengan n berikutnya sehingganilai pangkat dari 2 yaitu 2(n+1). Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir sekuensial abstrak suka berpikir dalam konsep dan menganalisis informasi.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_3 dalam mengajukan dugaan yaitu dengan menuliskan kembali informasi yang diperoleh, melihat suatu pola yang saling berhubunngan, memikirkan suatu konsep bilangan kelipatan 2, menghasilkan pernyataan baru yang diinginkan.

b) Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_4 menggunakan pembuktian induksi matematika. Subjek S_4 memilih pembuktian menggunakan induksi matematika karena berhubungan waktu SMA pernah mendapatkan materi dan soal yang hampir sama dengan soal yang diberikan peneliti.

Subjek S_4 melakukan pembuktian induksi matematika dengan menggunakan prinsip induksi matematis yaitu membuktikan P(1) benar, P(k) dan P(k+1) benar. Pada tahap P(1) terbukti benar. Pada tahap mengasumsikan P(k) benar, subjek S_4 menggunakan konsep kelipatan 5 yaitu $5i$ dengan i anggota bilangan asli. Pada tahap membuktikan P(k+1) benar, subjek S_3 memilih menguraikan bilangan 9 dan 4 menjadi 10-1 dan 5-1 untuk memperoleh hasil akhir P(k+1) yang merupakan bilangan kelipatan 5. Subjek S_4 berhasil membuktikan bahwa P(k+1) benar habis dibagi 5. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir sekuensial abstrak memiliki proses berpikir mereka logis, rasional, dan intelektual sehingga mereka lebih mudah menyelesaikan masalah.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_3 dalam melakukan pembuktian induksi matematika yaitu dengan menggunakan prinsip induksi matematis, menggunakan konsep kelipatan 5, melakukan manipulasi matematika pada pembuktian P(k+1), dan menggunakan konsep kelipatan 5 lagi.

c) Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa. Subjek S_4 menggunakan bentuk umum kelipatan 5 sebagai bentuk dari bilangan yang habis dibagi 5. Subjek S_4 juga menggunakan sifat distributif dan sifat bilangan berpangkat dalam menguraikan operasi bilangan. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan realitas bagi pemikir sekuensial abstrak adalah teori dan pemikiran abstrak.

Subjek S_4 menguraikan bilangan 9 dan 4 menjadi 10-1 dan 5-1. Alasan subjek S_4 memilih 10-1 dan 5-1 karena 10 dan 5 adalah bilangan kelipatan 5. Melalui cara ini, subjek S_4 berhasil membuktikan (k+1) benar. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa pemikir sekuensial mempunyai penalaran yang tinggi, kritis, dan analitis.

Subjek S_4 mengetahui prinsip induksi matematis atau langkah-langkah dari induksi matematika. Subjek S_4 dapat menjelaskan arti dari langkah-langkah induksi matematika. Subjek S_4 menjelaskan bahwa arti P(1) benar yaitu jika untuk n=1 maka kemungkinan selanjutnya juga benar, arti P(k) hanya mengganti huruf *n* menjadi *k* dan disumsikan benar, dan arti P(k+1) benar yaitu membuktikan untuk bilangan selanjutnya juga benar.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_3 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi sesuai konsep dan logis.

d) Menarik Kesimpulan dari Pernyataan

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_4 dapat membuat sebuah kesimpulan atau pernyataan baru dengan tepat. Kesimpulan ini diperoleh subjek S_4 dengan menggabungkan informasi dari petanyaan a dan pertanyaan b. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir sekuensial abstrak menyukai informasi yang disajikan dengan cara sistematis.

e) Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_4 melakukan pemeriksaan kembali suatu argumen dengan melakukan substitusi n=4 ke bentuk umum. Subjek S_4 melakukan operasi substitusi tersebut didalam pikirannya tanpa menulis dilembar jawaban. Subjek S_4 hanya menggunakan penjumlahan nilai satuan untuk menunjukkan bahwa pernyataan tersebut habis dibagi 5. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir sekuensial abstrak memiliki pemikiran yang abstrak.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_3 dalam memeriksa kesahihan suatu argumen dengan melakukan substitusi, dan melihat nilai satuan.

f) **Permasalahan yang Dihadapi Subjek**

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_4 awalnya mengalami masalah pada tahap pembuktian P(k+1). Subjek S_4 mengalami kesulitan dalam menguraikan $9 \cdot 3^{2k} + 4 \cdot 2^{2k+2}$. Subjek S_4 berpikir cukup lama untuk memecahkan masalah tesebut. Namun, pada akhirnya subjek S_4 berhasil melakukan pembuktian dengan benar sehingga tidak ada masalah lagi dalam melakukan pembuktian induksi matematika.

5. **Triangulasi Data**

Berdasarkan deskripsi dan analisis diatas, peneliti melakukan triangulasi sumber untuk mengetahui keabsahan data dari kedua sumber. Berikut ini triangulasi sumber penalaran matematis subjek S_3 dan subjek S_4 dalam melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika:

Tabel 4.3
Triangulasi Data Penalaran Matematis Subjek S_3 dan Subjek S_4 Dalam Melakukan Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika

Indikator	Subjek S_3	Subjek S_4
Mengajukan Dugaan	• Menulis informasi yang diperoleh dari soal. • Menghasilkan bentuk umum $3^{2n} + 2^{2n+2}$. • Menggunakan pola. • Memikirkan suatu konsep bilangan kelipatan 2	• Menulis informasi yang diperoleh dari soal. • Menghasilkan bentuk umum $3^{2n} + 2^{2(n+1)}$. • Menggunakan pola. • Memikirkan suatu konsep bilangan kelipatan 2

Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika	• Menggunakan pembuktian induksi matematika karena berhubungan dengan bilangan asli. • Menggunakan prinsip induksi matematis. • Menggunakan bentuk umum kelipatan 5 yaitu 5a pada tahapan mengasumsikan P(k) benar. • Menggunakan manipulasi matematika dengan menambahkan dan mengurangkan $20 \cdot 2^{2k}$ • Berhasil membuktikan P(k+1) benar.	• Menggunakan pembuktian induksi matematika karena Waktu SMA pernah mendapatkan materi dan soal yang hampir sama seperti ini. • Menggunakan prinsip induksi matematis. • Menggunakan bentuk umum kelipatan 5 yaitu 5i pada tahapan mengasumsikan P(k) benar. • Menggunakan penguraian bilangan yaitu 9 menjadi 10-1 dan 4 menjadi 5-1. • Berhasil membuktikan P(k+1) benar
Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi	• Menggunakan sifat distributif, sifat asosiatif dan sifat bilangan berpangkat. • Menggunakan $20 \cdot 2^{2k}$ karena 20 adalah bilangan kelipatan 5 dan 2^{2k} adalah	• Menggunakan sifat distributif, sifat aosiatif dan sifat bilangan berpangkat. • Memilih 10-1 dan 5-1 karena 10 dan 5 bilangan kelipatan 5 • Mengetahui langkah-langkah

	bilangan yang ingin dituju • Mengetahui langkah-langkah induksi matematika. • Dapat menjelaskan arti langkah-langkah induksi matematika.	induksi matematika. • Dapat menjelaskan arti dari langkah-langkah induksi matematika.
Menarik Kesimpulan dari Pernyataan	• Dapat membuat suatu pernyataan baru. • Menggabungkan informasi dari pertanyaan a dan pertanyaan b untuk memperoleh pernyataan baru.	• Dapat membuat suatu pernyataan baru. • Menggabungkan informasi dari pertanyaan a dan pertanyaan b untuk memperoleh pernyataan baru.
Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen	• Menggunakan metode substitusi didalam pikirannya • Menggunakan nilai satuan	• Menggunakan metode substitusi didalam pikirannya. • Menggunakan nilai satuan

Berdasarkan tabel 4.3 dapat dilihat bahwa data subjek S_3 dan subjek S_4 memiliki kesamaan dan konsisten sehingga data yang diambil dapat dikatakan valid. Pada indikator mengajukan dugaan, kedua subjek sama-sama menuliskan informasi terlebih dahulu dilembar jawaban, kedua subjek dapat membuat bentuk umum yang hampir sama. Kedua subjek sama-sama melihat suatu pola dan menggunakan konsep bilangan kelipatan 2 untuk memperoleh suatu bentuk umum yang diinginkan.

Pada indikator menyusun pembuktian dengan menggunakan induksi matematika, kedua subjek memilih menggunakan induksi matematika. Subjek S_3 menggunakan induksi matematika karena berhubungan dengan bilangan asli. Sedangkan subjek S_4 menggunakan induksi matematika karena waktu SMA pernah mendapatkan materi dan soal yang hampir sama dengan soal yang diberikan peneliti. Kedua subjek menerapkan prinsip induksi matematis. Kedua subjek sama-sama menggunakan bentuk umum dari bilangan genap pada tahapan mengasumsikan P(k) benar. Subjek S_3 menggunakan *5a* dan subjek S_4 menggunakan *5i* dengan a dan i adalah anggota bilangan asli. Kedua subjek menggunakan manipulasi matematika. subjek S_3 menambahkan dan mengurangkan $20 \cdot 2^{2k}$ dan subjek S_4 menguraikan bilangan 9 menjadi 10-1 dan 4 menjadi 5-1. Kedua subjek berhasil membuktikan P(k+1) benar.

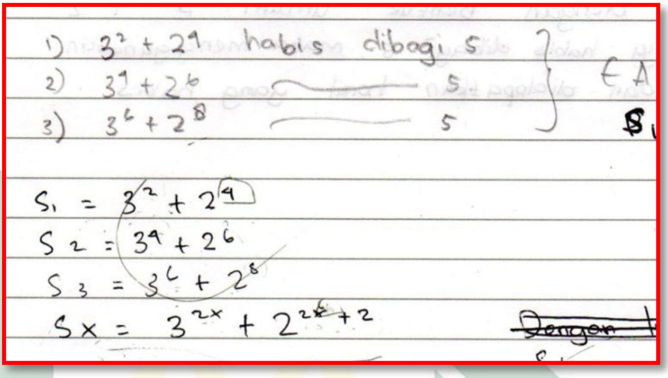
Pada indikator memberikan alasan terhadap kebenaran solusi, kedua subjek mengetahui langkah-langkah dari induksi matematika. Kedua subjek dapat menjelaskan arti dari setiap langkah-langkah induksi matematika. Kedua subjek menggunakan sifat distributif, sifat asosiatif dan sifat bilangan berpangkat untuk menguraikan jawaban. Kedua subjek menggunakan manipulasi matematika yang berhubungan dengan kelipatan 5.

Pada indikator menarik kesimpulan dari pernyataan, kedua subjek dapat membuat kesimpulan atau pernyataan baru. Kedua subjek menggunakan informasi yang diperoleh dari pertanyaan a dan pertanyaan b untuk membuat pernyataan baru. Sedangkan pada indikator memeriksa keshahihan suatu argumen, kedua subjek menggunakan metode substitusi untuk melihat hasil yang diperoleh sudah benar atau sesuai soal. Kedua subjek melakukan substitusi didalam pikirannya. Kedua subjek menggunakan nilai satuan untuk mengetahui bilangan tersebut habis dibagi 5.

C. Penalaran Matematis Mahasiswa Acak Konkret dalam Melakukan Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika

1. Deskripsi Subjek S_5

a) Mengajukan Dugaan



Gambar 4.15
Jawaban Tertulis Subjek S_5 dalam Mengajukan Dugaan

Berdasarkan gambar 4.15, subjek S_5 hanya menuliskan contoh-contoh pernyataan yang habis dibagi 5. Subjek S_5 memisalkan suatu pertanyaan dengan S_x. Oleh karena itu, dari pernyataan tersebut subjek S_5 memperoleh bentuk umum $S_x = 3^{2x} + 2^{2x+2}$. Berikut ini petikan hasil wawancara S_5 dalam mengajukan dugaan:

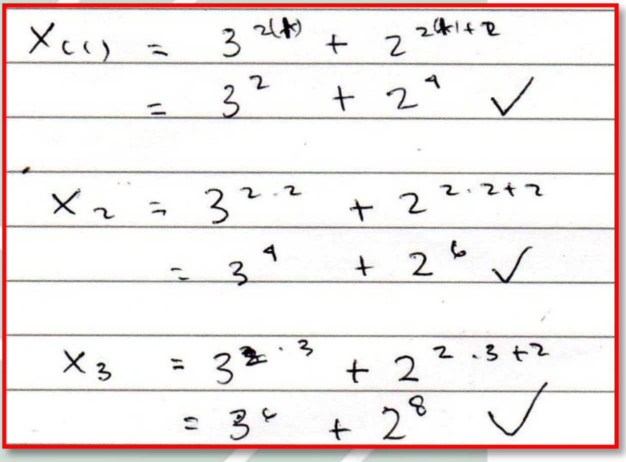
$P_{5.1.1}$	:	Informasi-informasi apa saja yang kamu peroleh dari`soal ini?
$S_{5.1.1}$	:	Pernyataan matematika yang berhubungan dengan kelipatan 5, bilangan berpangkat, penjumlahan, dan bilangan asli. Selain itu, kita disuruh mencari bentuk umum sesuai soal, seperti $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5, $3^4 + 2^6$ habis dibagi 5, $3^6 + 2^8$ habis dibagi 5.
$P_{5.1.2}$	:	Terus, apa yang kamu pikirkan setelah mendapatkan informasi tersebut?
$S_{5.1.2}$	:	Yang saya pikirkan setelah mendapatkan informasi tersebut yaitu angka-angka ini mempunyai hubungan (*menunjuk nilai pangkatnya)* seperti sebuah barisan.

$P_{5.1.3}$	:	Tujuan dari melihat adanya sebuah hubungan dari nilai pangat itu apa?
$S_{51.3}$	:	Mencari bentuk umum.
$P_{5.1.4}$	:	Jadi bagaimana bentuk umum dari pernyataan tersebut sehingga habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli?
$S_{5.1.4}$	:	Bentuk umum itu $3^{2x} + 2^{2x+2}$
$P_{5.1.5}$	:	*x* itu anggota bilangan apa?
$S_{5.1.5}$	:	Hmm..Bilangan asli mbak.
$P_{5.1.6}$	:	Coba jelaskan proses memperoleh bentuk umum $3^{2x} + 2^{2x+2}$!
$S_{5.1.6}$	:	Perpangkatannya ini kan berurutan, dari 2,4,6 (*menunjuk nilai pangkat 3)* itu kan berurutan selisih 2. Untuk pernyataan pertama dimulai dari angka 2 sehinga untuk menghasilkan 2,4,6 itu 2x. Sedangkan 4,6,8 (*menunjuk nilai pangkat 2)*itu jika dilihat-lihat dia berhubungan dengan nilai pangkat dari 3. Misal. 4=2+2, 6=4+2, 8= 6+2 sehingga 2x+2. jadi, bentuk umumnya itu $3^{2x} + 2^{2x+2}$.
$P_{5.1.7}$	:	Mengapa kamu berpikir seperti itu?
$P_{5.1.7}$	:	Tidak tahu, pokoknya tiba-tiba muncul ide gitu mbak.
$P_{5.1.8}$	:	Idenya tadi terkait tentang apa?
$S_{5.1.8}$	:	Pola yang seperti barisan aritmatika.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_5 memperoleh informasi dari soal berupa pernyataan matematika yang berhubungan dengan kelipatan 5, bilangan berpangkat, penjumlahan, dan bilangan asli. Selain itu, subjek S_5 juga memperoleh informasi bahwa $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5, $3^4 + 2^6$ habis dibagi 5, $3^6 + 2^8$ habis dibagi 5. Subjek S_5 mengetahui perintah atau pertanyaan dari soal. Setelah mendapatkan informasi tersebut, subjek S_5 mengetahui bahwa angka-angka dari nilai pangkat memiliki hubungan seperti barisan matematika. Hubungan dari nilai pangkatnya akan menghasilkan suatu bentuk umum. Bentuk umum yang dihasilkan oleh subjek S_5 adalah $3^{2x} + 2^{2x+2}$, dimana x anggota bilangan asli.

Pada petikan wawancara $S_{5.1.6}$, subjek S_5 mengurutkan nilai pangkat dari 3 yaitu 2,4,6 yang memiliki selisih 2. Selain itu, subjek S_5 mengurutkan nilai pangkat dari 3 yaitu 2,4,6 yang memiliki hubungan dengan nilai pangkat dari 2 yaitu 2x+2. Maka diperoleh bentuk umumnya yaitu $3^{2x} + 2^{2x+2}$. Subjek S_5 menghasilkan bentuk umum dengan melihat pola dari nilai pangkatnya yang seperti pola barisan aritmatika.

b) Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika



$X_{(1)} = 3^{2(1)} + 2^{2(1)+2}$

$= 3^{2} + 2^{4}$ ✓

$X_2 = 3^{2 \cdot 2} + 2^{2 \cdot 2+2}$

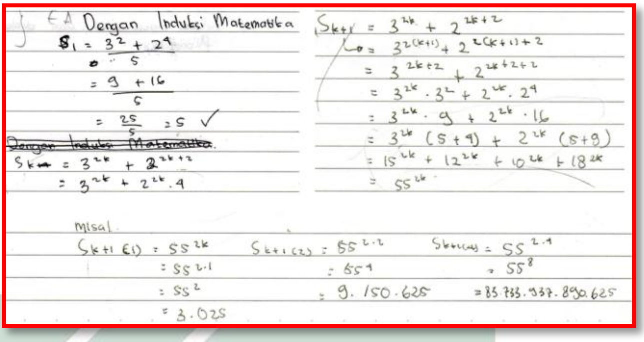
$= 3^{4} + 2^{6}$ ✓

$X_3 = 3^{2 \cdot 3} + 2^{2 \cdot 3+2}$

$= 3^{6} + 2^{8}$ ✓

Gambar 4.16
Jawaban Tertulis Subjek S_5 dalam Melakukan Pembuktian Secara Induktif

Berdasarkan gambar 4.16, dapat dilihat bahwa subjek S_5 melakukan pembuktian secara induktif terlebih dahulu. Subjek S_5 mensubstitusikan nilai x=1, x=2, dan x=3 ke $3^{2x} + 2^{2x+2}$. Subjek S_5 memberikan tanda *cek list* jika nilai dari substitusi tersebut habis dibagi 5. Sedangkan untuk pembuktian secara deduktif, akan dijelaskan pada gambar dibawah ini:



Dengan Induksi Matematika

$S_1 = \frac{3^2 + 2^4}{5}$

$= \frac{9 + 16}{5}$

$= \frac{25}{5} = 5$ ✓

~~Dengan Induksi Matematika~~

$S_k = 3^{2k} + 2^{2k+2}$

$= 3^{2k} + 2^{2k} . 4$

$S_{k+1} = 3^{2k} + 2^{2k+2}$

$= 3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2}$

$= 3^{2k+2} + 2^{2k+2+2}$

$= 3^{2k} . 3^2 + 2^{2k} . 2^4$

$= 3^{2k} . 9 + 2^{2k} . 16$

$= 3^{2k}(5+4) + 2^{2k}(5+9)$

$= 15^{2k} + 12^{2k} + 10^{2k} + 18^{2k}$

$= 55^{2k}$

Misal

$S_{k+1}(1) = 55^{2k} = 55^{2.1} = 55^2 = 3.025$

$S_{k+1}(2) = 55^{2.2} = 55^4 = 9.150.625$

$S_{k+1}(3) = 55^{2.4} = 55^8 = 83.733.937.890.625$

Gambar 4.17
Jawaban Tertulis Subjek S_5 dalam Melakukan Pembuktia Menggunakan Induksi Matematika

Berdasarkan gambar 4.17, subjek S_5 membuktikan bentuk umum $3^{2x} + 2^{2x+2}$ dengan induksi matematika. Terdapat tiga langkah yang digunakan subjek S_5 dalam membuktikan bentuk umum tersebut yaitu membuktikan S_1, S_k, dan S_{k+1} benar. Untuk S_1, subjek S_5 mensubstitusikan x=1 ke $S_x = 3^{2x} + 2^{2x+2}$ sehingga diperoleh $S_1 = \frac{3^2+2^4}{5} = \frac{9+16}{5} = \frac{25}{5} = 5$. Subjek S_5 memberikan tanda *cek list* pada S_1 yang artinya S_1 benar . Untuk S_2, subjek S_5 mensubstitusikan nilai $x = k$ ke S_x sehingga diperoleh $S_k = 3^{2k} + 2^{2k+2} = 3^{2k} + 2^{2k} \cdot 4$. Untuk S_{k+1}, subjek S_5 mensubstitusikan nilai $x = k + 1$ ke S_x sehingga diperoleh $S_{k+1} = 3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2} = 3^{2k+2} + 2^{2k+2+2}$. Kemudian, subjek S_5 menguraikan bilangan sehingga diperoleh $3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2k} \cdot 2^4 = 3^{2k} \cdot 9 + 2^{2k} \cdot 16 = 3^{2k} \cdot (5 + 4) + 2^{2k} \cdot (5 + 9)$.

Subjek S_5 juga melakukan sifat distributif dan penjumlahan sehingga diperoleh $15^{2k} \cdot 12^{2k} + 5^{2k} \cdot 18^{2k} = 55^{2k}$. Untuk membuktikan bahwa S_{k+1} benar, subjek S_5 mensubstitusikan nilai $x = 1, x = 2, x = 3$ ke S_{k+1}. Subjek S_5 hanya melihat nilai akhir dari hasil substitusi tersebut sehingga S_{k+1} terbukti benar. Berikut ini petikan wawancara subjek S_5 dalam melakukan pembuktian induksi matematika:

$P_{5.1.9}$: Ohh gitu, Jadi, bagaimana cara kamu

		membuktikan bahwa $3^{2x} + 2^{2x+2}$ habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli?
$S_{5.1.9}$	:	Oh itu mbak, saya mensubstitusikan kembali x=1,2,3 ke bentuk umum dan ternyata kalau dioperasikan akan habis dibagi 5. Jadi, terbukti.
$P_{5.1.10}$	:	Hmm itu kan secara induktif. Bagaimana pembuktian secara deduktif?
$S_{5.1.10}$	:	Oh iya dengan induksi matematika mbak.
$P_{5.1.11}$	:	Mengapa memilih jenis pembuktian induksi matematika?
$S_{5.1.11}$	:	Hmm saya kurang tau mbak. Cuma kepikiran saja menggunakan induksi matematika, karena waktu SMA pernah diajarkan seperti ini.
$P_{5.1.12}$	:	Oh gitu, sekarang coba jelaskan proses pembuktian yang sudah kamu lakukan!
$S_{5.1.12}$	:	Pertama dibuktikan S_1 benar terlebih dahulu, kemudian S_k dan S_{k+1} benar. Untuk yang S_1 itu berarti *x* nya diganti 1 sehingga menghasilkan $\frac{3^2+2^4}{5} = \frac{9+16}{5} = \frac{25}{5} = 5$ dan hasilnya itu merupakan kelipatan 5. Untuk S_k itu sama kayak S_x sehingga *x* diganti *k* maka $3^{2k} + 2^{2k+2} = 3^{2k} + 2^{2k} \cdot 4$. Terus S_{k+1} disubstitusikan ke S_k. Jadi *k* diganti dengan $k+1$ sehinngga $3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2} = 3^{2k+2} + 2^{2k+2+2} = 3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2k} \cdot 2^4 = 3^{2k} \cdot 9 + 2^{2k} \cdot 16 = 3^{2k} \cdot (5+4) + 2^{2k} \cdot (5+9) = 15^{2k} \cdot 12^{2k} + 5^{2k} \cdot 18^{2k} = 55^{2k}$. 55 kan habis dibagi 5. Kemudian saya cek, saya masukkan nilai k=1,2,4 ke 55^{2k} dan ternyata hasilnya habis dibagi 5 mbak. Jadi terbukti.
$P_{5.1.13}$	:	Kok tau habis dibagi 5 dari mana?
$S_{5.1.13}$	:	Nilai yang belakang sendiri kan 5 mbak. Jadi jelas habis dibagi 5.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_5 menggunakan dua cara pembuktian. Cara pertama menggunakan menggunakan pembuktian secara induktif yaitu dengan mensubstitusikan nilai n=1,2,3 ke bentuk umum. Cara kedua menggunakan pembuktian induksi matematika. Subjek S_5 memilih pembuktian induksi matematika karena idenya tiba-tiba muncul menggunakan pembuktian seperti ini. Selain itu, subjek S_5 pernah memperoleh materi induksi matematika pada waktu SMA.

Pada petikan wawancara $S_{5.1.12}$, subjek S_5 menggunakan tiga langkah dalam melakukan pembuktian induksi matematika yaitu membuktikan S_1 benar terlebih dahulu, kemudian S_k dan S_{k+1} benar. Penjelasan untuk proses melakukan pembuktian induksi matematika pada petikan wawancara $S_{5.1.12}$ hampir sama dengan yang dijelaskan oleh peneliti diatas. Selain itu, dapat diketahui bahwa subjek S_5 melakukan substitusi n=1,2,4 ke hasil akhir P(k+1) untuk meyakinkan bahwa P(k+1) terbukti benar. Subjek S_5 menggunakn nilai satuan untuk menunjukkan jawaban tersebut benar habis dibagi 5.

c) Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi

Pada indikator ini, subjek S_5 diharapkan dapat memberikan alasan terhadap kebenaran solusi yang telah dibuatnya.

$P_{5.1.14}$	:	Mengapa langkah-langkahnya harus membuktikan S_1 , S_k dan S_{k+1} benar?
$S_{5.1.14}$	:	:Ya biasanya prosesnya seperti ini mbak.
$P_{5.1.15}$	:	Terus, kamu kan ingin membuktikan bahwa S_1 itu habis dibagi 5. Mengapa sudah muncul per 5?
$S_{5.1.15}$	:	Ya karena ingin menunjukkan habis dibagi 5.
$P_{5.1.16}$	:	Mengapa dari $3^{2(k+1)}$ bisa menjadi 3^{2k+2} dan $2^{2(k+1)}$ bisa menjadi 2^{2k+2}?
$S_{5.1.16}$	:	Hmm itu didistributifkan mbak
$P_{5.1.17}$	:	Terus, mengapa dari 3^{2k+2} menjadi $3^{2k} \cdot 3^2$ dan 2^{2k+4} menjadi $2^{2k} \cdot 2^4$?
$S_{5.1.17}$	:	:Ya karena bilangan pokoknya sama jadi

		bisa diuraikan menjadi perkalian bilangan berpangkat.
$P_{5.1.18}$	:	Ohh gitu, terus, mengapa kamu menguraikan 9 menjadi 5+4?
$S_{5.1.18}$	:	Ya biar muncul angka 5.
$P_{5.1.19}$	:	Mengapa $3^{2k} \cdot (5+4) + 2^{2k} \cdot (5+9) = 15^{2k} + 12^{2k} + 5^{2k} + 18^{2k}$?
$S_{5.1.19}$	:	didistributifkan mbak kan $3 \times 5 = 15$ jadi ya 15^{2k} begitupun dengan yang lainnya.
$P_{5.1.20}$	:	Mengapa $15^{2k} + 12^{2k} + 5^{2k} + 18^{2k} = 55^{2k}$?
$S_{5.1.20}$	:	Kan pangkatnya sama-sama 2k mbak. jadi 15+12+10+18=55 sehingga 55^{2k}
$P_{5.1.21}$	:	Ohh jadi apakah kalau pangkatnya sama bilangan pokoknya bisa dijumlahkan?
$S_{5.1.21}$	:	Iya mbak.
$P_{5.1.22}$	:	Jadi, untuk k+1 apakah terbukti atau tidak?
$S_{5.1.22}$	:	Terbukti mbak karena 55 itu kan habis dibagi 5 dan selain itu kalau saya substitusikan k=1,2,4 ke S_{k+1} juga habis dibagi 5.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_5 mengetahui langkah-langkah dari induksi matematika yaitu membuktikan S_1 , S_k dan S_{k+1} benar. Pada tahap S_1, subjek S_5 sudah memunculkan per 5 atau dibagi 5 karena ia ingin menunjukkan bahwa bilangan yang dihasilkan akan habis dibagi 5 atau sisanya nol.

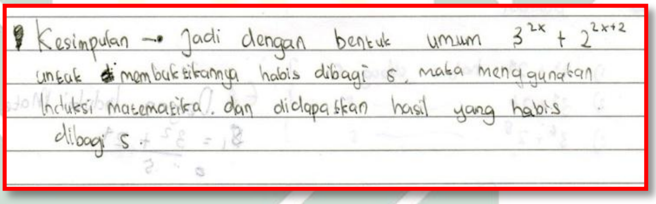
Subjek S_5 menggunakan sifat distributif dan sifat bilangan berpangkat dalam menguraikan jawabannya. Selain itu, subjek S_5 memilih menguraikan 9 menjadi 5+4 karena ingin memunculkan bilangan 5. Subjek S_5 melakukan distributif pada $3^{2k} \cdot (5+4) + 2^{2k} \cdot (5+9)$. Namun, hasil yang diperoleh dari distributif tersebut mengalami kesalahan.

Subjek S_5 menjumlahkan bilangan berpangkat karena memiliki nilai pangkat yang sama seperti $15^{2k} + 12^{2k} + 5^{2k} + 18^{2k} = 55^{2k}$. Hal ini, subjek S_5 juga mengalami kesalahan konsep. Namun, tetap saja subjek S_5 merasa yakin bahwa P(k+1) terbukti karena jika disubstitusikan nilai x=1,2,4 menghasilkan bilangan yang habis dibagi 5. Berikut ini lanjutan petikan wawancara subjek S_5 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi:

$P_{5.1.23}$	:	Mengapa langkah-langkah harus membuktikan P(1) benar, P(k) dan P(k+1) benar?
$S_{5.1.23}$	:	Iya soalnya begitu proses induksi matematika.
$P_{5.1.24}$	:	Apa makna dari S_1 , S_k dan S_{k+1} benar?
$S_{5.1.24}$	:	Hmm tidak tau mbak.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_5 mengetahui langkah-langkah dari induksi matematika. Namun, subjek S_5 tidak arti dari setiap langkah-langkah induksi matematika.

d) Menarik Kesimpulan dari Pernyataan


Kesimpulan → Jadi dengan bentuk umum $3^{2x} + 2^{2x+2}$ untuk membuktikannya habis dibagi 5, maka menggunakan Induksi matematika. dan didapatkan hasil yang habis dibagi 5.

Gambar 4.18
Jawaban Tertulis Subjek S_5 dalam Membuat Kesimpulan

Berdasarkan gambar 4.18, subjek S_5 membuat kesimpulan bahwa bentuk umumnya adalah $3^{2x} + 2^{2x+2}$ dan untuk membuktikan habis dibagi 5 maka menggunakan induksi matematika dan didapatkan hasil yang habis dibagi 5. Untuk lebih jelasnya, maka dilakukan wawancara dengan subjek S_5. Berikut ini petikan wawancara subjek S_5 dalam membuat kesimpulan:

$P_{5.1.25}$	:	Apa yang dapat kamu simpulkan setelah mengerjakan soal ini?
$S_{5.1.25}$	:	Jadi, dengan bentuk umum $3^{2x} + 2^{2x+2}$ untuk membuktikannya habis dibagi 5

dengan menggunakan induksi matematika dan didapatkan hasil yang habis dibagi 5.

$P_{5.1.26}$: x nya anggota bilangan apa?

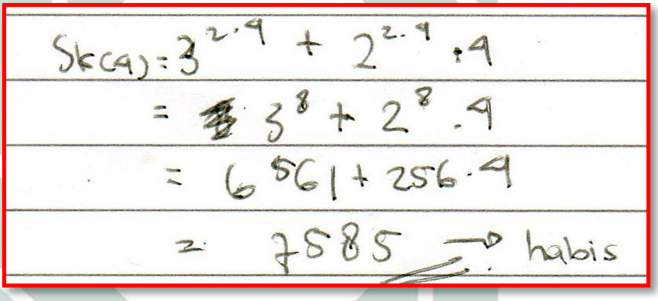
$S_{5.1.26}$: Ya tadi, bilangan asli mbak.

$P_{5.1.27}$: Bagaimana cara kamu memperoleh sebuah kesimpulan seperti ini?

$S_{5.1.27}$: :Ya dari proses pekerjaan saya mbak.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa nilai x dari $3^{2x} + 2^{2x+2}$ adalah anggota bilangan asli. Subjek S_5 memperoleh kesimpulan dengan melihat proses pekerjaan yang sudah dilakukan.

e) Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen



$Sk(4) = 3^{2\cdot4} + 2^{2\cdot4} \cdot 4$

$= 3^8 + 2^8 \cdot 4$

$= 6561 + 256 \cdot 4$

$= 7585 \rightarrow$ habis

Gambar 4.19
Jawaban Tertulis Subjek S_5 dalam Memeriksa KeshahihanSuatu Argumen

Berdasarkan gambar 4.19, subjek S_5 memeriksa jawaban dengan mensubstitusikan nilai x=4 ke bentuk umum S_k. Dari substitusi tersebut, subjek S_5 menghasilkan bilangan 7585 yang habis dibagi 5. Berkut ini petikan wawancara subjek S_5 dalam memeriksa kembali jawabannya:

$P_{5.1.28}$: Bagaimana cara kamu memeriksa bahwa jawaban yang kamu peroleh sudah benar?

$S_{5.1.28}$: Dengan mensubstitusikan nilai x nya, misalnya x=4 yaitu $3^{2(4)} + 2^{2(4)} \cdot 4 = 7585$ habis dibagi 5

$P_{5.1.29}$: Kok tau habis dibagi 5 darimana?

$S_{5.1.29}$: Karena satuannya 5 mbak. Jadi kan biasanya kalau satuannya 5 itu habis dibagi 5 kayak 20,25,35, dst

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa dalam memeriksa jawaban melakukan metode substitusi dan hanya melihat nilai pada posisi satuan yaitu 5 sehingga 7585 habis dibagi 5.

f) Permasalahan yang Dihadapi Subjek

Dalam mengerjakan soal ini, tentunya ada suatu permasalahan yang dihadapi subjek S_5 sehingga membuat subjek S_5 mengalami sebuah masalah. Berikut ini petikan wawancara subjek S_5 tentang permasalahan yang dihadapi subjek S_5 selama menyelesaikan soal:

$P_{5.1.30}$: Permasalahan apa saja yang kamu hadapi selama melakukan pembuktian induksi matematika?

$S_{5.1.30}$: Pada pembuktian S_{k+1}. Bagi saya itu susah dalam membuktikn S_{k+1}.

$P_{5.1.31}$: Oh gitu, ok terima kasih

$S_{5.1.31}$: Iya mbak sama-sama.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_5 mengalami permasalahan pada tahap membuktikan S_{k+1} benar. Subjek S_5 mengalami kesulitan dalam menguraikan $9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k}$. Bagi subjek S_5, tahap tersebut adalah tahap yang paling susah.

2. Analisis Data Subjek S_5

Berdasarkan paparan data diatas, berikut ini ialah hasil analisis penalaran matematis subjek S_5 dalam melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika yaitu:

a) Mengajukan Dugaan

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_5 memperoleh informasi dari soal yaitu pernyataan matematika yang berhubungan dengan kelipatan 5, bilangan berpangkat, penjumlahan, dan bilangan asli, serta pernyataan-pernyataan matematika yang habis dibagi 5. Kemudian, subjek S_5 mulai berpikir dalam mencari bentuk umum yang sesuai dengan contoh dengan melihat angka-angka pada soal yang memiliki suatu hubungan. Subjek S_5 menghasilkan bentuk umum $3^{2x} + 2^{2x+2}$, dengan x anggota bilangan asli. Subjek S_5 menggunakan huruf *x* daripada *n*. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir acak konkret berdasarkan pada kenyataan dan mengerjakan segala sesuatu dengan cara mereka sendiri.

Subjek S_5 menggunakan pola untuk memperoleh bentuk umum yang dinginkan Firman. Subjek S_5 melihat pola dari nilai pangkat yaitu 2,4,6 dan 4,6,8. Menurut subjek S_5, pola nilai pangkatnya seperti barisan aritmatika. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir acak konkret mengerjakan segala sesuatu dengan cara mereka sendiri.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_5 dalam mengajukan dugaan yaitu dengan menuliskan kembali informasi yang diperoleh, melihat suatu pola yang ada sehingga menghasilkan pernyataan baru yang diinginkan.

b) Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_5 melakukan pembuktikan dengan dua cara. Cara pertama, subjek S_5 menggunakan pembuktian secara induktif yaitu mensubstitusikan nilai *x=1,2,3* ke bentuk umum yang dihasilkan. Subjek S_5 memberikan tanda *cek list* untuk menunjukkan bahwa hasil yang diperoleh habis dibagi 5. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir acak konkret cenderung melakukan pendekatan coba salah (*trial and error*). Cara kedua, subjek S_5 menggunakan pembuktian induksi matematika. Subjek S_5 memilih pembuktian menggunakan induksi matematika karena ia pernah mendapatkan materi seperti ini.

Subjek S_5 melakukan pembuktian induksi matematika dengan menggunakan prinsip induksi matematis yaitu membuktikan P(1) benar, P(k) dan P(k+1) benar. Namun, subjek S_5 lebih menyukai menulisnya dengan S_1, S_k dan S_{k+1}. Pada tahap membuktikan S_1 terbukti benar, Pada tahap S_k diasumsikan benar. Pada tahap membuktikan S_{k+1}, subjek S_5

melakukan distributif $3^{2k} \cdot (5+4) + 2^{2k} \cdot (5+9) = 15^{2k} \cdot 12^{2k} + 5^{2k} \cdot 18^{2k}$ dan penjumlahan $15^{2k} \cdot 12^{2k} + 5^{2k} \cdot 18^{2k} = 55^{2k}$. Subjek S_5 hanya melakukan perkalian bilangan pokoknya saja. Dalam hal ini, subjek S_5 mengalami kesalahan konsep. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa pemikir acak konkret suka mengerjakan segala sesuatu dengan cara mereka sendiri.

Subjek S_5 melakukan substitusi k=1,2,4 ke hasil akhir $S_{k+1} = 55^{2k}$. Dari substitusi tersebut, subjek S_5 memperoleh hasil yang habis dibagi 5 sehingga S_{k+1} terbukti benar. Namun, subjek S_5 tidak melakukan pengecekkan bahwa jika k=1 maka hasil dari S_2 pada S_{k+1} tentunya harus sama dengan S_2 pada S_k. Padahal hasil yang diperoleh subjek S_5 nilainya tidak sama antara S_2 pada S_{k+1} dan S_2 pada S_k. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa pemikir acak mempunyai sikap eksperimental yang diiringi dengan perilaku yang kurang struktur dan lebih terorientasi pada proses daripada hasil.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_5 dalam melakukan pembuktian induksi matematika yaitu dengan menggunakan metode substitusi, menggunakan prinsip induksi matematis, memilih menguraikan bilangan, dan menggunakan metode substitusi lagi. Subjek S_5 tidak melakukan pembuktian S_{k+1} dengan tepat.

c) Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_5 mengetahui prinsip induksi matematis atau langkah-langkah dari induksi matematika. Subjek S_5 tidak dapat menjelaskan arti dari langkah-langkah induksi matematika.

Subjek S_5 menggunakan sifat distributif dan sifat bilangan berpangkat dalam menguraikan operasi bilangan. Namun, tidak semua sifat distributif yang dilakukan subjek S_5 menghasilkan jawaban yang benar. Ada bagian sifat distributif yang mengalami kesalahan konsep yaitu $3^{2k} \cdot (5+4) + 2^{2k} \cdot (5+9) = 15^{2k} \cdot 12^{2k} + 5^{2k} \cdot 18^{2k}$. Subjek S_5 mengalikan bilangan pokoknya saja. Selain itu, subjek S_5 juga melakukan operasi penjumlahan bilangan berpangkat yaitu $15^{2k} \cdot 12^{2k} + 5^{2k} \cdot 18^{2k} = 55^{2k}$. Subjek S_5 menjumlahkan bilangan pokoknya saja karena bilangan tersebut memiliki pangkat yang sama yaitu 2k. Subjek S_5 merasa yakin bahwa S_{k+1} terbukti karena didukung oleh hasil substitusi k=1,2,4 yang juga habis dibagi 5. Hal ini sejalan dengan pendapat Thobias dan Chintya Ulrich yang menyatakan bahwa para pemikir acak konkret sulit menghadapi hal-hal yang rutin dan sulit mengulang sesuatu yang sudah dikerjakan.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_5 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi lebih banyak mengalami kesalahan konsep.

d) Menarik Kesimpulan dari Pernyataan

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_5 dapat membuat sebuah kesimpulan yaitu bentuk umumnya adalah $3^{2x} + 2^{2x+2}$ dan untuk membuktikan habis dibagi 5 maka menggunakan induksi matematika dan didapatkan hasil yang habis dibagi 5. Kesimpulan ini diperoleh subjek S_5 dari proses pengerjaan yang sudah dilakukan.

e) Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_5 melakukan pemeriksaan kembali suatu argumen dengan melakukan substitusi k=4 ke bentuk umum S_k. Subjek S_5 hanya menggunakan nilai satuan untuk menunjukkan bahwa pernyataan tersebut habis dibagi 5.

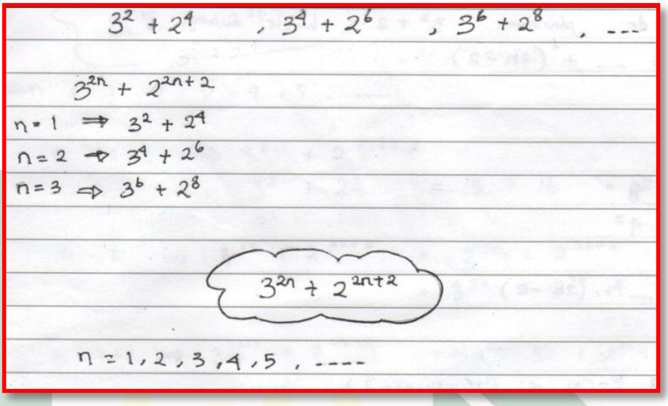
Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_5 dalam memeriksa kesahihan suatu argumen dengan melakukan substitusi, dan melihat nilai satuan.

f) Permasalahan yang Dihadapi Subjek

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_5 mengalami masalah pada tahap pembuktian P(k+1) atu S_{k+1}. Subjek S_5 mengalami kesulitan dalam menguraikan $9 \cdot 3^{2k} + 16 \cdot 2^{2k}$. Hal ini sejalan dengan pendapat Polya yang menyatakan bahwa salah satu masalah yang dihadapi seseorang adalah masalah yang berkaitan dengan pembuktian yaitu menunjukkan bahwa suatu pernyataan itu benar atau salah dan tidak keduannya. Selain itu, subjek S_5 juga mengalami kesalahan konsep pada tahap ini. Subjek S_5 tidak mengetahui bahwa konsep yang digunakan salah.

3. Deskripsi Subjek S_6

a) Mengajukan Dugaan



$3^2 + 2^4$, $3^4 + 2^6$, $3^6 + 2^8$, ...

$3^{2n} + 2^{2n+2}$

$n = 1 \Rightarrow 3^2 + 2^4$

$n = 2 \Rightarrow 3^4 + 2^6$

$n = 3 \Rightarrow 3^6 + 2^8$

$3^{2n} + 2^{2n+2}$

$n = 1, 2, 3, 4, 5, ...$

Gambar 4.20
Jawaban Tertulis Subjek S_6 dalam Mengajukan Dugaan

Berdasarkan gambar 4.20, subjek S_6 menuliskan kembali contoh-contoh pernyataan yang habis dibagi 5. Subjek S_6 memisalkan pernyataan pertama dengan n=1, pernyataan kedua dengan n=2, dan pernyataan ketiga dengan n=3. Melalui contoh tersebut, subjek S_6 memperoleh bentuk umum yaitu $3^{2n} + 2^{2n+2}$, dengan n=1,2,3,4,5,dst. Subjek S_6 menggambar bentuk awan yang mengelilingi bentuk umum yang dihasilkan untuk menunjukkan posisi bentuk umum pada lembar jawaban. Berikut ini petikan hasil wawancara S_6 dalam mengajukan dugaan:

$P_{6.1.1}$: Informasi-informasi apa saja yang kamu peroleh dari`soal ini?

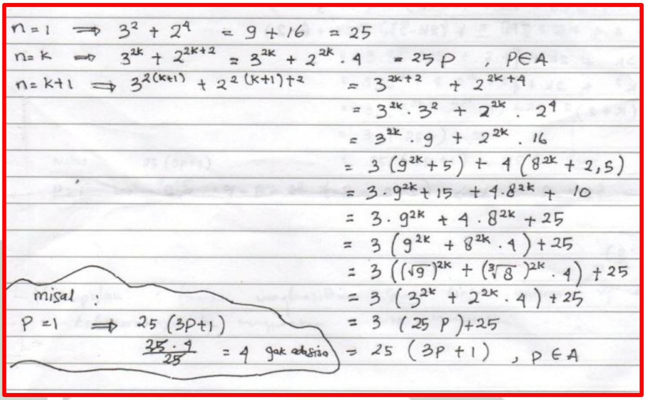
$S_{6.1.1}$: Pernyataan-pernyatan yang dihasilkan Firman seperti $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5, $3^4 + 2^6$ habis dibagi 5, dan $3^6 + 2^8$ habis dibagi 5

$P_{6.1.2}$: Terus, apa yang kamu pikirkan setelah mendapatkan informasi tersebut?

$S_{6.1.2}$	:	Itu mbak, mencari bentuk umum dan membuktikannya.
$P_{6.1.3}$	:	Jadi bagaimana bentuk umum dari pernyataan tersebut sehingga habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli?
$S_{6.1.3}$	:	Bentuk umumnya ini mbak $3^{2n} + 2^{2n+2}$
$P_{6.1.4}$	:	Coba jelaskan proses memperoleh bentuk umum $3^{2n} + 2^{2n+2}$!
$S_{6.1.4}$	:	Gini mbak, kalau dilihat dari pangkatnya ya $3^2 + 2^4$, $3^4 + 2^6$, dan $3^6 + 2^8$. Nilai Pangkatnya kan selalu genap. Lah untuk pangkat dari 3 itu kan selisih 2 sehingga 2n. sedangkan untuk yang pangkat dari 2 itu kan selisih 2 dari awalnya (*menunjuk nilai pangkat dari 3)* sehingga 2n+2.
$P_{6.1.5}$	:	Mengapa kamu berpikir seperti itu?
$S_{6.1.5}$	:	Ya karena dilihat dari pangkatnya saja mbak membentuk pola.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_6 memperoleh informasi dari soal yaitu pernyataan-pernyataan yang dihasilkan Firman seperti $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5, $3^4 + 2^6$ habis dibagi 5, $3^6 + 2^8$ habis dibagi 5. Subjek S_6 berpikir tentang mencari bentuk umum dengan melihat pola dari nilai pangkatnya. Pada petikan wawancara $S_{6.1.4}$, subjek S_6 menjelaskan bahwa nilai pangkatnya selalau genap dan nilai pangkat dari 3 selisih 2 sehingga 2n. Sedangkan nilai pangkat dari 2 itu selesih 2 dari awalnya sehingga 2n+2. Subjek S_6 menyebutkan bentuk umumnya yaitu $3^{2n} + 2^{2n+2}$.

b) Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika



$n=1 \Rightarrow 3^2 + 2^4 = 9 + 16 = 25$

$n=k \Rightarrow 3^{2k} + 2^{2k+2} = 3^{2k} + 2^{2k} \cdot 4 = 25p \quad , p \in A$

$n=k+1 \Rightarrow 3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2} = 3^{2k+2} + 2^{2k+4}$

$= 3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2k} \cdot 2^4$

$= 3^{2k} \cdot 9 + 2^{2k} \cdot 16$

$= 3(9^{2k}+5) + 4(8^{2k}+2,5)$

$= 3 \cdot 9^{2k} + 15 + 4 \cdot 8^{2k} + 10$

$= 3 \cdot 9^{2k} + 4 \cdot 8^{2k} + 25$

$= 3(9^{2k} + 8^{2k} \cdot 4) + 25$

$= 3((\sqrt{9})^{2k} + (\sqrt[3]{8})^{2k} \cdot 4) + 25$

$= 3(3^{2k} + 2^{2k} \cdot 4) + 25$

$= 3(25p) + 25$

$= 25(3p+1) \quad , p \in A$

misal :

$p=1 \Rightarrow 25(3p+1)$

$\frac{25 \cdot 4}{25} = 4$ gak ada sisa

Gambar 4.21
Jawaban Tertulis Subjek S_5 dalam Melakukan Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika

Berdasarkan gambar 4.21, dapat dilihat bahwa subjek S_6 melakukan pembuktian dengan induksi matematika. Subjek S_6. mensubstitusikan n=1 ke $3^{2n} + 2^{2n+2}$ sehingga diperoleh $3^2 + 2^4 = 9 + 16 = 25$. Kemudian, subjek S_6 mensubstitusikan nilai $n = k$ sehingga diperoleh $3^{2k} + 2^{2k+2} = 3^{2k} + 2^{2k} \cdot 4$.

Subjek S_6 memisalkan $3^{2k} + 2^{2k} \cdot 4 = 25p$, dengan p anggota A. Lalu, subjek S_6 mensubstitusikan nilai $n = k + 1$ sehingga diperoleh $3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2} = 3^{2k+2} + 2^{2k+4} = 3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2k} \cdot 2^4 = 3^{2k} \cdot 9 + 2^{2k} \cdot 16$.

Subjek S_6 melakukan manipulasi matematika sehingga diperoleh $3^{2k} \cdot 9 + 2^{2k} \cdot 16 = 3(9^{2k} + 5) + 4(8^{2k} \cdot 2{,}5) = 3 \cdot 9^{2k} + 15 + 4 \cdot 8^{2k} + 10 = 3 \cdot 9^{2k} + 4 \cdot 8^{2k} + 25$. Subjek S_6 melakukan pengelompokkan sehingga $3(9^{2k} + 8^{2k} \cdot 4) + 25$. Subjek S_6 menggunakan akar kuadrat pada angka 9 dan akar kubik pada angka 8 sehingga diperoleh $3\left(\sqrt{9}^{2k} + \sqrt[3]{8}^{2k} \cdot 4\right) + 25 = 3\left(3^{2k} + 2^{2k} \cdot 4\right) + 25$. Subjek S_6 memisalkan nilai yang ada didalam kurung menjadi 25p yang sesuai dengan hasil dari n=k sehingga diperoleh $3(25p)+25=25(3p+1)$, dengan p anggota bilangan asli. Kemudian, subjek S_6 mensubstitusikan p=1 ke $25(3p+1)$ dan dibagi 25 sehingga diperoleh 4 yang tidak memiliki sisa. Jadi, n=k+1 terbukti. Berikut ini petikan wawancara subjek S_6 dalam melakukan pembuktian induksi matematika:

$P_{6.1.6}$	:	Hmm bagaimana cara kamu membuktikan bahwa $3^{2n}+2^{2n+2}$ habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli?
$S_{6.1.6}$	:	Saya substitusikan mbak nilai n=1,2,3 ternyata sesuai contoh yang dihasilkan oleh Firman atau bisa mencoba dengan yang lain. terus,, saya berpikir juga menggunakan induksi matematika.
$P_{6.1.7}$	:	Ohh gitu mengapa memilih jenis pembuktian induksi matematika?
$S_{6.1.7}$	:	Soalnya ini kan ada bentuk umum yang habis dibagi 5 dan soal seperti ini pernah saya jumpai waktu SMA.
$P_{6.1.8}$	:	Adakah ciri-ciri lain dari induksi matematiika?
$S_{6.1.8}$	:	Hmm biasanya itu berhubungan sama bilangan asli, bilangan real, bilangan bulat.
$P_{6.1.9}$	:	Ohh jadi, bilangan real juga bisa digunakan dalam pembuktian induksi matematika.
$S_{6.1.9}$	:	Iya mbak. biasanya kan ada soal 11^n-6 habis dibagi 2
$P_{6.1.10}$	:	*n* nya itu anggota bilangan apa?
$S_{6.1.10}$	:	Bilangan real mbak... (*subjek berpikir*) ohh bilangan asli tapi pemisalannya bisa menggunakan bilangan real.
$P_{6.1.11}$	:	Oh gitu, sekarang coba jelaskan proses pembuktian yang sudah kamu lakukan!
$S_{6.1.11}$	:	n=1 kita substitusikan ke bentuk umum sehingga $3^2+2^4=9+16=25$. Setelah itu kita substitusikan n=k sehingga $3^{2k}+2^{2k+2}=3^{2n}+2^{2n}\cdot 4$. Karena n=1 menghasilkan 25 sehingga kita tulis ke pemisalan $3^{2n}+2^{2n}\cdot 4$, sehingga $3^{2n}+$

$2^{2n} \cdot 4 = 25p, p \in A$ atau bilangan asli. Terus ini kan n=k+1 disubstitusikan k bentuk umum sehingga $3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2} = 3^{2k+2} + 2^{2k+4} = 3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2k} \cdot 2^4 = 3^{2k} \cdot 9 + 2^{2k} \cdot 16$ kemudian saya manipulasi matematika mbak sehingga $3(9^{2k} + 5) + 4(8^{2k} \cdot 2{,}5) = 3 \cdot 9^{2k} + 15 + 4 \cdot 8^{2k} + 10 = 3 \cdot 9^{2k} + 4 \cdot 8^{2k} + 25 = 3(9^{2k} + 8^{2k} \cdot 4) + 25$. Lalu 9 saya akar kuadrat sehingga $\sqrt{9} = 3$ dan 8 saya akar pangkat 3 sehingga $\sqrt[3]{8} = 2$ maka diperoleh $3(3^{2k} + 2^{2k} \cdot 4) + 25$. Pada n=k kita sudah memisalkan $3^{2k} + 2^{2k} \cdot 4 = 25p$ sehingga $3(25p) + 25 = 25(3p + 1)$, dengan p anggota bilangan asli. Lalu kita misalkan p=1 sehingga diperoleh $\frac{25(4)}{25} = 4$ tidak ada sisa. Jadi n=k+1 terbukti.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_6 menggunakan dua cara pembuktian. Cara pertama, mensubstitusikan nilai n=1,2,3 ke bentuk umum sehingga menghasilkan contoh yang sesuai dengan pernyataan Firman. Cara kedua, subjek S_6 menggunakan pembuktian induksi matematika karena terdapat bentuk umum yang habis 5 dibagi dan pernah mendapatkan soal serupa pada waktu SMA.

Pada petikan wawancara $S_{6.1.8}$, subjek S_6 menyebutkan ciri-ciri dari induksi matematika yaitu berhubungan dengan bilangan asli, bilangan real, dan bilangan bulat. Subjek S_6 tidak dapat membedakan nilai *n* anggota bilangan asli atau bilangan real. Penjelasan untuk proses subjek S_6 dalam melakukan pembuktian induksi matematika pada petikan wawancara $S_{6.1.11}$ hampir sama dengan yang dijelaskan oleh peneliti diatas. Dalam petikan wawancara ini, kita dapat mengetahui bahwa simbol A adalah bilangan asli.

c) Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi

Pada indikator ini, subjek S_6 diharapkan dapat memberikan alasan terhadap kebenaran solusi yang telah dibuatnya. Berikut ini petikan wawancara subjek S_6 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi:

$P_{6.1.12}$	:	Mengapa pemisalan pada n=k harus 25p?
$S_{6.1.12}$	:	Gini, kan n=1 dan n=k saling berhubungan. Selain itu hasil dari n=k selalau mengacu pada hasil n=1
$P_{6.1.13}$	:	Ohh gitu. Apakah harus begitu?
$S_{6.1.13}$	:	Iya mbak.
$P_{6.1.14}$	:	Mengapa harus p (*25p)*?
$S_{6.1.14}$	:	ya tidak apa-apa mbak
$P_{6.1.15}$	:	Jadi, apakah 25p itu habis dibagi 5?
$S_{6.1.15}$	:	Hmmm kayaknya habis mbak. karena 25 dibagi 5 yaitu 5.
$P_{6.1.16}$	:	Itu ada huruf A artinya apa?
$S_{6.1.16}$	:	A itu bilangan asli.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa dalam membuktikan bentuk umum, subjek S_6 memisalkan hasil dari n=k yaitu 25p dengan p anggota bilangan asli. Subjek S_6 menggunakan huruf A sebagai simbol bilangan asli. Selain itu, subjek S_6 menggunakan pemisalan 25p di n=k karena dari n=1 menghasilkan 25. Subjek S_6 menjelaskan bahwa n=1 dan n=k+1 saling berhubungan. Selain itu, subjek S_6 menggunakan 25p karena 25 habis dibagi 5. Berikut ini lanjutan petikan wawancara subjek S_6 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi:

$P_{6.1.17}$	:	Mengapa dari $3^{2(k+1)}$ bisa menjadi 3^{2k+2} dan $2^{2(k+1)}$ bisa menjadi 2^{2k+2}?
$S_{6.1.17}$	:	Hmm itu lho mbak pakai sifat distributif
$P_{6.1.18}$	:	Terus, mengapa dari 3^{2k+2} menjadi $3^{2k} \cdot 3^2$ dan 2^{2k+4} menjadi $2^{2k} \cdot 2^4$?
$S_{6.1.18}$	:	Saya lupa namanya mbak, pokoknya kalau ada bilangan berpangkat ya bisa diuraikan seperti ini.
$P_{6.1.19}$	:	Mengapa dari $3^{2k} \cdot 9$ bisa menjadi $3(9^{2k} + 5)$ dan dari $2^{2k} \cdot 16$ bisa menjadi $4(8^{2k} \cdot 2{,}5)$?

$S_{6.1.19}$: Gini mbak, untuk $3^{2k} \cdot 9$ itu kan bisa saya pindah menjadi $3 \cdot 9^{2k}$ kemudian saya manipulasi menjadi $3 \cdot 9^{2k} + 24 - 24 - 9$ kan 24-24=0 dan bilangan berpangkatnya itu 9 jadi dikurangi 9. Lalu kita hanya mengambil 24-9 saja sehingga $3 \cdot 9^{2k} + 24 - 9 = 3 \cdot 9^{2k} + 15$ Sedangkan untuk $2^{2k} \cdot 16$ caranya itu juga seperti tadi. bisa menjadi $2^{2k} \cdot 16 = 2^{2k} \cdot 2 \cdot 8$ kita pindahkan pangkatnya ke 8 sehingga $2 \cdot 2 \cdot 8^{2k} = 4 \cdot 8^{2k}$. Lalu saya manipulasi menjadi matematika $4 \cdot 8^{2k} + 26 - 26 - 16$ sehingga $4 \cdot 8^{2k} + 26 - 16 = 4 \cdot 8^{2k} + 10$

$P_{6.1.20}$: Lho jadi, pangkat itu bisa dipindah-pindah seperti $3^{2k} \cdot 9 = 3 \cdot 9^{2k}$?

$S_{6.1.20}$: Iya mbak, seingat saya dulu pernah diajarkan seperti itu.

$P_{6.1.21}$: Mengapa $3(9^{2k} + 5) = 3 \cdot 9^{2k} + 15$ dan $4(8^{2k} + 2{,}5) = 4 \cdot 8^{2k} + 10$?

$S_{6.1.21}$: Ya sama seperti tadi mbak menggunakan sifat distributif.

$P_{6.1.22}$: Mengapa caranya bisa seperti ini $3 \cdot 9^{2k} + 4 \cdot 8^{2k} + 25 = 3(9^{2k} + 8^{2k} \cdot 4) + 25$?

$S_{6.1.22}$: Karena saya ingin mengelompokkan mbak biar nanti yang ada didalam kurung muncul hasil seperti n=k

$P_{6.1.23}$: Ohh gitu, terus mengapa 9 dan 8 diakar (*menunjuk* $3\left(\sqrt{9}^{2k} + \sqrt[3]{8}^{2k} \cdot 4\right) + 25$)?

$S_{6.1.23}$: Ohh itu mbak saya membutuhkan angka 3 dan 2 sedangkan 9 dan 8 itu kan berhubungan dengan angka 3 dan 2 sehingga saya akar mbak.

$P_{6.1.24}$: Terus, mengapa kamu perlu mensubstitusi nilai p=1 ke 25(3p+1)?

$S_{6.1.24}$: Karena ingin menunjukkan bahwa hasilnya itu tidak memiliki sisa.

$P_{6.1.25}$: Terus mengapa kamu membaginya dengan

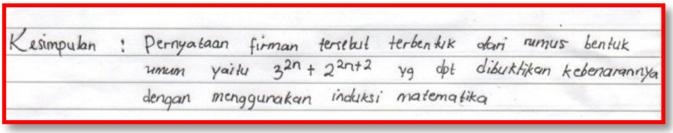
		25?
$S_{6.1.25}$	:	Karena 25 itu kan habis dibagi 5 jadi ya sama saja mbak dengan dibagi 5.
$P_{6.1.26}$	:	Jadi, untuk k+1 apakah terbukti atau tidak?
$S_{6.1.26}$	:	Terbukti mbak.
$P_{6.1.27}$	:	Mengapa langkah-langkah harus membuktikan n=1, n=k n=k+1 benar?
$S_{6.1.27}$	:	Karena itu sudah ketentuannya mbak.
$P_{6.1.28}$	:	Apa makna dari n=1, n=k n=k+1 benar?
$S_{6.1.28}$	:	Hmm saya gag tau mbak

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_6 menggunakan sifat distributif dan sifat bilangan berpangkat dalam menguraikan bilangan. Selain itu, pada petikan wawancara $P_{5.1.19}$ dan $S_{5.1.19}$, dapat diketahui bahwa subjek S_6 menyatakan bahwa pangkat bisa dipindah-pindahkan seperti $3^{2k} \cdot 9 = 3 \cdot 9^{2k}$ dan $2^{2k} \cdot 16 = 2^{2k} \cdot 2 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 8^{2k} = 4 \cdot 8^{2k}$.

Subjek S_6 juga menambahkan dan mengurangkan 24 tetapi ia juga menambahkan negatif 9 (-9) ke solusi yang dibuatnya. Selain itu, subjek S_6 juga menambahkan dan mengurangkan 26 tetapi ia juga menambahkan negatif 16 (-16) ke solusi yang dibuatnya. Subjek S_6 menjelaskan menambahkan dan mengurangkan 24 atau 26 itu akan menghasilkan nol sehingga kembali semula.

Subjek S_6 juga melakukan pengelompokan sehingga $3 \cdot 9^{2k} + 4 \cdot 8^{2k} + 25 = 3(9^{2k} + 8^{2k} \cdot 4) + 25$. Subjek S_6 menggunakan akar pada angka 9 dan 8 untuk menghasilkan angka 3 dan 2. Cara ini digunakan subjek S_6 untuk memunculkan hasil n=k di n=k+1. Selain itu, dalam meyakinkan jawabannya, subjek S_6 mensubstitusikan nilai n=1 ke hasil akhir n=k+1. Subjek S_6 membagi hasil substitusi tersebut dengan 25 karena 25 habis dibagi 5 sehingga sama saja dibagi 25 atau 5. Melalui cara ini, subjek S_6 yakin bahwa n=k+1 terbukti. Dalam hal ini, subjek S_6 mengalami kesalahan konsep. Subjek S_6 mengetahui langkah-langkah induksi matematika tetapi tidak mengetahui arti dari setiap langkah-langkah tersebut.

d) Menarik Kesimpulan dari Pernyataan


Kesimpulan : Pernyataan firman tersebut terbentuk dari rumus bentuk umum yaitu $3^{2n} + 2^{2n+2}$ yg dpt dibuktikan kebenarannya dengan menggunakan induksi matematika

Gambar 4.22
Jawaban Tertulis Subjek S_6 dalam Membuat Kesimpulan

Berdasarkan gambar 4.22, subjek S_6 membuat kesimpulan yaitu pernyataan Firman tersebut terbentuk dari rumus bentuk umum $3^{2n} + 2^{2n+2}$ yang dapat dibuktikan kebenarannya dengan menggunakan induksi matematika. Untuk lebih jelasnya, maka dilakukan wawancara dengan subjek S_6. Berikut ini petikan wawancara subjek S_6 dalam membuat kesimpulan.

$P_{6.1.29}$: Apa yang dapat kamu simpulkan setelah mengerjakan soal ini?

$S_{6.1.29}$: Kesimpulan yang saya peroleh yaitu pernyataan Firman tersebut terbentuk dari rumus bentuk umum yaitu $3^{2n} + 2^{2n+2}$ yang dapat dibuktikan kebenarannya dengan menggunakan induksi matematika.

$P_{6.1.30}$: Bagaimana cara kamu memperoleh sebuah kesimpulan seperti ini?

$S_{6.1.30}$: Dari semua pembuktian yang dilakukan mbak

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_6 memperoleh kesimpulan dengan melihat semua pembuktian yang sudah dilakukan. Hal ini sesuai dengan petikan wawancara $S_{6.1.30}$.

e) Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen

Pada indikator ini, subjek S_6 diharapkan bisa memeriksa kembali kebenaran dari suatu argumen atau jawaban yang sudah ditemukan. Berkut ini petikan wawancara subjek S_6 dalam memeriksa kembali jawabannya:

$P_{6.1.31}$: Bagaimana cara kamu memeriksa bahwa jawaban yang kamu peroleh sudah benar?

$S_{6.1.31}$: Ya kita cek lagi langkah-langkah induksi matematika mbak

$P_{6.1.32}$: Selain dicek, adakah cara lain untuk memeriksa jawaban?

$S_{6.1.32}$: hmm pakai substitusi mbak, misal n=2 ke bentuk umum tadi, hmm nanti diperoleh hasil 145 yang habis dibagi 5.

$P_{6.1.33}$: Tau darimana kok habis dibagi 5?

$S_{6.1.33}$: nilai belakangnya 5 mbak.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_6 memeriksa jawaban yang sudah diperoleh yaitu dengan melihat kembali langkah-langkah dari induksi matematika. Selain itu, subjek S_6 juga mensubstitusikan nilai n=2 ke bentuk umum sehingga diperoleh 145 yang habis dibagi 5. Subjek S_6 menggunakan nilai satuan untuk menunjukkan bahwa bilangan tersebut habis dibagi 5.

f) Permasalahan yang Dihadapi Subjek

Dalam mengerjakan soal ini, subjek S_6 mengalami sebuah masalah. Berikut ini petikan wawancara tentang permasalahan yang dihadapi subjek S_6 selama menyelesaikan soal:

$P_{6.1.34}$: Permasalahan apa saja yang kamu hadapi selama melakukan pembuktian induksi matematika?

$S_{6.1.34}$: Yang pertama itu mencari bentuk umumnya mbak. kemudian kalau induksi matematika pada bagian n=k+1 sulit untuk membuktikkannya.

$P_{6.1.35}$: Mengapa itu masalah bagi kamu?

$S_{6.1.35}$: tidak tau mbak susah aja untuk mengerjakannya.

$P_{6.1.36}$: Oh gitu, ok terima kasih

$S_{6.1.36}$: Iya mbak sama-sama.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_6 mengalami permasalahan dalam mencari bentuk umum dan pada pembuktian n=k+1 benar. Subjek S_6 kesulitan dalam melakukan hal tersebut.

4. **Analisis Data Subjek S_6**

Berdasarkan paparan data diatas, berikut ini ialah hasil analisis penalaran matematis subjek S_6 dalam melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika yaitu:

a) **Mengajukan Dugaan**

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_6 memperoleh informasi dari soal yaitu pernyataan-pernyataan matematika yang habis dibagi 5. Kemudian, subjek S_6 mulai berpikir dalam mencari bentuk umum yang sesuai contoh dan melakukan pembuktian. Subjek S_6 menghasilkan bentuk umum $3^{2n} + 2^{2n+2}$, dengan n anggota bilangan asli. Subjek S_6 menggambar bentuk awan yang mengelilingi bentuk umum yang dihasilkan untuk menunjukkan posisi bentuk umum pada lembar jawaban. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir acak konkret berdasarkan pada kenyataan dan kreatif.

.Subjek S_6 menggunakan pola untuk memperoleh bentuk umum yang dinginkan Firman. Subjek S_5 melihat pola dari nilai pangkat yang merupakan bilangan genap dengan selisih 2. Dengan cara ini, subjek S_6 memperoleh bentuk umum yang sesuai dengan contoh Firman. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir acak konkret mengerjakan segala sesuatu dengan cara mereka sendiri.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_6 dalam mengajukan dugaan yaitu dengan menuliskan kembali informasi yang diperoleh, melihat suatu pola yang ada sehingga menghasilkan pernyataan baru yang diinginkan.

b) **Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika**

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_5 melakukan pembuktikan dengan dua cara. Cara pertama, subjek S_5 menggunakan pembuktian secara induktif yaitu mensubstitusikan nilai *n=1,2,3* ke bentuk umum sehingga menghasilkan jawaban yang sesuai dengan contoh. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir acak konkret cenderung bersikap coba-coba. Cara kedua, subjek S_6 menggunakan pembuktian induksi matematika. Subjek S_6 memilih pembuktian menggunakan induksi matematika karena ia pernah mendapatkan materi seperti ini waktu SMA. Selain itu, subjek S_6 belum mengetahui ciri-ciri khusus dari induksi matematika.

Subjek S_6 melakukan pembuktian induksi matematika dengan menggunakan prinsip induksi matematis yaitu membuktikan P(1) benar, P(k) dan P(k+1) benar. Pada tahap P(1) terbukti benar. Pada tahap P(k+1) diasumsikan benar. Pada tahap ini, subjek S_6 menguraikan bilangan dan melakukan pemisalan *25p*, dengan *p* anggota bilangan asli. Pada tahap membuktikan $n = k + 1$, subjek S_6 melakukan manipulasi matematika yaitu $3^{2k} \cdot 9 + 2^{2k} \cdot 16 = 3(9^{2k} + 5) + 4(8^{2k} \cdot 2{,}5)$ dan $3(9^{2k} + 8^{2k} \cdot 4) + 25 = 3\left(\sqrt{9}^{2k} + \sqrt[3]{8}^{2k} \cdot 4\right) + 25.$ Dalam hal ini, subjek S_6 mengalami kesalahan konsep karena manipulasi yang dilakukan oleh subjek S_6 tidak sesuai dengan jawaban sebelumnya. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa pemikir acak konkret mempunyai sikap eksperimental yang diiringi dengan perilaku yang kurang struktur, suka mengerjakan segala sesuatu dengan cara mereka sendiri, dan lebih terorientasi pada proses daripada hasil.

Subjek S_6 melakukan substitusi p=1 ke hasil akhir $n = k + 1 = 25(3p + 1)$. Dari substitusi tersebut, subjek S_6 memperoleh hasil yang habis dibagi 25 tidak memiliki sisa sehingga S_{k+1} terbukti benar. Subjek S_6 lebih terfokus pada nilai *p* dan *25*. Padahal berapapun nilai *p* tentunya akan habis dibagi 25 jika hasil akhirnya $25(3p + 1)$. Namun, hasil akhir dari n=k+1 bukan hasil yang tepat karena subjek S_6 mengalami kesalahan konsep selama melakukan pembuktian n=k+1. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa pemikir acak berdasarkan pada kenyataan dan cenderung bersikap coba-coba.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_6 dalam melakukan pembuktian induksi matematika yaitu dengan menggunakan metode substitusi, menggunakan prinsip induksi matematis, melakukan manipulasi matematika, dan menggunakan metode substitusi lagi. Subjek S_6 tidak melakukan pembuktian $n = k + 1$ dengan tepat.

c) Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_6 mengetahui prinsip induksi matematis atau langkah-langkah dari induksi matematika. Namun, subjek S_6 tidak dapat menjelaskan arti dari langkah-langkah induksi matematika.

Subjek S_6 menjelaskan bahwa n=1 dan n=k saling berhubungan sehingga subjek S_6 menggunakan pemisalan *25p*, dengan p anggota bilangan asli pada n=k. Selain itu, subjek S_6 juga menjelaskan bahwa bilangan yang habis dibagi 25 tentunya juga habis dibagi 5.

Subjek S_6 menggunakan sifat distributif, sifat asosiatif, dan sifat bilangan berpangkat dalam menguraikan operasi bilangan. Namun, tidak semua sifat distributif yang dilakukan subjek S_6 menghasilkan jawaban yang benar. Ada bagian sifat distributif yang mengalami kesalahan konsep yaitu $3^{2k} \cdot 9 + 2^{2k} \cdot 16 = 3(9^{2k} + 5) + 4(8^{2k} \cdot 2{,}5)$.
Ada juga bagian sifat asosiatif yang mengalami kesalahan konsep yaitu $3 \cdot 9^{2k} + 4 \cdot 8^{2k} + 25 = 3(9^{2k} + 8^{2k} \cdot 4) + 25$.

Subjek S_6 juga melakukan perpindahan nilai pangkat seperti $3^{2k} \cdot 9 = 3 \cdot 9^{2k}$. Subjek S_6 juga tiba-tiba menggunakan sifat akar seperti $3\left(9^{2\mathrm{k}} + 8^{2\mathrm{k}} \cdot 4\right) + 25 = 3\left(\sqrt{9}^{2\mathrm{k}} + \sqrt[3]{8}^{2\mathrm{k}} \cdot 4\right) + 25$ untuk menghasilkan angka 3 dan 2. Subjek S_6 juga melakukan manipulasi matematika seperti $3 \cdot 9^{2k} = 3 \cdot 9^{2k} + 24 - 24 - 9 = 3 \cdot 9^{2k} + 24 - 9 = 3 \cdot 9^{2k} + 15$. Subjek S_6 tiba-tiba menghilangkan angka 24 karena 24-24=0. Dalam hal ini, subjek S_6 banyak mengalami kesalahan konsep. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa pemikir acak konkret mempunyai sikap eksperimental yang diiringi dengan perilaku yang kurang struktur dan suka menemukan alternatif. Selain itu, hal ini juga sependapat dengan Thobias dan Chintya Ulrich yang menyatakan bahwa para pemikir acak konkret sulit menghadapi hal-hal yang rutin dan sulit mengulang sesuatu yang sudah dikerjakan.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_6 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi lebih banyak terjadi kesalahan konsep daripada sesuai konsep.

d) Menarik Kesimpulan dari Pernyataan

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_6 dapat membuat sebuah kesimpulan yaitu pernyataan Firman tersebut terbentuk dari rumus bentuk umum $3^{2n} + 2^{2n+2}$ yang dapat dibuktikan kebenarannya dengan menggunakan induksi matematika. Kesimpulan ini diperoleh subjek S_6 dari semua pembuktian yang sudah dilakukan.

e) Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_6 melakukan pemeriksaan kembali suatu argumen dengan melakukan substitusi n=2 ke bentuk umum. Subjek S_6 hanya menggunakan nilai satuan untuk menunjukkan bahwa pernyataan tersebut habis dibagi 5.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_6 dalam memeriksa kesahihan suatu argumen dengan melakukan substitusi, dan melihat nilai satuan.

f) Permasalahan yang Dihadapi Subjek

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_6 mengalami masalah pada saat mencari bentuk umum dan pada tahap pembuktian P(k+1). Hal ini sejalan dengan pendapat Polya yang menyatakan bahwa salah satu masalah yang dihadapi seseorang adalah masalah yang berkaitan dengan pembuktian yaitu menunjukkan bahwa suatu pernyataan itu benar atau salah dan tidak keduannya. Selain itu, subjek S_6 juga mengalami kesalahan konsep pada tahap ini. Subjek S_6 tidak mengetahui bahwa konsep yang digunakan salah.

5. Triangulasi Data

Berdasarkan deskripsi dan analisis diatas, peneliti melakukan triangulasi sumber untuk mengetahui keabsahan data dari kedua sumber. Berikut ini triangulasi sumber penalaran matematis subjek S_5 dan subjek S_6 dalam melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika:

Tabel 4.4
Triangulasi Data Penalaran Matematis Subjek S_5 dan Subjek S_6 Dalam Melakukan Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika

Indikator	Subjek S_5	Subjek S_6
Mengajukan Dugaan	• Menulis informasi yang diperoleh dari soal. • Menghasilkan bentuk umum $3^{2x} + 2^{2x+2}$, x anggota bilangan asli. • Menggunakan pola dari nilai pangkat .	• Menulis informasi yang diperoleh dari soal. • Menghasilkan bentuk umum $3^{2n} + 2^{2n+2}$. • Menggunakan pola dari nilai pangkat.
Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika	• Menggunakan 2 cara pembuktian yaitu dengan metode substiusi dan pembuktian induksi matematika. • Menggunakan induksi matematika karena waktu SMA pernah mendapatkan materi ini. • Menggunakan prinsip induksi matematis. • Memberi tanda chek list untuk menujukkan bahwa jawaban tersebut benar. • Melakukan manipulasi matematika untuk	• Menggunakan 2 cara pembuktian yaitu dengan metode substiusi dan pembuktian induksi matematika. • Menggunakan induksi matematika karena waktu SMA pernah mendapatkan materi ini. • Menggunakan prinsip induksi matematis. • Melakukan manipulasi matematika untuk memperoleh tujuan. Dalam hal ini, terjadi

	memperoleh tujuan. Dalam hal ini, terjadi kesalahan konsep. • Menggunakn substitusi lagi untuk menunjukkan jawaban tersebut benar. • Proses pembuktian yang dilakukan tidak tepat.	kesalahan konsep. • Menggunakan substitusi lagi untuk menunjukkan jawaban tersebut benar. • Proses pembuktian yang dilakukan tidak tepat.
Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi	• Mengetahui langkah-langkah induksi matematika. • Tidak dapat menjelaskan arti dari langkah-langkah induksi matematika. • Menggunakan sifat distributif, sifta asosiatif dan sifat bilangan berpangkat. • Ada bagian sifat distributif, sifat, asosiatif, sifat bilangan berpangkat yang tidak sesuai konsep. • Menggunakan manipulasi matematika, sifat akar yang tidak sesuai konsep • Menggunakan metode substitusi	• Mengetahui langkah-langkah induksi matematika. • Tidak dapat menjelaskan langkah-langkah induksi matematika. • Menggunakan sifat distributif, dan sifat bilangan berpangkat. • Ada bagian sifat distributif, sifat, , sifat penjumlahan bilangan berpangkat yang tidak sesuai konsep. • Menggunakan metode substitusi untuk menunjukkan pernyataan tersebut benar.

	untuk menunjukkan pernyataan tersebut benar. • Merasa yakin bahwa P(k+1) terbukti karena didukung oleh hasil dari substitusi yang menunjukkan habis dibagi 5.	• Merasa yakin bahwa P(k+1) terbukti karena didukung oleh hasil dari substitusi yang menunjukkan habis dibagi 5.
Menarik Kesimpulan dari Pernyataan	• Dapat membuat suatu pernyataan baru. • Melihat hasil pekerjaan untuk memperoleh pernyataan baru.	• Dapat membuat suatu pernyataan baru. • Melihat hasil pekerjaan untuk memperoleh pernyataan baru.
Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen	• Menggunakan metode substitusi. • Menggunakan nilai satuan	• Menggunakan metode substitusi. • Menggunakan nilai satuan

Berdasarkan tabel 4.4 dapat dilihat bahwa data subjek S_5 dan subjek S_6 memiliki kesamaan dan konsisten sehingga data yang diambil dapat dikatakan valid. Pada indikator mengajukan dugaan, kedua subjek sama-sama menuliskan informasi terlebih dahulu dilembar jawaban, kedua subjek dapat membuat bentuk umum yang hampir sama. Kedua subjek sama-sama menggunakan pola dari nilai pangkat dalam memperoleh suatu bentuk umum yang diinginkan.

Pada indikator menyusun pembuktian dengan menggunakan induksi matematika, kedua subjek menggunakan pembuktian secara induktif dengan metode substitusi lalu menggunakan pembuktian induksi matematika. alasan kedua subjek memilih induksi matemtika karena pernah mendapatkan materi seperti ini pada waktu SMA. Kedua subjek menerapkan prinsip induksi matematis. Kedua subjek melakukan manipulasi matematika untuk memperoleh hasil yang dituju. Namun, kedua subjek sama-sama mengalami kesalahan konsep. Kedua subjek menggunakan metode substitusi lagi untuk meyakinkan pembuktian yang sudah dilakukan menghasilkan jawaban yang benar. Kedua subjek tidak dapat melakukan proses pembuktian dengan tepat.

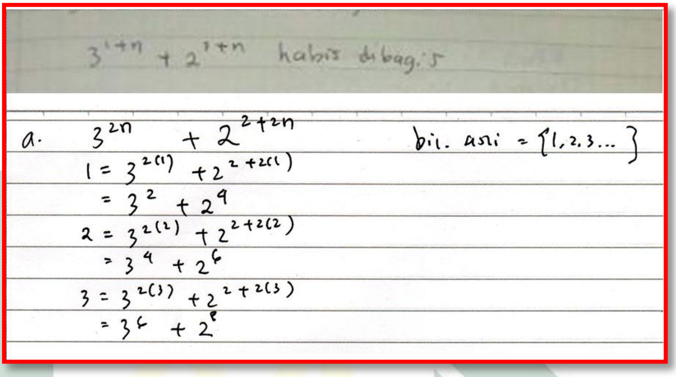
Pada indikator memberikan alasan terhadap kebenaran solusi, kedua subjek mengetahui langkah-langkah dari induksi matematika. Namun, kedua subjek tidak dapat menjelaskan arti dari setiap langkah-langkah induksi matematika. Sedangkan subjek S_2 mengetahui arti dari setiap langkah-langkah induksi matematika. Kedua subjek menggunakan sifat distributif, sifat asosiatif dan bilangan berpangkat untuk menguraikan jawaban. Kedua subjek sama-sama juga mengalami kesalahan konsep dalam melakukan sifat-sifat tersebut. Kedua subjek menggunakan metode substitusi untuk menunjukkan pernyataan tersebut benar. Kedua subjek merasa yakin bahwa P(k+1) terbukti benar karena didukung oleh hasil substitusi tersebut.

Pada indikator menarik kesimpulan dari pernyatan, kedua subjek dapat membuat kesimpulan atau pernyataan baru. Kedua melihat hasil pekerjaan untuk membuat pernyataan baru. Sedangkan pada indikator memeriksa keshahihan suatu argumen, kedua subjek menggunakan metode substitusi untuk melihat hasil yang diperoleh sudah benar atau sesuai soal. Kedua subjek menggunakan nilai satuan untuk mengetahui bilangan tersebut habis dibagi 5.

D. Penalaran Matematis Mahasiswa Acak Abstrak dalam Melakukan Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika

1. Deskripsi Subjek S_7

a) Mengajukan Dugaan


$3^{1+n} + 2^{3+n}$ habis dibagi 5

a. $3^{2n} + 2^{2+2n}$ bil. asli = {1, 2, 3...}

$1 = 3^{2(1)} + 2^{2+2(1)}$

$= 3^2 + 2^4$

$2 = 3^{2(2)} + 2^{2+2(2)}$

$= 3^4 + 2^6$

$3 = 3^{2(3)} + 2^{2+2(3)}$

$= 3^6 + 2^8$

Gambar 4.23
Jawaban Tertulis Subjek S_7 dalam Mengajukan Dugaan

Berdasarkan gambar 4.23, subjek S_7 awalnya menulis bentuk umumnya adalah $3^{1+n} + 2^{3+n}$. Namun, subjek S_7 mengubah jawabannya menjadi $3^{2n} + 2^{2+2n}$ dengan n bilangan asli yaitu dimulai dari 1,2,3, dan seterusnya. Kemudian subjek S_7 mensubstitusikan nilai $n = 1,2,3$ ke bentuk umum tersebut untuk menunjukkan bahwa hasilnya seperti contoh yang diberikan oleh Firman. Berikut ini petikan hasil wawancara subjek S_7 dalam mengajukan dugaan:

$P_{7.1.1}$	:	Informasi-informasi apa saja yang kamu peroleh dari`soal ini?
$S_{7.1.1}$	:	Terdapat suatu pernyataan yang habis dibagi 5, disini firman menulis pernyataan pertama $3^2 + 2^4$ habis 5, pernyataan kedua $3^4 + 2^6$ habis 5, pernyataan ketiga $3^6 + 2^8$ habis 5. Terus mencari bentuk umum dari pernyataan tersebut dan dibuktikan kebenaran dari bentuk umum serta membuat kesimpulan yang diperoleh

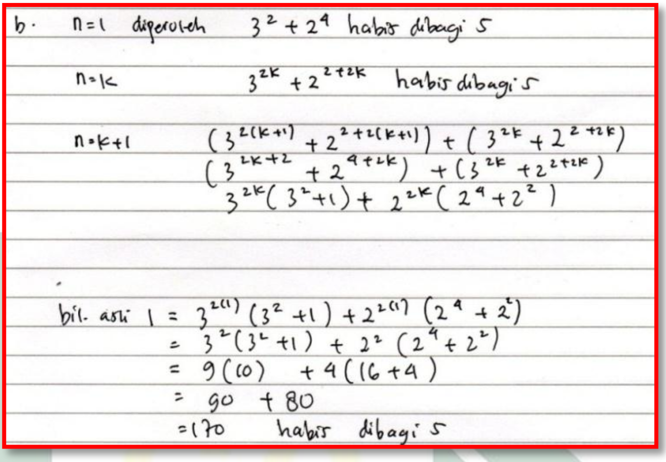
$P_{7.1.2}$	:	Terus, apa yang kamu pikirkan setelah mendapatkan informasi tersebut?
$S_{7.1.2}$	:	saya berpikir mencari bentuk umum dari ketiga pernyataan tersebut. Awalnya saya menghasilkan beberapa bentuk umum. Namun, ketika saya substitusikan n=1,2,3 ternyata tidak seperti contoh. Kemudian saya amati contoh-contoh yang sudah diberikan. Lah dari pengamatan tersebut ternyata nilai pangkatnya berhubungan sama kelipatan 2.
$P_{7.1.3}$	:	Awalnya kamu menghasilkan bentuk umum seperti apa?
$S_{7.1.3}$	:	$3^{1+n}+2^{3+n}$
$P_{7.1.4}$	:	Bagaimana cara kamu mengetahui kalau bentuk umum $3^{1+n}+2^{3+n}$ merupakan bentuk umum yang salah?
$S_{7.1.4}$	:	Tadi itu mbak. Saya hanya melihat pada pernyataan pertama. Jadi jika n=1 saya subtitusikan ke $3^{1+n}+2^{3+n}$ menghasilkan 3^2+2^4. Sesuai dengan yang ada disoal. Tetapi, setelah itu saya cek lagi. Ternyata bentuk umum $3^{1+n}+2^{3+n}$ tidak berlaku di pernyataan kedua dan ketiga.
$P_{7.1.5}$	:	Lalu bagaimana bentuk umum yang sebenarnya dari pernyataan tersebut sehingga habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli?
$S_{7.1.5}$	:	Bentuk umumnya adalah $3^{2n}+2^{2+2n}$
$P_{7.1.6}$	:	Coba jelaskan proses memperoleh bentuk umum $3^{2n}+2^{2+2n}$!
$S_{7.1.6}$	:	Yang pertama 3^2+2^4 , yang kedua 3^4+2^6 , yang ketiga 3^6+2^8. Untuk yang pangkat dari 3 itukan pangkatnya itu 2,4,6 merupakan kelipatan 2 maka pangkatnya 3 itu $2n$ dan untuk 2 itu kan 4,6,8 lah itu kan diperoleh 2 kalinya dari pangkat 3 ditambah 2 jadi pangkatnya 2 itu $2n+2$. Maka diperoleh $3^{2n}+2^{2+2n}$. Setelah mendapat

		bentuk umum tersebut dicek lagi, untuk n=1,2,3 ternyata sesuai contoh yang sudah diberikan.
$P_{7.1.7}$	:	Maksudnya 2 kalinya pangkat 3 itu bagiamana?
$S_{7.1.7}$	:	Hmm yapa ya, gini, kan untuk yang pertama nilai pangkat 2 itu 4. Lah 4 bisa diperoleh dari $2 \times 1 + 2$. Sedangkan unuk yang kedua, 6 itu diperoleh dari $2 \times 2 + 2$. Sehingga untuk 2 itu pangkatnya $2n + 2$
$P_{7.1.8}$	:	Mengapa kamu berpikir seperti itu?
$S_{7.1.8}$	:	Karena melihat dari polanya sudah dapat menunjukkan bentuk umum.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_7 memperoleh informasi dari soal berupa pernyataan matematika yang habis dibagi 5 yaitu $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5, $3^4 + 2^6$ habis dibagi 5, $3^6 + 2^8$ habis dibagi 5. Selain itu, subjek S_7 mengetahui perintah atau pertanyaan dari soal yaitu mencari bentuk umum, membuktikan kebenaran bentuk umum dan membuat kesimpulan. Subjek S_7 langsung berpikir mencari bentuk umum. Pada awalnya, subjek S_7 langsung menulis bentuk umum $3^{1+n} + 2^{3+n}$. Subjek S_7 memperoleh bentuk umum tersebut hanya melihat contoh pernyataan matematika. Setelah itu, subjek S_7 menyadari bahwa bentuk umum yang dihasilkan tadi adalah salah karena tidak sesuai dengan pernyatan kedua dan ketiga.

Subjek S_7 menghasilkan bentum umum baru yang sesuai contoh yaitu $3^{2n} + 2^{2+2n}$. Subjek S_7 menghasilkan bentuk umum tersebut dengan melihat pola pada pangkatnya. Subjek S_7 menyatakan bahwa pangkat dari 3 yaitu 2,4,6 merupkan bilangan kelipatan 2 sehingga 2n. Sedangkan pangkat dari 2 yaitu 4,6,8 berhubungan dengan nilai pangkat dari 3 sehingga 2n+2.

b) Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika


b. n=1 diperoleh 3^2+2^4 habis dibagi 5

n=k $3^{2k}+2^{2+2k}$ habis dibagi 5

n=k+1 $(3^{2(k+1)}+2^{2+2(k+1)})+(3^{2k}+2^{2+2k})$

$(3^{2k+2}+2^{4+2k})+(3^{2k}+2^{2+2k})$

$3^{2k}(3^2+1)+2^{2k}(2^4+2^2)$

bil. asli 1 = $3^{2(1)}(3^2+1)+2^{2(1)}(2^4+2^2)$

= $3^2(3^2+1)+2^2(2^4+2^2)$

= 9(10) + 4(16+4)

= 90 + 80

=170 habis dibagi 5

Gambar 4.24
Jawaban Tertulis Subjek S_7 dalam Melakukan Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika

Berdasarkan gambar 4.24, subjek S_7 membuktikan bentuk umum $3^{2n}+2^{2+2n}$ dengan induksi matematika. Subjek S_7 mensubstitusikan nilai n=1 ke $3^{2n}+2^{2+2n}$ sehingga diperoleh 3^2+2^4 habis dibagi 5. Kemudian, subjek S_7 mensubstitusikan n=k sehingga diperoleh $3^{2k}+2^{2+2k}$ habis dibagi 5. Lalu, subjek S_7 mensubstitusikan n=k+1 sehinngga $3^{2(k+1)}+2^{2+2(k+1)}$ sehingga diperoleh $3^{2(k+1)}+2^{2+2(k+1)}+3^{2k}+2^{2+2k}=3^{2k+2}+2^{4+2k}+3^{2k}+2^{2+2k}=3^{2k}(3^2+1)+2^{2k}(2^4+2^2)$. Kemudian, subjek S_7 mensubstitusikan nilai n=1 ke $3^{2k}(3^2+1)+2^{2k}(2^4+2^2)$ sehingga diperoleh hasil 170 yang habis dibagi 5. Berikut ini petikan wawancara subjek S_7 dalam melakukan pembuktian induksi matematika:

$P_{7.1.9}$: Terus, Bagaimana cara kamu membuktikan bahwa $3^{2n}+2^{2+2n}$ habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli?

$S_{7.1.9}$: Dengan induksi matematika

$P_{7.1.10}$: Mengapa kamu memilih jenis pembuktian induksi matematika?

$S_{7.1.10}$: Karena ini berkaitan dengan bilangan asli. Dulu waktu SMA kalau berhubungan sama bilangan asli itu selalu dibuktikan dengan induksi matematika.

$P_{7.1.11}$: Coba jelaskan proses pembuktian induksi matematika?

$S_{7.1.11}$: Hmm, yang pertama itu untuk n=1. Jika n=1 di substitusikan maka diperoleh $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5. Kemudian untuk n=k diperoleh $3^{2k} + 2^{2+2k}$ diasumsikan benar. Kemudian langkah kedua yaitu n=k dapat dilibatkan dalam melakukan pembuktian n=k+1 sehingga $3^{2(k+1)} + 2^{2+2(k+1)}$. Lalu kita tambahkan dengan n=k sehingga $3^{2(k+1)} + 2^{2+2(k+1)} + 3^{2k} + 2^{2+2k}$. Setelah dijumlahkan lalu didistributifkan sehingga $3^{2(k+1)} + 2^{2+2(k+1)} + 3^{2k} + 2^{2+2k} = 3^{2k+2} + 2^{4+2k} + 3^{2k} + 2^{2+2k}$, kemudian kita kelompokkan menjadi 2 kelompok. Kelompok yang bilangan pokoknya 3 dan kelompokyang bilangan pokoknya 2 (*maksudnya subjek* $3^{2k+2} + 3^{2k} + 2^{4+2k} + 2^{2+2k}$). Setelah itu kita distributifkan sehingga menjadi $3^{2k}(3^2 + 1) + \ 2^{2k}(2^4 + 2^2)$. Lah ini dianggap langkah terakhir dari n=k+1. Kemudian dicoba dengan bilangan asli misal n=1. substitusikan n=1 ke $3^{2k}(3^2 + 1) + \ 2^{2k}(2^4 + 2^2)$ menjadi $3^2(3^2 + 1) + \ 2^2(2^4 + 2^2) = 9(10) + 4(20) = 90 + 80 = 170$. 170 ini habis dibagi 5. Jadi. Terbukti.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_7 dalam membuktikan bentuk umum $3^{2n} + 2^{2+2n}$ menggunakan pembuktian induksi matematika. Subjek S_7 memilih pembuktian induksi matematika karena jika berhubungan dengan bilangan asli maka dibuktikan dengan induksi matematika. Informasi tersebut, diperoleh subjek S_7 pada waktu SMA. Pada petikan wawancara $S_{7.1.11}$, subjek S_7 melakukan pembuktian induksi matematika dengan tiga langkah yaitu membuktikan n=1, n=k dan n=k+1 benar. Penjelasan untuk petikan wawancara ini hampir sama dengan yang dijelaskan oleh peneliti diatas.

Dari petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa pada tahap membuktikan n=k+1 subjek S_7 menjumlahkan hasil substitusi n=k+1 dengan hasil n=k. Selain itu, subjek S_7 mengelompokkan $3^{2k+2} + 2^{4+2k} + 3^{2k} + 2^{2+2k}$ sehingga menjadi $3^{2k+2} + 3^{2k} + 2^{4+2k} + 2^{2+2k} = 3^{2k}(3^2 + 1) + 2^{2k}(2^4 + 2^2)$. Jawaban ini dianggap subjek S_7 sebagai jawaban akhir dai n=k+1 sehingga ia mensubstitusikan k=1 ke jawaban tersebut. Dari substitusi tersebut, subjek S_7 memperoleh bilangan 170 yang habis dibagi 5. Jadi, subjek S_7 menjelaskan n=k+1 terbukti.

c) Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi

Pada indikator ini, subjek S_7 diharapkan dapat memberikan alasan terhadap kebenaran solusi yang telah dibuatnya. Berikut ini petikan wawancara subjek S_7 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi:

$P_{7.1.12}$	:	Kok tau $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5?
$S_{7.1.12}$	:	Ya kan $3^2 = 9$, $2^4 = 16$ maka 9+16=25 habis dibagi 5.
$P_{7.1.13}$	:	mengapa pada pembuktian n=k+1 harus dijumlahkan dengan n=k?
$S_{7.1.13}$	:	tidak tau mbak, seingat saya diajarkan dulu begitu
$P_{7.1.14}$	:	jadi, apakah bisa satu ruas ditambah dengan bilangan ?
$S_{7.1.14}$	:	hmm bisa saja mbak.
$P_{7.1.15}$	:	Terus, mengapa $3^{2(k+1)}$ menjadi 3^{2k+2} ?
$S_{7.1.15}$	:	Pakai sifat distributif yang itu lho mbak $a(b + c) = ab + ac$
$P_{7.1.16}$	:	Terus kenapa $3^{2k+2} + 2^{4+2k} + 3^{2k} + 2^{2+2k} = 3^{2k}(3^2 + 1) + 2^{2k}(2^4 + 2^2)$?
$S_{7.1.16}$	:	Itu mbak setelah dikelompokkan nanti akan

3^{2k+2} dan 3^{2k} berkumpul. $3^{2k+2} = 3^{2k} \cdot 3^2$. Jadi kalau $3^{2k+2} + 3^{2k} = 3^{2k}(3^2 + 1)$. Begitu sebaliknya mengelompokkan 2^{4+2k} dan 2^{2+2k} dan $2^{4+2k} = 2^4 \cdot 2^{2k}$, $2^{2+2k} = 2^2 \cdot 2^{2k}$. Jadi kalau $2^{4+2k} + 2^{2+2k} = 2^{2k}(2^4 + 2^2)$.

$P_{7.1.17}$: Mengapa $3^{2k+2} = 3^{2k} \cdot 3^2$, $2^{4+2k} = 2^4 \cdot 2^{2k}$, dan $2^{2+2k} = 2^2 \cdot 2^{2k}$?

$S_{7.1.17}$: Karena pakai sifat yang $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat dilihat bahwa subjek S_7 menjelaskan proses $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5. Pada lembar jawaban, subjek S_7 tidak menuliskan prosesnya sedangkan pada petikan wawancara $S_{7.1.12}$ ia menjelaskan prosesnya yaitu $3^2 = 9$, dan $2^4 = 16$ maka 9+16=25, 25 habis dibagi 5. Subjek S_7 menjumlahkan hasil substitusi n=k+1 dengan n=k karena ia pernah mendapatkan cara penyelesaian seperti itu. Subjek S_7 menjelaskan bahwa menambahkan bilangan dalam satu ruas bisa saja dilakukan. Subjek S_7 juga menggunakan sifat distributif dalam menguraikan jawaban. Berikut ini lanjutan petikan wawancara subjek S_7 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi:

$P_{7.1.16}$: Terus kenapa $3^{2k+2} + 2^{4+2k} + 3^{2k} + 2^{2+2k} = 3^{2k}(3^2 + 1) + 2^{2k}(2^4 + 2^2)$?

$S_{7.1.16}$: Itu mbak setelah dikelompokkan nanti akan 3^{2k+2} dan 3^{2k} berkumpul. $3^{2k+2} = 3^{2k} \cdot 3^2$. Jadi kalau $3^{2k+2} + 3^{2k} = 3^{2k}(3^2 + 1)$. Begitu sebaliknya mengelompokkan 2^{4+2k} dan 2^{2+2k} dan $2^{4+2k} = 2^4 \cdot 2^{2k}$, $2^{2+2k} = 2^2 \cdot 2^{2k}$. Jadi kalau $2^{4+2k} + 2^{2+2k} = 2^{2k}(2^4 + 2^2)$.

$P_{7.1.17}$: Mengapa $3^{2k+2} = 3^{2k} \cdot 3^2$, $2^{4+2k} = 2^4 \cdot 2^{2k}$, dan $2^{2+2k} = 2^2 \cdot 2^{2k}$?

$S_{7.1.17}$: Karena pakai sifat yang $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

$P_{7.1.18}$: Jadi dari step $3^{2k}(3^2 + 1) + 2^{2k}(2^4 + 2^2)$ apakah bisa dikatakan terbukti?

$S_{7.1.18}$: Terbukti mbak

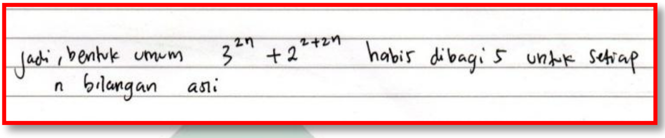
$P_{7.1.19}$	:	Mengapa bisa terbukti?
$S_{7.1.19}$	:	Ya tadi, kalau di masukkan bilangan asli yaitu 1 dia menghasilkan bilangan 170 yang habis dibagi 5.
$P_{7.1.20}$	:	Apa makna dari habis dibagi 5?
$S_{7.1.20}$	:	Kelipatan 5 mbak. Tapi saya bingung untuk menyimbolkannya kelipatan 5 seperti apa.
$P_{7.1.21}$	:	Mengapa langkah-langkahnya harus membuktikan P(1) benar, P(k) dan P(k+1) benar?
$S_{7.1.21}$	:	Karena itu sudah bagian dari proses induksi matematika.
$P_{7.1.22}$	:	Terus maknanya dari P(1), P(k) dan P(k+1) benar itu apa?
$S_{7.1.22}$	:	Hmm kalau P(1) benar maka kemungkinan semua bilangan asli benar karena n=1 benar. Dan P(k) itu hanya mengganti sebuah huruf saja. Sedangkan jika P(k+1) benar maka bilangan selanjutnya juga benar.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_7 menggunakan sifat asosiatif pada $3^{2k+2}+2^{4+2k}+3^{2k}+2^{2+2k}=3^{2k}(3^2+1)+\ 2^{2k}(2^4+2^2)$. Subjek S_7 menjelaskan bahwa 3^{2k+2} dikelompokkan dengan 3^{2k} dan 2^{4+2k} dan 2^{2+2k}. Subjek S_7 menguraikan $3^{2k+2}=3^{2k}\cdot 3^2$ sehingga $3^{2k+2}+3^{2k}=3^{2k}(3^2+1)$ $2^{4+2k}=2^4\cdot 2^{2k}$ dan $2^{2+2k}=2^2\cdot 2^{2k}$ sehingga $2^{4+2k}+2^{2+2k}=2^{2k}(2^4+2^2)$. Subjek S_7 juga menggunakan sifat bilangan berpangkat dalam menguraikan jawaban.

Subjek S_7 yakin bahwa n=k+1 terbukti benar habis dibagi 5 karena didukung oleh hasil substitusi k=1 ke $3^{2k}(3^2+1)+\ 2^{2k}(2^4+2^2)$. Subjek S_7 mengetahui arti habis dibagi 5 yaitu hasilnya merupakan kelipatan 5. Namun, subjek S_7 tidak dapat menyimbolkan kelipatan 5.

Subjek S_7 mengetahui bahwa langkah-langkah dari induksi matematika adalah P(1) benar, P(k) dan P(k+1) benar. subjek S_7 menyebutkan arti dari P(1) benar yaitu jika n=1 benar maka kemungkinan untuk semua bilangan asli juga benar. Sedangkan arti dari P(k) yaitu hanya mengganti huruf saja. Selain itu, menurut subjek S_7 arti P(k+1) benar yaitu jika n=k+1 benar maka bilangan selanjutnya juga benar.

d) Menarik Kesimpulan dari Pernyataan


Jadi, bentuk umum $3^{2n} + 2^{2+2n}$ habis dibagi 5 untuk setiap n bilangan asli

Gambar 4.25
Jawaban Tertulis Subjek S_7 dalam Membuat Kesimpulan

Berdasarkan gambar 4.25, subjek S_7 dapat membuat kesimpulan yaitu bentuk umum $3^{2n} + 2^{2+2n}$ habis dibagi 5 untuk setiap n bilangan asli. Berikut ini petikan wawancara subjek S_7 dalam membuat kesimpulan:

$P_{7.1.24}$: Apa yang dapat kamu simpulkan setelah mengerjakan soal ini?

$S_{7.1.24}$: Jadi bentuk umum $3^{2n} + 2^{2+2n}$ habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli.

$P_{7.1.25}$: Bagaimana cara kamu memperoleh sebuah kesimpulan seperti ini?

$S_{7.1.25}$: ya dari langkah-langkah induksi matematika mbak

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_7 memperoleh kesimpulan dengan melihat langkah-langkah dari pembuktian induksi matematika. Hal ini sesuai dengan petikan wawancara $S_{7.1.25}$.

e) Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen

Pada indikator ini, subjek S_7 diharapkan bisa memeriksa kembali kebenaran dari suatu argumen atau jawaban yang sudah ditemukan. Berikut ini petikan wawancara subjek S_7 dalam memeriksa kembali jawabannya:

$P_{7.1.26}$: Bagaimana cara kamu memeriksa bahwa jawaban yang kamu peroleh sudah benar?

$S_{7.1.26}$: Ya tadi dengan induksi. Selain itu juga bisa mensubstitusikan nilai *n* nya ke $3^{2k}(3^2 + 1) + 2^{2k}(2^4 + 2^2)$. Misalnya untuk *n=2* maka diperoleh 1130. 1130 habis dibagi 5

$P_{7.1.27}$: Mengapa 1130 bisa habis dibagai 5?

$S_{7.1.27}$: Biasanya itu kalau belakangnya 5 atau 0 habis dibagi 5 mbak

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa dalam mengecek jawaban yang sudah diperoleh, subjek S_7 mensubstitusikan nilai x=2 ke $3^{2k}(3^2+1)+2^{2k}(2^4+2^2)$sehingga diperoleh 1130. Bilangan 1130 merupakan bilangan habis dibagi 5. Subjek S_7 hanya melihat nilai angka pada posisi satuan yaitu 0 sehingga 1130 habis dibagi 5. Subjek S_7 menjelaskanbahwa jika nilai satuannya adalah 0 atau 5 maka bilangan tersebut habis dibagi 5.

f) **Permasalahan yang Dihadapi Subjek**

Dalam mengerjakan soal ini, tentunya ada suatu permasalahan yang dihadai subjek S_7 sehingga membuat subjek S_7 mengalami sebuah masalah. Berikut ini petikan wawancara subjek S_7 tentang permasalahan yang dihadapi subjek S_7 selama menyelesaikan soal:

$P_{7.1.28}$: Oh gitu, jadi, pemasalahan apa saja yang kamu hadapi selama melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika?

$S_{7.1.28}$: Mencari bentuk umumnya mbak dan pada bagian menguraikan $3^{2k}(3^2+1)+2^{2k}(2^4+2^2)$.

$P_{7.1.29}$: Megapa itu masalah bagi kamu?

$S_{7.1.29}$: Ya soalnya saya tidak melihat suatu bilangan yang habis dibagi 5

$P_{7.1.30}$: Itu sajakah?

$S_{7.1.30}$: Iya mbak.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_7 mengalami permasalahan dalam membuat bentuk umum dan pada tahap menguraikan $3^{2k}(3^2+1)+2^{2k}(2^4+2^2)$. Subjek S_7 tidak melihat suatu bilangan yang habis dibagi 5.

2. Analisis Data Subjek S_7

Berdasarkan paparan data diatas, berikut ini ialah hasil analisis penalaran matematis subjek S_7 dalam melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika yaitu:

a) Mengajukan Dugaan

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_7 memperoleh informasi dari soal yaitu pernyataan-pernyataan matematika yang habis dibagi 5, mencari bentuk umum, melakukan pembuktian, dan membuat kesimpulan. Kemudian, subjek S_7 berpikir dalam mencari bentuk umum yang dapat mewakili ketiga pernyataan yang sudah dibuat oleh Firman. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir acak abstrak perlu melihat keseluruhan informasi sekaligus bukan bertahap.

Pada awalnya, subjek S_7 menghasilkan bentuk umum $3^{1+n} + 2^{3+n}$. Subjek S_7 mendapat bentuk umum seperti ini dari melihat pernyataan pertama. Subjek S_7 mensubstitusikan nilai n=1,2,3 ke bentuk umum tersebut. Subjek S_7 menyadari bahwa bentuk umum yang dihasilkan tidak sesuai dengan contoh. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir acak abstrak menyerap ide-ide, informasi, kesan serta mengaturnya dengan refleksi.

Subjek S_7 menggunakan pola untuk memperoleh bentuk umum yang diinginkan Firman. Subjek S_7 melihat pola dari nilai pangkat yang merupakan kelipatan 2. Subjek S_7 memperoleh bentuk umum yang sesuai dengan contoh yaitu $3^{2n} + 2^{2n+2}$. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir acak abstrak suka terbantu jika mengetahui bagaimana segala sesuatu terhubung dengan keseluruhannya sebelum informasi diproses.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_7 dalam mengajukan dugaan yaitu dengan menuliskan kembali informasi-informasi yang diperoleh, membuat bentuk umum, memeriksa bentuk umum dengna metode substitusi, menyadari kesalahan jawaban, melihat suatu pola yang saling berhubungan, memikirkan konsep kelipatan 2, menghasilkan pernyataan baru yang diinginkan.

b) **Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika**

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_7 menggunakan pembuktian induksi matematika. Subjek S_7 memilih pembuktian menggunakan induksi matematika karena berhubungan dengan bilangan asli. Informasi ini diperoleh subjek S_7 pada waktu SMA. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir acak abstrak dapat mengingat dengan sangat baik jika informasi dibuat dengan sesuai kesukaanya.

Subjek S_7 melakukan pembuktian induksi matematika dengan menggunakan prinsip induksi matematis yaitu membuktikan P(1) benar, P(k) dan P(k+1) benar. Pada tahap P(1) terbukti benar. Pada tahap P(k+1) diasumsikan benar. Pada tahap membuktikan P(k+1) benar, subjek S_7 melakukan manipulasi matematika dengan menambahkan hasil dari substitusi n=k+1 dengan n=k. Dalam hal ini, subjek S_7 mengalami kesalahan konsep karena tidak bisa menambahkan suatu bilangan hanya pada satu ruas saja. Selain itu, subjek S_7 juga melakukan substitusi nilai k=1 ke hasil akhir dari P(k+1) untuk meyakinkan hasil pembuktian yang sudah dilakukan. Subjek S_7 yakin berhasil membuktikan bahwa P(k+1) benar habis dibagi 5. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir acak abstrak sering kali menggunakan cara berbeda dalam melakukan sesuatu.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_7 dalam melakukan pembuktian induksi matematika yaitu dengan menggunakan prinsip induksi matematis, menggunakan penjumlahan n=k+1 dengan n=k, dan menggunakan metode substitusi.

c) **Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi**

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa. Subjek S_7 melakukan operasi penjumlahan bilangan berpangkat didalam pikirannya tanpa menuliskan dilembar jawaban. Selain itu, Subjek S_7 melakukan penjumlahan hasil subtitusi n=k+1 dengan n=k karena pernah mendapatkan cara seperti itu. Subjek S_7 juga menggunakan sifat distributif, sifat asosiatif, dan sifat bilangan berpangkat dalam menguraikan jawaban. Subjek S_7 mengetahui arti dari keliptan 5. Namun, Subjek S_7 tidak dapat menuliskan simbol kelipatan 5 Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa terkadang orang lain tidak menyangka bahwa pemikir acak abstrak mempunyai reaksi atau pendapat dan mengingat dengan sangat baik dan berpikiran abstrak.

Subjek S_7 mengetahui prinsip induksi matematis atau langkah-langkah dari induksi matematika. Subjek S_3 dapat menjelaskan arti dari langkah-langkah induksi matematika. Subjek S_7 menjelaskan bahwa arti P(1) benar yaitu kemungkinan nilai bilangan asli benar karena n=1 benar, arti P(k) hanya mengganti huruf *n* menjadi *k* dan diasumsikan benar, dan arti P(k+1) benar yaitu bilangan selanjutnya juga benar.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_7 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi ada yang sesuai konsep dan logis dan ada yang tidak sesuai konsep.

d) Menarik Kesimpulan dari Pernyataan

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_7 dapat membuat sebuah kesimpulan atau pernyataan baru dengan tepat. Kesimpulan ini diperoleh subjek S_7 dari langkah-langkah induksi matematika. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir acak abstrak suka terbantu jika mengetahui bagaimana segala sesuatu terhubung dengan keseluruhannya sebelum informasi diproses.

e) Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_7 melakukan pemeriksaan kembali suatu argumen dengan melihat kembali pembuktian induksi matematika yang sudah dilakukan. Selain itu, subjek S_7 juga melakukan substitusi n=2 ke hasil akhir dari P(k+1). Subjek S_7 hanya menggunakan nilai satuan untuk menunjukkan bahwa pernyataan tersebut habis dibagi 5.

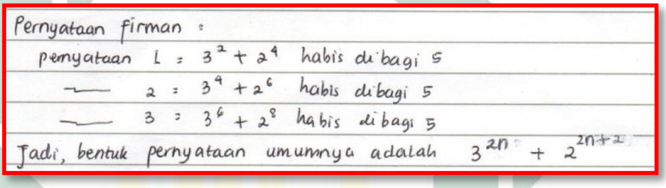
Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_7 dalam memeriksa kesahihan suatu argumen dengan memeriksa pembuktian induksi mtematika, melakukan substitusi, dan melihat nilai satuan.

f) Permasalahan yang Dihadapi Subjek

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_7 mengalami masalah pada tahap pembuktian P(k+1). Subjek S_7 mengalami kesulitan dalam memunculkan bilangan kelipatan 5 di $3^{2k}(3^2+1)+\ 2^{2k}(2^4+2^2)$. Hal ini sejalan dengan pendapat Polya yang menyatakan bahwa salah satu masalah yang dihadapi seseorang adalah masalah yang berkaitan dengan pembuktian yaitu menunjukkan bahwa suatu pernyataan itu benar atau salah dan tidak keduanya. Selain itu, subjek S_7 juga mengalami kesalahan konsep pada tahap ini. Subjek S_7 tidak mengetahui bahwa konsep yang digunakan salah.

3. Deskripsi S_8

a) Mengajukan Dugaan


Pernyataan firman :
pernyataan 1 : $3^2 + 2^4$ habis di bagi 5
—— 2 : $3^4 + 2^6$ habis di bagi 5
—— 3 : $3^6 + 2^8$ habis di bagi 5
Jadi, bentuk pernyataan umumnya adalah $3^{2n} + 2^{2n+2}$

Gambar 4.26
Jawaban Tertulis Subjek S_8 dalam Mengajukan Dugaan

Berdasarkan gambar 4.27, Subjek S_8 menulis informasi dari soal yaitu pernyataan 1: 3^2+2^4 habis dibagi 5, pernyataan 2: 3^4+2^6 habis dibagi 5, dan pernyataan 3: 3^6+2^8 habis dibagi 5. Subjek S_8 memperoleh bentuk umum $3^{2n}+2^{2n+2}$. Berikut ini petikan hasil wawancara subjek S_8 dalam mengajukan dugaan:

$P_{8.1.1}$: Informasi-informasi apa saja yang kamu peroleh dari`soal ini?

$S_{8.1.1}$: Pernyataan matematika yang berhubungan dengan kelipatan 5, bilangan berpangkat, operasi penjumlahan dan bilangan asli. pernyataan pertama 3^2+2^4 habis 5, pernyataan kedua 3^4+2^6 habis 5, pernyataan ketiga 3^6+2^8 habis 5.

$P_{8.1.2}$: Terus, apa yang kamu pikirkan setelah

		mendapatkan informasi tersebut?
$S_{8.1.2}$	:	Saya berpikir untuk menemukan bentuk umumnya mbak.
$P_{8.1.3}$	:	Lalu tadi, awalnya kamu menghasilkan bentuk umum seperti apa?
$S_{8.1.3}$	:	Ada, $3^{n+1}+2^{n+3}$, ada $3^{n\times 2}+2^{n\times\frac{4}{n}}$, ada $3^{n}+2^{n+2}\,n$ anggota bilangan genap dan terakhir ada $3^{2n}+2^{2n+2}$
$P_{8.1.4}$	:	Terus, bagaimana bentuk umum yang sebenarnya dari pernyataan tersebut sehingga habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli?
$S_{8.1.4}$	:	$3^{2n}+2^{2n+2}$ mbak
$P_{8.1.5}$	:	Mengapa $3^{n+1}+2^{n+3}$, ada $3^{n\times 2}+2^{n\times\frac{4}{n}}$, ada $3^{n}+2^{n+2}n$ anggota bilangan genap bukan bentuk umum dari soal ini?
$S_{8.1.5}$	:	Karena awalnya saya itu membuat bentuk umumnya dulu yang sesuai dengan pernyataan pertama. Setelah ketemu ya awalnya saya anggap itu bentuk umumnya. Namun, bentuk umum tersebut tidak berlaku dipernyataan kedua dan ketiga mbak. Kemudian saya berpikir lagi mbak. Ternyata ketika saya lihat keseluruhan, ternyata ada pola yang menggambar bilangan habis di bagi 5 dari contoh tersebut. Maka dari itu bentuk umum yang sebenarnya dari soal ini yaitu $3^{2n}+2^{2n+2}$
$P_{8.1.6}$	:	Coba jelaskan bagaimana cara kamu memperoleh bentuk umum $3^{2n}+2^{2+2n}$!
$S_{8.1.6}$	:	Pernyataan pertama 3^2+2^4 , kedua 3^4+2^6 , dan ketiga 3^6+2^8. Untuk yang pangkat dari 3 itukan 2,4,6 (*nilai pangkatnya)* merupakan kelipatan 2 atau $2n$ dan untuk 2 itu kan 4,6,8 lah itu dapat diperoleh nilai pangkat dari 3 yaitu kelipatan 2 ditambah 2 yaitu $2n+2$. Maka diperoleh $3^{2n}+2^{2+2n}$. Setelah mendapat

bentuk umum $3^{2n} + 2^{2+2n}$saya cek lagi dan ternyata sesuai dengan contoh yang sudah diberikan.

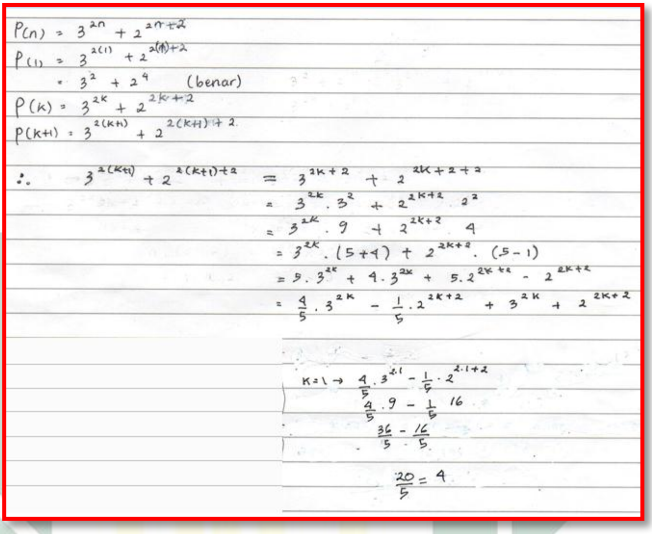
$P_{8.1.7}$: Mengapa kamu berpikir seperti itu?

$S_{8.1.7}$: Karena nilai pangkatnya membentuk suatu pola yang unik.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_8 memperoleh informasi dari soal berupa pernyataan matematika yang berhubungan dengan kelipatan 5, bilangan berpangkat, operasi penjumlahan dan bilangan asli. Selain itu, subjek S_8 memperoleh 3 pernyataan yaitu pernyataan pertama $3^2 + 2^4$ habis 5, pernyataan kedua $3^4 + 2^6$ habis 5, pernyataan ketiga $3^6 + 2^8$ habis 5. Subjek S_8 langsung berpikir mencari bentuk umum dari ketiga contoh tersebut. Subjek S_8 membuat bentuk umum terlebih dahulu kemudian mengeceknya dengan mensubstitusikan nilai n=1,2,3 ke bentuk umum tersebut. Bentuk umum yang dihasilkan subjek awalnya yaitu $3^{n+1} + 2^{n+3}$, ada $3^{n\times 2} + 2^{n\times\frac{4}{n}}$, ada $3^n + 2^{n+2}$ n anggota bilangan genap. Subjek S_8 mngetahui bahwa bentuk umum yang dihasilkan tidak sesuai dengan pernyataan yang di buat oleh Firman.

Subjek S_8 mengetahui bahwa bentuk umumnya yang sesuai dengan pernyataan Firman adalah $3^{2n} + 2^{2n+2}$. Subjek S_8 memperoleh bentuk umum tersebut dengan melihat keseluruhan contoh yang membentuk suatu pola. Subjek S_8 menyatakan bahwa nilai pangkat dari 3 adalah 2,4,6 sehingga merupakan kelipatan 2 atau 2n. Sedangkan nilai pangkat dari 2 yaitu 4,6,8 yaitu kelipatan 2 ditambah 2 sehingga 2n+2.

b) Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika



$P(n) = 3^{2n} + 2^{2n+2}$

$P(1) = 3^{2(1)} + 2^{2(1)+2}$

$= 3^2 + 2^4$ (benar)

$P(k) = 3^{2k} + 2^{2k+2}$

$P(k+1) = 3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2}$

$\therefore \; 3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2} = 3^{2k+2} + 2^{2k+2+2}$

$= 3^{2k} . 3^2 + 2^{2k+2} \; 2^2$

$= 3^{2k} . 9 + 2^{2k+2} \; 4$

$= 3^{2k} . (5+4) + 2^{2k+2} . (5-1)$

$= 5 . 3^{2k} + 4 . 3^{2k} + 5 . 2^{2k+2} - 2^{2k+2}$

$= \frac{4}{5} . 3^{2k} - \frac{1}{5} . 2^{2k+2} + 3^{2k} + 2^{2k+2}$

$k=1 \rightarrow \frac{4}{5} . 3^{2.1} - \frac{1}{5} . 2^{2.1+2}$

$\frac{4}{5} . 9 - \frac{1}{5} \; 16$

$\frac{36}{5} - \frac{16}{5}$

$\frac{20}{5} = 4$

Gambar 4.27
Jawaban Tertulis Subjek S_8 dalam Melakukan Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika

Berdasarkan gambar 4.27, subjek S_8 membuktikan bentuk umum $3^{2n} + 2^{2n+2}$ dengan induksi matematika. Subjek S_8 menuliskan fungsi bentuk umum yaitu $P(n): 3^{2n} + 2^{2+2n}$. Langkah pertama, Subjek S_8 mensubstitusikan nilai n=1 ke $P(n)$ sehingga diperoleh $3^2 + 2^4$. Subjek S_8 menulis bahwa P(1) benar. Kemudian, subjek S_8 mensubstitusikan n=k ke P(n) sehingga diperoleh $3^{2k} + 2^{2+2k}$. Lalu, Subjek S_8 mensubstitusikan n=k+1 ke P(n) sehinngga $3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2} = 3^{2k+2} + 2^{2k+2+2} = 3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2k+2} \cdot 2^2 = 3^{2k} \cdot 9 + 2^{2k+2} \cdot 4 = 3^{2k} \cdot (5+4) + 2^{2k+2} \cdot (5-1) = 5 \cdot 3^{2k} + 4 \cdot 3^{2k} + 5 \cdot 2^{2k+2} - 2^{2k+2} = \frac{4}{5} \cdot 3^{2k} - \frac{1}{5} \cdot 2^{2k+2} + 3^{2k} + 2^{2k+2}$. Kemudian, subjek S_8 mensubstitusikan nilai n=1 ke hasil ke $\frac{4}{5} \cdot 3^{2k} - \frac{1}{5} \cdot 2^{2k+2}$ sehingga 20 yang jika dibagi 5 menghasilkan bilangan 4. Berikut ini petikan wawancara subjek S_8 dalam melakukan pembuktian induksi matematika:

$P_{8.1.8}$: Bagaimana cara kamu membuktikan bahwa $3^{2n} + 2^{2+2n}$ habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli?

$S_{8.1.8}$: Menggunakan induksi matematika

$P_{8.1.9}$: Mengapa kamu memilih jenis pembuktian induksi matematika?

$S_{8.1.9}$: Itu, karena *n* nya merupakan bilangan asli. Dulu waktu SMA kalau berhubungan sama bilangan asli itu selalu dibuktikan dengan induksi matematika.

$P_{8.1.10}$: Apakah selalu jika *n* bilangan asli bisa dibuktikan dengan induksi matematika?

$S_{8.1.10}$: Menurut saya iya, karena dulu waktu SMA soal-soalnya selalu berkaitan dengan bilangan asli dan soalnya hampir seperti ini.

$P_{8.1.11}$: Coba jelaskan proses pembuktian induksi matematika?

$S_{8.1.11}$: Hmm, yang pertama itu untuk n=1. Jika n=1 di substitusikan ke $3^{2n} + 2^{2+2n}$ maka diperoleh $3^2 + 2^4$ pernyatana yang benar. Kemudian untuk n=k diperoleh $3^{2k} + 2^{2+2k}$ diasumsikan benar. Kemudian langkah ketiga membuktikan n=k+1 yaitu $3^{2(k+1)} + 2^{2(k+1)+2} = 3^{2k+2} + 2^{2k+2+2} = 3^{2k} \cdot 3^2 + 2^{2k+2} \cdot 2^2 = 3^{2k} \cdot 9 + 2^{2k+2} \cdot 4 = 3^{2k} \cdot (5+4) + 2^{2k+2} \cdot (5-1) = 5 \cdot 3^{2k} + 4 \cdot 3^{2k} + 5 \cdot 2^{2k+2} - 2^{2k+2}$. Lalu semua saya bagi dengan 5 sehingga $\frac{4}{5} \cdot 3^{2k} - \frac{1}{5} \cdot 2^{2k+2} + 3^{2k} + 2^{2k+2}$. Kemudian kita substitusikan nilai $k = 1$ ke $\frac{4}{5} \cdot 3^{2k} - \frac{1}{5} \cdot 2^{2k+2}$ sehingga diperoleh $\frac{20}{5} = 4$ yang tidak memiliki sisa sedangkan$3^{2k} + 2^{2k+2}$ jelas terbukti habis dibagi 5 . Jadi, n=k+1 Terbukti.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_8 dalam membuktikan bentuk umum menggunakan pembuktian induksi matematika. Subjek S_8 memilih pembuktian induksi matematika karena jika berhubungan dengan bilangan asli maka dibuktikan dengan induksi matematika. Informasi tersebut, diperoleh subjek S_8 pada saat SMA.

Pada petikan wawancara $S_{8.1.11}$, subjek S_8 melakukan pembuktian induksi matematika dengan tiga langkah yaitu membuktikan n=1, n=k dan n=k+1 benar. Penjelasan untuk petikan wawancara ini hampir sama dengan yang dijelaskan oleh peneliti diatas.

Dari petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa pada tahap membuktikan n=k+1, ada bagian proses pembuktian induksi matematika subjek S_8 membagi satu ruas dengan bilangan 5 sehingga $5 \cdot 3^{2k} + 4 \cdot 3^{2k} + 5 \cdot 2^{2k+2} - 2^{2k+2} = \frac{4}{5} \cdot 3^{2k} - \frac{1}{5} \cdot 2^{2k+2} + 3^{2k} + 2^{2k+2}$. Selain itu, subjek S_8 hanya mensubstitusikan nilai k=1 ke $\frac{4}{5} \cdot 3^{2k} - \frac{1}{5} \cdot 2^{2k+2}$ karena $3^{2k} + 2^{2k+2}$ jelas terbukti dibagi 5. Dari substitusi tersebut, subjek S_8 menghasilkan $\frac{20}{5} = 4$ yang tidak memiliki sisa. Subjek S_8 menjelaskan bahwa n=k+1 terbukti.

c) Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi

Pada indikator ini, subjek S_8 diharapkan dapat memberikan alasan terhadap kebenaran solusi yang telah dibuatnya. Berikut ini petikan wawancara subjek S_8 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi:

$P_{8.1.12}$	:	Sekaang kamu tahu darimana $3^2 + 2^4$ itu pernyataan yang benar?
$S_{8.1.12}$	:	Ya kan $3^2 = 9$, $2^4 = 16$maka 9+16=25 habis dibagi 5.
$P_{8.1.13}$	:	Mengapa dari $3^{2(k+1)}$ bisa menjadi 3^{2k+2} dan dari $2^{2(k+1)}$ bisa menjadi 2^{2k+2}?
$S_{8.1.13}$	:	Itu didistributifkan mbak
$P_{8.1.14}$	:	Mengapa dari 3^{2k+2} bisa menjadi $3^{2k} \cdot 3^2$ dan dari 2^{2k+2+2} bisa menjadi $2^{2k+2} \cdot 2^2$?
$S_{8.1.14}$	:	Itu mbak, kalau bilangan pokoknya sama itu pangkatnya bisa dipisah

$P_{8.1.15}$	:	Maksudnya apa?
$S_{8.1.15}$	:	Yang $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ itu lo mbak
$P_{8.1.16}$	:	Terus, mengapa kamu memilih penguraian bilangan 9 menjadi 5+4 dan bilangan 4 kamu uraikan menjadi 5-1?
$S_{8.1.16}$	:	Biar muncul bilangan 5 mbak
$P_{8.1.17}$	:	Mengapa harus muncul bilangan 5?
$S_{8.1.17}$	:	Yakan kalau habis dibagi 5 pasti kelipatan 5.
$P_{8.1.18}$	:	Bagaimana bentuk umum dari kelipatan 5?
$S_{8.1.18}$	:	Wahh saya bingung mbak. Tau kelipatan 5 tapi bingung menuliskannya.
$P_{8.1.19}$	:	Ohh gitu terus mengapa itu tiba-tiba muncul per 5?
$S_{8.1.19}$	:	Kan habis dibagi 5 mb. Jadi semua saya bagi dengan 5
$P_{8.1.20}$	:	Jadi, apakah bisa membagi semua bilangan dengan 5 dalam satu ruas saja?
$S_{8.1.20}$	:	Ya bisa saja mbak.
$P_{8.1.21}$	:	Oh gitu, terus, mengapa kamu langsung mensubstitusikan nilai k=1 ke $\frac{4}{5} \cdot 3^{2k} - \frac{1}{5} \cdot 2^{2k+2}$?
$S_{8.1.21}$	:	karena tadi saya bingung mbak meneruskan caranya seperti apa. Jadi saya substitusikan apakah k=1. Ternyata hasilnya 20 mbak. kalau dibagi 5 ya habis mbak karena hasilnya 4.. Jadi terbukti untu n=k+1
$P_{8.1.22}$	:	Mengapa kamu hanya menggunakan $\frac{4}{5} \cdot 3^{2k} - \frac{1}{5} \cdot 2^{2k+2}$?
$S_{8.1.22}$	:	Ya karena kan $3^{2k} + 2^{2k+2}$ sudah terbukti mbak pada n=k. Ya jadi, tinggal membuktikan apakah $\frac{4}{5} \cdot 3^{2k} - \frac{1}{5} \cdot 2^{2k+2}$ terbukti atau tidak.
$P_{8.1.23}$	:	Ohh gitu, bisa ya.
$S_{8.1.23}$	:	Bisa mbak.

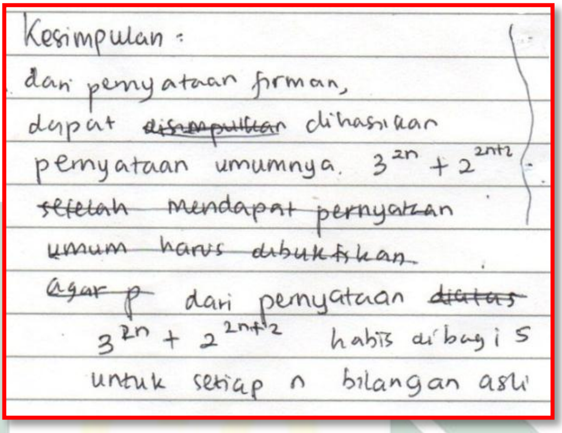
Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_8 menjelaskan bahwa $3^2 + 2^4$ habis dibagi 5 karena $3^2 = 9$, $2^4 = 16$maka 9+16=25 habis dibagi 5. Subjek S_8 melakukan perhitungan tersebut didalam pikirannya. Selain itu, subjek S_8 menggunakan sifat distributif dan sifat bilangan berpangkat dalam menguraikan jawaban. Subjek S_8 memilih menguraikan angka 9 menjadi 5+4 dan angka 4 menjadi 5-1 karena subjek S_8 ingin memunculkan angka 5 pada proses pembuktian yang ia lakukan.

Subjek S_8 mengetahui bahwa arti dari habis dibagi 5 adalah kelipatan 5. Namun, subjek S_8 tidak dapat memisalkan bilangan kelipatan 5. Subjek S_8 tiba-tiba membagi jawaban sementara dengan 5 karena ingin menunjukkan habis dibagi 5. Subjek S_8, langsung mensubstitusikan nilai n=1 ke $\frac{4}{5} \cdot 3^{2k} - \frac{1}{5} \cdot 2^{2k+2}$ karena subjek S_8 merasa kesulitan dalam meneruskan langkah selanjutnya. Subjek S_8 hanya mensubstitusikan nilai k=1 ke ke $\frac{4}{5} \cdot 3^{2k} - \frac{1}{5} \cdot 2^{2k+2}$ karena $3^{2k} + 2^{2k+2}$ sudah diasumsikan terbukti pada n=k. Melalui substitusi tersebut, subjek S_8 merasa yakin bahwa n=k+1 terbukti benar habis dibgai 5. Berikut ini lanjutan petikan wawancara subjek S_8 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi:

$P_{8.1.24}$	:	Mengapa langkah-langkahnya harus membuktikan P(1) benar, P(k) dan P(k+1) benar?
$S_{8.1.24}$	:	Itu proses induksi matematika.
$P_{8.1.25}$	:	Terus maknanya dari P(1), P(k) dan P(k+1) benar itu apa?
$S_{8.1.25}$	:	ya kalau P(1) benar artinya hasil n=1 benar. Dan P(k) itu hanya mengganti sebuah huruf saja. Sedangkan jika P(k+1) benar ya bilangan selanjutnya juga benar.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_8 mengetahui langkah-langkah dari induksi matematika yaitu P(1) benar, P(k) dan P(k+1) benar. Subjek S_8 menjelaskan bahwa arti dari P(1) benar adalah hasil dari n=1 benar, arti P(k) hanya mengganti huruf saja dan arti P(k+1) benar yaitu benar untuk bilangan selanjutnya.

d) Menarik Kesimpulan dari Pernyataan


Kesimpulan :
dari pernyataan firman,
dapat ~~disimpulkan~~ dihasilkan
pernyataan umumnya. $3^{2n} + 2^{2n+2}$
~~setelah mendapat pernyataan~~
~~umum harus dibuktikan.~~
~~agar p~~ dari pernyataan ~~diatas~~
$3^{2n} + 2^{2n+2}$ habis dibagi 5
untuk setiap n bilangan asli

Gambar 4.28
Jawaban Tertulis subjek S_8 dalam Membuat Kesimpulan

Berdasarkan gambar 4.28, subjek S_8 dapat membuat kesimpulan yaitu dari pernyataan Firman dapat dihasilkan pernyataan umumnya $3^{2n} + 2^{2n+2}$ yang habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli. Berikut ini petikan wawancara subjek S_8 dalam membuat kesimpulan:

$P_{8.1.26}$	:	Apa yang dapat kamu simpulkan setelah mengerjakan soal ini?
$S_{8.1.26}$	:	Dari pernyataan yang dihasilkan firman dapat diperoleh suatu bentuk umum $3^{2n} + 2^{2+2n}$ habis dibagi 5 untuk setiap *n* bilangan asli.
$P_{8.1.27}$	:	Bagaimana cara kamu memperoleh sebuah kesimpulan seperti ini?
$S_{8.1.27}$	:	Dari informasi yang sudah saya peroleh seperti pernyataan kesatu, kedua, dan ketiga dan dari pembuktian induksi matematika

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_8 memperoleh kesimpulan dari pernyataan-pernyataan yang sudah dibuat Firman dan dari langkah-langkah pembuktian induksi matematika. Hal ini sesuai dengan petikan wawancara $S_{8.1.27}$.

e) Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen

Pada indikator ini, subjek S_8 diharapkan bisa memeriksa kembali kebenaran dari suatu argumen atau jawaban yang sudah ditemukan. Berkut ini petikan wawancara subjek S_8 dalam memeriksa kembali jawabannya:

$P_{8.1.28}$	:	Bagaimana cara kamu memeriksa bahwa jawaban yang kamu peroleh sudah benar?
$S_{8.1.28}$	:	Ya tadi dengan induksi. Dengan mengecek kembali setiap langkah-langkahnya. Menurut saya, langkah-langkah saya sudah tepat. Selain itu juga bisa mensubstitusikan nilai *n* nya. Misalnya untuk *n=2* ke $3^{2n} + 2^{2n+2}$ maka diperoleh ehmmm $3^4 + 2^6 = 81 + 64 = 145$ habis dibagi 5
$P_{8.1.29}$	:	Bagaimana kamu tau 145 bisa habis dibagai 5?
$S_{8.1.29}$	:	Karena satuannya bernilai 5 jadi habis dibagi 5

Berdasarkan petikan wawancara diatas, subjek S_8 melakukan pengecekan jawaban dengan melihat kembali langkah-langkah induksi matematika. Selain itu, subjek S_8 juga melakukan pengecekkan dengan menunjuk hasil substitusi n=2 ke bentuk umum.

f) Permasalahan yang Dihadapi Subjek

Dalam mengerjakan soal ini, tentunya ada suatu permasalahan yang dihadai subjek S_8 sehingga membuat subjek S_8 mengalami sebuah masalah. Berikut ini petikan wawancara subjek S_8 tentang permasalahan yang dihadapi subjek S_8 selama menyelesaikan soal:

$P_{8.1.30}$	:	Oh gitu, jadi, pemasalahan apa saja yang kamu hadapi selama melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika?
$S_{8.1.31}$	:	Ya permasalahan saya itu ketika mencari bentuk umum. Selain itu juga menguraikan

pada tahap $5 \cdot 3^{2k} + 4 \cdot 3^{2k} + 5 \cdot 2^{2k+2} - 2^{2k+2}$.

$P_{8.1.32}$: Mengapa itu masalah bagi kamu?

$S_{8.1.32}$: Ya soalnya saya tidak tahu caranya bagaimana 4 dan 2 (*menunjuk* $4 \cdot 3^{2k}$ *dan* 2^{2k+2}) bisa dikelompokkan dan memuncul suatu bilangan yang habis dibagi 5. Jadi ya langsung saya bagi saja dengan 5.

$P_{8.1.33}$: Itu sajakah?

$S_{8.1.33}$: Iya mbak.

Berdasarkan petikan wawancara diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_8 mengalami permasalahan dalam membuat bentuk umum dan pada tahap menguraikan $5 \cdot 3^{2k} + 4 \cdot 3^{2k} + 5 \cdot 2^{2k+2} - 2^{2k+2}$. Subjek S_8 mengalami kesulitan dalam mengelompokkan bilangan 4 dan 2 sehingga memunculkan bilangan yang habis dibagi 5 sehingga subjek S_8 langsung membagi jawaban dengan 5. Pada tahap ini, subjek S_8 mengalami kesalahan konsep. Namun, subjek S_8 tidak mengetahui bahwa konsep yang digunakan salah.

4. Analisis Data Subjek S_8

Berdasarkan paparan data diatas, berikut ini ialah hasil analisis penalaran matematis subjek S_8 dalam melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika yaitu:

a) Mengajukan Dugaan

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_8 memperoleh informasi dari soal yaitu Pernyataan matematika yang berhubungan dengan kelipatan 5, bilangan berpangkat, operasi penjumlahan, bilangan asli dan pernyataan-pernyataan matematika yang habis dibagi 5, mencari bentuk umum, melakukan pembuktian, dan membuat kesimpulan. Kemudian, subjek S_8 berpikir dalam mencari bentuk umum yang dapat mewakili ketiga pernyataan yang sudah dibuat oleh Firman. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir acak abstrak perlu melihat keseluruhan informasi sekaligus bukan bertahap.

Pada awalnya, subjek S_8 menghasilkan bentuk umum $3^{n+1} + 2^{n+3}$, $3^{n\times 2} + 2^{n\times\frac{4}{n}}$, dan $3^n + 2^{n+2}$ dengan *n* anggota bilangan genap. Subjek S_8 mendapat bentuk umum seperti ini dari melihat pernyataan pertama. Subjek S_8 mensubstitusikan nilai n=1,2,3 ke bentuk umum tersebut. Subjek S_8 menyadari bahwa bentuk umum yang dihasilkan tidak sesuai dengan semua contoh. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir acak abstrak menyerap ide-ide, informasi, kesan serta mengaturnya dengan refleksi.

Subjek S_8 menggunakan pola untuk memperoleh bentuk umum yang diinginkan Firman. Subjek S_8 melihat pola dari nilai pangkat yang merupakan kelipatan 2. Subjek S_8 memperoleh bentuk umum yang sesuai dengan contoh yaitu $3^{2n} + 2^{2n+2}$. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir acak abstrak suka terbantu jika mengetahui bagaimana segala sesuatu terhubung dengan keseluruhannya sebelum informasi diproses.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_8 dalam mengajukan dugaan yaitu dengan menuliskan kembali informasi-informasi yang diperoleh, membuat bentuk umum, memeriksa bentuk umum dengan metode substitusi, menyadari kesalahan jawaban, melihat suatu pola yang saling berhubunngan, memikirkan konsep kelipatan 2, menghasilkan pernyataan baru yang diinginkan.

b) **Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika**

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_8 menggunakan pembuktian induksi matematika. Subjek S_8 memilih pembuktian menggunakan induksi matematika karena berhubungan dengan bilangan asli. Informasi ini diperoleh subjek S_8 pada waktu SMA. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir acak abstrak dapat mengingat dengan sangat baik jika informasi dibuat dengan sesuai kesukaannya.

Subjek S_8 melakukan pembuktian induksi matematika dengan menggunakan prinsip induksi matematis yaitu membuktikan P(1) benar, P(k) dan P(k+1) benar. Pada tahap P(1) terbukti benar. Pada tahap P(k+1) diasumsikan benar, Pada tahap P(k+1), subjek S_3 melakukan menguraikan angka dan membagi salah satu ruas dengan 5. Dalam hal ini, subjek S_8 mengalami kesalahan konsep karena tidak bisa membagi suatu bilangan hanya pada satu ruas saja. Selain itu, subjek S_8 juga melakukan substitusi nilai k=1 ke hasil akhir dari P(k+1) untuk meyakinkan hasil pembuktian yang sudah dilakukan. Subjek S_8 hanya menggunakan metode subtitusi pada $\frac{4}{5} \cdot 3^{2k} - \frac{1}{5} \cdot 2^{2k+2}$ saja. Cara ini juga mengalami kesalahan konsep. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir acak abstrak sering kali menggunakan cara berbeda dalam melakukan sesuatu.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_8 dalam melakukan pembuktian induksi matematika yaitu dengan menggunakan prinsip induksi matematis, membagi salah satu ruas dengan bilangan 5, dan menggunakan metode substitusi.

c) **Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi**

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa. Subjek S_8 melakukan operasi penjumlahan bilangan berpangkat didalam pikirannya tanpa menuliskan dilembar jawaban. Selain itu, subjek S_8 menggunakan sifat distributif, sifat asosiatif, dan sifat bilangan berpangkat dalam menguraikan jawaban. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa terkadang orang lain tidak menyangka bahwa pemikir acak abstrak mempunyai reaksi atau pendapat dan mengingat dengan sangat baik dan berpikiran abstrak.

Subjek S_8 memilih menguraikan 9 menjadi 5+4 dan 4 menjadi 5-1 karena ingin memunculkan bilangan 5. Subjek S_8 juga membagi salah satu ruas dengan bilangan 5 karena ingin menunjukkan habis dibagi 5. Selain itu, subjek S_8 hanya melakukan substitusi ke $\frac{4}{5} \cdot 3^{2k} - \frac{1}{5} \cdot 2^{2k+2}$ karena belum terbukti habis dibagi 5 atau tidak. Subjek S_8 mengetahui arti dari kelipatan 5. Namun, Subjek S_8 tidak dapat menuliskan simbol kelipatan 5.

Subjek S_8 mengetahui prinsip induksi matematis atau langkah-langkah dari induksi matematika. Subjek S_8 dapat menjelaskan arti dari langkah-langkah induksi matematika. Subjek S_8 menjelaskan bahwa arti P(1) benar yaitu n=1 benar, arti P(k) hanya mengganti huruf *n* menjadi *k* dan diasumsikan benar, dan arti P(k+1) benar yaitu bilangan selanjutnya juga benar.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_8 dalam memberikan alasan terhadap kebenaran solusi ada yang sesuai konsep dan logis dan ada yang tidak sesuai konsep.

d) Menarik Kesimpulan dari Pernyataan

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_8 dapat membuat sebuah kesimpulan atau pernyataan baru dengan tepat. Kesimpulan ini diperoleh subjek S_8 dari pembuktian induksi matematika dan pernyataan yang dibuat oleh Firman. Hal ini sejalan dengan pendapat Bobbi De Porter yang menyatakan bahwa para pemikir acak abstrak suka terbantu jika mengetahui bagaimana segala sesuatu terhubung dengan keseluruhannya sebelum informasi diproses

e) Memeriksa Kesahihan Suatu Argumen

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_8 melakukan pemeriksaan kembali suatu argumen dengan melihat kembali pembuktian induksi matematika yang sudah dilakukan. Selain itu, subjek S_8 juga melakukan substitusi n=2 ke hasil akhir dari P(n). Subjek S_8 hanya menggunakan nilai satuan untuk menunjukkan bahwa pernyataan tersebut habis dibagi 5.

Berdasarkan analisis diatas, dapat disimpulkan bahwa subjek S_8 dalam memeriksa kesahihan suatu argumen dengan memeriksa pembuktian induksi mtematika, melakukan substitusi, dan melihat nilai satuan.

f) Permasalahan yang Dihadapi Subjek

Berdasarkan deskripsi diatas, dapat diketahui bahwa subjek S_7 mengalami masalah pada tahap pembuktian P(k+1). Subjek S_8 mengalami kesulitan dalam melakukan asosiatif pada langkah $5 \cdot 3^{2k} + 4 \cdot 3^{2k} + 5 \cdot 2^{2k+2} - 2^{2k+2}$. Hal ini sejalan dengan pendapat Polya yang menyatakan bahwa salah satu masalah yang dihadapi seseorang adalah masalah yang berkaitan dengan pembuktian yaitu menunjukkan bahwa suatu pernyataan itu benar atau salah dan tidak keduannya. Selain itu, subjek S_1 juga mengalami kesalahan konsep pada tahap ini. Subjek S_1 tidak mengetahui bahwa konsep yang digunakan salah.

5. **Triangulasi Data**

Berdasarkan deskripsi dan analisis diatas, peneliti melakukan triangulasi sumber untuk mengetahui keabsahan data dari kedua sumber. Berikut ini triangulasi sumber penalaran matematis subjek S_7 dan subjek S_8 dalam melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika:

Tabel 4.5

Triangulasi Data Penalaran Matematis Subjek S_7 dan Subjek S_8 Dalam Melakukan Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika

Indikator	Subjek S_7	Subjek S_8
Mengajukan Dugaan	• Menulis informasi yang diperoleh dari soal. • Membuat beberapa bentuk umum yang tidak sesuai contoh. • Melakukan pemeriksaan bentuk umum dengan metode substitusi. • Menyadari kesalahan jaawaban. • Menghasilkan bentuk umum $3^{2x} + 2^{2n+2}$ yang sesuai contoh. • Menggunakan pola dari nilai	• Menulis informasi yang diperoleh dari soal. • Membuat beberapa bentuk umum yang tidak sesuai contoh. • Melakukan pemeriksaan bentuk umum dengan metode substitusi. • Menyadari kesalahan jawaban. • Menghasilkan bentuk umum $3^{2n} + 2^{2n+2}$ yang sesuai contoh. • Menggunakan pola dari nilai pangkat.

	pangkat .	
Menyusun Pembuktian dengan Menggunakan Induksi Matematika	• Menggunakan induksi matematika karena berhubungan dengan bilangan asli. • Mengingat informasi tentang induksi matematika pada waktu SMA. • Menggunakan prinsip induksi matematis. • Menggunakan penjumlahan n=k dan n=k+1di salah satu ruas pada tahap P(k+1). • Menggunakan substitusi lagi untuk menunjukkan habis dibagi 5. • Proses pembuktian yang dilakukan kurang tepat.	• Menggunakan induksi matematika karena berhubungan dengan bilangan asli. • Mengingat informasi tentang induksi matematika pada waktu SMA. • Menggunakan prinsip induksi matematis. • Membagi jawaban dengan bilangan 5 di salah satu ruas pada tahap P(k+1). • Menggunakan substitusi lagi untuk menunjukkan habis dibagi 5. • Proses pembuktian yang dilakukan kurang tepat.
Memberikan Alasan Terhadap Kebenaran Solusi	• Mengetahui langkah-langkah induksi matematika. • Dapat menjelaskan arti dari langkah-	• Mengetahui langkah-langkah induksi matematika. • Dapat menjelaskan langkah-langkah induksi matematika. • Menggunakan sifat

	langkah induksi matematika. • Menggunakan sifat distributif, sifta asosiatif dan sifat bilangan berpangkat. • Terdapat kesalahan konsep pada tahap penjumlahan n=k dan n=k di pembuktian P(k+1). • Menggunakan metode substitusi untuk menunjukkan pernyataan tersebut benar. • Merasa yakin bahwa P(k+1) terbukti karena didukung oleh hasil dari substitusi yang menunjukkan habis dibagi 5.	distributif, dan sifat bilangan berpangkat. • Terdapat kesalahan konsep pada tahap membagi semuabilangan dengan 5 di pembuktian P(k+1). • Menggunakan metode substitusi untuk menunjukkan pernyataan tersebut benar. • Merasa yakin bahwa P(k+1) terbukti karena didukung oleh hasil dari substitusi yang menunjukkan habis dibagi 5.
Menarik Kesimpulan dari Pernyataan	• Dapat membuat suatu pernyataan baru. • Melihat langkah-langkah induksi matematika untuk memperoleh pernyataan baru.	• Dapat membuat suatu pernyataan baru. • Melihat pembuktian induksi matematika yang sudah dilakukan untuk memperoleh pernyataan baru.
Memeriksa	• Menggunakan	• Menggunakan

Kesahihan Suatu Argumen	metode substitusi. • Menggunakan nilai satuan	metode substitusi. • Menggunakan nilai satuan

Berdasarkan tabel 4.5 dapat dilihat bahwa data subjek S_7 dan subjek S_8 memiliki kesamaan dan konsisten sehingga data yang diambil dapat dikatakan valid. Pada indikator mengajukan dugaan, kedua subjek sama-sama menuliskan informasi terlebih dahulu dilembar jawaban, kedua subjek langsung membuat beberapa bentuk umum yang tidak sesuai contoh. Kedua subjek melakukan pemeriksaan terhadap bentuk umum yang dihasilkan. Kedua subjek menyadari kesalahan jawaban. Kedua subjek memperoleh bentuk umum yang sama. Kedua subjek sama-sama menggunakan pola dari nilai pangkat dalam memperoleh suatu bentuk umum yang diinginkan.

Pada indikator menyusun pembuktian dengan menggunakan induksi matematika, kedua subjek menggunakan pembuktian induksi matematika karena berhubungan dengan bilangan asli. Kedua subjek mengingat informasi tentang induksi matematika pada waktu SMA. Kedua subjek menerapkan prinsip induksi matematis. Kedua subjek mengalami kesalahan konsep dalam melakukan pembuktian P(k+1). Subjek S_7 melakukan penjumlahan n=k dan n=k+1 disalah satu ruas. Sedangkan subjek S_8 membagi jawaban dengan bilangan 5 disalah satu ruas. Kedua subjek menggunakan metode substitusi lagi untuk meyakinkan pembuktian yang sudah dilakukan menghasilkan jawaban yang benar. Kedua subjek tidak dapat melakukan proses pembuktian dengan tepat.

Pada indikator memberikan alasan terhadap kebenaran solusi, kedua subjek mengetahui langkah-langkah dari induksi matematika. Kedua subjek dapat menjelaskan arti dari setiap langkah-langkah induksi matematika. Kedua subjek menggunakan sifat distributif, sifat asosiatif dan bilangan berpangkat untuk menguraikan jawaban. Kedua subjek mengalami kesalahan konsep dalam melakukan pembuktian P(k+1). Kedua subjek menggunakan metode substitusi untuk menunjukkan pernyataan tersebut benar. Kedua subjek merasa yakin bahwa P(k+1) terbukti benar karena didukung oleh hasil substitusi tersebut.

Pada indikator menarik kesimpulan dari pernyataan, kedua subjek dapat membuat kesimpulan atau pernyataan baru. Kedua melihat pembuktian induksi matematika untuk membuat pernyataan baru. Sedangkan pada indikator memeriksa kesahihan suatu argumen, kedua subjek menggunakan metode substitusi untuk melihat hasil yang diperoleh sudah benar atau sesuai soal. Kedua subjek menggunakan nilai satuan untuk mengetahui bilangan tersebut habis dibagi 5.