BAB II
KAJIAN PUSTAKA

A. Pemahaman Matematis

Pemahaman berasal dari kata dasar “paham”. Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia pemahaman berarti proses atau cara atau tindakan memahami atau memahamkan sesuatu[1]. Sehingga dari segi bahasa, pemahaman matematis merupakan proses atau cara atau tindakan memahami atau memahamkan konsep matematika.

Krathwohl menjelaskan bahwa memahami adalah menentukan makna dari pembelajaran termasuk lisan, tertulis, gambar dan komunikasi[2]. Pemahaman dalam revisi taksonomi Bloom merupakan jenjang kognitif C2 yang berada di atas jenjang mengingat. Memahami merupakan kegiatan menerangkan ide atau konsep yang di dalamnya terdapat kegiatan menginterpretasikan, merangkum, mengelompokkan, atau menerangkan suatu topik tertentu[3]. Hal ini menandakan bahwa pemahaman merupakan jenjang dasar sebelum menerangkan, menganalisis, mengevaluasi, dan mengkreasi.

Disisi lain, menurut Brownell dan Sims pemahaman matematis merupakan sebuah konsep yang susah didefinisikan dan dinyatakan[4]. Definisi secara pasti tentang paham atau pemahaman tidak mudah untuk diformulasikan. Sehingga terdapat berbagai kerangka pemikiran tentang apa itu pemahaman. Brownell dan Sims menyatakan bahwa pemahaman disamakan dengan pembangunan koneksi dalam konteks operasi algoritma dan pemecahan masalah[5]. Selanjutnya, Haylock mendefinisikan pemahaman sebagai sesuatu untuk membuat koneksi kognitif.[6]

---

[1] Tim Penyusun Kamus Pusat Bahasa, “*Kamus Besar Bahasa Indonesia”* (Jakarta: Balai Pustaka, 2002).

[2] Indah Wahyu Utami – Abdul Haris Rosyidi, M. Pd, Op. Cit., hal 22.

[3] Dr. Kusaeri, M. Pd., *“Acuan & Teknik Penilaian Proses & Hasil Belajar dalam Kurikulum 2013”* (Yogyakarta: Ar-Ruzz Media, 2014).

[4] David E. Meel, “Models and Theories of Mathematical Understanding: Comparing Pirie and Kieren’s Model of The Growth of Mathematical Understanding and APOS Theory”, *CBMS Issue in Mathematical Education*, 12, (2003), 133.

[5] ibid

[6] Inchul Jung, Doctoral Dissertation: “*Student Representation and Understanding of Geometric Transformations with Technology Experience” (*Georgia: The University of Georgia, 2002). 30.

Pada dasarnya, pemahaman matematis didasarkan pada representasi internal. Namun, dalam pembelajaran dan penilaiannya digunakan representasi eksternal dari sebuah konsep. Representasi eksternal yang dimaksud semisal penulisan simbol, cara mengkomunikasikan, bahasa matematika yang digunakan, gambar dan objek atau benda nyata yang digunakan untuk mengkomunikasikan konsep matematika[7].

Berdasarkan definisi yang telah dipaparkan beberapa tokoh, terdapat sebuah kesamaan yaitu pemahaman merupakan aksi maupun hasil dari sebuah aksi yang mengasosiasikan berbagai representasi dengan konsep. Representasi ini merupakan representasi eksternal dan internal. Lebih lanjut, pemahaman dapat disimpulkan sebagai kemampuan untuk membuat koneksi dari berbagai representasi baik internal maupun eksternal. Sedangkan pemahaman matematis dapat disimpulkan sebagai kemampuan menggunakan atau mengaplikasikan konsep matematika dalam menyelesaikan permasalahan terkait algoritma serta dapat memberikan argumen atas kebenaran langkahnya.

B. *Folding Back*

Folding back adalah proses kembali ke sebuah lapisan yang lebih dalam dari lapisan tertentu. *Folding back* terjadi ketika siswa dihadapkan pada sebuah masalah pada lapisan yang lebih luar tetapi tidak dengan cepat dapat memecahkannya sehingga kembali pada sebuah lapisan yang lebih dalam[8]. Hasil dari *folding back* idealnya adalah siswa mampu memperluas pemahamannya pada lapisan yang lebih dalam sehingga dapat digunakan untuk memecahkan masalah pada lapisan yang lebih luar.

Folding back bertujuan untuk memperluas pemahaman pada lapisan yang lebih dalam sehingga dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pada lapisan lebih luar[9]. *Folding back*

---

[7] Barmby, Harries, Higgins, and Suggate, *"How Can We Assess Mathematical Understanding?"*. *Proceedings of The 31th Conference of The International Group for The Psychology of Mathematics Education,* 2, (2007), 2.

[8] Susiswo, "Folding Back Mahasiswa dalam Menyelesaikan Masalah Limit Berdasarkan Pengetahuan Konseptual dan Pengetahuan Prosedural", *Prosiding Seminar Nasional TEQIP (Teachers Quality Improvement Program) Universitas Negeri Malang*,(Desember, 2014), 6.

[9] Martin, LaCorix, and Fownes, "Folding Back and The Growth of Mathematical Understanding in Workplace Training", *Mathematics Education Research Journal*, 1: 1, (June, 2005), 23.

tidak selalu kembali pada lapisan *primitive knowing*, tetapi *folding back* kembali ke lapisan yang dibutuhkan. Sebagai contoh, *folding back* ke lapisan *image making* mungkin dengan melakukan aksi fisik seperti menggambar diagram, memanipulasi atau bermain dengan angka.

Slaten menjelaskan bahwa terdapat *effective folding back* dan *ineffective folding back. Effective folding back* ketika seseorang dapat menggunakan perluasan pemahaman yang didapat untuk menyelesaikan permasalahan yang ada. Sedangkan *ineffective folding back* ketika seseorang tidak dapat menggunakan pemahaman yang telah diperoleh. *Ineffective folding back* tidak mengindikasikan tidak terjadi *folding back*[10]. Sehingga, kegiatan *folding back* mungkin saja dilakukan oleh seseorang tetapi tidak semua orang yang melakukan *folding back* dapat menyelesaikan permasalahan yang dihadapinya.

Susiswo menjelaskan ada empat kemungkinan bentuk kembalinya subjek ke lapisan pemahaman yang lebih dalam yaitu; "bekerja pada lapisan lebih dalam" dimana saat mengalami permasalahan subjek bekerja pada lapisan lebih dalam tanpa keluar topik, "mengumpulkan lapisan lebih dalam" dimana ketika mengalami kesulitan dalam menyelesaikan soal subyek membaca kembali seluruh hasil pengerjaannya dan berusaha memahaminya dengan cara baru, "keluar topik" dimana subyek kembali ke lapisan *primitive knowing* bekerja pada perluasan topik lain secara efektif tetapi terpisah dengan topik utama, dan "menyebabkan diskontinu" maksudnya yaitu subjek mengalami keterbatasan pemahaman untuk menyelesaikan soal kemudian berusaha mencari cara lain untuk menyelesaikan soal namun hal tersebut tidak dapat membantu menyelesaikan soal dikarenakan tidak relevan dengan tujuan pencapaian soal[11]. Aksi mundurnya dari lapisan lebih luar ke lapisan lebih dalam, kemudian kemungkinan berbalik maju ke lapisan lebih luar, dapat digambarkan berupa "lintasan *folding back*". Berikut tabel indikator empat macam bentuk *folding back* menurut Susiswo:

[10] Kelli M. Slaten, "Effective Folding Back via Student Research of The History of Mathematics", *Proceedings of The 13th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, (2010), 4.

[11] Viktor Sagala, "Profil Lapisan Pemahaman Konsep Turunan Fungsi dan Bentuk *Folding Back* Mahasiswa Calon Guru Berkemampuan Tinggi Berdasarkan Gender". *MATHEdunesa Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 4: 1, (Juni, 2016), 47.

Tabel 2.1
Macam-macam *Folding back*

Bentuk *Folding back*	**Indikator**
1. Bekerja pada lapisan yang lebih dalam	• Subjek mengalami keterbatasan pemahaman pada lapisan lebih luar kemudian kembali ke lapisan lebih dalam • Subjek bekerja pada lapisan lebih dalam tanpa keluar topik • Subjek bekerja menggunakan pengetahuan yang sudah ada.
2. Mengumpulkan lapisan yang lebih dalam	• Subjek membaca kembali hasil pengerjaannya pada lapisan lebih dalam dengan cara baru untuk mendapatkan pengetahuan sebelumnya untuk tujuan tertentu.
3. Keluar dari topik	• Subjek kembali ke lapisan *primitive knowing* • Subjek bekerja pada perluasan topik lain secara efektif tetapi terpisah dengan topik utama.
4. Menyebabkan diskontinu	• Subjek kembali ke lapisan lebih dalam tetapi tidak berelasi dengan pemahamannya yang ada • Subjek tidak dapat memandang relevansi atau koneksi antara pemahamnnya yang ada dengan aktivitas baru atau masalah yang sedang dikerjakan.

C. Lapisan Pemahaman dan *Folding Back* teori Pirie-Kieren

Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) mendefinisikan lapisan adalah susunan, sedangkan pemahaman adalah proses, cara, perbuatan memahami, atau memahamkan[12]. Dalam hal ini lapisan pemahaman dapat diartikan sebagai tingkatan pemahaman seseorang yang ditunjukkan ketika mengerjakan sesuatu untuk memahami hal tertentu.

Banyak sekali ilmuwan yang meneliti tentang tingkat pemahaman seseorang. Menurut Krathwohl, memahami adalah menentukan makna dari pembelajaran termasuk lisan, tertulis, gambar dan komunikasi. Di dalam proses memahami terdapat proses menafsirkan *(interpreting)*, mencontohkan *(exemplifying)*, mengklasifikasikan *(classifying)*, merangkum *(summarizing)*, menyimpulkan *(inferring)*, membandingkan *(comparing)*, dan menjelaskan *(explaning)*[13]. NCTM menjelaskan bahwa untuk mengetahui pengetahuan dan pemahaman siswa terhadap konsep matematika dapat dilihat dari kemampuan siswa dalam: (1) Mendefinisikan konsep secara verbal dan tulisan; (2) Mengidentifikasi dan membuat contoh dan bukan contoh; (3) Menggunakan model, diagram dan simbol-simbol untuk merepresentasikan suatu konsep; (4) Mengubah suatu bentuk representasi ke bentuk lainnya; (5) Mengenal berbagai makna dan interpretasi konsep; (6) Mengidentifikasi sifat-sifat suatu konsep dan mengenal syarat yang menentukan suatu konsep; (7) Membandingkan dan membedakan konsep-konsep[14]. Berdasarkan pendapat para ahli tersebut, maka kita dapat mengartikan lapisan atau tingkat pemahaman seseorang merupakan sejauh mana seseorang berproses dalam menyelesaikan suatu soal atau permasalahan.

Berdasarkan hasil penelitiannya, Skemp mengutarakan pemahaman terdiri dari (1) pemahaman instrumental dimana siswa mampu menghapal rumus/prinsip, dapat menerapkan rumus dalam perhitungan sederhana dan mengerjakan pehitungan secara algoritmik; (2) pemahaman relasional, dimana siswa mampu mengaitkan sesuatu dengan hal lainnya secara benar serta menyadari prosesnya[15]. Sedangkan Dubinsky memperkenalkan teori APOS yang berkaitan dengan lapisan pemahaman yang menguraikan tentang bagaimana kegiatan mental seorang siswa yang berbentuk aksi (*actions*), proses (*process*), obyek

[12] Diakses dari http://kbbi.web.id/paham, pada tanggal 13 Desember 2016
[13] ibid
[14] Angga Murizal, Yarman, dan Yerizon, "Pemahaman Konsep Matematis dan Model Pembelajaran Quantum Teaching". *Jurnal Pendidikan Matematika FMIPA UP* , 1: 1, (2012), 20-21.
[15] Richard R. Skemp, "Relational Understanding and Instrumental Understanding", *Mathematics Teaching*, 77 (1976), 3.

(*objects*), dan skema (*schema*) ketika mengkonstruksi konsep matematika. Pirie – Kieren juga telah melakukan berbagai penelitian dengan subjek siswa sekolah menengah atas bahkan mahasiswa[16]. Pirie – Kieren mempresentasikan pemahaman matematis menjadi delapan lapisan antara lain: *primitive knowing*, *image making*, *image having*, *property noticing*, *formalising*, *observing*, *structuring*,dan *inventising*[17]. Berdasarkan uraian beberapa ahli di atas, maka dapat kita ketahui bahwa terdapat banyak sekali bentuk-bentuk pemahaman seseorang. Setiap orang dapat diklasifikasikan jenis pemahamannya dilihat dari apa yang ia lakukan dalam berproses mengerjakan suatu soal atau masalah tertentu.

Teori Pirie – Kieren ini lebih dikenal dengan lapisan-lapisan pemahaman matematis. Teori ini bermula pada pendapat bahwa pemahaman sebagai sebuah proses pertumbuhan yang utuh, dinamis, berlapis tetapi tidak linear dan merupakan proses yang berulang-ulang[18]. Pirie – Kieren berpendapat bahwa pemahaman didefinisikan sebagai berikut[19]:

> *"Mathematical understanding can be characterized a leveled but non-linear. It is a recursive phenomenon and recursion is seen to occur when thinking moves between levels of sophistication…. Indeed each level of understanding is contained within succeeding levels. Any particular level is dependent on the forms and processes within and further, is constrained by those without."*

Definisi di atas menunjukkan bahwa menurut Pirie – Kieren, pemahaman matematis dapat digolongkan menjadi beberapa lapisan yang tidak linear. Pemahaman matematis merupakan fenomena rekursif yaitu adanya pengulangan proses untuk mendapatkan sebuah

---

[16] David Tall, "Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking". Published in O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of PME, Haifa, Israel*, 1, (1999), 3.

[17] Indah Wahyu Utami – Abdul Haris Rosyidi, M. Pd, " Profil Lapisan Pemahaman *Propertiy Noticing* Siswa pada Materi Logaritma Ditinjau dari Perbedaan Jenis Kelamin", *MATHEdunesa Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika,* 1: 5, (2016), 24.

[18] Susan Piere and Lyndon Martin, "The Role of Collecting in the Growth of Mathematical Understanding", *Mathematics Education Research Journal*, 12: 2, (2000), 127.

[19] Signe E. Kastberg, Doctoral Dissertation: "*Understanding Mathematical Concepts: The Case of The Logarithmic Function (* University of Georgia, 2002), 17.

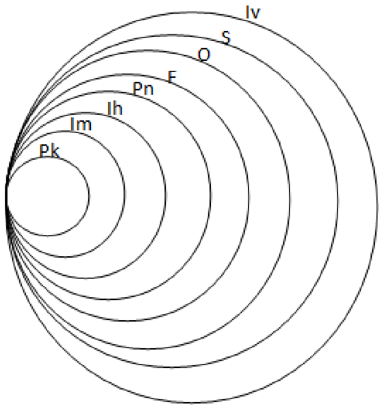
pemahaman. Pengulangan itu terjadi ketika akan mendapatkan pemahaman baru dibutuhkan pengetahuan yang telah di dapat sebagai modal utama. Sehingga, teori ini menolak konsep bahwa pemahaman merupakan proses yang linear dan naik secara monoton.

Pirie – Kieren merepresentasikan pemahaman matematis menjadi delapan lapisan antara lain: *Primitive knowing(Pk), Image making (Im), Image having (Ih), Property noticing (Pn), Formalising (F), Observing (O), Structuring (S), dan Inventising (Iv)* kemudian mereka menjelaskan indikator lapisan demi lapisan pemahaman tersebut sebagai berikut[20]:

1. *Primitive knowing* (pengetahuan sederhana) merupakan usaha awal yang dilakukan oleh siswa dalam memahami definisi baru, membawa pengetahuan sebelumnya ke lapisan pemahaman selanjutnya melalui aksi yang melibatkan definisi atau merepresentasikan definisi.
2. *Image making* (membuat gambaran) merupakan tahapan dimana siswa membuat pemahaman dari pengetahuan sebelumnya dan menggunakannya dalam pengetahuan baru.
3. *Image having* **(**memiliki gambaran) merupakan tahapan dimana siswa sudah memiliki gambaran mengenai suatu topik dan membuat gambaran mental mengenai topik itu tanpa harus mengerjakan contoh-contoh.
4. *Property noticing* (memperhatikan sifat) merupakan tahapan dimana siswa mampu mengkombinasikan aspek-aspek dari sebuah topik untuk membentuk sifat spesifik terhadap topik itu.
5. *Formalising* (memformalkan) merupakan tahapan dimana siswa membuat abstraksi suatu konsep matematika berdasarkan sifat-sifat yang muncul.
6. O*bserving* (mengamati) merupakan tahapan dimana siswa mengkordinasikan aktivitas formal pada level *formalising* sehingga mampu menggunakannya pada permasalahan terkait yang dihadapinya, siswa juga mampu mengaitkan pemahaman konsep matematika yang dimilikinya dengan struktur pengetahuan baru .
7. *Structuring* (penataan) merupakan tahapan dimana siswa mampu mengaitkan hubungan antara teorema satu dengan teorema lainya dan mampu membuktikannya dengan argumen yang logis.

[20] Susiswo, "Folding Back Mahasiswa dalam Menyelesaikan Masalah Limit Berdasarkan Pengetahuan Konseptual dan Pengetahuan Prosedural", *Prosiding Seminar Nasional TEQIP (Teachers Quality Improvement Program) Universitas Negeri Malang*,(Desember, 2014), 4 – 5.

8. *Inventising* (penemuan) merupakan tahapan dimana siswa memiliki sebuah pemahaman terstruktur lengkap dan mampu menciptakan pertanyaan-pertanyaan baru yang tumbuh menjadi sebuah konsep yang baru. Pemahaman matematis siswa tidak terbatasi dan melampaui struktur yang ada sehingga mampu menjawab pertanyaan "*what if*?"[21].



Gambar 2.1
Level Pertumbuhan Pemahaman Matematis Model Pirie-Kieren

Meel mengaitkan teori APOS dari Dubinsky dan teori pemahaman Pirie – Kieren seperti berikut ini; Lapisan *primitive knowing* dan *image making* berkorespondensi dengan konsepsi aksi, lapisan *image having* dan *property noticing* berkorespondensi dengan konsepsi proses, lapisan *formalising* dan *observing* berkorespondensi dengan konsepsi objek,dan lapisan *structuring* dan *inventising* berkorespondensi dengan konsepsi skema. Lebih jelas keterkaitan teori APOS Dubinsky dengan deskriptor teori pemahaman Pirie-Kieren menurut Fatrima dan Dodi dapat dilihat pada tabel berikut ini[22]:

[21] Ibid, hal 6.
[22] Fatrima Santi Syafri dan Dodi Isran, "Pembelajaran Matematika dengan Model Teori Pirie dan Kieren", *Edudikara*, 1: 1, (2016), 49.

Tabel 2.2
Keterkaitan Teori APOS Dubinsky dan Teori Pemahaman Pirie – Kieren

Teori APOS dari Dubinsky		**Teori Pemahaman Pirie- Kieren**	
Lapisan pemaha-man	**Deskriptor**	**Lapisan pemahaman**	**Deskriptor**
Aksi (*Action*)	• Siswa mampu mentransformasi objek sebagai kegiatan eksternal dengan melakukan perhitungan secara bertahap • Siswa hanya mengetahui bagaimana melakukan operasi jika diberikan perintah yang jelas • Siswa belum mampu mengintrepretasikan suatu situasi sebagai sebuah fungsi kecuali memiliki sebuah formula tunggal serta mampu menentukan nilai fungsi	Lapisan 1 *(Pk)*	• Siswa mempunyai pemahaman awal yang berkaitan dengan topik • Siswa dapat menjelaskan pengetahuan sederhana yang dimiliki
		Lapisan 2 *(Im)*	• Siswa dapat membuat suatu gambaran penyelesaian suatu topik dari pengetahuan sebelumnya dan menggunakannya pada cara baru. • Siswa berusaha memahami suatu topik, baik secara mental ataupun fisik, untuk bisa mengembangkan ide-ide tertentu dan membuat gambaran suatu konsep melalui gambar maupun

	tersebut.		melalui contoh-contoh
Proses (*Process*)	• Siswa mampu membangun konstruksi mentalnya setelah melakukan aksi secara berulang-ulang dan melakukan refleksi terhadap aksi tersebut • Siswa dapat berpikir tentang aksi yang sama tanpa memerlukan stimulus dari luar • Siswa mampu memahami suatu konsep matematika yang melibatkan imajinasi dalam mentransformasikan objek mental atau fisik sebagai aktivitas internal dan terkontrol • Siswa dapat melakukan perhitungan	Lapisan 3 *(Ih)*	• Siswa telah memiliki gambaran abstrak tentang suatu materi tanpa mengerjakan contoh-contoh.
		Lapisan 4 *(Pn)*	• Siswa dapat menghubungkan gambaran abstrak yang dimiliki dengan konsep dan sifat-sifat pada suatu materi • Siswa mampu memperlihatkan sifat-sifat apa saja yang berkaitan degan materi

	tanpa melakukannya secara aktual • Siswa mampu menjelaskan tahapan pengerjaan dari tahap aksi dengan penjelasan dan kata-kata sehingga siswa memiliki pemahaman secara prosedural.		
Objek (*Object*)	• Siswa mampu memahami suatu konsep matematika sebagai suatu penerapan dari aksi dan proses • Siswa mampu memperlakukan ide atau konsep sebagai objek kognitif yang mencakup kemampuan untuk melakukan aksi dari suatu objek, serta memberikan alasan atau penjelasan tentang sifat-sifatnya.	Lapisan 5 *(F)*	• Siswa mampu mengaplikasikan sifat-sifat yang telah diketahui pada level sebelumnya
		Lapisan 6 *(O)*	• Siswa melakukan pengamatan dari penggunaan konsep yang telah dihubungkan pada materi dan dapat menggunakanya untuk menyelesaikan permasalahan yang dihadapi

	• Siswa bisa menunjukkan pemahaman konseptual.		
Skema (*Schema*)	• Siswa mampu memecahan masalah dari kumpulan aksi,proses, objek, dan skema lain yang saling berkaitan untuk konsep tertentu dalam pikiran seseorang • Siswa mampu mengulang kembali empat tahap yang telah ditempuh • Siswa telah memiliki kemampuan untuk mengkonstruk contoh-contoh suatu konsep matematika sesuai dengan sifat-sifat yang dimiliki konsep tersebut • Siswa mampu mengaitkan aksi,proses, dan objek untuk menyelesaikan	Lapisan 7 *(S)*	• Siswa mampu menyusun pekerjaan/tugas yang diberikan berdasarkan pengamatan dan proses pemahaman pada level sebelumnya • Siswa telah mampu menyelesaikan tugas yang diberikan secara terstruktur dan lengkap • Siswa dapat membuktikan hasil pekerjaannya dengan argumen yang logis
		Lapisan 8 *(Iv)*	• Siswa mampu membuat pertanyaan baru dari permasalahan atau materi yang mereka pelajari. • Siswa dapat menemukan konsep baru berdasarkan pemahaman

	suatu permasalahan.		terstruktur setelah menyelesaikan tugas sehingga mampu menjawab pertanyaan "*what if*?"

Selanjutnya menurut Piere – Kieren, meskipun pemahaman konsep seseorang bertumbuh dari lapisan terdalam (*primitive knowing*) menuju ke lapisan terluar (*inventising*), akan tetapi adakalanya seseorang kembali ke lapisan lebih dalam ketika menghadapi masalah. Aksi kembali ke lapisan yang lebih dalam ini disebut *folding back*[23].

Hal penting lainnya pada model pertumbuhan pemahaman Pirie – Kieren adalah adanya intervensi. Ketika siswa menemui masalah pada level tertentu sehingga pemahamannya pada level tersebut tidak cukup untuk dapat bergerak ke lapisan yang lebih luar maupun lapisan yang lebih dalam, maka guru perlu melakukan intervensi. Terdapat dua jenis intervensi pada model pertumbuhan pemahaman Pirie dan Kieren, yaitu intervensi invokatif dan intervensi provokatif. Intervensi invokatif terjadi ketika intervensi diberikan saat siswa menemui masalah pada level tertentu sehingga pemahamannya pada level tersebut tidak cukup untuk dapat bergerak ke lapisan yang lebih dalam. Di pihak lain, intervensi provokatif terjadi ketika intervensi diberikan saat siswa menemui masalah pada level tertentu sehingga pemahamannya pada level tersebut tidak cukup untuk dapat bergerak ke lapisan yang lebih luar[24].

D. Kemampuan Matematika

---

[23] Viktor Sagala, "Profil Lapisan Pemahaman Konsep Turunan Fungsi dan Bentuk *Folding Back* Mahasiswa Calon Guru Berkemampuan Tinggi Berdasarkan Gender". *MATHEdunesa Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika,* 4: 1, (Juni, 2016), 47.

[24] Susiswo, "Folding Back Mahasiswa dalam Menyelesaikan Masalah Limit Berdasarkan Pengetahuan Konseptual dan Pengetahuan Prosedural", *Prosiding Seminar Nasional TEQIP (Teachers Quality Improvement Program) Universitas Negeri Malang*,(Desember, 2014), 6.

Kemampuan dalam Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) memiliki arti (1) kesanggupan, kecakapan, kekuatan; (2) kekayaan[25]. Pengertian kemampuan *(ability*) dalam model *three rings* dari Renzulli adalah kecerdasan yang biasa diukur dengan tes-tes intelegensi[26]. Sedangkan menurut Uno, " kemampuan adalah merujuk pada kinerja seseorang dalam suatu pekerjaan yang bisa dilihat dari pikiran, sikap, dan perilakunya[27]. Dalam penelitian ini yang dimaksud kemampuan adalah kesanggupan atau kecakapan yang dimiliki seseorang dalam menyelesaikan suatu soal yang bisa dilihat dari pikiran, sikap, dan perilakunya serta dari tes-tes intelegensi yang diberikan kepadanya.

Kemampuan terbagi menjadi dua, yaitu kemampuan intelektual *(intelectual ability)* dan kemampuan fisik *(physical ability).* Kemampuan intelektual adalah kemampuan yang dibutuhkan untuk melakukan berbagai aktivitas mental (berpikir, menalar, dan memecahkan masalah). Dalam belajar matematika diperlukan kemampuan intelektual. Hal ini dikarenakan ketika siswa belajar matematika berarti siswa melakukan berbagai aktivitas mental yang meliputi berpikir, bernalar, dan memecahkan masalah. Kemampuan intelektual siswa mempengaruhi kemampuan siswa dalam bernalar. Kemampuan fisik adalah kemampuan melakukan tugas yang menuntut stamina, keterampilan, kekuatan, dan karakteristik serupa[28].

Syaban menjelaskan bahwa kemampuan matematika *(mathematical abilities)* adalah pengetahuan dan keterampilan dasar yang diperlukan untuk dapat melakukan manipulasi matematika meliputi pemahaman konsep dan pengetahuan prosedural. Hal-hal yang termasuk dalam pemahaman konsep adalah kemampuan bernalar (*ability to reason*), mengidentifikasi dan mengaplikasi prinsip-prinsip *(identify and apply principles),* kemampuan memanipulasi ide-ide tentang pemahaman konsep dalam berbagai cara *(ability to manipulate about the understanding of a concept in a variety of ways)*. Sedangkan hal-hal

---

[25] Hasan Alwi, dkk, *Kamus besar Bahasa Indonesia Edisi Ketiga*, (Jakarta: Balai Pustaka, 2002), 707

[26] Reni Akbar Huwadi, *Akselerasi A-Z Informasi Program Percepatan Belajar dan Anak Berbakat Intelektual,* (Jakarta: PT Gramedia Widiasarana Indonesia, 2006), 56.

[27] Luvia F. P – Dr. Janet T. M, M. Pd, "Identifikasi Kemampuan Matematika Siswa dalam Memecahkan Masalah Aljabar di Kelas VIII Berdasarkan Taksonomi SOLO", diakses dari http//jurnalmahasiswa.unesa.ac.id, pada tanggal 15 Desember 2016

[28] Devi Rovina, Tesis: *"Kreativitas Siswa SMP dalam Memecahkan Masalah Luas Bangun Datar Sisi Lurus Ditinjau dari Kemampuan Matematika*". (Surabaya: UNESA, 2014), 28.

yang termasuk dalam pengetahuan prosedural adalah kemampuan membaca *(ability to read)*, kemampuan untuk membuat grafik dan tabel *(ability to produse graph and tables)*, memilih dan menggunakan prosedur yang benar *(select and apply appropriate procedures correctly)*[29]. Kemampuan matematika siswa berbeda-beda, ada yang memiliki kemampuan tinggi, sedang, dan rendah.

Blinder menyatakan bahwa siswa yang memiliki kemampuan matematika tinggi akan memberikan pemikiran kreatif dalam tugas matematika baru dan menyediakan solusi bermakna dan asli. Siswa yang mempunyai kemampuan matematika tinggi akan lebih mudah mengkonstruksi pengetahuannya dibanding siswa yang mempunyai kemampuan matematika sedang dan rendah[30]. Namun, Wallach menunjukkan bahwa mencapai skor tertinggi pada skor akademis belum tentu mencerminkan potensi untuk kinerja kreatif[31].

Sejalan dengan hal tersebut, penelitian Retna, Mubarokah dan Suhartatik menyatakan bahwa siswa dengan kemampuan matematika tinggi mampu menyatakan apa yang diketahui dalam soal dengan menggunakan bahasa sendiri, mampu menyatakan apa yang ditanya dalam soal dengan menggunakan bahasa sendiri, membuat rencana penyelesaian dengan lengkap, mampu menyatakan langkah-langkah yang ditempuh dalam soal menggunakan konsep yang pernah dipelajari, dan mampu memperbaiki jawaban. Siswa dengan kemampuan matematika sedang mampu menyatakan apa yang diektahui dalam soal menggunakan bahasa sendiri, mampu menyatakan apa yang ditanya dalam soal menggunakan bahasa sendiri, mampu membuat rencana penyelesaian tetapi tidak lengkap, kurang mampu menyatakan langkah-langkah penyelesaian dengan menggunakan konsep yang pernah dipelajari, dan kurang mampu memperbaiki jawaban. Siswa dengan kemampuan matematika rendah kurang mampu menyatakan apa yang diketahui dalam soal dengan menggunakan bahasa sendiri, kurang mampu menyatakan apa yang ditanya dalam soal mengunakan bahasa sendiri, tidak membuat rencana penyelesaian soal, tidak mampu

---

[29] Khoirun Nisa', Tesis*: "Beban Kognitif Siswa pada Pembelajaran Matematika dengan Menggunakan Media Power Point Ditinjau dari Kemampuan Matematika".* (Surabaya: UNESA, 2014), 28.

[30] ibid

[31] Nurul Ulfiah, "Proses Berpikir Kreatif Siswa Kelas VII-D SMP Negeri 19 Malang dalamMengajukan Masalah dengan Situasi Semi Terstruktur Pada Materi Garis dan Sudut," diakses dari http//jurnal-online.um.ac.id, pada tanggal 17 Desember 2016

menyatakan langkah-langkah penyelesaian menggunakan konsep yang pernah dipelajari, dan tidak mampu memperbaiki jawaban[32]. Kemampuan matematika siswa dalam penelitian ini adalah kemampuan siswa menggunakan segala pengetahuan dan keterampilannya dalam menyelesaikan soal-soal matematika.

E. Logaritma

Logaritma merupakan kebalikan dari perpangkatan. Pada materi logaritma terdapat sub materi pertidaksamaan logaritma. Dalam penelitian ini akan dibahas tentang lapisan pemahaman dan *folding back* siswa dalam menyelesaikan soal pertidaksamaan logaritma.

Pada lapisan pemahaman *primitive knowing*, siswa dikatakan dapat mencapai lapisan pemahaman *primitive knowing* apabila sudah memiliki pemahaman sederhana tentang soal pertidaksamaan logaritma.Siswa sudah mengetahui apa yang diketahui dan ditanyakan dalam soal.

Lapisan pemahaman yang kedua yaitu *image making* (membuat gambaran) dapat dicapai siswa ketika siswa sudah mengetahui bahwa langkah-langkah dalam menyelesaikan pertidaksamaan logaritma hampir sama dengan cara penyelesaian pada persamaan logaritma. Hanya saja lebih memperhatikan tanda ketidaksamaanya. Untuk mencari himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan logaritma, siswa harus mencari daerah penyelesaian dari syarat pertidaksamaan dan syarat numerus terlebih dahulu.

Perlu diingat bahwa fungsi logaritma hanya berlaku pada bilangan positif, sehingga pada lapisan *image having* (mempunyai gambaran) siswa sudah dapat membuat gambaran abstrak langkah-langkah penyelesaian soal pertidaksamaan logaritma dengan memperhatikan syarat-syarat berikut:
Jika ${}^{a}\log f(x) > {}^{a}\log g(x)$, maka langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

(i) syaratnya: $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$
(ii) kemudian selesaikan ${}^{a}\log f(x) > {}^{a}\log g(x)$ dengan $f(x) > g(x)$ jika $a > 1$ dan $f(x) < g(x)$ jika $0 < a < 1$

[32] Milda Retna, Lailatul Mubarokah, dan Suhartatik, "Proses Berpikir Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Cerita Ditinjau Berdasarkan Kemampuan Matematika", *Jurnal pendidikan Matematika STKIP PGRI Sidoarjo*, 1: 2, (September, 2013), 22.

Selanjutnya pada lapisan pemahaman *property noticing*, siswa memperhatikan konsep ataupun sifat yang berkaitan dengan logaritma agar dapat memanipulasi soal sehingga mudah untuk dicari himpunan penyelesaiannya.

Perhatikan persamaan berikut ini :

$$a^x = c \text{ dengan } a > 1 \text{ dan } a \neq 1$$

Apabila solusinya ada, maka solusinya adalah suatu bilangan real yang dinotasikan dengan ${}^a\log c$ (dibaca : logaritma dari c dengan bilangan pokok a) atau dituliskan $x = {}^a\log c$.

(Pertanyaan : Kapan solusinya ada?, sehingga bentuk ${}^a\log c$ akan bermakna manakala. . . .)

Secara umum didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2: $a^b = c \Leftrightarrow b = a \log c$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$.

Sifat-sifat yang dapat diturunkan berdasarkan definisi diatas adalah:

a) $a^{a \log c} = c$
b) ${}^a\log a^b = b$
c) ${}^a\log a = 1$
d) ${}^a\log 1 = 0$
e) ${}^{a^m}log a^n = \frac{n}{m}$
f) ${}^a\log xy = {}^a\log x + {}^a\log y$
g) ${}^a\log b^n = n \ {}^a\log b$
h) ${}^a\log \frac{x}{y} = {}^a\log x - {}^a\log y$
i) ${}^a\log b = \frac{{}^p\log b}{{}^p\log a}$ dengan $p > 0$ dan $p \neq 1$

Contoh:

Jika ${}^2\log 3 = a$, nyatakan ${}^{27}\log 32$ dalam bentuk a. Berdasarkan sifat i), b), dan g) dapat ditulis

$${}^{27}\log 32 = \frac{{}^2\log 32}{{}^2\log 27} = \frac{{}^2\log 2^5}{{}^2\log 3^3} = \frac{5}{{}^{3^2}\log 3} = \frac{5}{3a}$$

Jadi, ${}^{27}\log 32 = \frac{5}{3a}$

Seringkali setelah menemukan sifat yang dapat diterapkan pada soal, kita harus menyelesaikan hasil dari sifat tersebut menggunakan sifat-sifat pada eksponen. Karena sifat eksponen dan logaritma berkaitan satu sama lain dalam penyelesaian soal yang berbentuk persamaan atau pertidaksamaan logaritma, maka pada lapisan *property noticing* siswa juga harus mengetahui sifat eksponen yang bagaimana yang dapat diterapkan untuk menyelesaikan soal. Sifat-sifat eksponen dapat dijelaskan oleh definisi berikut:

Definisi 1 : Misalkan *m* dan *n* adalah bilangan-bilangan asli dan *a* adalah bilangan riel positif yang tidak sama dengan 1.

(1) $a^m = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}$

(2) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

(3) $a^0 = 1, a^1 = a$

Berdasarkan definisi di atas dapat diturunkan beberapa sifat yang berkaitan dengan perpangkatan seperti berikut ini :

Sifat 1 : Untuk bilangan-bilangan asli *m* dan *n* berlaku

(1) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$

(3) $(ab)^n = a^n b^n$

(4) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

Selanjutnya pada lapisan pemahaman *formalising*, siswa dapat memformalkan semua pengetahuan yang dimiliki untuk mencari kebenaran dari himpunan penyelesaian pertidaksamaan logaritma. Misalkan ketika siswa menemui bentuk soal pertidaksamaan logaritma ${}^2\log x^2 - 2 > 2$, Siswa dapat menghitung syarat pertidaksamaan logaritma dengan memperhatika sifat logaritma dan eksponen untuk mengubah fungsi $g(x) = 2$ menjadi bentuk logaritma. Siswa menyelesaikan soal pada lembar jawabannya menggunakan pengetahuan awal yang sudah dimiliki.

Pada lapisan *observing*, siswa mengamati atau mengecek kembali langkah penyelesaian soal pertidaksamaan logaritma yang telah dikerjakan kemudian melakukan perbaikan apabila terdapat kesalahan pada penggunaan konsep atau sifat yang digunakan. Siswa dapat memperbaiki sendiri jawabannya dengan memperhatikan konsep-konsep yang berlaku dalam penyelesaian soal logaritma.

Lebih lanjut pada lapisan *structuring*, siswa menyusun langkah-langkah penyelesaian soal pertidaksamaan logaritma dari awal hinggga akhir berdasarkan pengamatan dan proses pada level sebelumnya. Siswa dapat menyelesaikan tugas yang diberikan dengan terstruktur dan lengkap sehingga menghasilkan himpunan penyelesaian pertidaksamaan logaritma dengan tepat seperti contoh berikut:

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut:

1. ${}^{5}\log 3x + 5 < {}^{5}\log 35$
2. ${}^{2}\log (6x + 2) < {}^{2}\log (x + 27)$

Jawaban:

1. ${}^{5}\log 3x + 5 < {}^{5}\log 35$

   Syarat nilai bilangan pada logaritma $3x + 5 > 0$ atau $x > \frac{-5}{3}$ . . (1)

   $3x + 5 < 35$

   $3x < 30$

   $x < 10$ . . . .(2)

   Jadi,dari (1) dan (2) diperoleh penyelesaiannya yaitu $\frac{-5}{3} < x < 10$
2. ${}^{2}\log (6x + 2) < {}^{2}\log (x + 27)$

   Syarat nilai bilangan pada logaritma:

   $6x + 2 > 0$, maka $x > \frac{-1}{3}$ . . . . . (1)

   $x + 27 > 0$, maka $x > -27$ . . . (2)

   Perbandingan nilai pada logaritma

   $6x + 2 < x + 27$

   $6x - x < 27 - 2$

   $5x < 25$

   $x < 5$ . . . . (3)

   Jadi, dari (1), (2), dan (3) diperoleh penyelesaiannya $-1 < x < 5$

Ketika siswa dapat menyusun langkah penyelesaian soal pertidaksamaan logaritma, itu artinya siswa sudah dapat mencapai lapisan pemahaman *structuring*.

Pada lapisan pemahaman yang terakhir yaitu *inventising* (penemuan), siswa dapat membuat pertanyaan-pertanyaan baru yang berkaitan dengan soal yang diberikan. Siswa juga dapat menyelesaikan soal-soal lain dan menemukan konsep baru dalam penyelesaian soal berdasarkan pemahamannya saat mengerjakan soal sebelumnya. Misalnya ketika diberikan soal pertidaksamaan logaritma ${}^{2}\log (6x + 2) < {}^{2}\log (x + 27)$, siswa dapat membuat soal baru dengan mengganti bilangan pokok atau bentuk fungsi $f(x)$ atau $g(x)$ pada soal tersebut.

Seringkali siswa mengalami kendala dalam proses mencari himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan logaritma. Ketika mengalami permasalahan dalam menyelesaikan soal, siswa dapat mengingat kembali konsep-konsep pada materi logaritma agar dapat menyelesaikan soal. Kegiatan mengingat kembali konsep-konsep logaritma pada materi sebelumnya itu disebut *folding back* bekerja pada lapisan yang lebih dalam.

Terkadang setelah menemukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan logaritma, siswa mengecek kembali jawabannya dari awal hingga akhir untuk memastikan apakah jawabannya sudah benar atau masih terdapat kesalahan. Kegiatan mengecek kembali dengan cara membaca jawabannya dari awal hingga akhir merupakan bentuk *folding back* mengumpulkan lapisan yang lebih dalam.

Ketika mengalami permasalahan dalam menyelesaikan pertidaksamaan logaritma, ada juga siswa yang memutuskan untuk menyelesaikan soal dari awal lagi kemudian menggunakan topik lain untuk menyelesaikan soal pertidaksamaan logaritma tersebut, misalnya topik aljabar. Siswa menyelesaikan soal dengan melakukan perluasan topik secara efektif tetapi terpisah dengan topik utama yaitu pertidaksamaan logaritma. Proses ini disebut *folding back* keluar dari topik. Sedangkan *folding back* bentuk menyebabkan diskontinu dapat dialami siswa ketika mengalami permasalahan dalam penyelesaian soal logaritma, kemudian menyelesaikan soal dengan perluasan topik lain yang tidak sesuai dengan langkah penyelesaian sebenarnya.