FUNGSI KOMPLEKS

Buku Perkuliahan Program S-1 Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Tarbiyah IAIN Sunan Ampel Surabaya

Penulis:

Ahmad Lubab, M.Si.

Supported by:
Government of Indonesia (GoI) and Islamic Development Bank (IDB)

KATA PENGANTAR
REKTOR IAIN SUNAN AMPEL

Merujuk pada PP 55 tahun 2007 dan Kepmendiknas No 16 tahun 2007, Kepmendiknas No. 232/U/2000 tentang Penyusunan Kurikulum Pendidikan Tinggi dan Penilaian Hasil Belajar Mahasiswa; Kepmendiknas No. 045/U/2002 tentang Kurikulum Inti Pendidikan Tinggi; dan KMA No. 353 Tahun 2004 tentang Pedoman Penyusunan Kurikulum Pendidikan Tinggi, IAIN Sunan Ampel akan menerbitkan buku perkuliahan sebagai upaya pengembangan kurikulum dan peningkatan profesionalitas dosen.

Untuk mewujudkan penerbitan buku perkuliahan yang berkualitas, IAIN Sunan Ampel bekerjasama dengan *Government of Indonesia* (GoI) dan *Islamic Development Bank* (IDB) telah menyelenggarakan *Workshop on Writing Textbooks for Specialization Courses* dan *Workshop on Writing Textbooks for vocational Courses* bagi dosen IAIN Sunan Ampel, sehingga masing-masing dosen dapat mewujudkan karya ilmiah yang dibutuhkan oleh para mahasiswa-mahasiswinya.

Buku perkuliahan yang berjudul Fungsi Kompleks ini merupakan salah satu di antara buku-buku yang disusun oleh para dosen pengampu mata kuliah program S-1 program studi Matematika Fakultas Matematika IAIN Sunan Ampel sebagai panduan pelaksanaan perkuliahan selama satu semester. Dengan terbitnya buku ini diharapkan perkuliahan dapat berjalan secara aktif, efektif, kontekstual dan menyenangkan, sehingga dapat meningkatkan kualitas lulusan IAIN Sunan Ampel.

Kepada *Government of Indonesia* (GoI) dan *Islamic Development Bank* (IDB) yang telah memberi *support* atas terbitnya buku ini, tim fasilitator dan penulis yang telah berupaya keras dalam mewujudkan penerbitan buku ini, kami sampaikan terima kasih. Semoga buku perkuliahan ini bermanfaat bagi perkembangan pembudayaan akademik di IAIN Sunan Ampel Surabaya.

Rektor
IAIN Sunan Ampel Surabaya

Prof. Dr. H. Abd. A'la, M.Ag.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kita panjatkan kepada Allah Swt. Berkat karunia-Nya, buku perkuliahan Fungsi Kompleks ini bisa hadir sebagai salah satu buku referensi disamping buku referensi lain.

Buku perkuliahan ini disusun sebagai salah satu sarana pembelajaran pada mata kuliah Fungsi Kompleks. Secara rinci buku ini memuat beberapa paket penting meliputi; *1) Pengantar Bilangan Kompleks; 2) Geometri Bilangan kompleks; 3) Fungsi Analitik; 4) Limit dan kontinuitas Fungsi Kompleks; 5) Turunan Fungsi Kompleks; 6) Persamaan Cauchy Riemann; 7) Fungsi-Fungsi Elementer; 8) Transformasi Linear dan Transformasi Pangkat; 9) Transformasi Kebalikan dan Transformasi Bilinear; 10) Transformasi Eksponensial dan Logaritmik; 11) Transformasi w=sin z dan w=cos z; 12) Transformasi konformal; 13) Integral Berharga Kompleks dari bilangan real; 14) Integral Fungsi Kompleks*

Akhirnya, penulis ucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah turut membantu dan berpartisipasi demi tersusunnya buku perkuliahan Fungsi Kompleks ini. Kritik dan saran kami tunggu guna penyempurnaan buku ini.

Terima Kasih.

Penulis

PEDOMAN TRANSLITERASI

Transliterasi Tulisan Arab-Indonesia Penulisan Buku Perkuliahan "Pendidikan Karakter Menjadi Muslim dan Muslimah Indonesia" adalah sebagai berikut.

No	Arab	Indonesia	Arab	Indonesia
1.	ا	`	ط	t}
2.	ب	b	ظ	z}
3.	ت	t	ع	‘
4.	ث	th	غ	gh
5.	ج	j	ف	f
6.	ح	h}	ق	q
7.	خ	kh	ك	k
8.	د	d	ل	l
9.	ذ	dh	م	m
10	ر	r	ت	n
11	ز	z	و	w
12	س	s	ه	h
13	ش	sh	ء	`
14	ص	s}	ي	y
15	ض	d}		

Untuk menunjukkan bunyi panjang (madd) dengan cara menuliskan tanda coretan di atas a>, i>, dan u> (ا, ي dan و). Bunyi hidup dobel (diftong) Arab ditransliterasikan dengan menggabung dua huruf "ay" dan "au" seperti layyinah, lawwamah. Untuk kata yang berakhiran ta' marbutah dan berfungsi sebagai sifat (modifier) atau *mud}a>f ilayh* ditranliterasikan dengan "ah", sedang yang berfungsi sebagai mud}a>f ditransliterasikan dengan "at".

DAFTAR ISI

SATUAN ACARA PERKULIAHAN

1. Identitas

Nama Mata kuliah	: **Fungsi Kompleks**
Jurusan/Program Studi	: Pendidikan Matematika
Bobot	: 3 sks
Waktu	: 3 x 50 menit/ Pertemuan
Kelompok Matakuliah	: MK

2. Deskripsi

Mata kuliah ini membelajarkan mahasiswa-mahasiswi untuk Memiliki pengusaan konsep 1) Bilangan Kompleks; 2) Geometri Bilangan kompleks; 3) Limit dan kontinuitas Fungsi Kompleks; 4) Turunan Fungsi Kompleks; 5) Persamaan Cauchy Riemann; 6) Fungsi Analitik & Fungsi Harmonik; 7) Fungsi-Fungsi Elementer; 8) Transformasi Linear dan Transformasi Pangkat; 9) Transformasi Kebalikan dan Transformasi Bilinear; 10) Transformasi Eksponensial dan Logaritmik; 11) Transformasi $w=\sin z$ dan $w=\cos z$; 12) Transformasi konformal; 13) Integral Berharga Kompleks dari bilangan real; 14) Integral Fungsi Kompleks

3. Urgensi

Mata kuliah ini merupakan cabang matematika murni yang sangat berguna untuk mempelajari konsep-konsep lain seperti dalam arus listrik, gelombang, image, bahkan untuk studi tentang sidik jari. Hal ini dimungkinkan karena ternyata tidak semua permasalahan mampu diselesaiakan dalam sistem bilangan real. Mata kuliah ini diberikan sebagai bekal bagi mahasiswa yang ingin melanjutkan ke jenjang yang lebih tinggi

4. Kompetensi Dasar, Indikator, dan Materi

No	KD	Indikator	Materi
1	Menjelaskan bilangan kompleks,	1. Menuliskan notasi bilangan kompleks 2. Mengoperasikan	Bilangan kompleks: 1. Definisi bilangan kompleks

	operasi dan sifat-sifat aljabarnya	bilangan kompleks 3. Menyebutkan sifat-sifat bilangan kompleks	2. Operasi bilangan kompleks 3. Sifat-sifat aljabar, 4. Konjugat dan Modulus
2	Menjelaskan Geometri Bilangan Kompleks	1. Menyatakan dalam bentuk kartesius dan kutub 2. Menjelaskan sifat bilangan dalam berbagai bentuk 3. menerangkan pengertian fungsi dengan variabel kompleks 4. menghitung limit fungsi kompleks	1. Geometri Bilangan kompleks 2. Koordinat kutub 3. Rumus Euler 4. Akar Kompleks
3			1. Limit Fungsi Kompleks 2. kontinuitas Fungsi Kompleks;
4	Menjelaskan konsep dasar penurunan fungsi kompleks	1. menentukan turunan dari suatu fungsi kompleks 2. Menguraikan persamaan Cauchy Riemann 3. Menurunkan persamaan Cauchy Riemann 4. Menyelidiki keanalitikan suatu fungsi 5. menentukan fungsi harmonik	Turunan dalam fungsi kompleks
5			1. Persamaan Cauchy Riemann
6			1. Fungsi Analitik & Fungsi Harmonik
7	Menjelaskan kembali fungsi elementer beserta sifat operasi	1. Menuliskan kembali macam fungsi elementer 2. Mengoperasikan fungsi-fungsi elementer 3. Menggunakan	1. Fungsi-fungsi elementer; Fungsi linier, fungsi pangkat, fungsi kebalikan, fungsi bilinear, fungsi

		Transformasi Kompleks	exponensial, fungsi logaritmik
8			2. Transformasi Linier dan Transformasi Pangkat
9			3. Transformasi Kebalikan dan Transformasi Bilinear
10			4. Transformasi Eksponensial dan Logaritmik
11			5. Transformasi *w=sin z* dan *w=cos z*
12			6. Transformasi Konformal
13	Menyajikan Fungsi Analitik dalam Deret	1. mengerti definisi barisan dan deret pangkat beserta sifat kekonvergenannya. 2. Menyajikan fungsi analitik dalam deret Taylor, deret MacLaurin atau deret Laurent.	1. Barisan 2. Deret 3. Konvergen 4. Deret Taylor 5. Deret Maclaurin 6. Deret Laurent
14	Menjelaskan konsep integral fungsi kompleks	Menghitung integral fungsi kompleks	1. Integral fungsi kompleks 2. Integral Cauchy 3. Modulus Maksimum 4. Integral fungsi kompleks

Paket 1
PENGANTAR BILANGAN KOMPLEKS

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket pertama ini difokuskan pada konsep bilangan kompleks, eksistensi bilangan kompleks, operasi aritmatik bilangan kompleks, sifat-sifat bilangan kompleks, serta konjugat dan modulus dari suatu bilangan kompleks. Fokus materi pada paket ini merupakan dasar yang mendasari materi pada paket-paket selanjutnya karena berisi konsep dan operasi dasar vektor. Oleh karena itu pemahaman terhadap materi ini penting untuk ditekankan sekalipun sudah pernah diterima di tingkat SMA.

Pada awal Paket 1 ini, mahasiswa akan diperkenalkan tentang pengertian bilangan kompleks dan eksistensi bilangan kompleks. Selanjutnya mahasiswa akan menentukan hasil penjumlahan dan selisih dua bilangan kompleks atau lebih serta perkalian dan pembagian dua bilangan kompleks atau lebih. mengkonstruksi vektor hasil penjumlahan. Selain itu mahasiswa juga belajar sifat-sifat aljabar bilangan kompleks serta konjugat dan modulus bilangan kompleks.

Proses perkuliahan didesain dengan model kooperatif TPS (*Think Pair Shared*) agar setiap mahasiswa dalam kelompok termotivasi untuk terlibat secara aktif dalam perkuliahan. Lembar kegiatan yang digunakan terdapat beberapa permasalahan yang dikerjakan secara individu, kemudian didiskusikan secara berpasangan, kemudian dipresentasikan di depan kelas. Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan laptop sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat mengefektifkan perkuliahan, serta kertas plano, spidol dan solasi sebagai alat menuangkan hasil diskusi kelompok. Langkah tersebut diupayakan untuk menggali ide-ide dan potensi kreatif mahasiswa-mahasiswi dalam menjalin komunikasi sosial yang lebih efektif. Dari sini, peta pengetahuan dan keterampilan sosial mereka akan diketahui untuk kemudian dilakukan diskusi dan simulasi perkuliahan. Penggunaaan multi media dalam perkuliahan juga diharapkan untuk mengoptimalisasi pencapaian kompetensi dasar dan indikator yang telah ditargetkan.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Memahami bilangan kompleks, operasi dan sifat-sifat aljabarnya

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa-mahasiswi diharapkan mampu:

1. Menuliskan notasi bilangan kompleks
2. Melakukan operasi aljabar bilangan kompleks
3. Menyebutkan sifat-sifat aljabar bilangan kompleks
4. Membuktikan sifat-sifat aljabar bilangan kompleks
5. Menentukan konjugat bilangan kompleks
6. Menghitung modulus bilangan kompleks

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

Pengantar bilangan kompleks meliputi:

1. Definisi bilangan kompleks
2. Operasi bilangan kompleks
3. Sifat-sifat aljabar
4. Konjugat dan Modulus

Langkah-langkah Perkuliahan

Kegiatan Awal (35 menit)

1. Kontrak kuliah dan menjelaskan satuan acara perkuliahan untuk satu semester
2. Menjelaskan kompetensi dasar
3. Menjelaskan indikator
4. Apersepsi materi bilangan kompleks yang telah diperoleh di SMA dengan cara tanya jawab

5. Brainstorming dengan mengerjakan soal bahwa bilangan real belum mampu mengatasi permasalahan nyata, serta memotivasi pentingnya mempelajari fungsi kompleks.

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Dosen menjelaskan beberapa konsep penting yang diperlukan dalam menyelesaikan LK. Mahasiswa menyimak penjelasan dosen dengan bantuan uraian materi pada paket 1.
2. Dosen membagi meminta mahasiswa untuk membuktikan sifat-sifat aljabar bilangan kompleks secara individu.
3. Mahasiswa secara berpasangan mendiskusikan masalah yang telah dibuktikan secara individu sebelumnya.
4. Dosen membimbing mahasiswa selama proses diskusi. Mahasiswa berdiskusi dengan anggotanya dan bertanya pada dosen jika ada materi yang tidak dipahami. Masing-masing pasangan harus benar-benar memahami keseluruhan hasil diskusi karena perwakilan pasangan akan presentasi di depan kelas dipihak secara acak.
5. Dosen memanggil anggota dengan no.urut tertentu pada salah satu kelompok untuk mempresentasikan 1 nomor soal pada LK 1.
6. Selesai presentasi, pasangan lain memberikan klarifikasi
7. Penguatan hasil diskusi dari dosen
8. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

Kegiatan Penutup (10 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.

Lembar Kegiatan Mahasiswa

Membuktikan sifat-sifat aljabar bilangan kompleks.

Tujuan

Mahasiswa dapat membuktikan sifat-sifat aljabar bilangan kompleks.

Bahan dan alat

Lembar kegiatan, kertas HVS, Kertas Plano, Spidol

Langkah-langkah kegiatan

1. Masing individu mendapatkan tugas untuk membuktikan sifat-sifat operasi aljabar bilangan kompleks, meliputi:
    a. Sifat Komutatif Penjumlahan
    b. Sifat Komutatif Perkalian
    c. Sifat Assosiatif Penjumlahan
    d. Sifat Asosiatif Perkalian
    e. Sifat Distributif
2. Secara berpasangan mendiskusikan permasalahan yang diberikan.
3. Pasangan yang mendapatkan giliran mempresentasikan hasil diskusinya didepan kelas.

Uraian Materi

BILANGAN KOMPLEKS

Eksistensi Bilangan Kompleks

Dalam berbagai masalah terapan, sistem bilangan real ternyata tidak mencukupi untuk mengkaji permasalahannya[1]. Perhatikan persamaan kuadrat berikut :

$$x^2 + 1 = 0$$

Solusi dari persamaan di atas adalah $x = \sqrt{-1}$. Jelas bahwa $x = \sqrt{-1}$ bukanlah bilangan real, karena tidak ada bilangan real yang kuadratnya sama dengan -1. Secara umum untuk persamaan kuadrat berbentuk $ax^2 + bx + c = 0$ dengan

[1] Jurusan Matematika ITS, *Seri Buku Ajar Kalkulus 1* (Surabaya: Jurusan Matematika FMIPA ITS, 2009), 429

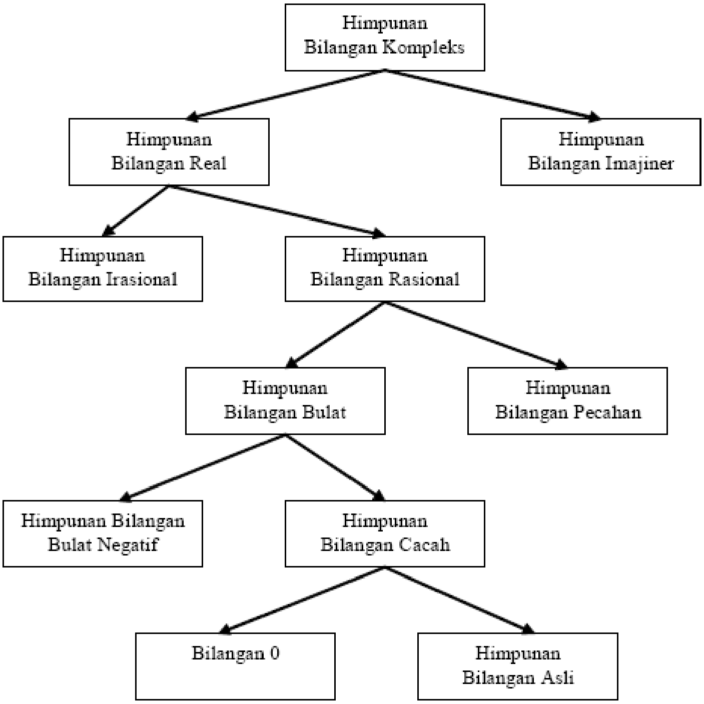
$a \neq 0$, tidak akan memiliki solusi ketika nilai dari $D = b^2 - 4ac < 1$. Sebagai contoh carilah solusi dari persamaan kuadrat $x^2 - 4x + 8 = 0$ dengan menggunakan rumus abc. Jelas persamaan tersebut tidak memiliki solusi dalam sistem bilangan real.

Agar setiap persamaan kuadrat memiliki solusi, maka sistem bilangan yang digunakan harus diperluas. Perhatikan kembali solusi dari persamaan persamaan kuadrat diatas. Solusi-solusi tersebut mengandung akar bilangan negatif, jelas akar dari suatu bilangan negatif bukanlah bilangan real. Setiap bilangan yang bukan bilangan real berarti termasuk dalam komplemen bilangan real ($\Re^C$).

Untuk mempermudah penulisan, matematikawan abad 18 G.W. Leibniz memperkenalkan bilangan $i = \sqrt{-1}$[2]. Jadi $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = \pm 2i$. Dengan cara yang sama $\sqrt{-49} = \sqrt{49}\sqrt{-1} = \pm 7i$. Bilangan seperti ini disebut bilangan imajiner. Jadi bilangan imajiner ialah bilangan yang dapat ditulis sebagai bi dengan $b \neq 0$ dan $b \in \Re$. Kuadrat dari bilangan imajiner $i^2 = -1$.

Selain bilangan real, ternyata ada jenis bilangan lain yaitu bilangan imajiner. Gabungan dari bilangan real dan bilangan imajiner membentuk satu bilangan baru yang disebut bilangan kompleks yang dinotasikan dengan z. Secara umum sistem bilangan yang ada dapat dilihat pada gambar berikut.

[2] Freitag, Eberhard dan Busam, Rolf. *Complex Analysis* (Heidelberg: Springer, 2005), 1



Gambar 1.1 Sistem Bilangan

Bilangan kompleks dapat dituliskan sebagai

$$z = \{a + bi; a, b \in \Re\}$$

dengan a adalah bagian real dinotasikan dengan $R(z)$ dan b merupakan bagian imajiner dinotasikan dengan $I(z)$. Jika $R(z) = 0$ dan $I(z) \neq 0$, maka z dinamakan imajiner murni (*pure imaginary*). Jika $R(z) = 0$ dan $I(z) = 1$, maka $z = i$ dan dinamakan satuan imajiner (*imaginary unit*). Bila $I(z) = 0$, maka z menjadi bilangan real $R(z)$, sehingga dalam pengertian ini bilangan real x dapat dipandang sebagai bilangan kompleks dengan bentuk $z = x + 0i$[3].

Sistem bilangan kompleks dapat diperkenalkan secara formal dengan menggunakan konsep ”pasangan terurut” (*ordered pair*) bilangan nyata, (a, b)[4]. Himpunan semua pasangan itu dengan operasi-operasi tertentu yang sesuai padanya dapat didefinisikan sebagai sistem bilangan kompleks. Dalam beberapa buku model seperti ini digunakan.

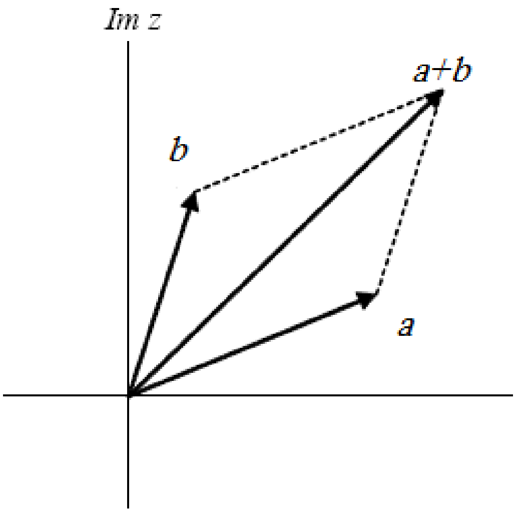
[3] John D. Paliouras, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur* (Jakarta: Erlangga, 1987), 3
[4] Ibid

Operasi Aritmatika

Seperti pada sistem bilangan real, dalam sistem bilangan kompleks didefinisikan operasi aritmatika. Jumlah dan selisih dua bilangan kompleks didefinisikan dengan menjumlahkan atau mengurangkan bagian real dan bagian imajiner yang bersesuaian, misalkan ada dua buah bilangan kompleks a dan b, dengan $a = x + yi$ dan $b = u + vi$, maka penjumlahan dan pengurangan bilangan kompleks didefinisikan sebagai

$$a \pm b = (x \pm u) + (y \pm v)i.$$

Penjumlahan dua bilangan kompleks serupa dengan penjumlahan dan pengurangan dua buah vektor. Secara grafik dapat digambarkan



Gambar 1.2 Perkalian dua buah bilangan kompleks

Contoh 1.1:

Jika $a = 5 - 5i$, $b = -3 + 4i$ dan $c = 1 + 4i$ dapatkan $a + b, a - b, dan\ a + b + c$

$$\begin{aligned} a + b &= (5 - 5i) + (-3 + 4i) \\ &= (5 - 3) + (-5 + 4)i \\ &= 2 - i \\ a - b &= (5 - 5i) - (-3 + 4i) \\ &= (5 - (-3)) - (-5 - 4)i \\ &= 8 - 9i \end{aligned}$$

$$a + b + c = (5 - 5i) + (-3 + 4i) + (1 + 4i)$$
$$= (5 - 3 + 1) + (-5 + 4 + 4)i$$
$$= 3 + 3i$$

Untuk perkalian dua buah bilangan kompleks dapat diturunkan seperti berikut:

$$a.b = (x + yi).(u + vi)$$
$$= xu + xvi + yiu + yvi^2$$
$$= xu + xvi + uyi + yv(-1)$$
$$= (xu - yv) + (xv + uy)i$$

Sedangkan untuk pembagian dua buah bilangan kompleks

$$\frac{a}{b} = \frac{(x + yi)}{(u + vi)}$$
$$= \frac{(x + yi)}{(u + vi)} x \frac{(u - vi)}{(u - vi)}$$
$$= \frac{(xu + yv) - (xv - uy)i}{u^2 + v^2}$$
$$= \frac{(xu + yv)}{u^2 + v^2} + \frac{(-xv + uy)}{u^2 + v^2} i$$

Contoh 1.2

Jika $a = 5 - 5i$, $b = -3 + 4i$ dapatkan $a.b, a/b$

$$a.b = (5 - 5i).(-3 + 4i)$$
$$= 5.(-3) + 5.4i + (-5i).(-3) + (-5i).(4i)$$
$$= -15 + 20i + 15i - 20(-1)$$
$$= (-15 - (-20)) + (20 + 15)i$$
$$= 5 + 35i$$

$$\frac{a}{b} = \frac{(5 - 5i)}{(-3 + 4i)}$$
$$= \frac{(5 - 5i)}{(-3 + 4i)} x \frac{(-3 - 4i)}{(-3 - 4i)}$$
$$= \frac{(5(-3) + (-5).4) - (5.4 - (-3).(-5))i}{(-3)^2 + 4^2}$$
$$= \frac{-35}{25} + \frac{5}{25} i$$
$$= -\frac{7}{5} + \frac{1}{5} i$$

Jika z merupakan suatu bilangan kompleks, maka ada satu dan hanya satu bilangan kompleks yang akan dilambangkan dengan $-z$, sedemikan sehingga

$$z + (-z) = 0;$$

$-z$ dinamakan negatif z (lawan penjumlahan) dan jelas bahwa jika $z = x + yi$, maka $-z = -x - yi$.

Untuk suatu bilangan kompleks bukan nol $z = x + yi$ terdapat satu dan hanya satu bilangan kompleks z^{-1} atau $1/z$ sedemikian sehingga

$$zz^{-1} = 1;$$

z^{-1} dinamakan kebalikan z (lawan perkalian) dan perhitungan langsung menghasilkan

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i$$

Sifat Aljabar

Operasi-operasi aritmatik yang telah didefinisikan diatas memenuhi hukum-hukum berikut:

1. Komutatif

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1; \quad z_1 . z_2 = z_2 . z_1$$

2. Assosiatif

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3; \quad z_1 . (z_2 . z_3) = (z_1 . z_2) . z_3$$

3. Distributif

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

4. Elemen netral terhadap penjumlahan $(0 = 0 + 0i)$

$$z + 0 = 0 + z = z$$

5. Elemen netral terhadap perkalian $(1 + 1 + 0i)$

$$z . 1 = 1 . z = z$$

Konjugat

Untuk sebarang bilangan kompleks $z = a + bi$, konjugat kompleks (konjugat) dari z dinotasikan dengan $\bar{z}$ dan didefiniskan sebagai

$$\bar{z} = a - bi$$

Sebagai contoh: konjugat dari $z = 2 + 6i$ adalah $\bar{z} = 2 - 6i$, konjugat dari $z = -3 - 9i$ adalah $\bar{z} = -3 + 9i$, konjugat dari $z = 8$ adalah $\bar{z} = 8$, dan konjugat dari $z = 2i$ adalah $\bar{z} = -2i$.

Dalam pendefinisian pembagian bilangan kompleks, terlihat bahwa konjugat kompleks telah digunakan, yaitu sebagai pengali penyebutnya. Demikian pula pada penyelesaian polinomial

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$$

dengan koefisien real. Dapat dibuktikan bahwa dalam sistem bilangan kompleks, persamaan demikian selalu mempunyai penyelesaian, dan jika z adalah salah satu penyelesaiannya, maka $\bar{z}$ juga merupakan penyelesaian. Sebagai contoh carilah solusi dari persamaan $x^2 - 4x + 8 = 0$.

Konjugat kompleks mempunyai sifat:

1. Distributivitas Kesekawanan

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}; \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}; \qquad \overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

2. $\bar{\bar{z}} = z$
3. $z\bar{z} = [R(z)]^2 + [I(z)]^2$

Modulus

Apabila suatu bilangan kompleks z dipandang sebagai suatu vektor, maka panjang vektor tersebut dinamakan modulus dari z dan dinotasikan dengan $|z|$. Jadi jika $z = a + bi$, maka

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Contoh, jika $z = 4 - 3i$, maka

$$|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Perhatikan jika $z = a + 0i$ (z bilangan real), maka

$$|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = a$$

Artinya modulus dari bilangan real sama dengan nilai mutlak bilangan tersebut.

Beberapa sifat modulus akan dibahas pada paket selanjutnya.

Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Sistem bilangan real ternyata belum mampu menjawab semua permasalahan yang ada
2. Bilangan kompleks dapat dituliskan sebagai
$$z = \{a + bi; a, b \in \Re\}$$
dengan a adalah bagian real dinotasikan dengan $R(z)$ dan b merupakan bagian imajiner dinotasikan dengan $I(z)$.
3. Jumlah dan selisih dua bilangan kompleks didefinisikan dengan menjumlahkan atau mengurangkan bagian real dan bagian imajiner yang bersesuaian
4. Bilangan kompleks memenuhi sifat-sifat aljabar seperti komutatif, asosiatif, dan distributif terhadap penjumlahan dan perkalian.
5. Apabila suatu bilangan kompleks z dipandang sebagai suatu vektor, maka panjang vektor tersebut dinamakan modulus dari z dan dinotasikan dengan $|z|$.

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Kerjakan operasi-operasi berikut dan nyatakan dalam $a + bi$
   a. $(-8 - 3i) - (-1 - 4i)$
   b. $(5 - 2i) + (7 + 3i)$
   c. $(5 - 2i)(2 + 3i)$
   d. $-i(5 + 2i)$
   e. $6i/(6 - 5i)$
   f. $(a + bi)/(a - bi)$
   g. $i, i^2, i^3, \dots, i^{10}$
2. Tunjukkan bahwa jika $z = -1 - i$ maka $z^2 + 2z + 2 = 0$
3. Buktikan bahwa untuk setiap z, berlaku:
   a. $R(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
   b. $I(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

4. Tentukan $R(z), I(z), |z|$ dan $\bar{z}$
   a. $z = \frac{2-5i}{3+4i} + \frac{3-4i}{25i}$
   b. $z = \frac{12-5i}{(1+i)(1+2i)(1+3i)}$
5. Buktikan untuk sebarang bilangan z dan w,
   berlaku: $z\overline{w} + \bar{z}w = 2R(z\overline{w})$

Daftar Pustaka

Freitag, Eberhard dan Busam, Rolf. *Complex Analysis*. Heidelberg: Springer, 2005.

Jurusan Matematika ITS, *Seri Buku Ajar Kalkulus 1* . Surabaya: Jurusan Matematika FMIPA, 2005.

Paliouras. John D, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Jakarta: Erlangga, 1987.

Paket 2
GEOMETRI BILANGAN KOMPLEKS

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket kedua ini difokuskan pada konsep geometri bilangan kompleks, bidang kompleks, bentuk kutub bilangan kompleks, dan akar bilangan kompleks. Materi pada paket ini merupakan lanjutan dari paket pertama dan merupakan prasyarat materi pada paket-paket selanjutnya yaitu limit dan kontinuitas fungsi kompleks. Oleh karena itu pemahaman terhadap materi ini penting untuk ditekankan sekalipun materi dalam paket ini tergolong mudah.

Pada awal Paket 2 ini, mahasiswa akan diperkenalkan tentang geometri bilangan kompleks, bidang kompleks, yaitu bagaimana menggambarkan bilangan kompleks sebagai sebuah titik dan sebuah vektor pada bidang datar. Selanjutnya mahasiswa akan diajarkan bagaimana menuliskan bentuk lain dari bilangan kompleks salah satunya dalam bentuk kutub. Materi terakhir pada paket ini adalah menentukan akar dari bilangan kompleks.

Proses perkuliahan didesain dengan model kooperatif agar setiap mahasiswa dalam kelompok termotivasi untuk terlibat secara aktif dalam perkuliahan. Lembar kegiatan yang digunakan terdapat beberapa permasalahan yang dikerjakan secara individu, kemudian didiskusikan secara berpasangan, kemudian dipresentasikan di depan kelas. Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan laptop sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat mengefektifkan perkuliahan, serta kertas plano, spidol dan solasi sebagai alat menuangkan hasil diskusi kelompok. Langkah tersebut diupayakan untuk menggali ide-ide dan potensi kreatif mahasiswa-mahasiswi dalam menjalin komunikasi sosial yang lebih efektif. Dari sini, peta pengetahuan dan keterampilan sosial mereka akan diketahui untuk kemudian dilakukan diskusi dan simulasi perkuliahan. Penggunaaan multi media dalam perkuliahan juga diharapkan untuk mengoptimalisasi pencapaian kompetensi dasar dan indikator yang telah ditargetkan.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Memahami bilangan kompleks, operasi dan sifat-sifat aljabarnya

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa-mahasiswi diharapkan mampu:

1. Menentukan konjugat bilangan kompleks
2. Menghitung modulus bilangan kompleks
3. Menyatakan dalam bentuk kartesius dan kutub
4. Menjelaskan sifat bilangan dalam berbagai bentuk

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

Pengantar bilangan kompleks meliputi:

1. Konjugat dan Modulus
2. Makna geometri: sebagai vektor, sebagai titik,
3. Koordinat kutub, Rumus Euler
4. Penarikan akar kompleks

Langkah-langkah Perkuliahan

Kegiatan Awal (35 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Apersepsi materi koordinat kartesius yang telah diperoleh di SMA dengan cara tanya jawab
4. Brainstorming dengan mengerjakan soal sederhana, serta memotivasi pentingnya mempelajari fungsi kompleks.

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Dosen menjelaskan beberapa konsep penting yang diperlukan dalam menyelesaikan LK. Mahasiswa menyimak penjelasan dosen dengan bantuan uraian materi pada paket 2.
2. Dosen membagi meminta mahasiswa berkumpul dengan kelompoknya untuk mendiskusikan bagaimana menurunkan formula mencari n akar bilangan kompleks sesuai dengan langkah-langkah yang ada di LK.
3. Dosen membimbing mahasiswa selama proses diskusi. Mahasiswa berdiskusi dengan anggotanya dan bertanya pada dosen jika ada materi yang tidak dipahami. Masing-masing pasangan harus benar-benar memahami keseluruhan hasil diskusi karena perwakilan pasangan akan presentasi di depan kelas dipihak secara acak.
4. Dosen memanggil anggota dengan no.urut tertentu pada salah satu kelompok untuk mempresentasikan hasil diskusinya.
5. Selesai presentasi, kelompok lain memberikan klarifikasi
6. Penguatan hasil diskusi dari dosen
7. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

Kegiatan Penutup (10 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.

Lembar Kegiatan Mahasiswa

Menurunkan rumus umum mencari n akar bilangan kompleks.

Tujuan

Mahasiswa dapat menemukan sendiri formula untuk menentukan n akar bilangan kompleks dengan memanfaatkan bentuk kutub bilangan kompleks dan operasinya.

Bahan dan alat

Lembar kegiatan, kertas HVS, Kertas Plano, Spidol

Langkah-langkah kegiatan

1. Masing-masing kelompok mendiskusikan formula untuk mencari n akar bilangan kompleks dengan memanfaatkan bentuk kutub bilangan kompleks dan operasinya.
2. Membuat satu contoh mencari n akar bilangan kompleks beserta penyelesaiannya
3. Presentasi hasil diskusinya didepan kelas.

Uraian Materi

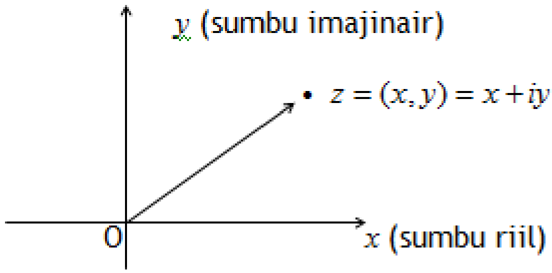
GEOMETRI BILANGAN KOMPLEKS

Geometri Bilangan Kompleks

Definisi awal bilangan kompleks telah menciptakan secara alami suatu padanan (korespondensi) satu-satu antara himpunan bilangan kompleks dan himpunan titik-titik pada bidang xy. Jadi bilangan kompleks $z = a + ib$ dipadankan dengan titik (a, b) di bidang datar dan sebaliknya[1]. Identifikasi bilangan kompleks dengan titik pada bidang datar sedemikian kuatnya sehingga dalam praktiknya, antara bilangan $a + ib$ dan titik (a, b) sering tidak dibedakan. Karena Identifikasi ini, bidang xy yang telah dikenal selanjutnya disebut bidang kompleks atau bidang z. Dengan sumbu x dan sumbu y masing-masing dinamakan sumbu nyata dan sumbu khayal.

Dari keterangan diatas, bilangan kompleks dapat disajikan dalam pasangan berurut (x, y), sehingga secara geometri dapat disajikan sebagai titik (x, y) pada bidang kompleks (bidang xy), dengan sumbu x (sumbu riil) dan sumbu y (sumbu imajinair). Selain itu, bilangan kompleks $z = x + iy = (x, y)$ juga dapat disajikan sebagai vektor dalam bidang kompleks dengan titik pangkal pada titik asal dan ujung vektor merupakan titik (x, y). Bilangan kompleks dapat disajikan dalam suatu diagram yang sering disebut sebagai diagram Argand.

[1] John D. Paliouras, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur* (Jakarta: Erlangga, 1987), 9



Gambar 2.1 Diagram Argand

Apabila suatu bilangan kompleks z disajikan dalam diagram Argand, bilangan kompleks tersebut dapat dipandang sebagai suatu vektor, maka panjang vektor tersebut dinamakan modulus dari z dan dinotasikan dengan $|z|$. Jadi jika $z = a + bi$, maka

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Contoh, jika $z = 4 - 3i$, maka

$$|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Perhatikan jika $z = a + 0i$ (z bilangan real), maka

$$|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = a$$

Artinya modulus dari bilangan real sama dengan nilai mutlak bilangan tersebut.

Sifat-sifat modulus adalah sebagai berikut:

a. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

b. $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$

c. $\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

d. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

e. $|\overline{z}| = |z|$

f. $z\bar{z} = |z|^2$

g. Pertidaksamaan Segitiga : $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

h. $|z_1 + z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$

i. $|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$

j. $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.

Bentuk Kutub Bilangan Kompleks

Selain modulus, diagram Argand juga memperlihatkan sebuah sudut yang dibentuk oleh vektor z dengan sumbu nyata positif. Sudut ini kemudian dikenal dengan Argumen z dan dinotasikan dengan $\arg z$. Dengan kata lain, $\arg(a+ib)$, adalah suatu sudut θ sedemikian sehingga

$$\sin\theta = b/|z| \text{ dan } \cos\theta = a/|z|$$

Argumen nol tidak dapat didefinisikan secara berarti. Secara aljabar, hal ini jelas, karena diperoleh bentuk $0/0$. Sedangkan secara geometris, vektor nol yang menjadi padanan bilangan kompleks $z = 0$, tidak mempunyai panjang, sehingga tidak dapat membentuk suatu sudut dengan sumbu nyata positif.

Dari penjelasan diatas, jelas bahwa argumen bilangan kompleks bukanlah suatu besaran tunggal. Kenyataanya, setiap $z \neq 0$ mempunyai tak hingga banyaknya argumen yang khusus, yang berbeda satu dengan yang lain dengan kelipatan 2π . Dalam suatu kasus kondisi seperti ini mungkin tidak diharapakan, sehingga untuk mengatasi masalah ini diperkenalkan suatu konsep yang disebut "argumen pokok" $\arg z$. Untuk sebarang bilangan $z \neq 0$, argumen pokok $\arg z$ didefinisikan sebagai nilai tunggal $\arg z$ yang memenuhi

$$-\pi < \arg z \le \pi$$

$$\arg z = \arg z + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Konsep modulus dan argumen ini selanjutnya digunakan untuk menjelaskan hubungan matematika semua titik pada bidang datar yang terletak didalam lingkaran yang pusatnya z_0 dan jari-jarinya r yaitu $|z - z_0| < r$. Selanjutnya suatu titik (x, y) pada bidang datar dapat juga dinyatakan dalam bentuk koordinat kutub r dan θ

Misalkan $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$ maka $z = x + iy$ dapat dinyatakan dalam bentuk kutub

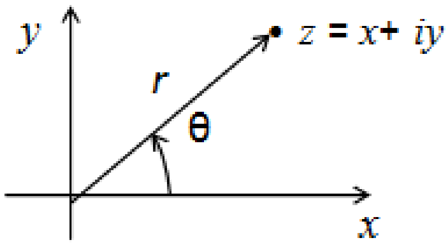
$$z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$
$$= r\,cis\theta$$

dengan

r = modulus (nilai mutlak) z = $|z|$ = $\sqrt{x^2 + y^2}$.

θ = argumen dari z = $\arg z$

= $arc\ tg\dfrac{y}{x}$, $x \neq 0$.



Gambar 2.2 Ilustrasi Bentuk Kutub Bilangan Kompleks

Contoh 2.1

Diketahui $z = \dfrac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{-1+i}$. Tentukan bentuk kutub dari z dan $\bar{z}$.

Penyelesaian :

Menggunakan sifat argumen diperoleh :

$$z = \frac{(\sqrt{2}\ cis\frac{\pi}{4})(2\ cis\frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}\ cis\frac{3\pi}{4}} = 2\ cis\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right) = 2\ cis\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

$$\bar{z} = 2\ cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Operasi Aljabar Bentuk Kutub Bilangan kompleks

Misalkan $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1)$ dan $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2)$ dengan $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$, $\arg z_1 = \theta_1$, $\arg z_2 = \theta_2$.

a. **Perkalian**

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\ cis(\theta_1 + \theta_2)$$
$$= |z_1 z_2|\ cis(\theta_1 + \theta_2)$$
$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 .$$

b. **Pembagian** $(z_2 \neq 0)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} cis(\theta_1 - \theta_2) = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| cis(\theta_1 - \theta_2).$$
$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 .$$

c. **Invers** sebarang bilangan kompleks $z = r\,e^{i\theta}$ yaitu

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\ cis(-\theta).$$
$$\arg\frac{1}{z} = -\arg z\ .$$

Selain dalam bentuk umum $z = x + iy$ dan bentuk kutub $z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta)$, bilangan kompleks z juga dapat dinyatakan dalam bentuk eksponen.

Bentuk eksponen bilangan kompleks $z = x + iy$ yaitu

$$z = r\,e^{i\theta}$$

dengan $e^{i\theta} = \cos\theta + i\ \sin\theta$ dinamakan **rumus Euler**. Misalkan $z = r\,e^{i\theta}$, maka menggunakan aturan pangkat seperti pada bilangan riil diperoleh

$$z^n = (r\,e^{i\theta})^n = r^n\,e^{in\theta}$$

Jika $r = 1$, maka bentuk pangkat di atas menjadi $z^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, atau $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Selanjutnya dapat ditulis dalam bentuk $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ yang disebut ***Rumus Moivre*** .

Akar Kompleks

Misalkan $z = r\ cis\theta$, akar pangkat n dari bilangan kompleks z ditulis $z^{\frac{1}{n}}$ atau $\sqrt[n]{z}$. Jika diberikan bilangan kompleks $z \neq 0$ dan n bilangan bulat positif, maka diperoleh n buah akar untuk $z^{\frac{1}{n}}$ yaitu

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\ \sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right],\ \ k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Secara geometri, n buah akar tersebut merupakan titik-titik sudut segi n beraturan pada suatu lingkaran dengan pusat titik O dan jari-jari $\sqrt[n]{r}$.

Contoh 2.2 :

Tentukan semua akar dari $\sqrt[3]{-8i}$, kemudian gambarkan akar-akar tersebut dalam bidang kompleks.

Penyelesaian :

Misalkan $z = -8i$, maka $r = |z| = 8$ dan $\theta = arctg\,\frac{-8}{0} = -\frac{\pi}{2}$,

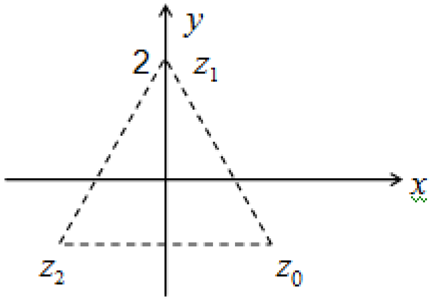
$$z_k = \sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\ \sin\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right],\ \ k = 0, 1, 2.$$

Sehingga diperoleh

$$z_0 = \sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{-\frac{\pi}{2}}{3} + i\,\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+}{3}\right] = 2\left[\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right] = \sqrt{3} - i\,.$$

$$z_1 = 2\left[\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})\right] = 2i\,.$$

$$z_2 = 2\left[\cos(\frac{7\pi}{6}) + i\,\sin(\frac{7\pi}{6})\right] = -\sqrt{3} - i\,.$$



Gambar 2.3 Akar $\sqrt[3]{-8i}$ dalam bidang Kompleks

Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Bilangan kompleks dapat disajikan dalam suatu diagram yang disebut sebagai diagram Argand
2. Misalkan $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$ maka $z = x + iy$ dapat dinyatakan dalam bentuk kutub $z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r(\cos\theta + i\,\sin\theta) = r\,cis\theta$. dengan

   r = modulus (nilai mutlak) $z = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   θ = argumen dari $z = \arg z = arc\ tg\,\frac{y}{x},\ x \neq 0$.

3. Bentuk eksponen bilangan kompleks $z = x + iy$ yaitu $z = r e^{i\theta}$ dengan $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ dinamakan **rumus Euler**. Jika $r = 1$, maka bentuk pangkat di atas selanjutnya dapat ditulis dalam bentuk $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ yang disebut ***Rumus Moivre***.
4. Jika diberikan bilangan kompleks $z \neq 0$ dan n bilangan bulat positif, maka diperoleh n buah akar untuk $z^{\frac{1}{n}}$ yaitu

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right],\quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Gambarkan bilangan-bilangan
   a. $3 + 4i$
   b. $1 - i$
   c. $-1 + i$
   d. $-2 + \sqrt{3}i$
2. Tuliskan dalam bentuk kutub setiap bilangan berikut
   a. $(-4i)$
   b. $-2 + 2i$
   c. $-\sqrt{27} - 3i$
   d. $(-8 - 3i) - (-1 - 4i)$
   e. $(5 - 2i) + (7 + 3i)$
   f. $(5 - 2i)(2 + 3i)$
   g. $-i(5 + 2i)$
3. Tentukan semua akar dari persamaan $z^3 + 8 = 0$.
4. Selesaikan persamaan $z^2 + i = 0$, selanjutnya gunakan untuk menyelesaikan $z^4 + 2iz^2 - 1 = 0$.

Daftar Pustaka

Freitag, Eberhard dan Busam, Rolf. *Complex Analysis*. Heidelberg: Springer, 2005.

Jurusan Matematika ITS, *Seri Buku Ajar Kalkulus 1* . Surabaya: Jurusan Matematika FMIPA, 2005.

Paliouras. John D, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Jakarta: Erlangga, 1987.

Paket 3
LIMIT DAN KONTINUITAS FUNGSI KOMPLEKS

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ketiga ini difokuskan pada konsep fungsi dengan variabel kompleks, limit dan kontinuitas fungsi kompleks. Materi pada paket ini merupakan lanjutan dari paket kedua dan merupakan bekal untuk materi pada paket-paket selanjutnya yaitu turunan fungsi kompleks. Oleh karena itu pemahaman terhadap materi ini penting untuk ditekankan sekalipun materi dalam paket ini tergolong mudah.

Pada awal Paket 3 ini, mahasiswa akan diperkenalkan tentang fungsi dengan variabel kompleks, dalam paket ini juga diperlukan pengetahuan mengenai topologi seperti himpunan, lingkungan. Lingkungan terhapus interior, komplemen, titik batas, batas, himpunan terbuka, himpunan tertutup, region, region terbuka, region tertutup. Selanjutnya mahasiswa akan diajarkan bagaimana konsep limit dari fungsi kompleks. Materi terakhir pada paket ini adalah tentang kontinuitas fungsi kompleks.

Proses perkuliahan didesain dengan model kooperatif agar setiap mahasiswa dalam kelompok termotivasi untuk terlibat secara aktif dalam perkuliahan. Lembar kegiatan yang digunakan terdapat beberapa permasalahan yang dikerjakan secara individu, kemudian didiskusikan secara berpasangan, kemudian dipresentasikan di depan kelas. Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan laptop sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat mengefektifkan perkuliahan, serta kertas plano, spidol dan solasi sebagai alat menuangkan hasil diskusi kelompok. Langkah tersebut diupayakan untuk menggali ide-ide dan potensi kreatif mahasiswa-mahasiswi dalam menjalin komunikasi sosial yang lebih efektif. Dari sini, peta pengetahuan dan keterampilan sosial mereka akan diketahui untuk kemudian dilakukan diskusi dan simulasi perkuliahan. Penggunaaan multi media dalam perkuliahan juga diharapkan untuk mengoptimalisasi pencapaian kompetensi dasar dan indikator yang telah ditargetkan.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Menjelaskan macam-macam fungsi kompleks

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa-mahasiswi diharapkan mampu:

1. menerangkan pengertian fungsi dengan variabel kompleks
2. menghitung limit fungsi kompleks
3. Menentukan kekontinuan fungsi kompleks

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

Pengantar bilangan kompleks meliputi:

1. Fungsi variabel kompleks
2. Pemetaan
3. Limit fungsi kompleks
4. Kontinitas fungsi kompleks

Langkah-langkah Perkuliahan

Kegiatan Awal (35 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Apersepsi materi fungsi kompleks dengan membandingkan dengan fungsi real.
4. Brainstorming dengan mengerjakan soal sederhana, serta memotivasi pentingnya mempelajari fungsi kompleks.

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Dosen menjelaskan beberapa konsep penting yang diperlukan dalam menyelesaikan LK. Mahasiswa menyimak penjelasan dosen dengan bantuan uraian materi pada paket 3.
2. Dosen membagi meminta mahasiswa berkumpul dengan kelompoknya untuk mendiskusikan bagaimana menurunkan formula mencari n akar bilangan kompleks sesuai dengan langkah-langkah yang ada di LK.
3. Dosen membimbing mahasiswa selama proses diskusi. Mahasiswa berdiskusi dengan anggotanya dan bertanya pada dosen jika ada materi yang tidak dipahami. Masing-masing pasangan harus benar-benar memahami keseluruhan hasil diskusi karena perwakilan pasangan akan presentasi di depan kelas dipihak secara acak.
4. Dosen memanggil anggota dengan no.urut tertentu pada salah satu kelompok untuk mempresentasikan hasil diskusinya.
5. Selesai presentasi, kelompok lain memberikan klarifikasi
6. Penguatan hasil diskusi dari dosen
7. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

Kegiatan Penutup (10 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.

Lembar Kegiatan Mahasiswa

Menurunkan konsep limit dan kontinuitas fungsi kompleks.

Tujuan

Mahasiswa dapat mengkonstruks sendiri konsep mengenai limit dan kontinuitas fungsi kompleks serta sifat-sifat yang melekat pada konsep limit dan kontinuitas fungsi kompleks.

Bahan dan alat

Lembar kegiatan, kertas HVS, Kertas Plano, Spidol

Langkah-langkah kegiatan

1. Masing kelompok mendapatkan tugas untuk menurunkan konsep limit dan kontinuitas fungsi kompleks.
   a. $\lim\limits_{z\to z_0}\left(f(z)+g(z)\right)=A+B$.
   b. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z)=AB$.
   c. $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}$.
2. Jika f dan g kontinu pada daerah D maka
   a) $f+g$ kontinu
   b) $f-g$ kontinu
   c) $f.g$ kontinu
   d) f/g kontinu kecuali di $z_0 \in D$ sehingga $g(z_0) = 0$.
3. Secara berkelompok mendiskusikan permasalahan yang diberikan.
4. kelompok yang mendapatkan giliran mempresentasikan hasil diskusinya didepan kelas.

Uraian Materi

LIMIT DAN KONTINUITAS FUNGSI KOMPLEKS

Fungsi Dengan Variabel Kompleks

Misalkan S himpunan bilangan kompleks. Fungsi kompleks f pada S adalah aturan yang mengawankan setiap $z\in S$ dengan bilangan kompleks w. Dan dinotasikan dengan $w = f(z)$. Dalam hal ini, S disebut domain dari f dan z dinamakan peubah/variabel kompleks.

Peubah Kompleks z ialah suatu titik umum dari himpunan tertentu pada bidang datar. Fungsi Peubah kompleks secara formal didefinisikan sebagai pasangan terurut dua bilangan kompleks (z,w) yang memenuhi syarat-syarat tertentu[1]. Hal ini berarti ada proses pemadanan yang mengawankan setiap nilai peubah z ke nilai w yang tunggal.

Misalkan $w = u + iv$ adalah nilai fungsi f di $z = x + iy$, sehingga

$$u + iv = f(x + iy)$$

Masing-masing bilangan riil u dan v bergantung pada variabel riil x dan y, sehingga $f(z)$ dapat dinyatakan sebagai pasangan terurut dari variabel riil x dan y, yaitu

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Jika koordinat polar r dan θ pada x dan y digunakan, maka

$$u + iv = f(re^{i\theta})$$

dimana $w = u + iv$ dan $z = re^{i\theta}$. Sehingga $f(z)$ dapat ditulis menjadi

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta).$$

Contoh 3.1

Misalkan $w = f(z) = z2 + 3z.$

Tentukan u dan v serta hitung nilai dari f pada $z = 1 + 3i$. Nyatakan juga u dan v dalam bentuk polar.

Penyelesaian:

Misal $z = x + iy$, sehingga

$$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^2 + 3(x+iy) = x^2 + 3x - y^2 + i(2xy + 3y)$$

Jadi $u = x^2 + 3x - y^2$ dan $v = 2xy + 3y$.

Untuk $z = 1 + 3i$ maka $f(z) = f(1+3i) = (1+3i)^2 + 3(1+3i) = -5 + 15i$.

Jadi $u(1,3) = -5$ dan $v(1,3) = 15.$

Jika koordinat polar digunakan dimana $z = re^{i\theta}$, maka

$$\begin{aligned} f(z) = f(re^{i\theta}) &= (re^{i\theta})^2 + 3(re^{i\theta}) = r^2 e^{2i\theta} + 3re^{i\theta} \\ &= r^2 \cos 2\theta + ir^2 \sin 2\theta + 3r\cos\theta + 3ir\sin\theta \\ &= r^2 \cos 2\theta + 3r\cos\theta + i(r^2 \sin 2\theta + 3r\sin\theta) \end{aligned}$$

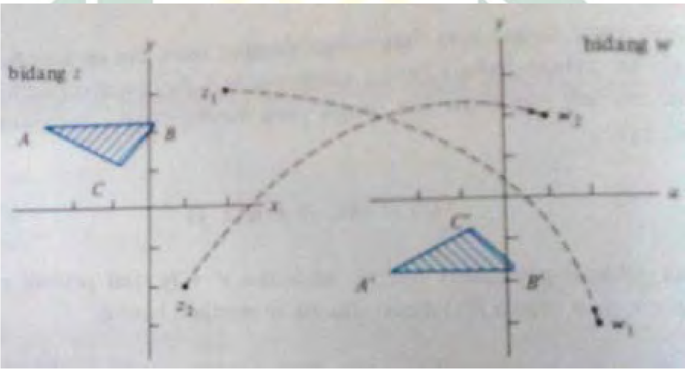
Jadi $u = r^2 \cos 2\theta + 3r\cos\theta$ dan $v = r^2 \sin 2\theta + 3r\sin\theta$.

[1] John D. Paliouras, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur* (Jakarta: Erlangga, 1987), 32

Geometri Fungsi Kompleks

Misalkan sebuah fungsi kompleks $w = f(z)$. Menurut definisi, setiap nilai peubah bebas $z = x + iy$ (dalam domain f) akan menghasilkan nilai tunggal $w = u + iv$ sebagai peubah tak bebas. Masing-masing peubah mempunyai dua dimensi, sehingga gabungan dari keduanya akan menghasilkan besaran empat dimensi yang sulit untuk digambarkan.

Oleh karena itu grafik fungsi kompleks diwakili oleh dua bidang kompleks yang sering disebut dengan bidang z dan bidang w. Artinya jika diketahui $w = f(z)$ untuk setiap $z = x + iy$ dalam domainnya bidang z, dihitung padanannya $w = u + iv$ dan ditempatkan di bidang w. Proses yang sama diulang untuk setiap nilai z dalam himpunan S dalam domain f akan menghasilkan "bayangan S dibawah f" pada bidang w.



Gambar 3.1 Grafik Fungsi Kompleks

Gambar diatas adalah gambar fungsi $w = \bar{z}$. Untuk setiap nilai peubah bebas $z = x + iy$ diperoleh $w = x - iy$. Misalkan $z_1 = 2 + 3i$ akan menghasilkan $w_1 = 2 - 3i$. Kemudian $z_2 = 1 - 2i$ akan menghasilkan $w_2 = 1 + 2i$. Dan seterusnya.

Limit Fungsi Kompleks

Secara umum definisi limit dalam kompleks sama dengan definisi limit pada bilangan riil dalam kalkulus. Kalau pada bilangan riil bila x mendekati x_0 hanya mendekati sepanjang garis riil sedangkan pada bilangan kompleks bila z mendekati z_0 akan mendekati dari semua arah dalam bidang kompleks.

Definisi Limit Fungsi Kompleks

$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ dibaca "limit $f(z)$ untuk z menuju z_0 sama dengan w_0 ",

dan didefinisikan sebagai berikut:

$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ni 0 < |z - z_0| < \delta$

berlaku $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Secara geometri definisi di atas mengatakan bahwa untuk setiap lingkungan-ε dari w_0, yaitu $|w - w0| < \varepsilon$ ada suatu lingkungan-δ dari z_0, yaitu $0 < |z - z0| < \delta$ sedemikian sehingga setiap titik z pada image w berada pada lingkungan-ε.

Dalam hal ini

- Jika limit tersebut ada, maka limitnya tunggal
- z mendekati z_0 dari berbagai arah atau lintasan
- Jika untuk lintasan yang berbeda, nilai $f(z)$ untuk z menuju z_0 berbeda maka $\lim_{z \to z_0} f(z)$ tidak ada
- $f(z)$ tidak disyaratkan terdefinisi di $z = z0$

Contoh 3.2

Misalkan $f(z) = \dfrac{iz}{2}, |z| < 1$. Buktikan $\lim_{z \to 1} f(z) = \dfrac{i}{2}$.

Bukti:

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Pilih $\delta = 2\varepsilon \ni |z - 1| < \delta$ berlaku

$$\left| f(z) - \frac{i}{2} \right| = \left| \frac{iz}{2} - \frac{i}{2} \right| = \left| \frac{i(z-1)}{2} \right| = \frac{|i||z-1|}{2} = \frac{1|z-1|}{2}$$

$$= \frac{|z-1|}{2} < \frac{\delta}{2} = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Jadi untuk setiap z dan ε positif berlaku $\left| f(z) - \dfrac{i}{2} \right| < \varepsilon$ bila $0 < |z - 1| < 2\varepsilon$,

Sehingga menurut definisi limit terbukti $\lim_{z \to 1} f(z) = \dfrac{i}{2}$.

Contoh 3.3

Misalkan $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$. Buktikan $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ tidak ada.

Bukti:

Akan ditunjukkan nilai limit dengan lintasan yang berbeda.

- Pendekatan sepanjang sb-*x* positif, dalam hal ini *y = 0.*

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+iy}{x-iy} = \lim_{(x,0)} \frac{x+i.0}{x-i.0} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

- Pendekatan sepanjang sb-*y* positif, dalam hal ini *x = 0.*

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+iy}{x-iy} = \lim_{(0,y)} \frac{0+i.y}{0-i.y} = \lim_{y\to 0} -1 = -1.\backslash$$

- Pendekatan sepanjang garis *y = x.*

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x+iy}{x-iy} = \lim_{x\to 0} \frac{x+i.x}{x-i.x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+i)}{x(1-i)} = \frac{1+i}{1-i}.$$

Karena pendekatan sepanjang arah yang berbeda menghasilkan nilai yang tidak sama maka dapat disimpulkan bahwa $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ tidak ada.

Teorema

Andaikan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $\omega_0 = u_0 + iv_0$, maka

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \omega_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \quad dan \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

Bukti:

$(\Leftarrow)$ Misalkan $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \quad dan \quad \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$,

artinya

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1, \delta_2 \ni |u-u_0| < \frac{\varepsilon}{2}, 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_1$$

$$|v-v_0| < \frac{\varepsilon}{2}, 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_2$$

Pilih $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Karena

$$\left|(u+iv)-(u_0+iv_0)\right| = \left|(u-u_0)+i(v-v_0)\right| \le \left|u-u_0\right| + \left|v-v_0\right|$$

dan

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = \left|(x-x_0)+i(y-y_0)\right| = \left|(x+iy)-(x_0+iy_0)\right|$$

maka $\left|(u+iv)-(u_0+iv_0)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ bila

$0 < \left|(x+iy)-(x_0+iy_0)\right| < \delta$.

Jadi $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \omega_0$.

($\Rightarrow$) Misalkan $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \omega_0$, artinya

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \ni \left|(u+iv)-(u_0+iv_0)\right| < \varepsilon$ bila $0 < \left|(x+iy)-(x_0+iy_0)\right| < \delta$

Perhatikan bahwa

$$\left|u-u_0\right| \le \left|(u-u_0)+i(v-v_0)\right| = \left|(u+iv)-(u_0+iv_0)\right|$$

$$\left|v-v_0\right| \le \left|(u-u_0)+i(v-v_0)\right| = \left|(u+iv)-(u_0+iv_0)\right|$$

dan

$$\left|(x+iy)-(x_0+iy_0)\right| = \left|(x-x_0)+i(y-y_0)\right| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

Sehingga $\left|u-u_0\right| < \varepsilon \quad dan \quad \left|v-v_0\right| < \varepsilon$ bila

$0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$.

Jadi $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \quad dan \quad \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$.

Teorema

Andaikan $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \quad , \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = B$ maka

- $\lim\limits_{z \to z_0} \big(f(z)+g(z)\big) = A+B$.
- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)g(z) = AB$.

- $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{A}{B}$.

Kadang-kadang suatu bidang kompleks memuat titik di tak hingga.Bidang kompleks yang memuat titik tersebut disebut *bidang kompleks yang diperluas*.

Teorema

Jika z_0 dan w_0 titik-titik pada bidang z dan w, maka

1) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty \quad \leftrightarrow \quad \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$

2) $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = w_0 \quad \leftrightarrow \quad \lim\limits_{z \to 0} f\left(\dfrac{1}{z}\right) = w_0$

3) $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty \quad \leftrightarrow \quad \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{f(1/z)} = 0$

Kekontinuan

Fungsi $f(z)$ dikatakan kontinu di $z = z_0$ jika

- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ ada
- $f(z_0)$ ada
- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Dengan kata lain $f(z)$ dikatakan kontinu di $z = z_0$ jika $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ni |z - z_0| < \delta$

berlaku $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Fungi kompleks $f(z)$ dikatakan kontinu pada region D jika $f(z)$ kontinu pada tiap titik z dalam D. Misalkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ kontinu di $z_0 = x_0 + iy_0$,

$\Leftrightarrow u(x,y)$ dan $v(x,y)$ kontinu di (x_0, y_0)

$\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0, y_0)$ *dan* $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0, y_0)$.

Sifat-sifat Fungsi Kontinu

5. Fungsi konstan kontinu pada bidang kompleks
6. Jika f dan g kontinu pada daerah D maka
   e) $f + g$ kontinu
   f) $f - g$ kontinu
   g) $f.g$ kontinu
   h) f/g kontinu kecuali di $z_0 \in D$ sehingga $g(z_0) = 0$.

Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Peubah Kompleks z ialah suatu titik umum dari himpunan tertentu pada bidang datar.
2. Fungsi Peubah kompleks secara formal didefinisikan sebagai pasangan terurut dua bilangan kompleks (z, w) yang memenuhi syarat-syarat tertentu
3. Grafik fungsi kompleks diwakili oleh dua bidang kompleks yang sering disebut dengan bidang z dan bidang w
4. Limit Fungsi Kompleks didefinisikan dengan $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ dibaca "limit $f(z)$ untuk z menuju z_0 sama dengan w_0 ", dan didefinisikan sebagai $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ni 0 < |z - z_0| < \delta$ berlaku $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.
5. Fungsi $f(z)$ dikatakan kontinu di $z = z_0$ jika $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ ada, $f(z_0)$ ada, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Uraikan setiap fungsi yang diberikan dalam $u(x, y) + iv(x, y)$ kemudian dalam $u(r, \theta) + iv(r, \theta)$
   a. $f(z) = z^2 + 3z^3$
   b. $f(z) = i\bar{z} + I(i/z)$

2. Gambarkan z dengan kawannya w yang diberikan dibawah fungsi yang bersangkutan.
   a. $w = z - 2i$ $\quad z = 0, 2i, 1, i, -2i, 1 + i$
   b. $w = e^x \cos y + ie^x \sin y$ $\quad z = 0,\ 2\pi,\ -2\pi i, 1 - \pi i,\ -2 + (\pi i/2)$
3. Misalkan a dan b konstanta kompleks. Gunakan definisi limit untuk membuktikan
   a) $\lim\limits_{z \to z_0} (az + b) = az_0 + b$
   b) $\lim\limits_{z \to z_0} (z^2 + b) = {z_0}^2 + b$
4. Buktikan bahwa, untuk sebarang z_0 dan sebarang bilangan bulat tak negatif n, $\lim z^n = (z_0)^n$, untuk $z \to z_0$

   Sebagai akibatnya, buktikan bahwa fungsi $f(z) = z^n$ kontinu dimana-mana
5. Buktikan bahwa fungsi
$$f(z) = \ln|z| + i\ Arg\ z$$
   Tidak kontinu sepanjang sumbu nyata tak positif.

Daftar Pustaka

Freitag, Eberhard dan Busam, Rolf. *Complex Analysis*. Heidelberg: Springer, 2005.

Jurusan Matematika ITS, *Seri Buku Ajar Kalkulus 1* . Surabaya: Jurusan Matematika FMIPA, 2005.

Paliouras. John D, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Jakarta: Erlangga, 1987.

Paket 4
TURUNAN FUNGSI KOMPLEKS

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket keempat ini difokuskan pada konsep turunan fungsi kompleks. Materi pada paket ini merupakan lanjutan dari paket ketiga dan merupakan bekal untuk materi pada paket-paket selanjutnya yaitu Persamaan Cauchy Riemann. Oleh karena itu pemahaman terhadap materi ini penting untuk ditekankan sekalipun materi dalam paket ini tergolong mudah.

Pada awal Paket 4 ini, dilakukan brainstormning kepada mahasiswa tentang turunan pada fungsi real sebelum masuk pada materi turunan fungsi kompleks. Selanjutnya mahasiswa akan dibimbing bagaimana definisi fungsi kompleks diturunkan, terakhir mahasiswa dikonstruk untuk membuktikan teknik-teknik turunan dengan melakukan generalisasi menggunakan definisi turunan.

Proses perkuliahan didesain dengan model kooperatif agar setiap mahasiswa dalam kelompok termotivasi untuk terlibat secara aktif dalam perkuliahan. Lembar kegiatan yang digunakan terdapat beberapa permasalahan yang dikerjakan secara individu, kemudian didiskusikan secara berpasangan, kemudian dipresentasikan di depan kelas. Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan laptop sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat mengefektifkan perkuliahan, serta kertas plano, spidol dan solasi sebagai alat menuangkan hasil diskusi kelompok. Langkah tersebut diupayakan untuk menggali ide-ide dan potensi kreatif mahasiswa-mahasiswi dalam menjalin komunikasi sosial yang lebih efektif. Dari sini, peta pengetahuan dan keterampilan sosial mereka akan diketahui untuk kemudian dilakukan diskusi dan simulasi perkuliahan. Penggunaaan multi media dalam perkuliahan juga diharapkan untuk mengoptimalisasi pencapaian kompetensi dasar dan indikator yang telah ditargetkan.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Menjelaskan konsep dasar cara penurunan fungsi kompleks

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa-mahasiswi diharapkan mampu:

1. Menyelesaikan turunan fungsi kompleks
2. Menyebutkan syarat fungsi yang differensiabel

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

Pengantar bilangan kompleks meliputi:

1. Turunan fungsi kompleks
2. Teknik turunan
3. Aturan Rantai

Langkah-langkah Perkuliahan

Kegiatan Awal (35 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Apersepsi materi fungsi kompleks dengan membandingkan dengan fungsi real.
4. Brainstorming dengan mengerjakan soal sederhana, serta memotivasi pentingnya mempelajari fungsi kompleks.

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Dosen menjelaskan beberapa konsep penting yang diperlukan dalam menyelesaikan LK. Mahasiswa menyimak penjelasan dosen dengan bantuan uraian materi pada paket 4.
2. Dosen membagi meminta mahasiswa berkumpul dengan kelompoknya untuk mendiskusikan bagaimana konsep turunan pada fungsi kompleks sesuai dengan langkah-langkah yang ada di LK.
3. Dosen membimbing mahasiswa selama proses diskusi. Mahasiswa berdiskusi dengan anggotanya dan bertanya pada dosen jika ada materi yang tidak dipahami. Masing-masing pasangan harus benar-benar

memahami keseluruhan hasil diskusi karena perwakilan pasangan akan presentasi di depan kelas dipihak secara acak.

4. Dosen memanggil anggota dengan no.urut tertentu pada salah satu kelompok untuk mempresentasikan hasil diskusinya.
5. Selesai presentasi, kelompok lain memberikan klarifikasi
6. Penguatan hasil diskusi dari dosen
7. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

Kegiatan Penutup (10 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.

Lembar Kegiatan Mahasiswa

Membuktikan teknik turunan pada fungsi kompleks.

Tujuan

Mahasiswa dapat membandingkan teknik turunan pada fungsi real dengan turunan pada fungsi kompleks. Selain itu mahasiswea dapat membuktikan teknik-teknik turunan pada fungsi kompleks.

Bahan dan alat

Lembar kegiatan, kertas HVS, Kertas Plano, Spidol

Langkah-langkah kegiatan

1. Masing kelompok mendapatkan tugas untuk menurunkan teknik turunan pada fungsi kompleks.

   a. $\frac{d}{dz}\left[f(z)+g(z)\right]=f'(z)+g'(z)$

b. $\frac{d}{dz}\left[f(z)-g(z)\right]=f'(z)-g'(z)$

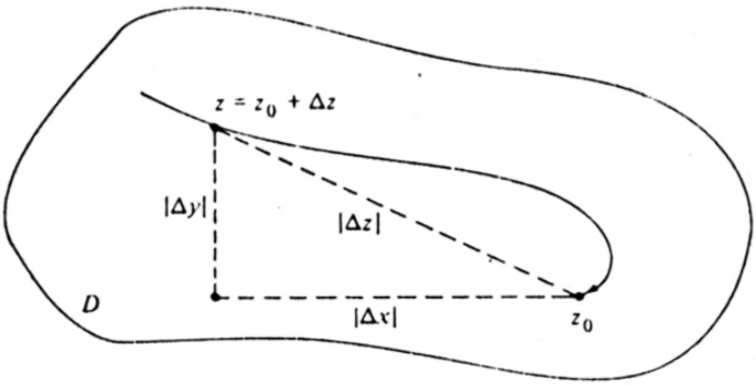
c. $\frac{d}{dz}\left[f(z)g(z)\right]=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$

d. $\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{\left[g(z)\right]^2}$

2. Secara berkelompok mendiskusikan permasalahan yang diberikan.
3. Kelompok yang mendapatkan giliran mempresentasikan hasil diskusinya didepan kelas.

Uraian Materi

TURUNAN FUNGSI KOMPLEKS



Gambar 4.1

Turunan

Turunan Fungsi Kompleks

Dari gambar diatas, misalkan fungsi kompleks $w = f(z)$, titik z_0 berada dalam domain D bagi f. Andaikan

$$z = z_0 + \Delta z \qquad\qquad \Delta z = \Delta x + \Delta y i$$

Adalah suatu titik di dalam D, kemudian dibentuk hasil beda

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Jika limit hasil bagi ini ada untuk $z \to z_0$, maka dikatakan $w = f(z)$ dapat dideferensialkan di z_0, limitnya dinamakan turunan f di z_0 dan dinotasikan dengan $w'(z)$ atau $f'(z)$[1].

Dari penjelasan diatas, $w = f(z)$ dikatakan terdeferensialkan di z_0 asalkan limit dari $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ ada. Hal ini bisa dituliskan dengan

$$f'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Perhatikan bahwa $f'(z)$ adalah bilangan kompleks. Jika titik khusus z_0 tidak perlu di sebutkan, turunan seringkali dinotasikan dengan

$$\frac{df}{dz} \quad atau \quad \frac{dw}{dz}$$

Ada dua bentuk yang sering digunakan dalam mendefinisikan turunan dari $w = f(z)$ yaitu

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Dan

$$w'(z) = \lim_{z \to x_0} \frac{w - w_0}{z - z_0}$$

Turunan dapat diperoleh dengan cara langsung menerapkan definisi. Cara seperti ini sama dengan yang dugunakan pada kalkulus. Ada cara-cara yang lebih cepat dalam menghitung turunan suatu fungsi. Cara-cara tersebut diturunkan dari definisi turunan dan sering disebut sebagai teknik turunan.

Contoh 4.1

Dengan menggunakan definisi, dapatkan turunan dari $f(z) = z^2 + 3z$

Penyelesaian :

Substitusikan fungsi yang akan diturunkan ke dalam definisi turunan

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

[1] John D. Paliouras, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur* (Jakarta: Erlangga, 1987), 45

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 + 3(z+\Delta z) - (z^2+3z)}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2 + 3z + 3\Delta z - z^2 - 3z}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + \Delta z^2 + 3\Delta z^2}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} 2z + \Delta z + 3$$
$$= 2z + 3$$

Jadi diperoleh turunan dari $f(z) = z^2 + 3z$ adalah $f'(z) = 2z + 3$

Teknik Turunan

Jika setiap menghitung turunan digunakan definisi, maka waktu yang diperlukan waktu yang cukup lama untuk menyelesaikan beberapa turunan. Oleh karena itu dikembangkan apa yang disebut teknik turunan yang dikembangkan dari definisi turunan. Dengan menggunakan teknik turunan ini waktu yang digunakan dalam menghitung turunan suatu fungsi kompleks lebih asingkat. Tidak semua teknik diberikan bukti generalisasinya dari definisi turunan, beberapa teknik bisa digeneralisasikan sendiri dari definisi turunan sebagai latihan. Teknik-teknik tersebut meliputi:

1. $\dfrac{d}{dz}(c) = 0$

Bukti:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{c - c}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{0}{\Delta z}$$
$$= 0$$

2. $\dfrac{d}{dz}(z) = 1$

Bukti:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(c + \Delta z) - c}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta z}$$
$$= 1$$

3. $\frac{d}{dz}[c(f(z)] = cf'(z)$
4. $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}, z \neq 0, n \in \mathrm{Z}$

Bukti:

$$f'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$
$$= \lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0}{z - z_0}$$
$$= \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-1}z_0 + \cdots + zz_0{}^{n-2} + z_0{}^{n-1})}{z - z_0}$$
$$= \lim_{z \to z_0} (z^{n-1} + z^{n-1}z_0 + \cdots + zz_0{}^{n-2} + z_0{}^{n-1})$$
$$= nz_0{}^{n-1}$$

Teorema

Andaikan bahwa f dan g dapat diturunkan pada setiap titik z dalam himpunan S dan bahwa f dapat diturunkan pada $g(z)$ untuk setiap z dalam S, maka

5. $\frac{d}{dz}[f(z) + g(z)] = f'(z) + g'(z)$
6. $\frac{d}{dz}[f(z) - g(z)] = f'(z) - g'(z)$
7. $\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

8. $\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{\left[g(z)\right]^2}$

Contoh 4.2

Tentukan turunan dari fungsi berikut:

1. $f(z) = (2z^2 + i)^5$
2. $f(z)=\dfrac{(z-i)}{z+i}\ pada \quad i$

Penyelesaian :

1. Dengan menggunakan aturan turunan (4) dan aturan rantai diperoleh

   $f'(z)=5(2z^2+i)^4.4z=20z(2z^2+i)^4$.
2. Dengan menggunakan aturan turunan (7) diperoleh

   $$f'(z)=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{\left[g(z)\right]^2}=\frac{1(z+i)-(z-i)1}{\left(z+i\right)^2}=\frac{2i}{(z+i)^2}$$

   Sehingga untuk $z = i$ diperoleh

   $$f'(i)=\frac{2i}{(i+i)^2}=\frac{2i}{4i^2}=-\frac{1}{2}i\,.$$

Aturan Rantai

Misalkan f mempunyai turunan di z_0, dan g mempunyai turunan di $f(z_0)$. Maka fungsi $F(z) = g[f(z)]$ mempunyai turunan di z_0, dan turunannya adalah

$$F'(z_0)=g'[f(z_0)].f'(z_0).$$

Dengan kata lain, jika $w = f(z)$ dan $W = g(w) = F(z)$, maka menurut aturan rantai

$$\frac{dW}{dz}=\frac{dW}{dw}\frac{dw}{dz}\,.$$

Contoh 4.3

Tentukan turunan dari fungsi $f(z) = (2z^2 + i)^5$ dengan menggunakan aturan rantai!

Penyelesaian:

Misalkan $w = 2z^2 + i$ dan $W = w^5$. Maka menurut aturan rantai

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dw}\frac{dw}{dz} = (5w^4)(4z) = 20z(2z^2 + i)^4$$

Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Turunan fungsi f di z_0, ditulis dengan $f'(z_0)$ didefnisikan sebagai berikut:

   $$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

   jika limitnya ada.
2. Notasi untuk turunan f di z adalah $f'(z) = \frac{d}{dz} f(z)$.
3. Jika f mempunyai turunan di z_0, dan g mempunyai turunan di $f(z_0)$. Maka fungsi $F(z) = g[f(z)]$ mempunyai turunan di z_0, dan turunannya adalah $F'(z_0) = g'[f(z_0)].f'(z_0)$.

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Dengan menggunakan definisi turunan, carilah turunan dari:
   a. $f(z) = z^{-1}$
   b. $f(z) = z^6 + 2z^3 - 3$
   c. $f(z) = 3z^2 - z^{-1}$
2. Gunakan teknik turunan untuk menghitung turunan fungsi kompleks berikut:
   a. $f(z) = (2z + 8)^8(1 - 2z + z^2)^{10}$

b. $f(z) = (2z+8)^8/(1-2z+z^2)^{10}$

3. Tentukan $f'(z_0)$

   a. $f(z) = 3z^2 - z^{-1}$ $\quad di\ z_0 = i$

   b. $f(z) = z^3 + 2z - 3$ $\quad di\ z_0 = -1 + i$

4. Buktikan bahwa jika $f'(z_0)$ ada, maka f kontinu di z_0

5. Jika suatu fungsi $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mempunyai turunan, maka f' diberikan oleh $f'(z) = u_x + iv_x$ atau $f'(z) = v_y - iu_y$

   Perlihatkan kebenaran relasi ini dengan mendapatkan f' untuk

   a. $f(z) = z^2$

   b. $f(z) = z^3$

   c. $f(z) = z^{-1}$

Daftar Pustaka

Freitag, Eberhard dan Busam, Rolf. *Complex Analysis*. Heidelberg: Springer, 2005.

Jurusan Matematika ITS, *Seri Buku Ajar Kalkulus 1* . Surabaya: Jurusan Matematika FMIPA, 2005.

Paliouras. John D, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Jakarta: Erlangga, 1987.

Saff, E.B and A.D Snider. *Fundamentals of complex Analysis with Apllication to Engineering and Science*, New Jersey: Pearson Education Inc, 2003

Wegener, Ingo. *Complexity Theory Exploring the Limits of Efficient Algorithms*. Berlin: Springer, 2005

Paket 5
PERSAMAAN CAUCHY RIEMANN

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket kelima ini difokuskan pada syarat perlu dan syarat cukup yang merupakan prasyarat suatu fungsi kompleks terdeferensiabel. Materi pada paket ini merupakan lanjutan dari paket keempat dan merupakan bekal untuk materi pada paket-paket selanjutnya yaitu materi fungsi analitik. Oleh karena itu pemahaman terhadap materi ini penting untuk ditekankan sebagai prasyarat untuk mempelajari paket-paket selanjutnya.

Pada awal Paket 5 ini, dilakukan brainstormning kepada mahasiswa tentang turunan fungsi kompleks. Selanjutnya mahasiswa akan dibimbing bahwa ada suatu kondisi tertentu, syarat perlu dan syarat cukup, yang apabila dipenuhi dapat mejamin adanya turunan pada fungsi kompleks yang dimaksud bahkan titik-titik dimana turunan itu berada atau titik-titik yang menyebabkan fungsi kompleks tersebut tidak dapat diturunkan.

Proses perkuliahan didesain dengan model kooperatif agar setiap mahasiswa dalam kelompok termotivasi untuk terlibat secara aktif dalam perkuliahan. Lembar kegiatan yang digunakan terdapat beberapa permasalahan yang dikerjakan secara individu, kemudian didiskusikan secara berpasangan, kemudian dipresentasikan di depan kelas. Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan laptop sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat mengefektifkan perkuliahan, serta kertas plano, spidol dan solasi sebagai alat menuangkan hasil diskusi kelompok. Langkah tersebut diupayakan untuk menggali ide-ide dan potensi kreatif mahasiswa-mahasiswi dalam menjalin komunikasi sosial yang lebih efektif. Dari sini, peta pengetahuan dan keterampilan sosial mereka akan diketahui untuk kemudian dilakukan diskusi dan simulasi perkuliahan. Penggunaaan multi media dalam perkuliahan juga diharapkan untuk mengoptimalisasi pencapaian kompetensi dasar dan indikator yang telah ditargetkan.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Menjelaskan konsep persamaan Cauchy-Riemann

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa-mahasiswi diharapkan mampu:

1. Menggunakan persamaan Cauchy Riemann untuk menyelesaikan turunan pada fungsi kompleks
2. Mendapatkan turunan fungsi kompleks dengan persamaan cauchy-Riemann

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

Materi pada paket ini meliputi:

1. Persamaan Cauchy Riemann

Langkah-langkah Perkuliahan

Kegiatan Awal (35 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Apersepsi materi turunan fungsi kompleks menggunakan definisi.
4. Brainstorming dengan mengerjakan soal sederhana, serta memotivasi mahasiswa bahwa dapat dikonstruksi suatu syarat perlu dan syarat cukup yang menjamin adanya turunan pada suatu fungsi kompleks.

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Dosen menjelaskan beberapa konsep penting yang diperlukan dalam menyelesaikan LK. Mahasiswa menyimak penjelasan dosen dengan bantuan uraian materi pada paket 5.
2. Dosen membagi meminta mahasiswa berkumpul dengan kelompoknya untuk mendiskusikan bagaimana konsep turunan pada fungsi kompleks sesuai dengan langkah-langkah yang ada di LK.

3. Dosen membimbing mahasiswa selama proses diskusi. Mahasiswa berdiskusi dengan anggotanya dan bertanya pada dosen jika ada materi yang tidak dipahami. Masing-masing pasangan harus benar-benar memahami keseluruhan hasil diskusi karena perwakilan pasangan akan presentasi di depan kelas dipihak secara acak.
4. Dosen memanggil anggota dengan no.urut tertentu pada salah satu kelompok untuk mempresentasikan hasil diskusinya.
5. Selesai presentasi, kelompok lain memberikan klarifikasi
6. Penguatan hasil diskusi dari dosen
7. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

Kegiatan Penutup (10 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.

Lembar Kegiatan Mahasiswa

Membuktikan syarat perlu dan syarat cukup agar suatu fungsi memiliki turunan.

Tujuan

Mahasiswa dapat membuktikan teorema-teorema yang menjadi syarat perlu dan syarat cukup suatu fungsi memiliki turunan.

Bahan dan alat

Lembar kegiatan, kertas HVS, Kertas Plano, Spidol

Langkah-langkah kegiatan

1. Masing kelompok mendapatkan tugas untuk membuktikan teorema-teorema yang menjadi syarat perlu dan syarat cukup agar suatu fungsi memiliki turunan.
   a. **Teorema**
      Diketahui $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, andaikan bahwa
      i. $u(x, y), v(x, y)$ dan semua turunan parsialnya u_x, v_x, u_y dan v_y kontinu di semua titik dalam suatu lingkungan N bagi titik $z_0 = (a, b)$.
      ii. Pada titik $z_0, u_x = v_y$ dan $v_x = -u_y$
      Maka $f'(z_0)$ ada, dan
      $$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$
   b. **Teorema**
      Andaikan bahwa fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mempunyai turunan pada suatu titik $z_0 = (a, b)$
      Maka pada titik itu
      $$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

      Jadi
      $$u_x = v_y \quad dan \quad v_x = -u_y$$

2. Secara berkelompok mendiskusikan permasalahan yang diberikan.
3. Kelompok yang mendapatkan giliran mempresentasikan hasil diskusinya didepan kelas.

Uraian Materi

PERSAMAAN CAUCHY RIEMANN

Persamaan Cauchy Riemann

Dalam paket ini akan dikembangkan syarat perlu dan syarat cukup agar suatu fungsi yang diberikan mempunyai turunan. Untuk mengembangkan syarat ini bisa didekati melalui dua teorema. Teorema yang pertama melengkapi syarat cukup yang jika dipenuhi akan menjamin adanya turunan fungsi tersebut. Teorema ini juga menunjukkan titik-titik dimana turunan itu terdefnisikan dan titik-titik dimana turunan itu tidak terdefinisikan. Teorema yang kedua memberikan rumus untuk turunan, jika turunan itu ada. Teorema-teorema tersebut adalah sebagai berikut

Teorema 5.1

Diketahui $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, andaikan bahwa

1. $u(x,y), v(x,y)$ dan semua turunan parsialnya u_x, v_x, u_y dan v_y kontinu di semua titik dalam suatu lingkungan N bagi titik $z_0 = (a,b)$.
2. Pada titik $z_0, u_x = v_y$ dan $v_x = -u_y$

Maka $f'(z_0)$ ada, dan

$$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

Teorema 5.2

Andaikan bahwa fungsi $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mempunyai turunan pada suatu titik $z_0 = (a,b)$

Maka pada titik itu

$$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

Jadi

$$u_x = v_y \quad dan \quad v_x = -u_y$$

Persamaan diferensial parsial $u_x = v_y\ dan\ v_x = -u_y$ kemudian dikenal dengan persamaan Cauchy-Riemann. Persamaan Cauchy–Riemann merupakan persamaan yang sangat penting pada analisis kompleks. Persamaan ini menjadi penting karena persamaan ini digunakan untuk menguji keanalitikan suatu fungsi kompleks $w = f(z) = u\,(x, y) + iv\,(x, y)$.

Contoh 5.1

Gunakan persaman Cauchy-Riemann untuk membuktikan bahwa turunan $f(z) = z^2$ ada untuk semua z dan bahwa $f'(z) = 2z$.

Penyelesaian

Dengan menuliskan f dalam bentuk $u + iv$ diperoleh

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Jadi

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \qquad v(x, y) = 2xy$$
$$u_x = 2x \qquad v_x = 2y$$
$$u_y = -2y \qquad v_y = 2x$$

Enam fungsi diatas jelas kontinu pada setiap titik $z = (x, y)$ pada bidang datar, kemudian

$$u_x = v_y = 2x \quad dan \quad v_x = 2y = -u_y$$

Untuk semua (x, y). Ini berarti teorema 5.1 terpenuhi, artinya $f'(z)$ ada untuk semua z. Hal ini berimplikasi pada terpenuhinya teorema 5.2 untuk semua z. Jadi dapat disimpulkan bahwa

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + 2yi = 2(x + iy) = \boldsymbol{2z}$$

Contoh 5.2

Tentukan titik-titik yang membuat $f(z) = x^2 - iy^2$ mempunyai turunan. Jika $f'(z)$nya ada tentukan nilainya

Penyelesaian

Untuk $f(z) = x^2 - iy^2$ maka

$u(x,y) = x^2$ $\quad\quad$ $v(x,y) = -y^2$

$u_x = 2x$ $\quad\quad$ $v_x = 0$

$u_y = 0$ $\quad\quad$ $v_y = -2y$

Enam fungsi diatas jelas kontinu pada setiap titik $z = (x,y)$ pada bidang datar, kemudian

$$u_x = v_y = 2x = -2y \quad dan \quad v_x = -u_y = 0$$

Persamaan Cauchy-Riemann akan terpenuhi jika $2x = -2y$, dan hal akan terpenuhi jika $y = -x$. Jadi menurut Teorema 5.1 f' ada hanya pada titik-titik pada garis $y = -x$. Selanjutnya dengan teorema 5.2 diperoleh bahwa

$$f' = u_x + iv_x = 2x \quad atau \quad f' = v_y - iu_y = -2y$$

Contoh 5.3

Perlihatkan bahwa fungsi $f(z) = \cos y - i \sin y$ tidak mempunyai dimanapun juga.

Penyelesaian

Untuk $f(z) = \cos y - i \sin y$ maka

$u(x,y) = \cos y$ $\quad\quad$ $v(x,y) = -\sin y$

$u_x = 0$ $\quad\quad$ $v_x = 0$

$u_y = -\sin y$ $\quad\quad$ $v_y = -\cos y$

Enam fungsi diatas jelas kontinu pada setiap titik $z = (x,y)$ pada bidang datar, kemudian persamaan Cauchy-Riemann akan dipenuhi jika

$$\cos y = 0 \quad dan \quad \sin y = 0$$

Terepenuhi secara simultan. Jelas hal ini tidak mungkin terjadi, oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa f' tidak ada pada titik manapun.

Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Persamaan diferensial parsial $u_x = v_y \, dan \, v_x = -u_y$ kemudian dikenal dengan persamaan Cauchy-Riemann
2. Suatu fungsi kompleks $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ memiliki turunan jika memenuhi persamaan Cauchy-Riemann dan turunannya adalah

$$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Tentukan titik-titik yang membuat fungsi berikut mempunyai turunan dan apabila turunan itu ada, carilah turunan itu
   a. $f(z) = x + iy^2$
   b. $f(z) = z^3$
   c. $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$
   d. $f(z) = \bar{z}$
   e. $f(z) = 2x^2 + 3y^3 i$
2. Andaikan bahwa $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ dapat dideferensialkan pada suatu titik bukan nol. Maka buktikan bahwa pada titik itu bentuk kutub persamaan Cauchy-Riemannnya ialah

$$r.u_r = v_\theta \qquad dan \qquad r.v_r = -u_\theta$$

Daftar Pustaka

Freitag, Eberhard dan Busam, Rolf. *Complex Analysis*. Heidelberg: Springer, 2005.

Jurusan Matematika ITS, *Seri Buku Ajar Kalkulus 1* . Surabaya: Jurusan Matematika FMIPA, 2005.

Paliouras. John D, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Jakarta: Erlangga, 1987.

Paket 6
FUNGSI ANALITIK & FUNGSI HARMONIK

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket keenam ini difokuskan pada fungsi analitik, fungsi menyeluruh, daerah analitisitas, titik singular dan harmonik sekawan. Materi fungsi analitik bisa dikatakan sebagai konsep terpenting dalam teori peubah kompleks. Fungsi-fungsi yang memiliki sifat analitik mewarisi suatu struktur dalam yang sangat kokoh dan ini dimanifestasikan ke luar oleh sifat-sifat yang dimiliki oleh fungsi-fungsi yang analitik. Oleh karena itu pemahaman terhadap materi ini penting untuk ditekankan sebagai prasyarat untuk mempelajari paket-paket selanjutnya.

Pada awal Paket 6 ini, mahasiswa diberikan bekal definisi tentang keanalitikan suatu fungsi kompleks, syarat-syarat yang harus dipenuhi oleh siuatu fungsi sehingga dikatakan analitik. Selanjutnya mahasiswa diberikan bekal tentang daerah analitisitas dan titik singular. Materi terakhir pada paket ini membahas tentang syarat suatu fungsi dikatakan fungsi harmonik dan fungsi harmonik sekawan.

Proses perkuliahan didesain dengan model kooperatif agar setiap mahasiswa dalam kelompok termotivasi untuk terlibat secara aktif dalam perkuliahan. Lembar kegiatan yang digunakan terdapat beberapa permasalahan yang dikerjakan secara individu, kemudian didiskusikan secara berpasangan, kemudian dipresentasikan di depan kelas. Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan laptop sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat mengefektifkan perkuliahan, serta kertas plano, spidol dan solasi sebagai alat menuangkan hasil diskusi kelompok. Langkah tersebut diupayakan untuk menggali ide-ide dan potensi kreatif mahasiswa-mahasiswi dalam menjalin komunikasi sosial yang lebih efektif. Dari sini, peta pengetahuan dan keterampilan sosial mereka akan diketahui untuk kemudian dilakukan diskusi dan simulasi perkuliahan. Penggunaaan multi media dalam perkuliahan juga diharapkan untuk mengoptimalisasi pencapaian kompetensi dasar dan indikator yang telah ditargetkan.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Menjelaskan konsep dasar penurunan fungsi kompleks

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa-mahasiswi diharapkan mampu:

1. Menyelidiki keanalitikan suatu fungsi
2. menentukan fungsi harmonik

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

Materi pada paket ini meliputi:

1. Fungsi Analitik
2. Titik Singular
3. Fungsi Harmonik
4. Fungsi Harmonik Sekawan

Langkah-langkah Perkuliahan

Kegiatan Awal (35 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Apersepsi materi fungsi analitik.
4. Memotivasi mahasiswa bahwa materi yang akan dipelajari sangat bermanfaat untuk pengembangan fungsi-fungsi analitik baik teori mapupun penerapannya.

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Dosen menjelaskan beberapa konsep penting yang diperlukan dalam menyelesaikan LK. Mahasiswa menyimak penjelasan dosen dengan bantuan uraian materi pada paket 6.

2. Dosen membagi meminta mahasiswa berkumpul dengan kelompoknya untuk mendiskusikan bagaimana konsep keanalitikan fungsi kompleks sesuai dengan langkah-langkah yang ada di LK.
3. Dosen membimbing mahasiswa selama proses diskusi. Mahasiswa berdiskusi dengan anggotanya dan bertanya pada dosen jika ada materi yang tidak dipahami. Masing-masing pasangan harus benar-benar memahami keseluruhan hasil diskusi karena perwakilan pasangan akan presentasi di depan kelas dipihak secara acak.
4. Dosen memanggil anggota dengan no.urut tertentu pada salah satu kelompok untuk mempresentasikan hasil diskusinya.
5. Selesai presentasi, kelompok lain memberikan klarifikasi
6. Penguatan hasil diskusi dari dosen
7. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

Kegiatan Penutup (10 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.

Lembar Kegiatan Mahasiswa

Membuktikan syarat perlu dan syarat cukup agar suatu fungsi memiliki turunan.

Tujuan

Mahasiswa dapat membuktikan teorema-teorema keanalitikan suatu fungsi dan sifat-sifat dari fungsi analitik.

Bahan dan alat

Lembar kegiatan, kertas HVS, Kertas Plano, Spidol

Langkah-langkah kegiatan

1. Masing kelompok mendapatkan tugas untuk membuktikan teorema-teorema tentang keanalitikan suatu fungsi dan sifat-sifatnya.
   a. **Teorema**
      Andaikan
      1. $f(z)$ dan $g(z)$ analitik pada himpunan S.
      2. f analitik pada setiap $g(z)$ untuk semua z dalam S

      Maka jumlah, selisih, hasil kali, hasil bagi, dan gabungan (komposisi) f dan g juga merupakan fungsi analitik pada setiap titik di S asalkan terdefinisikan.

   b. **Teorema**
      Misalkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, Andaikan bahwa
      1. Fungsi-fungsi u, v dan turunan parsialnya $u_x, v_x, u_y \, dan \, v_y$ kontinu disemua titik didalam suatu lingkungan tertentu N dari titik z_0.
      2. Persamaan Cauchy-Riemann $u_x = v_y \, dan \, v_x = -u_y$ berlaku pada setiap titik di N.

      Maka $f(z)$ analitik pada z_0

2. Secara berkelompok mendiskusikan permasalahan yang diberikan.
3. Kelompok yang mendapatkan giliran mempresentasikan hasil diskusinya didepan kelas.

Uraian Materi

FUNGSI ANALITIK DAN FUNGSI HARMONIK

Fungsi Analitik

Suatu fungsi $f(z)$ dikatakan analitik (disebut juga dengan holomorfik atau regular atau monogenik) pada titik z_0 , asalkan turunannya ada disemua titik pada suatu lingkungan z_0[1]. Dari definisi tersebut terlihat bahwa ada hubungan antara diferensiabilitas dan analitisitas suatu fungsi pada suatu titik. Tetapi tetap ada perbedaan konsep diantara keduanya, analitisitas di z_0 berimplikasi diferensibilitas di z_0 tetapi tidak sebaliknya.

Diferensibilitas tidak berimplikasi pada pada analitisitas karena secara umum f' boleh ada pada sebarang tipe himpunan bahkan pada titik terasing atau suatu penggal garis. Sedangkan analitisitas berhubungan sangat erat dengan himpunan terbuka, hal ini sesuai dengan definisi analitisitas di z_0 yang menghendaki bahwa f' harus ada pada lingkungan tertentu dari titik tersebut.

Contoh 6.1

Teliti apakah fungsi $f(z) = x^2 - iy^2$ analitik?

Penyelesaian

Pada paket sebelumnya telah diketahui bahwa fungsi diatas memiliki turunan hanya pada titik-titik di sepanjang garis $y = -x$. Setiap lingkungan bagi setiap titik pada garis itu memuat titik-titik yang berada diluar garis $y = -x$ yang mengakibatkan f' tidak ada. Hal ini mengakibatkan f tidak analitik dimana-mana, karena analitisitas pada suatu titik menuntut adanya f' di seluruh lingkungan pada titik tersebut.

---

[1] John D. Paliouras, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur* (Jakarta: Erlangga, 1987), 54

Fungsi Menyeluruh

Jika suatu fungsi analitik pada setiap titik dalam suatu himpunan S, maka fungsi tersebut dikatakan analitik pada S. Suatu fungsi yang analitik pada seluruh bidang kompleks dinamakan fungsi menyeluruh. Fungsi polinomial $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ merupakan fungsi menyeluruh karena $P'(z)$ ada pada semua z. Suatu fungsi yang terbentuk dari hasil bagi dua fungsi menyeluruh dinamakan fungsi meromorfik.

Jika suatu fungsi analitik pada suatu titik, maka menurut definisi fungsi tersebut analitik pada suatu himpunan terbuka yang memuat titik tersebut. Dari kenyataan ini muncul suatu istilah untuk memberi nama bagi keseluruhan titik pada bidang datar yang membuat f analitik. Istilah tersebut adalah *region of analyticity* (daerah analitisitas)

Contoh 6.2

Teliti apakah fungsi

$$f(z) = \frac{z^3 - z + 1}{z^2 + 1}$$

analitik?

Penyelesaian

Fungsi diatas adalah hasil bagi dua fungsi menyeluruh, karena pembilang dan penyebutnya merupakan polinomial. Sesuai dengan teorema pada paket sebelumnya $f'(z)$ ada untuk semua nilai z, kecuali pada $z = \pm i$ yang tidak terdefinisikan. Maka f analitik pada semua z kecuali di i dan $-i$.

Titik Singular

Suatu titik z_0 dinamakan singularitas atau titik singular bagi fungsi f jika dan hanya jika f gagal menjadi analitik pada z_0 dan setiap lingkungan z_0 memuat paling sedikit satu titik yang membuat f analitik. Pada contoh 6.2, f analitik kecuali pada $z = \pm i$. Jadi pada fungsi tersebut titik i dan $-i$ merupakan singularitas. Sedangkan fungsi pada contoh 6.1 tidak memiliki singularitas meskipun fungsi tersebut gagal menjadi analitik pada setiap titik z dalam bidang datar.

Teorema

Andaikan

1. $f(z)$ dan $g(z)$ analitik pada himpunan S.
2. f analitik pada setiap $g(z)$ untuk semua z dalam S

Maka jumlah, selisih, hasil kali, hasil bagi, dan gabungan (komposisi) f dan g juga merupakan fungsi analitik pada setiap titik di S asalkan terdefinisikan.
(Bukti untuk latihan)

Teorema

Misalkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, Andaikan bahwa

3. Fungsi-fungsi u, v dan turunan parsialnya $u_x, v_x, u_y\ dan\ v_y$ kontinu disemua titik didalam suatu lingkungan tertentu N dari titik z_0.
4. Persamaan Cauchy-Riemann $u_x = v_y\ dan\ v_x = -u_y$ berlaku pada setiap titik di N.

Maka $f(z)$ analitik pada z_0
(Bukti untuk latihan)

Teorema

Andaikan fungsi $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik pada z_0. Maka berlaku

$$u_x = v_y\ dan\ v_x = -u_y$$

Pada setiap titik di suatu lingkungan titik z_0

Fungsi Harmonik

Fungsi yang analitik memiliki sifat yang istimewa yaitu jika f analitik pada titik z_0, maka f' juga analitik. Dari sifat ini selanjutnya dikembangkan suatu teori yang menjadi penghubung antara teori dan terapan fungsi kompleks.

Misalkan $f(z) = u + iv$ analitik pada z_0; maka f' juga analitik pada z_0. Selanjutnya karena f'' adalah turunan dari f' maka f'' juga analitik pada z_0 dan demikian pula semua turunan f. Karena fungsi yang diferensiabilitas juga kontinu, maka $f', f'', f''', \ldots$ semua kontinu pada z_0.

Dari teorema pada paket sebelumnya diketahui bahwa turunan fungsi kompleks dapat dinyatakan dalam turunan parsial fungsi-fungsi komponennya. Selanjutnya, karena $f', f'', f''', \ldots$ kontinu pada z_0, akibatnya turunan parsial dari fungsi u dan v untuk semua tingkat juga kontinu. Kenyataan ini berakibat bahwa turunan parrsial silang tingkat dua adalah sama

$$u_{xy} = u_{yx} \qquad dan \qquad v_{xy} = v_{yx}$$

Kenyataan lain menunjukkan bahwa f analitik pada z_0, akibatnya

$$u_x = v_y \; dan \; v_x = -u_y$$

dengan melakukan diferensiasi pada fungsi tersebut diperoleh

$$u_{xx} = v_{yx}\,, \qquad v_{xx} = -u_{yx}\,, \qquad u_{xy} = v_{yy}\,, \qquad v_{xy} = -u_{yy}$$

Dengan melakukan substitusi diperoleh

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad dan \qquad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

Persamaan ini dikenal dengan persamaan Laplace. Sebarang fungsi $f(x, y)$ yang memenuhi persamaan Laplace didalam suatu lingkungan titik $z_0 = (a, b)$ dikatakan harmonik pada z_0, asal fungsi tersebut memiliki turunan parsial tingkat dua yang kontinu pada titik tersebut. Jadi, komponen-komponen nyata dan khayal fungsi analitik $f = u + v$ merupakan fungsi harmonik. Pasangan fungsi harmonik ini dinamakan fungsi harmonik sekawan.

Bila diberikan suatu fungsi harmonik u, maka dapat diperoleh harmonik sekawannya v dan kemudian membentuk fungsi analitik $f(z) = u + iv$. Proses memperoleh harmonik sekawan ini bisa dilihat melalui contoh berikut:

Contoh 6.3

Carilah harmonik sekawan dari fungsi $v(x, y) = xy$

Penyelesaian

Pertama dicek apakah v harmonik, dan karena $v_{xx} = v_{yy} = 0$ jelas bahwa v harmonik. Selanjutnya akan dicari harmonik sekawannya yaitu $u(x, y)$ sehingga $f(z) = u + iv$ analitik.

Jika f analitik, maka persamaan Cauchy-Riemann terpenuhi. Karenanya $v_y = x$, haruslah $u_x = x$. Dengan integrasi diperoleh

$$u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + h(y)$$

Dari hasil integrasi ini diperoleh $u_y = h'(y)$. Karena f analitik maka haruslah $u_y = -v_x$. Sedangkan $v(x, y) = xy$, sehingga $v_x = y$. Artinya $h'(y) = -y$. Dengan integrasi diperoleh

$$h(y) = -\frac{1}{2}y^2 + c$$

Jadi diperoleh $u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + c$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} f &= u + iv \\ &= \frac{1}{2}z^2 + c \end{aligned}$$

Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Suatu fungsi $f(z)$ dikatakan analitik pada titik z_0 , asalkan turunannya ada disemua titik pada suatu lingkungan z_0.
2. Suatu fungsi yang analitik pada seluruh bidang kompleks dinamakan fungsi menyeluruh
3. Suatu titik z_0 dinamakan singularitas atau titik singular bagi fungsi f jika dan hanya jika f gagal menjadi analitik pada z_0 dan setiap lingkungan z_0 memuat paling sedikit satu titik yang membuat f analitik.

4. Persamaan beikut ini dikenal dengan persamaan Laplace.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad dan \qquad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

5. Sebarang fungsi $f(x, y)$ yang memenuhi persamaan Laplace didalam suatu lingkungan titik $z_0 = (a, b)$ dikatakan harmonik pada z_0, asal fungsi tersebut memiliki turunan parsial tingkat dua yang kontinu pada titik tersebut

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Tentukan dan buktikan daerah analitisitas fungsi berikut:
   a. y^2
   b. z^3
   c. $z^2 - 1$
   d. $\frac{z^2+z}{z(z^2+1)}$
   e. $e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + i \sin 2xy)$
   f. $I(\bar{z})$
2. Diketahui $f(z) = zR(z)$, carilah titik-titik, jika ada, yang membuat f' ada. Apakah f analitik dimana-mana?
3. Buktikan bahwa bentuk kutub persamaan Laplace adalah

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$$

4. Bentuklah suatu fungsi analitik $f = u + iv$ dengan mendapatkan fungsi harmonik sekawan bagi $u(x, y) = -y$.

Daftar Pustaka

Freitag, Eberhard dan Busam, Rolf. *Complex Analysis*. Heidelberg: Springer, 2005.

Paliouras. John D, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Jakarta: Erlangga, 1987.

Saff, E.B and A.D Snider. *Fundamentals of complex Analysis with Apllication to Engineering and Science*, New Jersey: Pearson Education Inc, 2003

Wegener, Ingo. *Complexity Theory Exploring the Limits of Efficient Algorithms*. Berlin: Springer, 2005

Paket 7
FUNGSI-FUNGSI ELEMENTER

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ketujuh ini difokuskan pada definisi pemetaan dan transformasi, serta memperkenalkan fungsi kompleks elementer tertentu beserta sifat aljabar dan analitiknya. Materi fungsi-fungsi kompleks pada paket ini hanya dasarnya saja, sifat-sifat pemetaan fungsi-fungsi ini akan dipelajari pada paket-paket selanjutnya.. Oleh karena itu pemahaman terhadap materi ini penting untuk ditekankan sebagai prasyarat untuk mempelajari paket-paket selanjutnya.

Pada awal Paket 7 ini, mahasiswa diberikan bekal definisi tentang istilah pemetaan dan transformasi. Selanjutnya mahasiswa diajak untuk menggali definisi dan sifat-sifat yang melekat pada fungsi-fungsi elementer fungsi kompleks.

Proses perkuliahan didesain dengan model kooperatif agar setiap mahasiswa dalam kelompok termotivasi untuk terlibat secara aktif dalam perkuliahan. Lembar kegiatan yang digunakan terdapat beberapa permasalahan yang dikerjakan secara individu, kemudian didiskusikan secara berpasangan, kemudian dipresentasikan di depan kelas. Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan laptop sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat mengefektifkan perkuliahan, serta kertas plano, spidol dan solasi sebagai alat menuangkan hasil diskusi kelompok. Langkah tersebut diupayakan untuk menggali ide-ide dan potensi kreatif mahasiswa-mahasiswi dalam menjalin komunikasi sosial yang lebih efektif. Dari sini, peta pengetahuan dan keterampilan sosial mereka akan diketahui untuk kemudian dilakukan diskusi dan simulasi perkuliahan. Penggunaaan multi media dalam perkuliahan juga diharapkan untuk mengoptimalisasi pencapaian kompetensi dasar dan indikator yang telah ditargetkan.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Menjelaskan kembali fungsi elementer beserta sifat operasinya.

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa-mahasiswi diharapkan mampu:

1. Menuliskan kembali macam fungsi elementer
2. Mengoperasikan fungsi-fungsi elementer

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

Materi pada paket ini meliputi:

1. Pemetaan dan Transformasi
2. Fungsi Linier
3. Fungsi Pangkat,
4. Fungsi kebalikan,
5. Fungsi Bilinear,
6. Fungsi Exponensial,
7. Fungsi Logaritmik

Langkah-langkah Perkuliahan

Kegiatan Awal (35 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Apersepsi pemetaan dan transformasi
4. Memotivasi mahasiswa bahwa materi yang akan dipelajari sangat bermanfaat untuk mempelajari materi berikutnya

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Dosen menjelaskan beberapa konsep penting yang diperlukan dalam menyelesaikan LK. Mahasiswa menyimak penjelasan dosen dengan bantuan uraian materi pada paket 7.

2. Dosen membagi meminta mahasiswa berkumpul dengan kelompoknya untuk mendiskusikan bagaimana konsep pemetaan dan transformasi pada fungsi kompleks sesuai dengan langkah-langkah yang ada di LK.
3. Dosen membimbing mahasiswa selama proses diskusi. Mahasiswa berdiskusi dengan anggotanya dan bertanya pada dosen jika ada materi yang tidak dipahami. Masing-masing pasangan harus benar-benar memahami keseluruhan hasil diskusi karena perwakilan pasangan akan presentasi di depan kelas dipihak secara acak.
4. Dosen memanggil anggota dengan no.urut tertentu pada salah satu kelompok untuk mempresentasikan hasil diskusinya.
5. Selesai presentasi, kelompok lain memberikan klarifikasi
6. Penguatan hasil diskusi dari dosen
7. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

Kegiatan Penutup (10 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.

Lembar Kegiatan Mahasiswa

Membuktikan syarat perlu dan syarat cukup agar suatu fungsi memiliki turunan.

Tujuan

Mahasiswa dapat membuktikan teorema-teorema keanalitikan suatu fungsi dan sifat-sifat dari fungsi analitik.

Bahan dan alat

Lembar kegiatan, kertas HVS, Kertas Plano, Spidol

Langkah-langkah kegiatan

1. Masing kelompok mendapatkan tugas untuk mencari tahu tentang suatu fungsi dan sifat-sifat yang berkaitan dengan fungsi tersebut.
   a. Fungsi Linier
   b. Fungsi Pangkat,
   c. Fungsi kebalikan,
   d. Fungsi Bilinear,
   e. Fungsi Exponensial,
   f. Fungsi Logaritmik
2. Secara berkelompok mendiskusikan permasalahan yang diberikan.
3. Kelompok yang mendapatkan giliran mempresentasikan hasil diskusinya didepan kelas.

Uraian Materi

FUNGSI-FUNGSI ELEMENTER

Pemetaan

Pada paket terdahulu telah dibahas geometri fungsi kompleks yang dapat dianalogikan dengan pengiriman titik-titik pada bidang z ke titik-titik pada bidang w. Lebih umum, suatu fungsi dapat dipikirkan sebagai proses yang memetakan sebagian bidang z secara keseluruhan ke bidang w. Hal ini mengakibatkan munculnya istilah pemetaan dan transformasi sebagai nama lain dari fungsi. Misalkan fungsi $w = z^2 + i$ memetakan $z = 1 - i$ ke $w = -i$. atau kalimat fungsi $w = 2iz + i$ mentransformasikan bujur sangkar $ABCD$ menjadi bujursangkar $A'B'C'D'$.

Jika suatu fungsi f memetakan z_0 ke w_0, maka dikatakan bahwa w_0 adalah bayangan z_0 dibawah f dan z_0 adalah pembayang w_0. Meskipun definisi suatu fungsi lebih banyak berbicara tentang bayangan titik z, titik w boleh mempunyai lebih dari satu pembayang dibawah suatu fungsi. Misalkan dibawah fungsi $w = z^4 + 2$, titik $w = 3$ mempunyai empat pembayang yakni $z = 1, -1, i, -i$.

Pemetaan yang memiliki sifat tidak ada titik w yang mempunyai lebih dari satu pembayang dinamakan pemetaan satu-satu. Jika tidak memiliki sifat ini disebut banyak ke satu. Dari penjelasan diatas dapat dijelaskan bahwa f satu-satu jika $z_1 \neq z_2$ maka $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Inversi

Sebelum mempelajari fungsi-fungsi elementer, terlebih dahulu diperkenalkan secara singkat konsep inversi suatu fungsi. Menurut definisi, $g(z)$ dinamakan inversi fungsi $f(z)$ jika $f\big(g(z)\big) = g\big(f(z)\big) = z$. Invers suatu fungsi tidak harus sebuah fungsi, tetapi jika f satu-satu maka inversinya biasa ditulis f^{-1} juga merupakan suatu fungsi. Misalkan $f(z) = 3z - 5i$. f

merupakan fungsi satu-satu. Dapat dilihat bahwa $f^{-1}(z) = (z + 5i)/3$ dengan memeriksa bahwa $f\left(f^{-1}(z)\right) = f^{-1}\left(f(z)\right) = z$

Fungsi Linear

Adalah sebuah fungsi yang berbentuk

$$f(z) = az + b$$

dengan a dan b merupakan konstanta kompleks. Turunan dari fungsi ini adalah $f'(z) = a$ yang terdefinisi pada setiap z. Jadi fungsi linear meruupakan fungsi menyeluruh. Jika $a = 0$ fungsi ini menjadi fungsi konstan, jika $a = 1$dan $b = 0$ fungsi ini menjadi fungsi identitas.

Fungsi linear merupakan fungsi satu-satu. Invers fungsi ini berbentuk

$$z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}$$

yang juga merupakan fungsi linear. Dan dapat dipikirkan sebagai pemetaan dari bidang w kembali ke bidang z.

Fungsi Pangkat

Adalah sebuah fungsi yang berbentuk

$$f(z) = z^n$$

Fungsi ini merupakan fungsi menyeluruh karena f' ada dan terdefinisi untuk semua z. Jika $n > 1$, fungsi ini merupakan fungsi banyak ke satu. Akibatnya inversinya bukan merupakan fungsi.

Fungsi Kebalikan

Adalah fungsi yang berbentuk

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Fungsi ini merupakan fungsi satu-satu, kecuali $z = 0$ dan $w = 0$. Turunan fungsi ini diberikan oleh $f' = -1/z^2$ yang terdefinisi untuk semua z kecuali $z = 0$. Jadi fungsi ini analitik pada semua z kecuali pada pusat koordinat.

Dibawah fungsi $f(z) = 1/z$, jika dibiarkan $z \to 0$, maka $f(z)$ yang bersesuaian akan menjadi bilangan yang modulusnya besar tak berbatas; jadi untuk $z \to 0$, $|w|$ menuju tak berhingga. Dengan titik tak berhingga dapat dikatakan bahwa dibawah fungsi kebalikan, bayangan $z = 0$ adalah $f(z) = \infty$ dan pembayang dari $f(z) = 0$ adalah $z = \infty$.

Fungsi Bilinear

Jika n bilangan bulat tak negatif dan a_0, $a_1, \dots, a_n$ adalah konstanta kompleks maka fungsi $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ dinamakan suku banyak. Jika $P(z)$ dan $Q(z)$ adalah dua suku banyak, maka fungsi

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\backslash$$

Yang didefinisikan untuk semua z asalkan $Q(z) \neq 0$, dinamakan fungsi rasional. Fungsi rasional merupakan fungsi analitik kecuali titik-titik yang membuat penyebutnya bernilai nol.

Salah satu fungsi rasional yang menarik adalah fungsi rasional yang berbentuk

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

Dan dinamakan fungsi bilinear. Karena fungsi ini fungsi rasional maka, fungsi bilinear analitik kecuali di $z = -d/c$. Jika $c = 0$, maka fungsi biliner berubah menjadi fungsi linear. Fungsi bilinear termasuk fungsi satu-satu. Titik $z = -d/c$ dipetakan ke titik $w = \infty$ dan titik $z = \infty$ dipetakan ke $w = a/c$.

Invers dari fungsi bilinear diperoleh melalui manipulasi aljabar sederhana. Invers tersebut diberikan oleh

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

Terlihat bahwa invers fungsi bilinear juga merupakan fungsi bilnear.

Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial peubah kompleks $z = x + iy$ didefinisikan dengan

$$e^z = e^x(\cos y + \sin y)$$

Jika z adalah khayal murni $(x = 0)$, diperoleh

$$e^{iy} = \cos y + \sin y$$

Yang merupakan rumus euler. Fungsi eksponensial merupakan fungsi menyeluruh, dan

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$$

Sifat-sifat e^z

1. $e^z \neq 0$
2. $e^0 = 1$
3. $e^{z+w} = e^z e^w$
4. $e^{z-w} = e^z/e^w$
5. $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$
6. $e^z = e^{z+2\pi i}$
7. Jika $z = x + iy$, maka $|e^z| = e^x$ dan $\arg(e^z) = y$

Fungsi Logaritmik

Untuk sebarang bilangan kompleks z, ada $\log z$. Simbol ini membentuk perluasan bagi logaritma real $\ln x$. "jika z adalah bilangan nyata positif, makalog $z = \ln z$". Sifat-sifat yang dimiliki oleh $\ln z$ juga dimiliki oleh $\log z$, khususnya

$$\log(zw) = \log z + \log w$$

dan

$$\log(z^\alpha) = \alpha \log z$$

Untuk setiap bilangan kompleks z, w dan α.

Misalkan $z = re^{it}$ adalah bilangan kompleks yang diberikan, maka

$$\begin{aligned} \log z &= \log(re^{it}) \\ &= \log r + \log e^{it} \\ &= \log r + it \log e \\ &= \log r + \ it \ln e \\ &= \ln r + it \\ &= \ln z + i \arg z \end{aligned}$$

Berdasarkan sifat-sifat logaritma yang dimiliki oleh oleh $\log z$, diperoleh

$$\log z = \ln|z| + i \arg z$$

Berdasarkan uraian diatas didefinisikan logaritma z

$$\log z = \ln|z| + i \arg z \qquad\qquad z \neq 0$$

Contoh 7.1

Tentukan logaritma bilangan-bilangan $z = i, 2, -ei, dan - 1$

Penyelesaian

$$\log i = \ln|i| + i \arg i = \ln(1) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$\log 2 = \ln|2| + i \arg 2 = \ln(2) + i\,(2k\pi) = \ln 2 + 2k\pi i$$

$$\log(-ei) = \ln(e) + i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1 + \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)i$$

$$\log(-1) = (\pi + 2k\pi)i$$

Sifat-sifat $\log z$

1. $\log(zw) = \log z + \log w$
2. $\log(z/w) = \log z - \log w$
3. $\log e^z = z$
4. $e^{\log z} = z$
5. $\log(z^p) = p.\log z$

Fungsi trigonometrik dan Hiperbolik

Jika x merupakan bilangan nyata, maka dengan menggunakan rumus Euler diperoleh

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \qquad dan \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

Rumusan ini mewakili bentuk kompleks fungsi nyata sinus dan cosinus. Definisi fungsi sinus dan cosinus untuk peubah kompleks z dikembangkan dari rumusan diatas. Fungsi sinus dan cosinus z didefinisikan oleh

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \; dan \; \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

Untuk semua bilangan kompleks z. Empat fungsi lain didefinisikan dengan

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

Dari definisi fungsi $\sin z$ dan $\cos z$ merupakan fungsi menyeluruh. Sedangkan fungsi yang lain tidak analitik tepat pada titik-titik yang membuat penyebutnya samadengan nol.

Sifat-sifat $\sin z$ dan $\cos z$

1. $\sin z = 0$ jika dan hanya jika $z = k\pi$, k bilangan bulat
2. $\cos z = 0$ jika dan hanya jika $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k bilangan bulat
3. $\sin(-z) = -\sin z$
4. $\cos(-z) = \cos z$
5. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
6. $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$
7. $\sin(z - w) = \sin z \cos w - \sin w \cos z$
8. $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$, dimana $z = x + iy$
9. $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$, dimana $z = x + iy$
10. $\frac{d}{dz}[\sin z] = \cos z$
11. $\frac{d}{dz}[\cos z] = -\sin z$

Sinus hiperbolikus didefinisikan dengan

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

Sedangkan cosinus hiperbolikus didefinisikan dengan

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

Jelas bahwa kedua fungsi berikut merupakan fungsi menyeluruh dan turunannya diberikan oleh

$$\frac{d}{dz}[\sin h] = \cosh z \quad dan \quad \frac{d}{dz}[\cosh z] = \sinh z$$

Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Fungsi Linear adalah sebuah fungsi yang berbentuk $f(z) = az + b$
2. Fungsi Pangkat adalah sebuah fungsi yang berbentuk $f(z) = z^n$
3. Fungsi Kebalikan adalah fungsi yang berbentuk $f(z) = \frac{1}{z}$
4. Fungsi Bilinear berbentuk
$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$
5. Fungsi eksponensial peubah kompleks $z = x + iy$ didefinisikan dengan
$$e^z = e^x(\cos y + \sin y)$$
6. Logaritma z didefinisikan
$$\log z = \ln|z| + i \arg z \qquad z \neq 0$$
7. Fungsi sinus dan cosinus z didefinisikan oleh
$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \; dan \; \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Tuliskan fungsi berikut dalam bentuk $a + ib$
   a. $e^{i\pi/2}$
   b. $e^{1-\pi i}$
   c. $e^{\ln 2+\pi i/3}$
   d. $e^{2-2\pi i}$
2. Carilah semua z yang memenuhi
   a. $e^z = -3i$
   b. $e^z = 1 - i$
3. Carilah logaritma setiap bilangan berikut
   a. $1 + i$
   b. $3 + 4i$
   c. $2 - i$
4. Buktikan untuk sebarang konstanta kompleks c,

$$\frac{d}{dz}[e^{cz}] = ce^{cz}$$

5. Tunjukkan bahwa, untuk sebarang bilangan nyata x
   a. $\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$
   b. $\cos x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$
6. Buktikan bahwa sifat yang telah dikenal $|\sin x| \leq 1$ pada fungsi sinus nyata tidak dimiliki oleh $\sin z$, demikian pula untuk $\cos z$

Daftar Pustaka

Freitag, Eberhard dan Busam, Rolf. *Complex Analysis*. Heidelberg: Springer, 2005.

Paliouras. John D, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Jakarta: Erlangga, 1987.

Saff, E.B and A.D Snider. *Fundamentals of complex Analysis with Apllication to Engineering and Science*, New Jersey: Pearson Education Inc, 2003

Wegener, Ingo. *Complexity Theory Exploring the Limits of Efficient Algorithms*. Berlin: Springer, 2005

Paket 8
TRANSFORMASI LINEAR DAN TRANSFORMASI PANGKAT

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket kedelapan ini difokuskan transformasi linear dan transformasi pangkat. Transformasi linear sebagai gabungan putaran, regangan, an pergeseran. Sifat-sifat transformasi linear dan transformasi pangkat Oleh karena itu pemahaman terhadap materi ini penting untuk ditekankan sebagai prasyarat untuk mempelajari paket-paket selanjutnya.

Pada awal Paket 8 ini, mahasiswa diajak untuk melakukan eksplorasi terhadap transformasi linear. Selanjutnya mahasiswa diajak untuk menggali sifat-sifat yang melekat. Setelah mendapatkan materi tentang transformasi linear mahasiswa diperkenalkan dengan transformasi pangkat dan sifat-sifatnya.

Proses perkuliahan didesain dengan model kooperatif agar setiap mahasiswa dalam kelompok termotivasi untuk terlibat secara aktif dalam perkuliahan. Lembar kegiatan yang digunakan terdapat beberapa permasalahan yang dikerjakan secara individu, kemudian didiskusikan secara berpasangan, kemudian dipresentasikan di depan kelas. Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan laptop sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat mengefektifkan perkuliahan, serta kertas plano, spidol dan solasi sebagai alat menuangkan hasil diskusi kelompok. Langkah tersebut diupayakan untuk menggali ide-ide dan potensi kreatif mahasiswa-mahasiswi dalam menjalin komunikasi sosial yang lebih efektif. Dari sini, peta pengetahuan dan keterampilan sosial mereka akan diketahui untuk kemudian dilakukan diskusi dan simulasi perkuliahan. Penggunaaan multi media dalam perkuliahan juga diharapkan untuk mengoptimalisasi pencapaian kompetensi dasar dan indikator yang telah ditargetkan.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Menjelaskan kembali fungsi elementer beserta sifat operasinya.

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa-mahasiswi diharapkan mampu:

1. Menuliskan kembali macam fungsi elementer
2. Mengoperasikan fungsi-fungsi elementer
3. Menggunakan Transformasi Kompleks

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

Materi pada paket ini meliputi:

1. Transformasi Linier
2. Transformasi Pangkat

Langkah-langkah Perkuliahan

Kegiatan Awal (35 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Apersepsi transformasi linear dan transformasi pangkat
4. Memotivasi mahasiswa bahwa materi yang akan dipelajari sangat bermanfaat untuk mempelajari materi berikutnya

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Dosen menjelaskan beberapa konsep penting yang diperlukan dalam menyelesaikan LK. Mahasiswa menyimak penjelasan dosen dengan bantuan uraian materi pada paket 8.
2. Dosen membagi meminta mahasiswa berkumpul dengan kelompoknya untuk mendiskusikan bagaimana konsep pemetaan dan transformasi pada fungsi kompleks sesuai dengan langkah-langkah yang ada di LK.

3. Dosen membimbing mahasiswa selama proses diskusi. Mahasiswa berdiskusi dengan anggotanya dan bertanya pada dosen jika ada materi yang tidak dipahami. Masing-masing pasangan harus benar-benar memahami keseluruhan hasil diskusi karena perwakilan pasangan akan presentasi di depan kelas dipihak secara acak.
4. Dosen memanggil anggota dengan no.urut tertentu pada salah satu kelompok untuk mempresentasikan hasil diskusinya.
5. Selesai presentasi, kelompok lain memberikan klarifikasi
6. Penguatan hasil diskusi dari dosen
7. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

Kegiatan Penutup (10 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.

Lembar Kegiatan Mahasiswa

Mentransformasikan suatu bidang dengan transformasi linear dan transformasi pangkat.

Tujuan

Mahasiswa dapat membuktikan bahwa transformasi linear merupakan gabungan putaran regangan dan pergeseran serta mengetahui sifat-sifat transformasi pangkat.

Bahan dan alat

Lembar kegiatan, kertas HVS, Kertas Plano, Spidol

Langkah-langkah kegiatan

1. Masing kelompok mendapatkan tugas untuk mencari contoh transformasi dan bagaimana proses transformasi yang terjadi. Transformasi tersebut adalah
    a. Transformasi Linier
    b. Transformasi Pangkat,
2. Secara berkelompok mendiskusikan permasalahan yang diberikan.
3. Kelompok yang mendapatkan giliran mempresentasikan hasil diskusinya didepan kelas.

Uraian Materi

TRANSFORMASI LINEAR DAN TRANSFORMASI PANGKAT

Transformasi Linear

Fungsi linier adalah sebuah fungsi yang berbentuk $f(z) = az + b$ dengan a dan b merupakan konstanta kompleks. Sifat-sifat pemetaan ini paling mudah dilihat dengan memeriksa secara terpisah pemetaan-pemetaan

$$\zeta = az \qquad dan \qquad w = \zeta + b$$

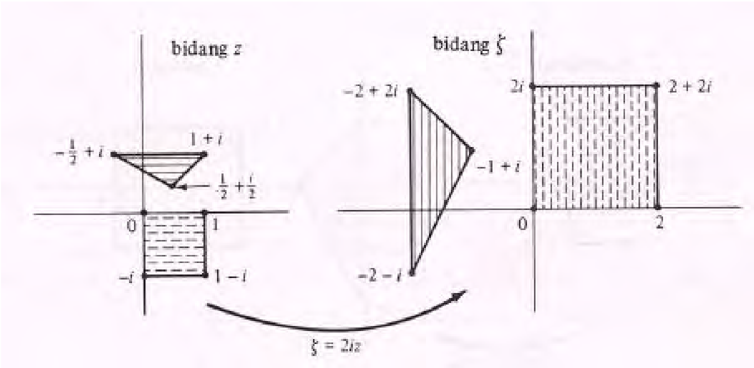
Kemudian digabungkan menjadi

$$w = \zeta + b = az + b$$

Pemetaan pertama $\zeta = az$ disebut regangan putaran. Istilah ini muncul dari hubungan-hubungan

$$|\zeta| = |a||b| \qquad dan \qquad \arg \zeta = \arg a + \arg b$$

Dua relasi ini dapat dijabarkan sebagai berikut, bahwa dibawah pemetaan $\zeta = az$, bayangan titik z adalah titik ζ yang modulusnya $|z|$ "diregangkan" dengan faktor $|a|$ dan argumennya adalah $\arg z$ diputar dengan sudut a. Proses regangan putaran ini digambarkan dalam gambar 8.1 berikut [1]:



Gambar 8.1
Regangan Putaran

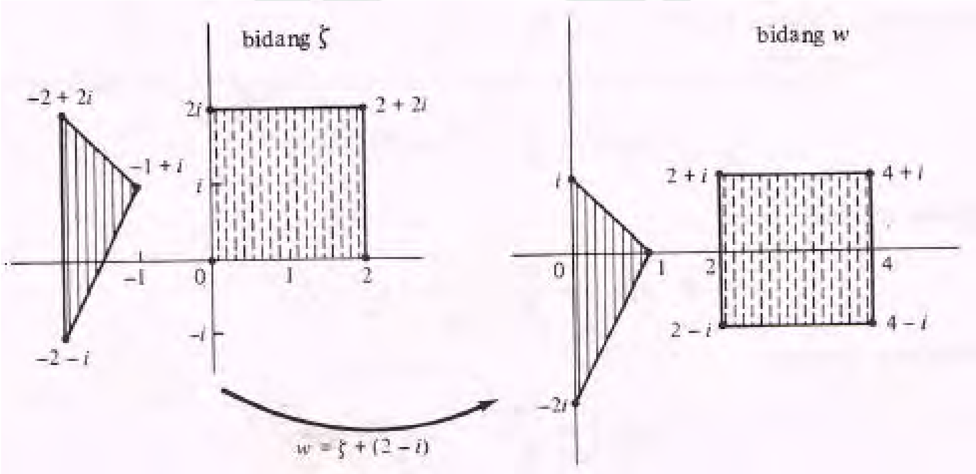
[1] John D. Paliouras, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur* (Jakarta: Erlangga, 1987), 83

Catat bahwa pemetaan ini menjaga kesamaannya karena memutar setiap titik dengan sudut yang sama (a) dan melipatgandakan modulus setiap titik dengan faktor yang sama $|a|$.

Selanjutnya, transformasi

$$w = \zeta + b$$

dinamakan pergeseran. Sifat fungsi ini "menggeser" atau "memindahkan" setiap titik ζ dengan vektor konstan b. Pemetaan ini jelas memelihara kesamaan dan kesebangunannya. Gambar 8.2 berikut menggambarkan kejadian penggeseran[2].



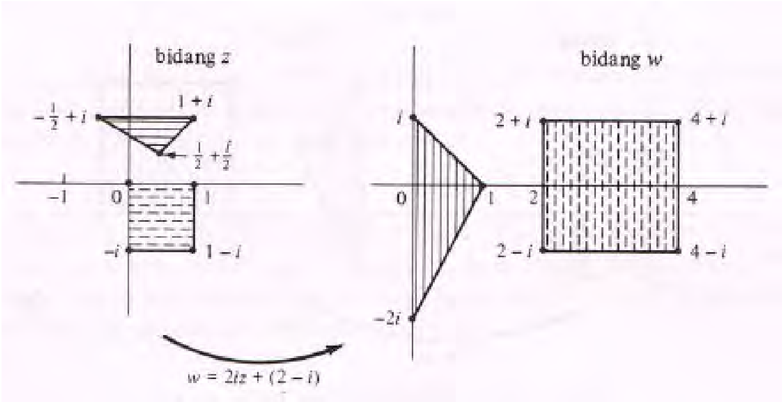
Gambar 8.2
Pergeseran

Dari dua pemetaan diatas, dapat dilihat bahwa transformasi linear $f(z) = az + b$ terjadi akibat gabungan terhadap regangan putaran $\zeta = az$ yang diikuti dengan penggeseran $w = \zeta + b$. Gambar 8.3 berikut menunjukkan gabungan pemetaan-pemetaan tersebut[3].

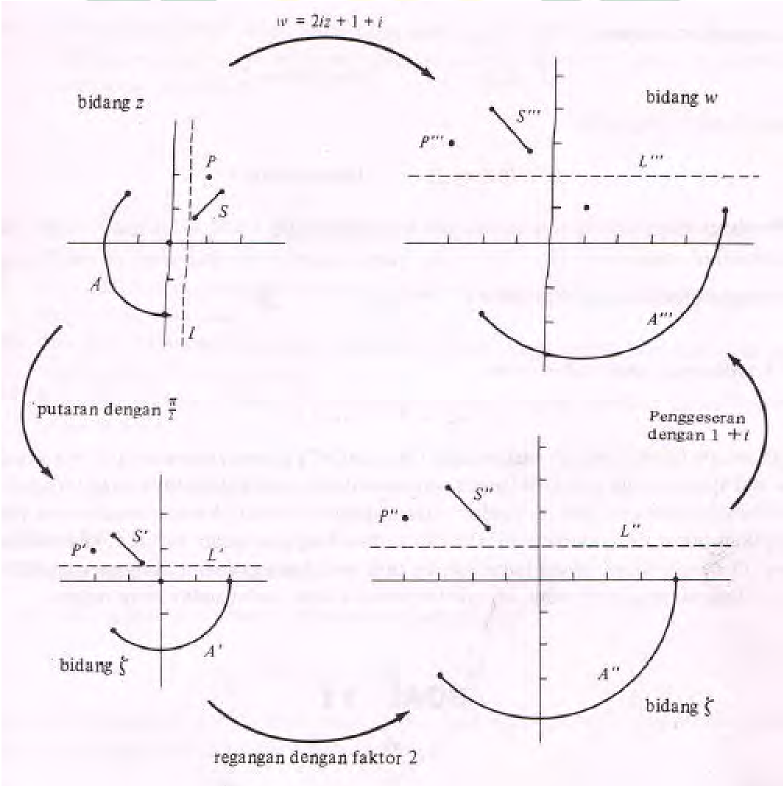
Contoh pemetaan linear di titik $P = 1 + 2i$, penggal garis $S \coloneqq \arg z = \frac{\pi}{4}, 1 < |z| < 2$, busur $A \coloneqq |z| = 2, \frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$ dan garis tegak $L: R(z) = \frac{1}{2}$ dibawah fungsi $w = 2iz + 1 + i$ dapat dilihat pada gambar 8.4.

---

[2] Ibid
[3] Ibid, hal 84



Gambar 8.3
Transformasi Linear



Gambar 8.4
Contoh Transformasi linear dibawah $w = 2iz + 1 + i$

Transformasi Pangkat

Adalah sebuah fungsi yang berbentuk $f(z) = z^n$. Fungsi ini merupakan fungsi menyeluruh karena f' ada dan terdefinisi untuk semua z. Jika $n > 1$, fungsi ini merupakan fungsi banyak ke satu. Akibatnya inversinya bukan merupakan fungsi.

Sifat-sifat pemetaan tertentu pada transformasi pangkat lebih mudah dipelajari dalam bentuk kutubnya. Dengan menyatakan fungsi pangkat dalam bentuk kutub diperoleh

$$w = r^n(\cos nt + i \sin nt)$$

Dari bentuk kutub ini dapat dilihat bahwa jika

$$|z| = r \quad dan \quad \arg z = t$$

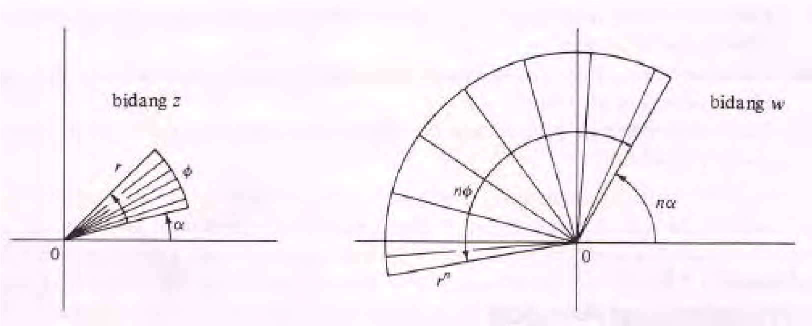
Maka

$$|w| = r^n \quad dan \quad \arg z = nt$$

Dari bentuk kutub diatas dapat disimpulkan bahwa transformasi pangkat memetakan suatu titik z dengan modulus r dan argumen t ke suatu titik dengan modulus r^n dan argumen nt. Sebagai contoh, dibawah fungsi $w = z^3$, $z = 2\ cis\ \left(\frac{\pi}{3}\right)$ dipetakan ke $w = 8\ cis\ \pi$.

Pada umumnya, dibawah transformasi pangkat suatu sinar yang dipancarkan dari pusat sumbu koordinat dengan sudut inklinasi α dipetakan menjadi suatu sinar yang bersudut inklinasi $n\alpha$. Sehingga suatu sektor lingkaran dengan jari-jari r bersudut pusat ϕ ditransformasikan ke sektor lingkaran dengan jari-jari r^n bersudut pusat $n\phi$. Proses transformasi ini bida dilihat pada gambar 8.5[4].

[4] Ibid, hal 88



Gambar 8.5
Pemetaan $w = z^n$

Sebagai contoh, dibawah $w = z^2$, kuadran pertama bidang z dipetakan ke setengah lingkaran atas bidang w. Setengah lingkaran atas bidang z dipetakan ke seluruh bidang w. Jika diambil seluruh bidang z maka bidang w akan ditutupi dua kali.

Secara general, dibawah transformasi pangkat $w = z^n$, bidang z dipetakan ke bidang w, n kali. Artinya setiap titik pada bidang w, kecuali $w = 0$ merupakan bayangan n titik yang berbeda dari bidang z.

Contoh 8.1

Fungsi $w = z^2$ jika diuraikan menghasilkan

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \text{ dan } v(x, y) = 2xy.$$

Selanjutnya, perhatikan hiperbola tegak lurus

$$x^2 - y^2 = c, \quad c \neq 0$$

Jelas $u = c$ dan bila x dan y mengambil seluruh nilai yang mungkin maka nilai v bergerak dari $-\infty$ hingga $+\infty$. Hal ini menunjukkan bahwa dibawah $w = z^2$, hiperbola diatas dipetakan menjadi garis tegak $u = c$.
Selanjutnya perhatikan hiperbola

$$2xy = k, \ \ k \neq 0$$

Jelas bahwa dibawah fungsi tersebut, bayangannya adalah garis mendatar $v = k$.

Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Sifat-sifat pemetaan liniear paling mudah dilihat dengan memeriksa secara terpisah pemetaan-pemetaan
$$\zeta = az \qquad dan \qquad w = \zeta + b$$
Kemudian digabungkan
$$w = \zeta + b = az + b$$
2. Sifat-sifat pemetaan pada transformasi pangkat lebih mudah dipelajari dalam bentuk kutubnya.
3. Transformasi pangkat memetakan suatu titik z dengan modulus r dan argumen t ke suatu titik dengan modulus r^n dan argumen nt.

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Carilah bayangan kurva-kurva $z = \frac{\pi}{3}$, $|z| = 2, R(z) = -1,$ dan $I(z) = 2$ dibawah fungsi berikut; gambar kurva dan bayangannya
   a. $w = z + 1$
   b. $w = (-1 + i)z$
   c. $w = (1 - i)z + (1 - i)$
   d. $w = 2i(z + 1 + i)$
2. Carilah bayangan tiap-tiap kurva berikut atau daerah pada bidang z dibawah pemetaan $w = z^2$
   a. $x^2 - y^2 = 3$
   b. $y = 1 - x$
   c. $|z| > 2$
   d. $1 < R(z) < 2$
3. Suatu titik z_0 dinamakan titik tetap pada fungsi $w = f(z)$, asalkan $f(z_0) = z_0$. Sehingga untuk titik tetap pada suatu fungsi dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $z = f(z)$. Gunakan kenyataan ini untuk mendapatkan titik-titik tetap, jika ada, fungsi berikut

a. $w = iz$
b. $w = z - 2i$
c. $w = \frac{5}{2}z + i$
d. $w = z + b,\ \ b \neq 0$

4. Buktikan bahwa satu-satunya transformasi linear dengan lebih dari satu titik tetap adalah pemetaan identitas $w = z$
5. Dibawah pemetaan $w = z^5, z = 1$ dipetakan ke $w = 1$. Carilah empat titik lagi yang berbeda yang juga dipetakan ke $w = 1$ dibawah fungsi tersebut.
6. Dengan menggunakan kenyataan bahwa uraian fungsi kuadrat $w = z^2$ menghasilkan $u = x^2 - y^2$ dan $v = 2xy$, tunjukkan bahwa, untuk fungsi ini, $v^2 = 4x^2(x^2 - u) = 4y^2(u + y^2)$
Kemudian tunjukkan bahwa dibawah $w = z^2$, garis-garis mendatar $(y = k \neq 0)$ dan tegak lurus $(x = c \neq 0)$ dipetakan menjadi parabola.

Daftar Pustaka

Freitag, Eberhard dan Busam, Rolf. *Complex Analysis*. Heidelberg: Springer, 2005.

Paliouras. John D, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Jakarta: Erlangga, 1987.

Saff, E.B and A.D Snider. *Fundamentals of complex Analysis with Apllication to Engineering and Science*, New Jersey: Pearson Education Inc, 2003

Wegener, Ingo. *Complexity Theory Exploring the Limits of Efficient Algorithms*. Berlin: Springer, 2005

Paket 9
TRANSFORMASI KEBALIKAN DAN TRANSFORMASI BILINEAR

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket kesembilan ini difokuskan transformasi kebalikan dan transformasi bilinear. Transformasi kebalikan sebagai gabungan inversi dalam lingkaran satuan dan kesekawanan. Sedangkan transformasi bilnear merupakan pecahan silang. Oleh karena itu pemahaman terhadap materi ini penting untuk ditekankan sebagai prasyarat untuk mempelajari paket-paket selanjutnya.

Pada awal Paket 9 ini, mahasiswa diajak untuk melakukan eksplorasi terhadap transformasi kebalikan. Selanjutnya mahasiswa diajak untuk menggali sifat-sifat yang melekat padanya. Setelah mendapatkan materi tentang transformasi kebalikan mahasiswa diperkenalkan dengan transformasi bilinear dan sifat-sifatnya.

Proses perkuliahan didesain dengan model kooperatif agar setiap mahasiswa dalam kelompok termotivasi untuk terlibat secara aktif dalam perkuliahan. Lembar kegiatan yang digunakan terdapat beberapa permasalahan yang dikerjakan secara individu, kemudian didiskusikan secara berpasangan, kemudian dipresentasikan di depan kelas. Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan laptop sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat mengefektifkan perkuliahan, serta kertas plano, spidol dan solasi sebagai alat menuangkan hasil diskusi kelompok. Langkah tersebut diupayakan untuk menggali ide-ide dan potensi kreatif mahasiswa-mahasiswi dalam menjalin komunikasi sosial yang lebih efektif. Dari sini, peta pengetahuan dan keterampilan sosial mereka akan diketahui untuk kemudian dilakukan diskusi dan simulasi perkuliahan. Penggunaaan multi media dalam perkuliahan juga diharapkan untuk mengoptimalisasi pencapaian kompetensi dasar dan indikator yang telah ditargetkan.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Menjelaskan kembali fungsi elementer beserta sifat operasinya.

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa-mahasiswi diharapkan mampu:

1. Menuliskan kembali macam fungsi elementer
2. Mengoperasikan fungsi-fungsi elementer
3. Menggunakan Transformasi Kompleks

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

Materi pada paket ini meliputi:

1. Transformasi kebalikan
2. Transformasi bilinear

Langkah-langkah Perkuliahan

Kegiatan Awal (35 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Apersepsi transformasi kebalikan dan bilinear
4. Memotivasi mahasiswa bahwa materi yang akan dipelajari sangat bermanfaat untuk mempelajari materi berikutnya

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Dosen menjelaskan beberapa konsep penting yang diperlukan dalam menyelesaikan LK. Mahasiswa menyimak penjelasan dosen dengan bantuan uraian materi pada paket 9.
2. Dosen membagi meminta mahasiswa berkumpul dengan kelompoknya untuk mendiskusikan bagaimana konsep pemetaan dan transformasi pada fungsi kompleks sesuai dengan langkah-langkah yang ada di LK.

3. Dosen membimbing mahasiswa selama proses diskusi. Mahasiswa berdiskusi dengan anggotanya dan bertanya pada dosen jika ada materi yang tidak dipahami. Masing-masing pasangan harus benar-benar memahami keseluruhan hasil diskusi karena perwakilan pasangan akan presentasi di depan kelas dipihak secara acak.
4. Dosen memanggil anggota dengan no.urut tertentu pada salah satu kelompok untuk mempresentasikan hasil diskusinya.
5. Selesai presentasi, kelompok lain memberikan klarifikasi
6. Penguatan hasil diskusi dari dosen
7. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

Kegiatan Penutup (10 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.

Lembar Kegiatan Mahasiswa

Mentransformasikan suatu bidang dengan transformasi linear dan transformasi pangkat.

Tujuan

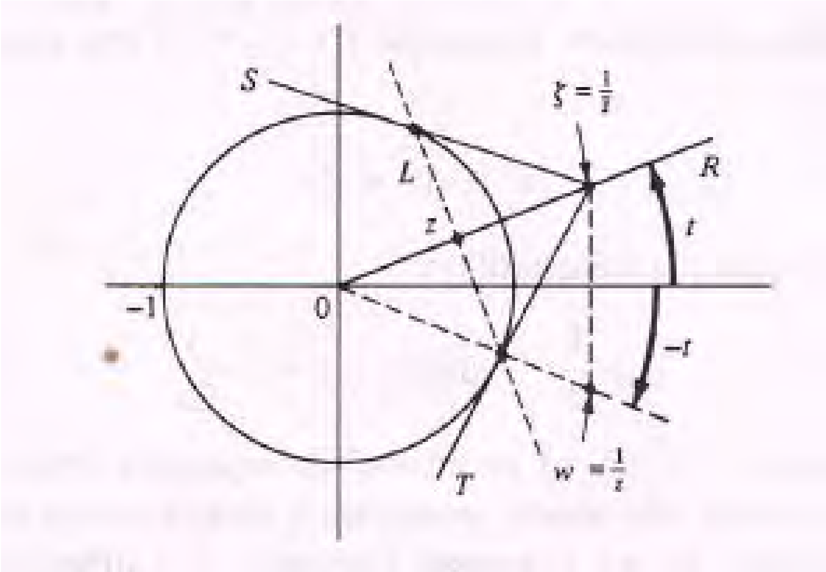
Mahasiswa dapat membuktikan bahwa dibawah transformasi kebalikan titik z dipetakan ke $w = 1/z$, dan syarat $ad - bc \neq 0$ pada transformasi bilinear

Bahan dan alat

Lembar kegiatan, kertas HVS, Kertas Plano, Spidol

Langkah-langkah kegiatan

1. Masing kelompok mendapatkan tugas untuk membuktikan bahwa dibawah transformasi kebalikan titik z dipetakan ke $w = 1/z$



2. Buktikan, mengapa pada transformasi bilinear

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

$ad - bc \neq 0$

3. Secara berkelompok mendiskusikan permasalahan yang diberikan.
4. Kelompok yang mendapatkan giliran mempresentasikan hasil diskusinya didepan kelas.

Uraian Materi

TRANSFORMASI KEBALIKAN DAN TRANSFORMASI BILINEAR DAN

Transformasi Kebalikan

Fungsi kebalikan adalah fungsi yang berbentuk

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Fungsi ini merupakan fungsi satu-satu, kecuali $z = 0$ dan $w = 0$. Turunan fungsi ini diberikan oleh $f' = -1/z^2$ yang terdefinisi untuk semua z kecuali $z = 0$. Jadi fungsi ini analitik pada semua z kecuali pada pusat koordinat.

Secara naluriah nampak jelas bahwa dibawah fungsi kebalikan, titik-titik yang hampir mendekati $z = 0$ dipetakan ke titik-titik di daerah jauh pada bidang w. Sedangkan titik-titik di tempat jauh dari $z = 0$ dipetakan ke titik-titik yang "dekat" pada $w = 0$.

Secara geometri hal ini bisa didekati dengan menuliskan z dan w dalam bentuk kutub. Jika

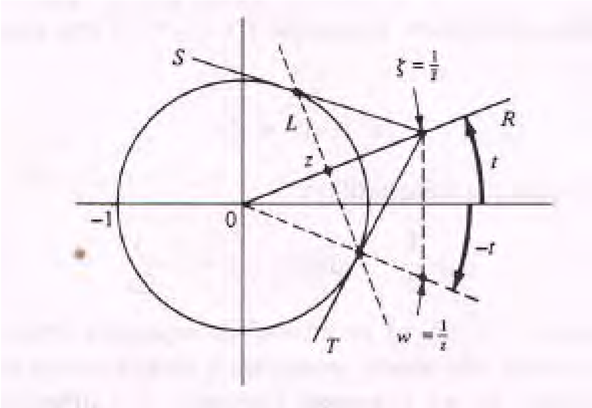
$$z = r\ cis\ t$$

maka

$$w = \frac{1}{r}\cos(-t)$$

Yang dapat di jelaskan dengan, "dibawah fungsi kebalikan suatu titik dengan modulus r dan argumen t dipetakan menjadi suatu titik dengan modulus $1/r$ dan argumen $-t$". Geometri transformasi ini dapat dilihat pada gambar 9.1[1].

[1] John D. Paliouras, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur* (Jakarta: Erlangga, 1987), 91



Gambar 9.1
Konstruksi $w = 1/z$

Contoh 9.1

Perhatikan garis tegak $x = 1$, dibawah pemetaan $w = 1/z$

Penyelesaian

Penguraian fungsi $w = 1/z$

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i$$

Diperoleh

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad dan \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Garis tegak yang diberikan $x = 1$, sehingga setiap titik yang diberikan berbentuk $z = 1 + yi$, dan didapatkan

$$u = \frac{1}{1 + y^2} \quad dan \quad v = -\frac{y}{1 + y^2}$$

Dengan mengkuadratkan keduanya dan menjumlahkan keduanya didapatkan

$$u^2 + v^2 = u$$

Dengan melengkapi kuadrat diatas dihasilkan lingkaran

$$\left| w - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

Lingkaran ini merupakan bayangan garis yang diberikan $R(z) = 1$.

Dengan mengembangkan contoh 9.1 diperoleh bahwa setengah bidang $R(z) > 1$ dipetakan ke bagian dalam lingkaran diatas, dan juga bahwa setengah bagian atas pada setengah bidang dipetakan ke bagian bawah setengah lingkaran, dan sebaliknya.

Contoh 9.2

Lingkaran $|z-1| = 1$, dibawah pemetaan $w = 1/z$

Penyelesaian

Penguraian fungsi $w = 1/z$

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

Diperoleh

$$u = \frac{x}{x^2+y^2} \quad dan \quad v = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

Dengan menyederhanakan $|z-1| = 1$ diperoleh

$$x^2+y^2 = 2x$$

Substitusi ke u dan v diperoleh

$$u = \frac{1}{2} \quad dan \quad v = -\frac{y}{2x}$$

Karena $z = (x, y)$ berubah ubah sepanjang lingkaran yang diberikan, v mengambil semua nilai nyata, sementara u tetap konstan pada $1/2$. Sehingga disimpulkan bahwa bayangan yang diberikan adalah $u = 1/2$. Dengan mengembangkan contoh ini bagian dalam lingkaran yang diberikan dipetakan pada setengah bidang disebelah kanan bayangan garis $u = 1/2$ tetapi dengan kebalikan setengah bidang bagian atas dan bagian bawahnya.

Akhirnya, dibawah transformasi kebalikan garis-garis dan lingkaran-lingkaran dipetakan ke garis-garis atau lingkaran-lingkaran. Hal ini didasarkan pada kenyataan bahwa

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

Dan persamaan lingkaran $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$ jika $(a\neq 0)$ dan mewakili suatu garis $(a=0)$.

Transformasi Bilinear

Jika $a, b, c,$ dan d konstanta kompleks, maka

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\ \ ,\quad untuk\ ad-bc\neq 0$$

Dinamakan transformasi bilinear. Transformasi bilinear memiliki sejumlah sifat pemetaan yang menarik. Sifat yang pertama adalah "Dibawah transformasi bilinear garis-garis dan lingkaran-lingkaran dipetakan menjadi garis-garis atau lingkaran-lingkaran"

Sifat pertama ini didasarkan pada 2 kenyataan. Pertama kenyataan bahwa pemetaan bilinear merupakan gabungan dari tiga fungsi diantaranya

$$\zeta=cz+d,\qquad \xi=\frac{1}{\zeta}\ ,dan\ w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\xi$$

Artinya pemetaan bilinear merupakan gabungan dari pemetaan linear diikuti dengan pemetaan kebalikan dan terakhir pemetaan linear. Kedua, pemetaan linear merupakan transformasi serupa dan transformasi kebalikan memetakan garis-garis dan lingkaran-lingkaran ke garis-garis atau lingkaran-lingkaran.

Suatu garis atau lingkaran K, pada bidang z ditransformasikan dibawah fungsi bilnear. Oleh fungsi $\zeta=cz+d$ garis K akan diputar, diperbesar, kemudian digeser menjadi garis atau lingkaran K'. Selanjutnya oleh fungsi $\xi=\frac{1}{\zeta}$ akan dibalikkan menjadi garis atau lingkaran K''. Terakhir oleh fungsi ketiga $w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\xi$ akan diputar, diperbesar, dan digeser menjadi garis atau lingkaran K'''.

Contoh 9.2

Tunjukkan bahwa pemetaan bilnear $w=\frac{z-1}{z+1}$ memetakan setengah bidang $R(z)>0$ menjadi cakram satuan $|w|<1$

Penyelesaian

Pemetaan ini dibagi dalam tiga tahapan,

$$\zeta = z + 1, \qquad \xi = \frac{1}{\zeta}\ , dan\ w = -2\xi + 1$$

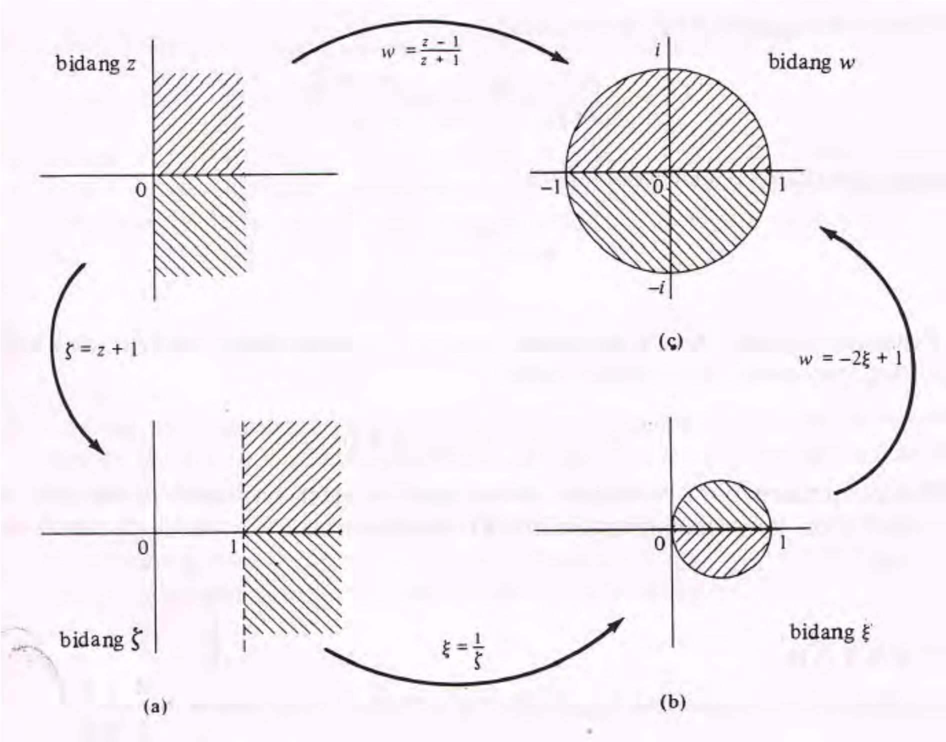
1. Dibawah pemetaan $\zeta = z + 1$, setiap titik pada setengah bidang yang diberikan diputar sebesar 0 radian, diperbesar dengan faktor 1 dan terakhir digeser dengan vektor 1 sehingga menghasilkan setengah bidang $R(\zeta) > 1$
2. Setengah bidang $R(\zeta) > 1$ kemudian dipetakan dibawah $\xi = \frac{1}{\zeta}$ kedalam lingkaran $\left|\xi - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, tetapi dengan setengah bagian atas dan bawah saling dipertukarkan.
3. Terakhir dibawah $w = -2\xi + 1$, bagian dalam lingkaran akan diputar sebesar $-\pi$ radial menjadi bagian dalam lingkaran $\left|\xi + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, pertukaran ini akan menukar letak setengah bagian atas dan bawah cakram tersebut. Putaran ini kemudian diikuti dengan regangan dengan faktor 2 menjadi bagian dalam lingkaran $|\xi + 1| = 1$, dan akhirnya digeser dengan vektor 1 menghasilkan cakram $|w| < 1$

Proses transformasi ini dapat dilihat pada gambar 9.2[2].

Sifat kedua transformasi bilinear dinyatakan sebagai beikut: bila diketahui sebarang tiga titik berbeda z_1, z_2, z_3 pada bidang z dan sebarang tiga titik berbeda w_1, w_2, w_3 pada bidang w, maka terdapat transformasi bilinear yang tunggal yang memetakan z_j ke w_j , $j = 1,2,3$. Transformasi bilinear yang tunggal ini diperoleh dengan

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

[2] John D. Paliouras, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur* (Jakarta: Erlangga, 1987), 97



Gambar 9.2

Transformsi bilinear $w = \frac{z-1}{z+1}$

Contoh 9.2

Carilah transformasi bilinear yang memetakan $z_1 = 0, z_2 = i, z_3 = -1$ ke $w_1 = 12, w_2 = 11 + i,\ w_3 = 11$ secara berurutan

Penyelesaian

Dengan substitusi z_1, z_2, z_3 dan w_1, w_2, w_3 ke

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

diperoleh

$$\frac{(w - 12)i}{(w - 11)(-1 + i)} = \frac{z(1 + i)}{(z + 1)i}$$

Menghasilkan persamaan bilinear

$$w = \frac{10z - 12}{z - 1}$$

Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Dibawah fungsi kebalikan suatu titik dengan modulus r dan argumen t dipetakan menjadi suatu titik dengan modulus $1/r$ dan argumen $-t$
2. Pemetaan bilinear merupakan gabungan dari pemetaan linear diikuti dengan pemetaan kebalikan dan terakhir pemetaan linear

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Carilah bayangan masing-masing titik berikut dibawah transformasi kebalikan
   a. $1 + i$
   b. $5 - 12i$
   c. $-3 + 4i$
   d. $1/(1 - i)$
2. Lingkaran satuan $|z| = 1$ dan sumbu koordinat membagi bidang menjadi delapan daerah. Dapatkan bayangan masing-masing daerah ini dibawah $w = 1/z$
3. Tunjukkan bahwa sebarang garis $x = c, c \neq 0$ dipetakan menjadi lingkaran
$$\left|w - \frac{1}{2c}\right| = \frac{1}{2|c|}$$
   dibawah transformasi kebalikan
4. Carilah bayangan setiap titik $z = 0, 1, -1, i, -i, \infty$ dibawah pemetaan
$$w = \frac{-iz + 2}{z + i}$$

5. Carilah titik-titik tetap pada transformasi
   a. $w = \frac{-iz+i}{z-i}$
   b. $w = \frac{z-2}{z-1}$
6. Carilah bayangan setengah bidang $I(z) \geq 0$ dibawah pemetaan

$$w = \frac{z}{z-1}$$

Daftar Pustaka

Freitag, Eberhard dan Busam, Rolf. *Complex Analysis*. Heidelberg: Springer, 2005.

Paliouras. John D, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Jakarta: Erlangga, 1987.

Saff, E.B and A.D Snider. *Fundamentals of complex Analysis with Apllication to Engineering and Science*, New Jersey: Pearson Education Inc, 2003

Wegener, Ingo. *Complexity Theory Exploring the Limits of Efficient Algorithms*. Berlin: Springer, 2005

Paket 10
TRANSFORMASI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMIK

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket kesepuluh ini difokuskan transformasi eksponensial dan logaritmik. Pendefinisian fungsi logaritma pada variabel kompleks didasari oleh bagaimana menyelesaikan persamaan $e^w = z$, dengan w dan z bilangan kompleks. Oleh karena itu pemahaman terhadap materi ini penting untuk ditekankan sebagai prasyarat untuk mempelajari paket-paket selanjutnya.

Pada awal Paket 10 ini, mahasiswa diajak untuk menyelesaikan dua buah kasus tentang transformasi eksponensial. Selanjutnya dari kasus tersebut mahasiswa diajak untuk membuat ikhtisar dari temuan-temuan yang diperoleh. Setelah mendapatkan materi tentang transformasi eksponensial mahasiswa diperkenalkan dengan transformasi logaritmik yang merupakan invers dari transformasi eksponensial.

Proses perkuliahan didesain dengan model kooperatif agar setiap mahasiswa dalam kelompok termotivasi untuk terlibat secara aktif dalam perkuliahan. Lembar kegiatan yang digunakan terdapat beberapa permasalahan yang dikerjakan secara individu, kemudian didiskusikan secara berpasangan, kemudian dipresentasikan di depan kelas. Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan laptop sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat mengefektifkan perkuliahan, serta kertas plano, spidol dan solasi sebagai alat menuangkan hasil diskusi kelompok. Langkah tersebut diupayakan untuk menggali ide-ide dan potensi kreatif mahasiswa-mahasiswi dalam menjalin komunikasi sosial yang lebih efektif. Dari sini, peta pengetahuan dan keterampilan sosial mereka akan diketahui untuk kemudian dilakukan diskusi dan simulasi perkuliahan. Penggunaaan multi media dalam perkuliahan juga diharapkan untuk mengoptimalisasi pencapaian kompetensi dasar dan indikator yang telah ditargetkan.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Menjelaskan kembali fungsi elementer beserta sifat operasinya.

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa-mahasiswi diharapkan mampu:

1. Menuliskan kembali macam fungsi elementer
2. Mengoperasikan fungsi-fungsi elementer
3. Menggunakan Transformasi Kompleks

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

Materi pada paket ini meliputi:

1. Transformasi kebalikan
2. Transformasi bilinear

Langkah-langkah Perkuliahan

Kegiatan Awal (35 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Apersepsi transformasi kebalikan dan bilinear
4. Memotivasi mahasiswa bahwa materi yang akan dipelajari sangat bermanfaat untuk mempelajari materi berikutnya

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Dosen menjelaskan beberapa konsep penting yang diperlukan dalam menyelesaikan LK. Mahasiswa menyimak penjelasan dosen dengan bantuan uraian materi pada paket 10.
2. Dosen membagi meminta mahasiswa berkumpul dengan kelompoknya untuk mendiskusikan bagaimana konsep pemetaan dan transformasi pada fungsi kompleks sesuai dengan langkah-langkah yang ada di LK.

3. Dosen membimbing mahasiswa selama proses diskusi. Mahasiswa berdiskusi dengan anggotanya dan bertanya pada dosen jika ada materi yang tidak dipahami. Masing-masing pasangan harus benar-benar memahami keseluruhan hasil diskusi karena perwakilan pasangan akan presentasi di depan kelas dipihak secara acak.
4. Dosen memanggil anggota dengan no.urut tertentu pada salah satu kelompok untuk mempresentasikan hasil diskusinya.
5. Selesai presentasi, kelompok lain memberikan klarifikasi
6. Penguatan hasil diskusi dari dosen
7. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

Kegiatan Penutup (10 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.

Lembar Kegiatan Mahasiswa

Memeriksa dua kasus khusus pada transformasi eksponensial

Tujuan

Mahasiswa dapat membuat generalisasi transformasi eksponensial dari dua kasus khusus yang diberikan.

Bahan dan alat

Lembar kegiatan, kertas HVS, Kertas Plano, Spidol

Langkah-langkah kegiatan

1. Masing kelompok mendapatkan tugas untuk
   a. Tentukan bayangan garis mendatar $y = b$ dibawah
   $$w = e^z,$$
   b. Tentukan bayangan $x = c,\ -\pi < y < \pi$ dibawah
   $$w = e^z,$$
2. Secara berkelompok mendiskusikan permasalahan yang diberikan.
3. Kelompok yang mendapatkan giliran mempresentasikan hasil diskusinya didepan kelas.

Uraian Materi

TRANSFORMASI EKSPONENSIAL DAN LOGARITMIK

Transformasi Eksponensial

Fungsi eksponensial

$$w = e^z$$

Bisa dipelajari melalui dua kasus khusus. Dari dua kasus ini kemudian digeneralisasi.

Contoh 10.1

Tentukan bayangan garis mendatar $y = b$ dibawah

$$w = e^z,$$

Penyelesaian

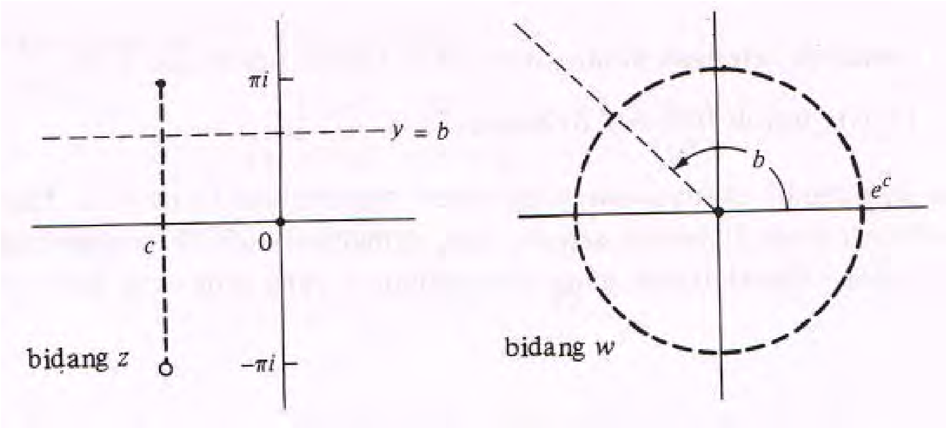
Jika $w = e^z$, maka $|w| = e^x$ dan $\arg w = y$. Setiap titik pada garis yang diberikan berbentuk

$$z = x + ib, \qquad -\infty < x < \infty$$

Karena x berubah-ubah dari $-\infty$ hingga $+\infty$, nilai e^x berubah-ubah dari 0 hingga $+\infty$ sementara y tetap pada $y = b$. Dengan kata lain, jika nilai x berubah-ubah dari $-\infty$ hingga $+\infty$, $|w|$ berubah-ubah dari 0 hingga $+\infty$ sedangkan $\arg w$ tetap $\arg w = b$.

Hal ini berarti , jika z berubah-ubah sepanjang garis yang diberikan, w menentukan suatu sinar yang dipancarkan dari pusat koordinat (tapi tidak termasuk koordinatnya) dengan sudut inklinasi b radial. (lihat gambar 10.1[1])

[1] John D. Paliouras, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur* (Jakarta: Erlangga, 1987), 100



Gambar 10.1
Bayangan $y = b$ dibawah $w = e^z$

Contoh 10.2

Tentukan bayangan $x = c,\ -\pi < y < \pi$ dibawah

$$w = e^z,$$

Penyelesaian

Setiap titik pada penggal garis tersebut berbentuk

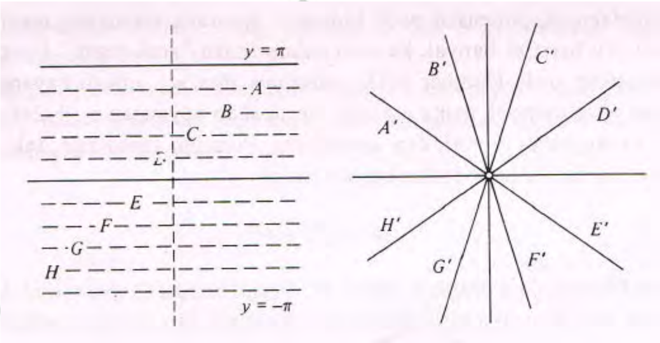
$$z = c + iy, \quad -\pi < y < \pi$$

Jika y berubah-ubah dari $-\pi$ ke π, $\cos y + i \sin y$ menentukan suatu lingkaran lengkap. Sedangkan $|w|$ tetap tinggal pada e^c. Dengan kata lain, jika z berubah-ubah sepanjang penggal garis yang diberikan, w menentukan suatu lingkaran berpusat pada $w = 0$ dan berjari-jari e^c.

Jika y diperbolehkan untuk domain yang lebih luas dalam garis tegak yang sama, w akan mengulangi jejaknya pada lingkaran yang sama. Jika diambil seluruh titik pada garis tegak $x = c$, maka lingkaran $|w| = e^c$ akan terulang tak berhingga kali.

Dari dua contoh diatas, bisa diikhtisarkan bahwa: “dibawah $w = e^x$ garis mendatar dipetakan ke sinar-sinar yang dipantulkan dari $w = 0$ dan garis tegak dipetakan ke lingkaran-lingkaran yang berpusat di $w = 0$”.

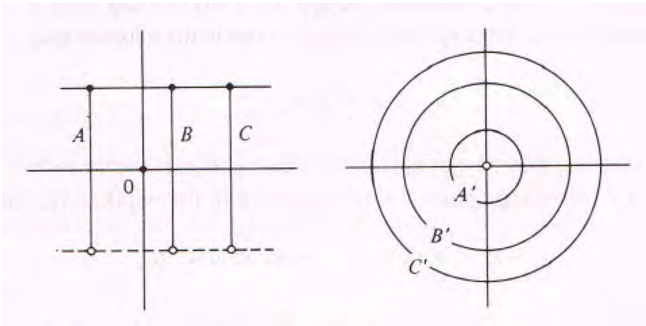
Jika diambil semua garis mendatar dalam $-\pi < y \leq \pi$, bayangannya merupakan semua sinar dengan sudut-sudut inklinasi yang berbeda-beda dari $-\pi \leq \arg w \leq \pi$. Secara keseluruhan semua sinar-sinar itu menghabiskan semua titik pada bidang w kecuali $w = 0$. Lihat gambar 10.2[2].



Gambar 10.2

Garis ke sinar dibawah $w = e^z$

Jika diambil semua penggal garis tegak yang termuat antara $-\pi < y < \pi$, bayangannya merupakan lingkaran lingkaran yang berpusat di $w = 0$. Lingkaran itu akan menutup w kecuali $w = 0$. Lihat gambar 10.3[3].



Gambar 10.3

Garis ke Lingkaran dibawah $w = e^z$

---

[2] John D. Paliouras, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur* (Jakarta: Erlangga, 1987), 101

[3] ibid

Transformasi Logaritmik

Fungsi

$$\log(e^z) = z$$

Berlaku untuk semua z. Sifat ini menyatakan kenyataan bahwa fungsi $\log z$ merupakan invers fungsi e^z. Jika ditentukan e^z untuk setiap z dan diterapkan fungsi log pada e^z, diperoleh kembali z. Secara singkat dapat disimpulkan bahwa "$\log z$ meniadakan apa yang dikerjakan oleh e^z untuk sebarang z".

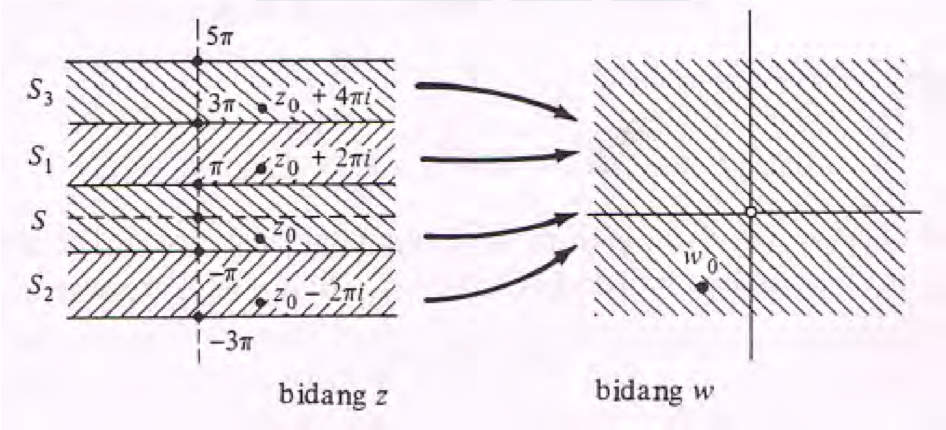
Dari fungsi diatas dapat diperoleh

$$w = \ln|z| + i\, arg\, z$$

Artinya

$$u = \ln|z| \quad dan \quad v = \arg z$$

Jika z berubah-ubah pada semua nilai kecuali nol, $|z|$ berubah-ubah antara 0 dan $+\infty$; jadi $\ln|z|$ berubah-ubah dari $-\infty$ ke $+\infty$, oleh karena itu $-\infty < u < \infty$.Selain itu karena argumen pokok mempunyai syarat yaitu berada pada $-\pi < \arg z \leq \pi$ didapatkan $-\pi < v \leq \pi$. Dengan menggabungkan u dan v diperoleh lajur pokok pada bidang w. Untuk lebih jelasnya lihat gambar 10.4[4].



Gambar 10.4

Lajur pokok dibawah $w = \log z$

[4] Ibid, halaman 103

Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Dibawah $w = e^x$ garis mendatar dipetakan ke sinar-sinar yang dipantulkan dari $w = 0$ dan garis tegak dipetakan ke lingkaran-lingkaran yang berpusat di $w = 0$
2. Transformasi logaritma $\log z$ meniadakan apa yang dikerjakan oleh e^z untuk sebarang z

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Tentukan bayangan setiap kurva berikut dibawah $w = e^z$
   a. Sinar $y = 1, x > 0$
   b. Sinar $y = 1, x > -1$
   c. Penggal garis $x = 0, -\frac{3\pi}{2} < y < \frac{3\pi}{2}$
   d. Garis $y = 3$
   e. Garis $x = -8$
2. Carilah bayangan kurva berikut dibawah $w = \log z$
   a. Lingkaran $|z| = c, \quad c > 0$
   b. Sinar yang dipancarkan dari pusat koordinat kecuali pusatnya yang mempunyai sudut inklinasi $\alpha = -\pi/4$
3. Carilah bayangan dibawah fungsi eksponensial segi banyak yang dibentuk dengan menghubungkan titik-titik $0, 2, 2 + i, -2 + i, -2 - 2i, -2i,$ dan 0

Daftar Pustaka

Freitag, Eberhard dan Busam, Rolf. *Complex Analysis*. Heidelberg: Springer, 2005.

Paliouras. John D, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Jakarta: Erlangga, 1987.

Saff, E.B and A.D Snider. *Fundamentals of complex Analysis with Apllication to Engineering and Science*, New Jersey: Pearson Education Inc, 2003

Wegener, Ingo. *Complexity Theory Exploring the Limits of Efficient Algorithms*. Berlin: Springer, 2005

Paket 11
TRANSFORMASI $w = sin\ z$ dan $w = cos\ z$

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket kesebelas ini difokuskan transformasi $w = \sin z$ dan $w = \cos z$. Materi transformasi ini sangat penting untuk diketahui. Oleh karena itu pemahaman terhadap materi ini penting untuk ditekankan sebagai prasyarat untuk mempelajari paket-paket selanjutnya.

Pada awal Paket 11 ini, mahasiswa diajak untuk mempelajari transformasi $w = \sin z$. Transformasi ini didekati dengan menguraikan $\sin z$ kedalam bentuk u dan v. Selanjutnya dengan cara yang sama dieksplorasi transformasi $w = \cos z$.

Proses perkuliahan didesain dengan model kooperatif agar setiap mahasiswa dalam kelompok termotivasi untuk terlibat secara aktif dalam perkuliahan. Lembar kegiatan yang digunakan terdapat beberapa permasalahan yang dikerjakan secara individu, kemudian didiskusikan secara berpasangan, kemudian dipresentasikan di depan kelas. Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan laptop sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat mengefektifkan perkuliahan, serta kertas plano, spidol dan solasi sebagai alat menuangkan hasil diskusi kelompok. Langkah tersebut diupayakan untuk menggali ide-ide dan potensi kreatif mahasiswa-mahasiswi dalam menjalin komunikasi sosial yang lebih efektif. Dari sini, peta pengetahuan dan keterampilan sosial mereka akan diketahui untuk kemudian dilakukan diskusi dan simulasi perkuliahan. Penggunaaan multi media dalam perkuliahan juga diharapkan untuk mengoptimalisasi pencapaian kompetensi dasar dan indikator yang telah ditargetkan.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Menjelaskan kembali fungsi elementer beserta sifat operasinya.

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa-mahasiswi diharapkan mampu:

1. Menuliskan kembali macam fungsi elementer
2. Mengoperasikan fungsi-fungsi elementer
3. Menggunakan Transformasi Kompleks

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

Materi pada paket ini meliputi:

1. Transformasi $w = \sin z$
2. Transformasi$w = \cos z$

Langkah-langkah Perkuliahan

Kegiatan Awal (35 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Apersepsi transformasi $w = \sin z$ dan $w = \cos z$
4. Memotivasi mahasiswa bahwa materi yang akan dipelajari sangat bermanfaat untuk mempelajari materi berikutnya

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Dosen menjelaskan beberapa konsep penting yang diperlukan dalam menyelesaikan LK. Mahasiswa menyimak penjelasan dosen dengan bantuan uraian materi pada paket 11.
2. Dosen membagi meminta mahasiswa berkumpul dengan kelompoknya untuk mendiskusikan bagaimana konsep pemetaan dan transformasi pada fungsi kompleks sesuai dengan langkah-langkah yang ada di LK.

3. Dosen membimbing mahasiswa selama proses diskusi. Mahasiswa berdiskusi dengan anggotanya dan bertanya pada dosen jika ada materi yang tidak dipahami. Masing-masing pasangan harus benar-benar memahami keseluruhan hasil diskusi karena perwakilan pasangan akan presentasi di depan kelas dipihak secara acak.
4. Dosen memanggil anggota dengan no.urut tertentu pada salah satu kelompok untuk mempresentasikan hasil diskusinya.
5. Selesai presentasi, kelompok lain memberikan klarifikasi
6. Penguatan hasil diskusi dari dosen
7. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

Kegiatan Penutup (10 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.

Lembar Kegiatan Mahasiswa

Memetakan penggal garis dibawah pemetaan $w = \sin z$

Tujuan

Mahasiswa dapat memetakan penggal garis yang diberikan dibawah pemetaan $w = \sin z$

Bahan dan alat

Lembar kegiatan, kertas HVS, Kertas Plano, Spidol

Langkah-langkah kegiatan

1. Masing kelompok mendapatkan tugas untuk
   a. Buktikan bahwa dibawah $w = \sin z$, sepanjang penggal garis mendatar
   $$y = b \neq 0, 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$
   Dipetakan ke setengah bagian atas atau setengah bagian bawah ellips
   $$\frac{u^2}{\cosh^2 b} + \frac{v^2}{\sinh^2 b} = 1$$
   Tergantung $b > 0$ dan $b < 0$
   b. Dibawah $w = \sin z$, sebarang garis tegak
   $$x = c,\ \ c \neq k\frac{\pi}{2}\ \ ,\ \ \ k = bilangan\ bulat$$
   Dipetakan ke setengah sebelah kanan atau setengah sebelah kiri hiperbola
   $$\frac{u^2}{\sin^2 c} + \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$$
   Tergantung pada apakah $2k\pi < c < 2k\pi + \pi$ atau $2k\pi - \pi < c < 2k\pi$
2. Secara berkelompok mendiskusikan permasalahan yang diberikan.
3. Kelompok yang mendapatkan giliran mempresentasikan hasil diskusinya didepan kelas.

Uraian Materi

TRANSFORMASI $w = sin\ z$ dan $w = cos\ z$

Transformasi $w = sin\ z$

Pada fungsi

$$w = \sin z \qquad dan \qquad w = \cos z$$

$\sin z$ dapat diuraikan menjadi

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x$$

Sehingga diperoleh persamaan

$$u = \sin x \cosh y \qquad dan \quad v = \sinh y \cos x$$

Persamaan diatas dijadikan pedoman untuk mengenal sifat-sifat pemetaan fungsi sinus. Dimulai dengan beberapa contoh

Perhatikan interval berikut

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\ , \quad y = 0$$

Jika $y = 0$, maka $\cosh y = 1$ dan $\sinh y = 0$, sehingga untuk sebarang titik pada interval yang diberikan diperoleh

$$u = \sin x \qquad dan \qquad v = 0$$

Karena x berubah-ubah antara $-\pi/2$ dan $\pi/2$ maka nilai $\sin x$ berubah-ubah antara -1 dan 1. Akibatnya, dibawah $w = \sin z$, interval yang diberikan dipetakan ke

$$-1 \leq u \leq 1, \qquad v = 0,$$

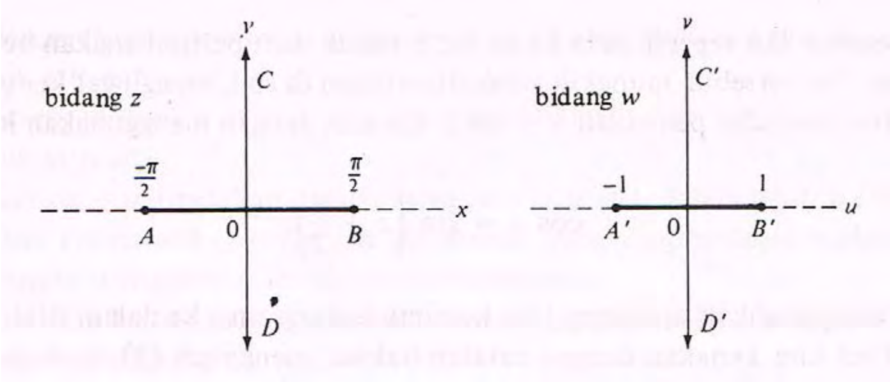
Pada bidang w. Lihat gambar 11.1[1].

Menggunakan penalaran yang sama, dapat ditunjukkan bahwa sumbu nyata bidang z dipetakan ke interval yang sama dengan contoh diatas yaitu interval

$$-1 \leq u \leq 1, \qquad v = 0,$$

Pada bidang w. Pemetaan sumbu nyata bidang z menutup interval tak berhingga kali

[1] John D. Paliouras, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur* (Jakarta: Erlangga, 1987), 105



Gambar 11.1
Transformasi $w = \sin z$

Pada contoh selanjutnya akan ditunjukkan bahwa sumbu khayal $x = 0$ dipetakan ke sumbu khayal $u = 0$, dibawah pemetaan sinus. Bila $x = 0$, maka

$$u = 0 \qquad dan \qquad v = \sinh y$$

Karena y berubah-ubah dari $-\infty$ ke ∞ pada sumbu khayal, maka $v = \sinh y$ berubah-ubah dari $-\infty$ ke ∞. Sedangkan u tetap berada pada 0. Artinya sumbu $x = 0$ dipetakan ke sumbu $u = 0$. Pada pemetaan ini separo bagian atas dipetakan ke separo bagian atas dan separo bagian bawah dipetakan ke separo bagian bawah.

Transformasi $w = \cos z$

Pada transformasi $w = \cos z$, $\cos z$ dapat diuraikan menjadi

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

Dengan menggunakan identitas

$$\cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$$

Dapat diketahui sifat-sifat pemetaan $\cos z$. Yaitu melalui gabungan pemetaan

$$\zeta = z + \frac{\pi}{2} \quad dan \quad w = \sin \zeta$$

Contoh 11.1

Tentukan bayangan interval

$$T: -\pi \leq x \leq 0, \qquad y = 0$$

Dibawah pemetaan

$$w = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$$

Penyelesaian

Interval

$$T: -\pi \leq x \leq 0, y = 0$$

dibawah pergeseran

$$\zeta = z + \frac{\pi}{2}$$

Dipetakan ke

$$T': -\frac{\pi}{2} \leq R(\zeta) \leq \frac{\pi}{2} \ , \quad I(\zeta) = 0$$

Selanjutnya dibawah

$$w = \sin\zeta$$

T' dipetakan ke

$$T'': -1 \leq u \leq 1, \qquad v = 0.$$

Akhirnya disimpulkan bahwa dibawah $w = \cos z$, interval $-\pi \leq x \leq 0, y = 0$. dipetakan ke $-1 \leq u \leq 1,\ v = 0$.

Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. $\sin z$ dapat diuraikan menjadi

   $$\sin z = \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x$$

   Sehingga diperoleh persamaan

   $$u = \sin x \cosh y \quad dan \quad v = \sinh y \cos x$$

2. Karena $\cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$ sifat sifat pemetaan $w = \cos z$ dapat diperoleh melalui gabungan pemetaan

   $$\zeta = z + \frac{\pi}{2} \quad dan \quad w = \sin\zeta$$

Latihan

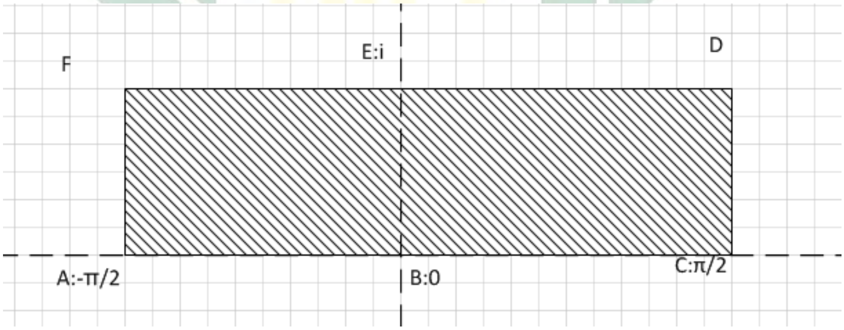
Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Tunjukkan bahwa setiap interval berikut dipetakan dibawah $w = \sin z$ ke interval

$$S: -1 \leq u \leq 1, \quad v = 0$$

   a. $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{2}, \; y = 0$
   b. $-\pi \leq x \leq 0, \quad y = 0$
   c. $0 \leq x \leq \pi, \quad y = 0$
   d. $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, y = 0$

2. Tentukan bayangan, dibawah $w = \sin z$, persegi panjang pada gambar berikut, dengan menentukan secara tepat bayangan ke enam titik A, B, C, D, E, F



Daftar Pustaka

Freitag, Eberhard dan Busam, Rolf. *Complex Analysis*. Heidelberg: Springer, 2005.

Paliouras. John D, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Jakarta: Erlangga, 1987.

Saff, E.B and A.D Snider. *Fundamentals of complex Analysis with Apllication to Engineering and Science*, New Jersey: Pearson Education Inc, 2003

Wegener, Ingo. *Complexity Theory Exploring the Limits of Efficient Algorithms*. Berlin: Springer, 2005

Paket 12
TRANSFORMASI KONFORMAL

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket keduabelas ini difokuskan transformasi konformal. Konsep umum keserupaan melingkupi topik-topik yang beraneka ragam, yang langsung atau tidak langsung berhubungan dengan mata rantai yang paling penting antara teori dan terapan. Oleh karena itu pemahaman terhadap materi ini penting untuk ditekankan sebagai prasyarat untuk mempelajari paket-paket selanjutnya.

Pada awal Paket 12 ini, mahasiswa diajak membuktikan teorema. Selanjutnya membuktikan akibat teorema yang telah dibuktikan sebelumnya. Setelah mengetahui akibat teorema mahasiswa membuat kesimpulan tentang transformasi konformal.

Proses perkuliahan didesain dengan model kooperatif agar setiap mahasiswa dalam kelompok termotivasi untuk terlibat secara aktif dalam perkuliahan. Lembar kegiatan yang digunakan terdapat beberapa permasalahan yang dikerjakan secara individu, kemudian didiskusikan secara berpasangan, kemudian dipresentasikan di depan kelas. Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan laptop sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat mengefektifkan perkuliahan, serta kertas plano, spidol dan solasi sebagai alat menuangkan hasil diskusi kelompok. Langkah tersebut diupayakan untuk menggali ide-ide dan potensi kreatif mahasiswa-mahasiswi dalam menjalin komunikasi sosial yang lebih efektif. Dari sini, peta pengetahuan dan keterampilan sosial mereka akan diketahui untuk kemudian dilakukan diskusi dan simulasi perkuliahan. Penggunaaan multi media dalam perkuliahan juga diharapkan untuk mengoptimalisasi pencapaian kompetensi dasar dan indikator yang telah ditargetkan.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Menjelaskan kembali fungsi elementer beserta sifat operasinya.

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa-mahasiswi diharapkan mampu:

1. Menuliskan kembali macam fungsi elementer
2. Mengoperasikan fungsi-fungsi elementer
3. Menggunakan Transformasi Kompleks

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

Materi pada paket ini meliputi:

1. Transformasi konformal

Langkah-langkah Perkuliahan

Kegiatan Awal (35 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Apersepsi transformasi konformal
4. Memotivasi mahasiswa bahwa materi yang akan dipelajari sangat bermanfaat untuk mempelajari materi berikutnya

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Dosen menjelaskan beberapa konsep penting yang diperlukan dalam menyelesaikan LK. Mahasiswa menyimak penjelasan dosen dengan bantuan uraian materi pada paket 12.
2. Dosen membagi meminta mahasiswa berkumpul dengan kelompoknya untuk mendiskusikan bagaimana konsep pemetaan dan transformasi pada fungsi kompleks sesuai dengan langkah-langkah yang ada di LK.
3. Dosen membimbing mahasiswa selama proses diskusi. Mahasiswa berdiskusi dengan anggotanya dan bertanya pada dosen jika ada materi

yang tidak dipahami. Masing-masing pasangan harus benar-benar memahami keseluruhan hasil diskusi karena perwakilan pasangan akan presentasi di depan kelas dipihak secara acak.

4. Dosen memanggil anggota dengan no.urut tertentu pada salah satu kelompok untuk mempresentasikan hasil diskusinya.
5. Selesai presentasi, kelompok lain memberikan klarifikasi
6. Penguatan hasil diskusi dari dosen
7. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

Kegiatan Penutup (10 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.

Lembar Kegiatan Mahasiswa

Membuktikan teorema pemetaan serupa dan akibat teorema

Tujuan

Mahasiswa dapat memahami konsep pemetaan konformal dari teorema dan akibat teorema yang diberikan

Bahan dan alat

Lembar kegiatan, kertas HVS, Kertas Plano, Spidol

Langkah-langkah kegiatan

1. Masing kelompok mendapatkan tugas untuk membuktikan teorema dan akibat teorema
   a. Teorema
      Andaikan bahwa $f(z)$ analitik pada z_0 dan bahwa $f'(z_0) \neq 0$. Misalkan A adalah suatu kurva mulus melewati z_0 dan

misalkan A' menunjukkan bayangan A dibawah f. Maka, jika sudut inklinasi A pada z_0 adalah α, maka sudut inklinasi A' pada $f(z_0)$ adalah $\alpha + \arg f'(z_0)$

b. Akibat Teorema

Andaikan bahwa $f(z)$ analitik pada z_0 dan bahwa $f'(z_0) \neq 0$. Misalkan A dan B adalah dua kurva mulus yang berpotongan pada z_0 dan membentuk sudut θ diukur dari A ke B

Maka, bayangannya, A' dan B', dibawah f membentuk sudut yang diukur dari A' ke B' sebesar θ. Secara singkat, dibawah f, sudut perpotongan antara A dan B adalah tetap tak berubah dalam besar dan arah.

2. Secara berkelompok mendiskusikan permasalahan yang diberikan.
3. Kelompok yang mendapatkan giliran mempresentasikan hasil diskusinya didepan kelas.

Uraian Materi

TRANSFORMASI KONFORMAL

Transformasi konformal

Konsep pemetaan konformal dapat dipikirkan sebagai interpretasi geometrik pada analitisitas. Aspek geometrik utama pada keserupaan ialah kesamaan sudut dalam besar dan arahnya.

Misalkan fungsi $w = f(z)$ analitik pada titik z_0 dan andaikan bahwa $f'(z) \neq 0$, maka menurut definisi f analitik pada suatu lingkungan z_0 misalkan N. Pengembangan berikut berlaku didalam N.

Andaikan suatu kurva mulus (yaitu kurva yang dapat dinyatakan secara parametrik oleh dua fungsi yang dapat dideferensialkan $x = \emptyset(t), y = \varphi(t)$ pada interval $\alpha \leq t \leq \beta$) A melewati z_0 dan bahwa suatu titik berubah-ubah z mendekati z_0 sepanjang A. Dibawah f, A mempunyai bayangan A' pada bidang w, dan karena z mendekati z_0 sepanjang A, $w = f(z)$ mendekati $w_0 = f(z_0)$ sepanjang A'. Maka karena $f'(z_0)$ ada, diketahui bahwa

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0}$$

Yang dapat diungkapkan dengan

$$untuk\ z \to z_0, \qquad \frac{w - w_0}{z - z_0} \to f'(z_0)$$

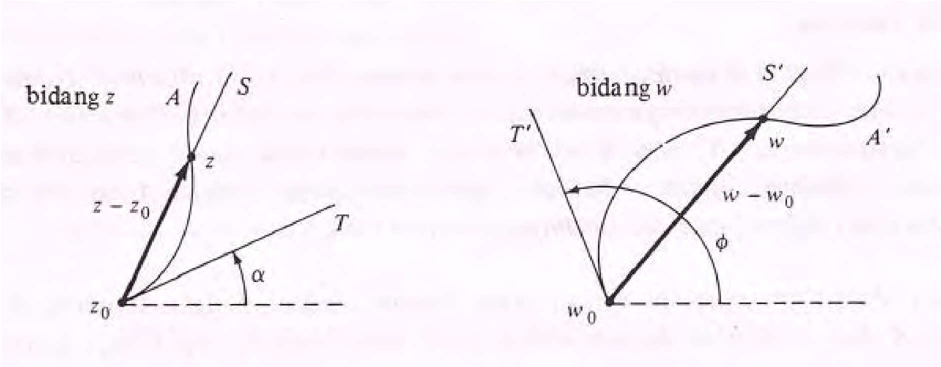
artinya

$$\arg \frac{w - w_0}{z - z_0} \to \arg f'(z_0)$$

Implikasinya

$$[\arg(w - w_0) - \arg(z - z_0)] \to \arg f'(z_0)$$

Hubungan terakhir ini berlaku bagi kelipatan 2π



Gambar 12.1
Pemetaan $\emptyset = \alpha + \arg f'\,(z_0)$

Dari gambar 12.1 diatas[1]. Jika $z \to z_0$, garis sekan S menuju T, yang merupakan garis singgung A pada z_0, yang kehadirannya dijamin oleh definisi kurva mulus. Dengan melambangkan sudut inklinasi T dengan α, terlihat bahwa

$$jika\; z \to z_0, \qquad \arg(z - z_0) \to \alpha$$

Sedangkan pada bidang w

$$jika\; z \to z_0, \qquad w \to w_0$$

Maka garis sekan S' menuju T', yang merupakan garis singgung A' pada w_0. Dengan melambangkan sudut inklinasi T' dengan $\emptyset$ terlihat bahwa

$$jika\; z \to z_0, \qquad \arg(\mathrm{w} - \mathrm{w}_0) \to \emptyset$$

Sehingga dengan menggabungkan persamaan-persamaan diatas diperoleh

$$jika\; z \to z_0, \qquad (\emptyset - \alpha) \to \arg f'(z_0)$$

Dengan menggunakan limitnya diperoleh

$$\emptyset = \alpha + \arg f'(z_0)$$

Teorema

Andaikan bahwa $f(z)$ analitik pada z_0 dan bahwa $f'(z_0) \neq 0$. Misalkan A adalah suatu kurva mulus melewati z_0 dan misalkan A' menunjukkan bayangan A dibawah f. Maka, jika sudut inklinasi A pada z_0 adalah α, maka sudut inklinasi A' pada $f(z_0)$ adalah $\alpha + \arg f'(z_0)$

[1] John D. Paliouras, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur* (Jakarta: Erlangga, 1987), 117

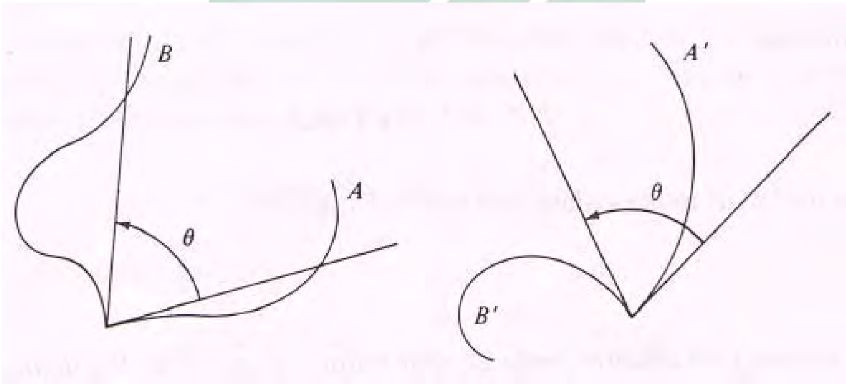
Dengan istilah yang berbeda, teorema diatas mengatakan bahwa setiap kurva mulus yang melewati z_0 diputar dengan sudut samadengan $\arg f'(z_0)$. Akibat dari teorema ini adalah sudut antara dua kurva mulus sebarang yang berpotongan pada z_0 akan tetap dalam besar dan arahnya oleh suatu pemetaan f yang analitik pada z_0 dan yang turunannya tidak nol pada titik itu. Hal inilah yang dimaksud dengan kesamaan sudut yang ditunjukkan di awal, dan suatu fungsi yang memiliki sifat ini dinamakan transformasi serupa atau pemetaan serupa.

Akibat Teorema

Andaikan bahwa $f(z)$ analitik pada z_0 dan bahwa $f'(z_0) \neq 0$. Misalkan A dan B adalah dua kurva mulus yang berpotongan pada z_0 dan membentuk sudut θ diukur dari A ke B

Maka, bayangannya, A' dan B', dibawah f membentuk sudut yang diukur dari A' ke B' sebesar θ. Secara singkat, dibawah f, sudut perpotongan antara A dan B adalah tetap tak berubah dalam besar dan arah.

Akibat teorema ini terlihat jelas pada gambar 12.2 berikut:



Gambar 12.2

Pemetaan Serupa

Aspek geometrik pemetaan serupa bisa dilihat dari fungsi

$$z \to z_0, \qquad \frac{w - w_0}{z - z_0} \to f'(z_0)$$

Artinya

$$z \to z_0, \qquad |w - w_0| \to f'(z_0)|z - z_0|$$

Hal ini berarti, dalam limit $|w - w_0|$ merupakan kelipatan konstan $|z - z_0|$, dimana konstanta tersebut adalah bilangan nyata positif $|f'(z_0)|$. Konstanta kesebandingan $|f'(z_0)|$ dinamakan rasio pembesaran pada z_0. Jadi setiap panjang dalam lingkungan z_0 yang kecil diperbesar dengan faktor positif yang sama. Akhirnya f dikatakan sebagai pemetaan yang memelihara skala pada z_0 dalam pengertian infinitsimal.

Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. $\sin z$ dapat diuraikan menjadi
2. Aspek geometrik utama pada keserupaan ialah kesamaan sudut dalam besar dan arahnya.

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Gunakan fungsi $w = z^2$ titik z_0 yang sesuai dan pilih dua kurva sebarang untuk menggambarkan bahwa jika syarat $f'(z_0) \neq 0$ tidak terpenuhi, maka keserupaan tidak terjadi
2. Buktikan bahwa pemetaan linear $w = az + b, a \neq 0$ memutar setiap kurva pada bidang datar dengan sudut sama dengan $\arg a$

Daftar Pustaka

Freitag, Eberhard dan Busam, Rolf. *Complex Analysis*. Heidelberg: Springer, 2005.

Paliouras. John D, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Jakarta: Erlangga, 1987.

Saff, E.B and A.D Snider. *Fundamentals of complex Analysis with Apllication to Engineering and Science*, New Jersey: Pearson Education Inc, 2003

Paket 13
DERET FUNGSI KOMPLEKS

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket ketigabelas ini difokuskan pada deret fungsi kompleks. Seperti halnya dalam bilangan riil, dalam bilangan kompleks juga dikenal istilah barisan dan deret kompleks serta sifat-sifat kekonvergenannya. Hal penting dalam bab ini yaitu setiap fungsi analitik dapat disajikan dalam deret pangkat (deret Taylor, deret MacLaurin atau deret Laurent). Oleh karena itu pemahaman terhadap materi ini penting untuk ditekankan sebagai prasyarat untuk mempelajari paket-paket selanjutnya.

Pada awal Paket 13 ini, mahasiswa diajak mengenal kembali barisan dan deret. Selanjutnya dibahas tentang deret pangkat, jari-jari kekonvergenan.. Setelah itu mahasiswa diajak untuk menyajikan fungsi-fungsi analitik dalam deret pangkat.

Proses perkuliahan didesain dengan model kooperatif agar setiap mahasiswa dalam kelompok termotivasi untuk terlibat secara aktif dalam perkuliahan. Lembar kegiatan yang digunakan terdapat beberapa permasalahan yang dikerjakan secara individu, kemudian didiskusikan secara berpasangan, kemudian dipresentasikan di depan kelas. Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan laptop sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat mengefektifkan perkuliahan, serta kertas plano, spidol dan solasi sebagai alat menuangkan hasil diskusi kelompok. Langkah tersebut diupayakan untuk menggali ide-ide dan potensi kreatif mahasiswa-mahasiswi dalam menjalin komunikasi sosial yang lebih efektif. Dari sini, peta pengetahuan dan keterampilan sosial mereka akan diketahui untuk kemudian dilakukan diskusi dan simulasi perkuliahan. Penggunaaan multi media dalam perkuliahan juga diharapkan untuk mengoptimalisasi pencapaian kompetensi dasar dan indikator yang telah ditargetkan.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Menyajikan Fungsi Analitik dalam Deret

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa-mahasiswi diharapkan mampu:

1. Mengerti definisi barisan dan deret pangkat beserta sifat kekonvergenannya.
2. Menyajikan fungsi analitik dalam deret Taylor, deret MacLaurin atau deret Laurent.

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

Materi pada paket ini meliputi:

1. Barisan
2. Deret
3. Konvergen
4. Deret Taylor
5. Deret Maclaurin
6. Deret Laurent

Langkah-langkah Perkuliahan

Kegiatan Awal (35 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Apersepsi transformasi konformal
4. Memotivasi mahasiswa bahwa materi yang akan dipelajari sangat bermanfaat untuk mempelajari materi berikutnya

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Dosen menjelaskan beberapa konsep penting yang diperlukan dalam menyelesaikan LK. Mahasiswa menyimak penjelasan dosen dengan bantuan uraian materi pada paket 13.
2. Dosen membagi meminta mahasiswa berkumpul dengan kelompoknya untuk mendiskusikan bagaimana konsep pemetaan dan transformasi pada fungsi kompleks sesuai dengan langkah-langkah yang ada di LK.
3. Dosen membimbing mahasiswa selama proses diskusi. Mahasiswa berdiskusi dengan anggotanya dan bertanya pada dosen jika ada materi yang tidak dipahami. Masing-masing pasangan harus benar-benar memahami keseluruhan hasil diskusi karena perwakilan pasangan akan presentasi di depan kelas dipihak secara acak.
4. Dosen memanggil anggota dengan no.urut tertentu pada salah satu kelompok untuk mempresentasikan hasil diskusinya.
5. Selesai presentasi, kelompok lain memberikan klarifikasi
6. Penguatan hasil diskusi dari dosen
7. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

Kegiatan Penutup (10 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.

Lembar Kegiatan Mahasiswa

Membuktikan teorema pemetaan serupa dan akibat teorema

Tujuan

Mahasiswa dapat memahami konsep pemetaan konformal dari teorema dan akibat teorema yang diberikan

Bahan dan alat

Lembar kegiatan, kertas HVS, Kertas Plano, Spidol

Langkah-langkah kegiatan

1. Masing kelompok mendapatkan tugas untuk menentukan deret MacLaurin dan deret Laurent dari
   a. $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$
   b. $f(z) = \dfrac{4}{1-z^4}$
   c. $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$
2. Secara berkelompok mendiskusikan permasalahan yang diberikan.
3. Kelompok yang mendapatkan giliran mempresentasikan hasil diskusinya didepan kelas.

Uraian Materi

DERET FUNGSI KOMPLEKS

Barisan dan Deret Bilangan Kompleks

Barisan bilangan kompleks merupakan fungsi yang memetakan setiap bilangan bulat positif n dengan suatu bilangan kompleks. Notasi barisan bilangan kompleks :

$$\langle z_n \rangle \text{ atau } \{z_n\} = \{z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n\},\ n \geq 1.$$

Barisan $\langle z_n \rangle$ konvergen jika ada $z \in C$ sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. Jika $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N$ sehingga $|z_n - z| < \varepsilon$ untuk $n \geq n_0$.

Seperti halnya dalam barisan bilangan riil, pada bilangan kompleks berlaku beberapa teorema berikut.

Teorema 13.1

Jika $z_n = x_n + i\,y_n$ dengan $x_n \in \Re$ dan $y_n \in \Re$, maka $\langle z_n \rangle$ konvergen ke $z = a + i\,b$ jika dan hanya jika $\langle x_n \rangle$ konvergen ke a dan $\langle y_n \rangle$ konvergen ke b.

Teorem 13.2

Jika $\langle z_n \rangle$ dan $\langle w_n \rangle$ berturut-turut konvergen ke z dan w, dan c konstanta kompleks, maka

1. $\langle z_n + w_n \rangle$ konvergen ke $z + w$.
2. $\langle c\,z_n \rangle$ konvergen ke $c\,z$.
3. $\langle z_n\, w_n \rangle$ konvergen ke $z\,w$.

4. $\left\langle \dfrac{1}{z_n} \right\rangle$ konvergen ke $\dfrac{1}{z}$ asalkan $z_n \neq 0$ dan $z \neq 0$ untuk setiap n.

Diberikan deret bilangan kompleks $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ dengan suku-suku deret yaitu $z_1, z_2, z_3, \ldots$. Misalkan,

$S_1 = z_1$ merupakan jumlah suku pertama

$S_2 = z_1 + z_2$ merupakan jumlah dua suku pertama

$S_3 = z_1 + z_2 + z_3$ merupakan jumlah tiga suku pertama

$\vdots$

$S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ merupakan jumlah n suku pertama

Bilangan S menyatakan jumlah deret di atas apabila $\lim_{n \to \infty} S_n = S$. Jadi deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen ke S jika dan hanya jika $\lim_{n \to \infty} S_n = S$, dan ditulis $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$.

Teorema 13.3

Diberikan deret bilangan kompleks $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ dengan $z_n = x_n + i\, y_n$, x_n dan y_n bilangan riil, maka berlaku sifat-sifat berikut :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergen.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen $\Rightarrow$ $\lim_{n \to \infty} z_n = 0$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen $\Rightarrow$ terdapat bilangan riil M sehingga $|z_n| \leq M, \forall n \in N$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergen $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen .

Seperti dalam deret bilangan riil, kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ dapat diuji dengan beberapa uji kekonvergenan berikut.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

   $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ divergen.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergen $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen mutlak.

   $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen dan $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ divergen $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen bersyarat.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen mutlak $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen.

4. Uji Banding

   $z_n \leq b_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen.

   $a_n \leq z_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ divergen.

5. Ratio Test

$$\lim_{n \leftarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} L < 1, \ \sum_{n=1}^{\infty} z_n \ \ konvergen \ \ mutlak \\ L > 1, \ \sum_{n=1}^{\infty} z_n \ \ divergen \\ L = 1, \ \ uji \ \ gagal \end{cases}$$

6. Root Test

$$\lim_{n \leftarrow \infty} \sqrt[n]{|\, z_n \,|} = L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} L < 1, \ \sum_{n=1}^{\infty} z_n \ \ konvergen \ \ mutlak \\ L > 1, \ \sum_{n=1}^{\infty} z_n \ \ divergen \\ L = 1, \ \ uji \ \ gagal \end{cases}$$

7. Deret Geometri

Bentuk umum : $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots$

Jika $|\, q \,| < 1$ maka deret konvergen.

Jika $|\, q \,| \geq 1$ maka deret divergen.

8. Deret p

Bentuk umum : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$

Jika $p < 1$ maka deret konvergen.

Jika $p \leq 1$ maka deret divergen.

Deret Pangkat

Deret pangkat dalam $z - z_0$ berbentuk :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots$$

dengan z bilangan kompleks, z_0 bilangan kompleks sebarang yang disebut pusat deret, $a_0, a_1, a_2, \ldots$ konstanta kompleks yang disebut koefisien deret.

Apabila $z_0 = 0$ diperoleh bentuk khusus dari suatu deret pangkat dalam z yaitu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

Untuk setiap deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ terdapat bilangan tunggal ρ dengan $0 \leq \rho \leq \infty$ yang dinamakan jari-jari kekonvergenan deret. Sedangkan $|z - z_0| = \rho$ disebut lingkaran kekonvergenan deret.

Teorema 13.4

Misal diberikan deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \rho$, dengan $0 \leq \rho \leq \infty$ maka ρ adalah jari-jari kekonvergenan.

Teorema 13.5

Misal diberikan deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|^{1/n}} = \rho$, dengan $0 \leq \rho \leq \infty$ maka ρ adalah jari-jari kekonvergenan.

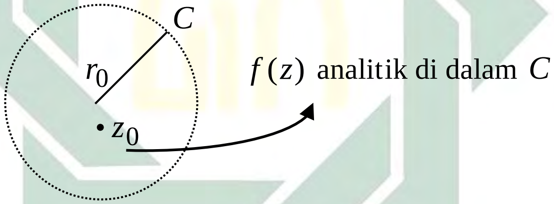
Sifat jari-jari kekonvergenan deret pangkat.

1. Jika $\rho = 0$ maka deret konvergen hanya di $z = z_0$ (pusat deret).
2. Jika $0 < \rho < \infty$ maka deret konvergen mutlak (atau konvergen) untuk setiap z dengan $|z - z_0| < \rho$ dan deret divergen untuk setiap z dengan $|z - z_0| > \rho$.

3. Jika $\rho = \infty$ maka deret konvergen mutlak (atau konvergen) untuk setiap z dengan $\left| z - z_0 \right| < \infty$.

Deret Taylor dan Maclaurin

Suatu fungsi $f(z)$ tidak dapat direpresentasikan dalam dua deret pangkat dengan pusat deret yang sama. Apabila $f(z)$ dapat dinyatakan dalam deret pangkat dengan pusat z_0, maka deret tersebut tunggal. Setiap fungsi analitik dapat disajikan dalam deret pangkat. Apabila $f(z)$ analitik di dalam lingkaran C maka $f(z)$ dapat disajikan dalam deret Taylor atau deret MacLaurin bergantung pada pusat deretnya.



Gambar 13.1

Lingkaran C dengan pusat deret z_0

Jika $f(z)$ analitik di dalam lingkaran C yang berpusat di z_0 dan berjari-jari r_0 (lihat Gambar 5.1), maka untuk setiap titik z di dalam C berlaku

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n . \qquad (13.1)$$

Persamaaan diatas disebut deret Taylor dari $f(z)$ di sekitar titik z_0

Jika pada persamaan (13.1), $z_0 = 0$ maka untuk setiap titik z di dalam C berlaku

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n . \qquad (13.2)$$

Persamaan ini disebut deret MacLaurin dari $f(z)$.

Deret Laurent

Apabila $f(z)$ tidak analitik di z_0, tetapi $f(z)$ analitik untuk setiap z di dalam annulus $R_2 < \left| z - z_0 \right| < R_1$, maka $f(z)$ dapat diekspansi dalam deret Laurent.

Jika $f(z)$ analitik di dalam annulus $R_1 < \left| z - z_0 \right| < R_2$, dan C sebarang lintasan tertutup sederhana di dalam annulus $R_1 < \left| z - z_0 \right| < R_2$ yang mengelilingi z_0, maka untuk setiap z di dalam $R_1 < \left| z - z_0 \right| < R_2$, $f(z)$ dapat dinyatakan sebagai

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \tag{13.3}$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \quad , \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}}\, dz \quad , \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Persamaan (5.2) sering ditulis dengan

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{13.4}$$

dengan $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \quad , \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Ruas kanan persamaan (13.3) dan (13.4) disebut deret Laurent $f(z)$ dalam annulus $R_1 < \left| z - z_0 \right| < R_2$.

Apabila $f(z)$ analitik untuk $\left| z - z_0 \right| < R_2$, maka

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz = \frac{f^{n}(z_0)}{n!} \text{ dan } b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}}\, dz = 0,$$

sehingga persamaan (13.3) menjadi deret Taylor $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

Jadi deret Taylor merupakan kejadian khusus dari deret Laurent.

Contoh 13.1

Tentukan deret MacLaurin dan deret Laurent dari

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

Penyelesaian :

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{(z-2)}$$

Titik singular $f(z)$ yaitu $z=1$ dan $z=2$.

Dibuat annulus $1<|z|<2$, sehingga dapat diperoleh deret MacLaurin untuk $|z|<1$ dan deret Laurent untuk $1<|z|<2$ dan $|z|>2$.

a. Deret MacLaurin untuk $|z|<1$. $f(z)$ analitik untuk $|z|<1$, sehingga

$$f(z)=-\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{(z-2)}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-{z}/{2}}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \qquad , \quad |z|<1$$

b. Deret Laurent untuk $1<|z|<2$. $f(z)$ analitik untuk $1<|z|<2$.

$$f(z)=-\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{(z-2)}.$$

$$-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right]=-\frac{1}{z}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n}\right] \quad , \quad \left|\frac{1}{z}\right|<1$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} \quad , \quad 1<|z|$$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right]=-\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}\right] \quad , \quad \left|\frac{z}{2}\right|<1$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n+1}} \quad , \quad |z|<2$$

Jadi,

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{(z-2)}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n+1}} \quad , \quad 1<|z|<2.$$

c. Deret Laurent untuk $|z|>2$. $f(z)$ analitik untuk $|z|>2$.

$$f(z)=-\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{(z-2)}.$$

$$-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right]=-\frac{1}{z}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n}\right] \quad , \quad \left|\frac{1}{z}\right|<1$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} \quad , \quad |z|>1$$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z}\left[\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right]=-\frac{1}{z}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^{n}\right] \quad , \quad \left|\frac{2}{z}\right|<1$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n}}{z^{n+1}} \quad , \quad |z|>2$$

Jadi,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} \qquad , \quad |z| > 2.$$

Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Setiap fungsi analitik dapat disajikan dalam deret pangkat (deret Taylor, deret MacLaurin atau deret Laurent) bergantung pada pusat deretnya.
2. Apabila $f(z)$ tidak analitik di z_0, tetapi $f(z)$ analitik untuk setiap z di dalam annulus $R_2 < |z - z_0| < R_1$, maka $f(z)$ dapat diekspansi dalam deret Laurent.

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Tentukan jari-jari kekonvergenan deret

   a. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + n}{n^2 - 1} \right) (z+i)^n$ b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

2. Tentukan deret Taylor dari fungsi berikut dengan pusat deret z_0.

   a. $f(z) = \frac{1}{z+2}$, $z_0 = 1 + i$

   b. $f(z) = \frac{1}{z}$, $z_0 = 2 + 3i$

   c. $f(z) = \frac{1}{4 - 3z}$, $z_0 = 1 + i$

3. Ekspansikan fungsi berikut dalam deret Laurent dengan pusat deret di z_0.

   a. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$, $z_0 = i$

   b. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 (1+z)^2}$, $z_0 = 0$

   c. $f(z) = \dfrac{z+1+i}{(z+i)^2}$, $z_0 = -i$

Daftar Pustaka

Freitag, Eberhard dan Busam, Rolf. *Complex Analysis*. Heidelberg: Springer, 2005.

Paliouras. John D, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Jakarta: Erlangga, 1987.

Saff, E.B and A.D Snider. *Fundamentals of complex Analysis with Apllication to Engineering and Science*, New Jersey: Pearson Education Inc, 2003

Wegener, Ingo. *Complexity Theory Exploring the Limits of Efficient Algorithms*. Berlin: Springer, 2005

Paket 14
INTEGRAL FUNGSI KOMPLEKS

Pendahuluan

Perkuliahan pada paket keempatbelas ini difokuskan pada integral fungsi kompleks. Seperti halnya dalam fungsi riil, dalam fungsi kompleks juga dikenal istilah integral fungsi kompleks serta sifat-sifatnya. Sifat keanalitikan suatu fungsi dalam suatu lintasan tertutup penting dalam perhitungan integral. Oleh karena itu pemahaman terhadap materi ini penting untuk ditekankan sebagai bekal untuk mempelajari ilmu-ilmu terapan.

Pada awal Paket 14 ini, mahasiswa diajak mengenal kembali lintasan kurva mulus. Selanjutnya dibahas tentang integral garis, integral lintasan. Setelah itu mahasiswa diajak untuk mengeksplor lebih jauh lagi yaitu tentang integral Cauchy dan modulus maksimum.

Proses perkuliahan didesain dengan model kooperatif agar setiap mahasiswa dalam kelompok termotivasi untuk terlibat secara aktif dalam perkuliahan. Lembar kegiatan yang digunakan terdapat beberapa permasalahan yang dikerjakan secara individu, kemudian didiskusikan secara berpasangan, kemudian dipresentasikan di depan kelas. Penyiapan media pembelajaran dalam perkuliahan ini sangat penting. Perkuliahan ini memerlukan media pembelajaran berupa LCD dan laptop sebagai salah satu media pembelajaran yang dapat mengefektifkan perkuliahan, serta kertas plano, spidol dan solasi sebagai alat menuangkan hasil diskusi kelompok. Langkah tersebut diupayakan untuk menggali ide-ide dan potensi kreatif mahasiswa-mahasiswi dalam menjalin komunikasi sosial yang lebih efektif. Dari sini, peta pengetahuan dan keterampilan sosial mereka akan diketahui untuk kemudian dilakukan diskusi dan simulasi perkuliahan. Penggunaaan multi media dalam perkuliahan juga diharapkan untuk mengoptimalisasi pencapaian kompetensi dasar dan indikator yang telah ditargetkan.

Rencana Pelaksanaan Perkuliahan

Kompetensi Dasar

Menjelaskan konsep integral fungsi kompleks

Indikator

Pada akhir perkuliahan mahasiswa-mahasiswi diharapkan mampu:

1. Menghitung integral fungsi kompleks

Waktu

3x50 menit

Materi Pokok

Materi pada paket ini meliputi:

1. Kurva Mulus
2. Lintasan
3. Integral Cauchy
4. Modulus Maksimum
5. Integral fungsi kompleks

Langkah-langkah Perkuliahan

Kegiatan Awal (35 menit)

1. Menjelaskan kompetensi dasar
2. Menjelaskan indikator
3. Apersepsi transformasi integral
4. Memotivasi mahasiswa bahwa materi yang akan dipelajari merupakan materi terakhir dan merupakan materi yang akan berguna untuk studi lanjut

Kegiatan Inti (100 menit)

1. Dosen menjelaskan beberapa konsep penting yang diperlukan dalam menyelesaikan LK. Mahasiswa menyimak penjelasan dosen dengan bantuan uraian materi pada paket 14.

2. Dosen membagi meminta mahasiswa berkumpul dengan kelompoknya untuk mendiskusikan bagaimana konsep pemetaan dan transformasi pada fungsi kompleks sesuai dengan langkah-langkah yang ada di LK.
3. Dosen membimbing mahasiswa selama proses diskusi. Mahasiswa berdiskusi dengan anggotanya dan bertanya pada dosen jika ada materi yang tidak dipahami. Masing-masing pasangan harus benar-benar memahami keseluruhan hasil diskusi karena perwakilan pasangan akan presentasi di depan kelas dipihak secara acak.
4. Dosen memanggil anggota dengan no.urut tertentu pada salah satu kelompok untuk mempresentasikan hasil diskusinya.
5. Selesai presentasi, kelompok lain memberikan klarifikasi
6. Penguatan hasil diskusi dari dosen
7. Dosen memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk menanyakan sesuatu yang belum paham atau menyampaikan konfirmasi

Kegiatan Penutup (10 menit)

1. Menyimpulkan hasil perkuliahan
2. Memberi dorongan psikologis/saran/nasehat
3. Refleksi hasil perkuliahan oleh mahasiswa

Kegiatan Tindak Lanjut (5 menit)

1. Memberi tugas latihan
2. Mempersiapkan perkuliahan selanjutnya.

Lembar Kegiatan Mahasiswa

Membuktikan teorema pemetaan serupa dan akibat teorema

Tujuan

Mahasiswa dapat memahami konsep pemetaan konformal dari teorema dan akibat teorema yang diberikan

Bahan dan alat

Lembar kegiatan, kertas HVS, Kertas Plano, Spidol

Langkah-langkah kegiatan

1. Masing kelompok mendapatkan tugas untuk mengeksplorasi teorema-teorema dalam integral kompleks dan contohnya
    a. Teorema 14.4
    b. Teorema 14.5
    c. Teorema 14.6
    d. Teorema 14.7
    e. Teorema 14.8
    f. Teorema 14.9
2. Secara berkelompok mendiskusikan permasalahan yang diberikan.
3. Kelompok yang mendapatkan giliran mempresentasikan hasil diskusinya didepan kelas.

Uraian Materi

INTEGRAL FUNGSI KOMPLEKS

Fungsi kompleks dari variabel riil

Misalkan $F(t)$ adalah fungsi kompleks dari variabel riil t, ditulis sebagai $F(t) = u(t) + i\ v(t)$ dengan $u(t)$ dan $v(t)$ adalah fungsi riil. Jika $u(t)$ dan $v(t)$ kontinu pada interval tertutup $a \leq t \leq b$, maka

$$\int_a^b F(t)\ dt = \int_a^b u(t)\ dt + i \int_a^b v(t)\ dt .$$

Sifat-sifat integral fungsi kompleks sebagai berikut:

1. $\mathrm{Re}\left(\int_a^b F(t)\,dt \right) = \int_a^b \mathrm{Re}\big(F(t)\big)\ dt$
2. $\mathrm{Im}\left(\int_a^b F(t)\,dt \right) = \int_a^b \mathrm{Im}\big(F(t)\big)\ dt$
3. $\int_a^b k\,F(t)\ dt = k \int_a^b F(t)\ dt$
4. $\int_a^b F(t)\ dt = -\int_b^a F(t)\ dt$
5. $\left| \int_a^b F(t)\ dt \right| = \int_a^b \left| F(t) \right|\ dt$

Lintasan

Jika g dan h fungsi bernilai riil dan kontinu dari variabel t dalam interval tertutup $a \leq t \leq b$, maka himpunan titik-titik di bidang xy dapat dinyatakan dalam bentuk parametrik $x = g(t)$, $y = h(t)$, $a \leq t \leq b$. Oleh karena itu, himpunan titik-titik dalam bidang kompleks juga dapat dinyatakan dalam bentuk parametrik.

Definisi 14.1

Kurva di bidang datar merupakan kurva mulus (*smooth curve*) jika dan hanya jika kurva tersebut dapat dinyakan dengan dua fungsi bernilai riil

$$x = g(t)\ ,\ y = h(t),\ \ \alpha \le t \le \beta$$

sedemikian sehingga $\dfrac{dx}{dt} = g'(t)$ dan $\dfrac{dy}{dt} = h'(t)$ ada dan kontinu dalam interval $\alpha \le t \le \beta$.

Kurva dengan bentuk parametrik $x = 2\cos t\ ,\ y = 2\sin t,\ \ 0 \le t \le \dfrac{3\pi}{2}$ merupakan contoh kurva mulus.

Jika C merupakan kurva mulus dengan bentuk parametrik :

$$x = g(t)\ ,\ y = h(t),\ \ \alpha \le t \le \beta$$

maka

- titik pada C yang berpadanan dengan $t = \alpha$ disebut titik awal C.
- titik pada C yang berpadanan dengan $t = \beta$ disebut titik akhir C.

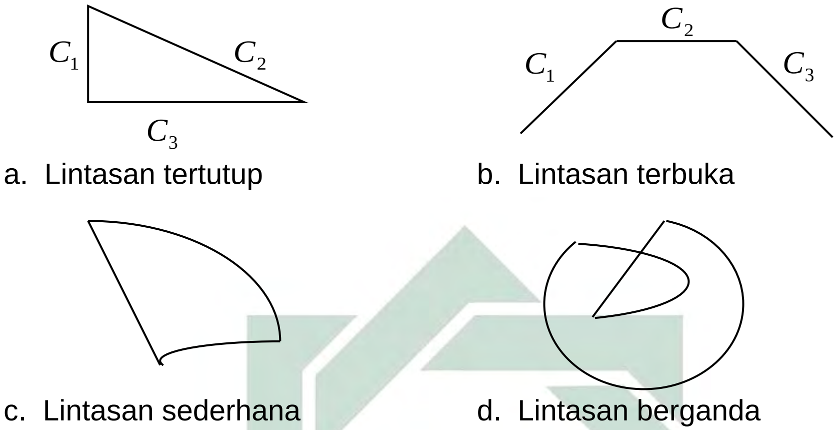
Selanjutnya, C disebut lintasan (*path*) bila C terdiri dari berhingga banyak kurva mulus,

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

dengan $C_1, C_2, \ldots, C_n$ merupakan kurva mulus. Pengertian lintasan ini sangat penting dalam integral fungsi kompleks karena berperan sebagai selang pengintegralan dalam integral fungsi riil dari satu variabel.

Catatan :

1. C disebut lintasan tertutup jika titik akhir C berhimpit dengan titik awal C.
2. C disebut lintasan terbuka jika titik akhir C tidak berhimpit dengan titik awal C.
3. C disebut lintasan sederhana jika lintasan tidak memotong dirinya sendiri.
4. C disebut lintasan berganda jika lintasan memotong dirinya sendiri.



Gambar 14.1
Contoh Lintasan

Teorema 14.1

Jika C lintasan tertutup sederhana di bidang datar, maka bidang datar itu dibagi oleh C menjadi 3 bagian, yaitu

1. Kurva C.
2. Bagian dalam C, ditulis $Int(C)$, yang merupakan himpunan terbuka dan terbatas.
3. Bagian luar C, ditulis $Ext(C)$, yang merupakan himpunan terbuka dan tidak terbatas.

Kurva C merupakan batas dari himpunan $Int(C)$ dan $Ext(C)$.

Integral Garis

Misalkan kurva mulus C disajikan dengan $x = g(t)$, $y = h(t)$, $a \leq t \leq b$. $g(t)$ dan $h(t)$ kontinu di $a \leq t \leq b$. $g'(t)$ dan $h'(t)$ kontinu di $a \leq t \leq b$. Kurva C mempunyai arah dari titik awal $A(g(a), h(a))$ ke titik akhir $B(g(b), h(b))$ dan $P(x, y)$ suatu fungsi yang terdefinisi di C.

Teorema 14.2

1. Jika $P(x, y)$ kontinu di C, maka $\int_C P(x, y)\,dx$ dan $\int_C P(x, y)\,dy$ ada dan

$$\int_C P(x,y)\,dx = \int_a^b P[g(t),h(t)]\,g'(t)\,dt$$

$$\int_C P(x,y)\,dy = \int_a^b P[g(t),h(t)]\,h'(t)\,dt$$

2. $\int_A^B P(x,y)\,dx = -\int_B^A P(x,y)\,dx$

3. Jika $P(x,y)$ dan $Q(x,y)$ kontinu di C, maka

$$\int_C P(x,y)\,dx + \int_C Q(x,y)\,dx = \int_C \{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dx\}.$$

Teorema 14.3

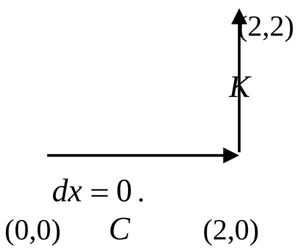
Jika $P(x,y)$ dan $Q(x,y)$ serta turunan parsial tingkat pertama kontinu pada seluruh daerah tertutup R yang dibatasi lintasan tertutup C, maka

$$\oint_C \{P\ dx + Q\ dy\} = \iint_R \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dx\,dy\,.$$

Contoh 14.1

Tentukan integral garis fungsi $M(x,y) = x + y$ sepanjang lintasan $C + K$ dengan C : garis dari (0,0) ke (2,0) dan K : garis dari (2,0) ke (2,2).

Penyelesaian :



$C:\ y = 0\ ,\ 0 \le x \le 2$

$K: x = 2\ ,\ 0 \le y \le 2$

Pada kurva C : $dy = 0$ dan pada kurva K : $dx = 0$.

$$\int_{C+K} M(x,y)\,dx = \int_C M(x,y)\,dx + \int_K M(x,y)\,dx$$

$$= \int_C (x+y)\,dx$$

$$= \int_0^2 x \, dx$$
$$= 2. \qquad \square$$

$$\int_{C+K} M(x,y)\,dy = \int_C M(x,y)\,dy + \int_K M(x,y)\,dy$$
$$= \int_K (x+y)\,dy$$
$$= \int_0^2 (2+y)\,dx$$
$$= 6$$

Integral Lintasan Kompleks

Diberikan lintasan C dalam bentuk parametrik $x = g(t)$, $y = h(t)$ dengan $a \le t \le b$. $g(t)$ dan $h(t)$ kontinu di $a \le t \le b$. $g'(t)$ dan $h'(t)$ kontinu di $a \le t \le b$. Jika $z = x + i\,y$, maka titik-titik z terletak C. Arah pada kurva C $(g(a), h(a))$ ke $(g(b), h(b))$ atau dari $z = \alpha$ sampai $z = \beta$ dengan $\alpha = (g(a), h(a))$ dan $\beta = (g(b), h(b))$.

Definisi 14.2

Diberikan fungsi $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ dengan u dan v fungsi dari t yang kontinu sepotong-potong pada $a \le t \le b$. Integral fungsi $f(z)$ sepanjang lintasan C dengan arah dari $z = \alpha$ sampai $z = \beta$ adalah

$$\int_\alpha^\beta f(z)\,dz = \int_a^b f\left[g(t) + i\,h(t)\right]\left\{g'(t) + i\,h'(t)\right\} dt$$

Sifat sifat integral lintasan kompleks

1. $\int_\alpha^\beta f(z)\,dz = -\int_\beta^\alpha f(z)\,dz$
2. $\int_C k\, f(z)\,dz = k\int_C f(z)\,dz$
3. $\int_C \left[f(z) + g(z)\right] dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$

Contoh 14.2

Hitung $\int_{\gamma} z e^{z^2}\, dz$ jika γ : garis lurus dari $z_0 = 1$ ke $z_1 = 2 + i$.

Penyelesaian :

$z_0 = 1 \longrightarrow z_1 = 2 + i$

(0,1) (2,1)

Persamaan garis γ : $y = 1$ dan mempunyai bentuk parametrik :

$$\begin{aligned} x &= g(t) = t \\ y &= h(t) = 1 \end{aligned} \quad , \; t \in [0, 2]$$

Dari persamaan diatas diperoleh :

$$z = g(t) + i\, h(t) = t + i$$

$$dz = \{g'(t) + i\, h'(t)\} dt = 1.\; dt$$

Karena $f(z) = z e^{z^2}$ maka $f[g(t) + i\, h(t)] = f(t+i) = (t+i)\; e^{(t+i)^2}$.

Sehingga,

$$\int_{\gamma} z e^{z^2}\, dz = \int_0^2 (t+i) e^{(t+i)^2}\; 1\, dt$$

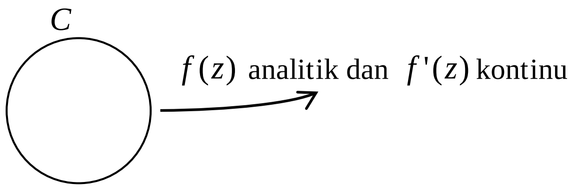
$$= \int_0^2 (t+i)\; e^{(t+i)^2} dt \quad \text{(gunakan subtitusi : } u = (t+i)\text{)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{3+4i} - e^{-1}\right].$$

Integral Cauchy

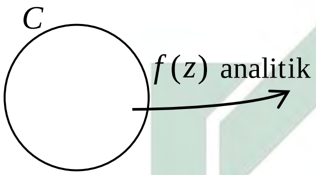
Teorema 14.4 (Teorema Cauchy)

Jika $f(z)$ analitik dan $f'(z)$ kontinu di dalam dan pada lintasan tertutup sederhana C, maka $\oint_C f(z)\, dz = 0$. □



Teorema 14.5 (Teorema Cauchy Goursat)

Jika $f(z)$ analitik di dalam dan pada lintasan tertutup sederhana C, maka $\oint_C f(z)\,dz = 0$. □



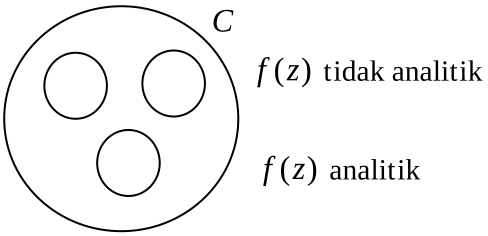
Teorema 14.6

Jika fungsi $f(z)$ analitik di seluruh domain terhubung sederhana D, maka untuk setiap lintasan tertutup C di dalam D, berlaku $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

Teorema 14.7

Diberikan suatu lintasan tertutup C, sedangkan $C_1, C_2, \ldots, C_n$ adalah lintasan-lintasan tertutup yang terletak di interior C sedemikian sehingga $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tidak saling berpotongan. Jika fungsi $f(z)$ analitik di dalam daerah tertutup yang terdiri dari titik-titik pada C dan titik-titik di dalam C, kecuali titik-titik interior $C_1, C_2, \ldots, C_n$, maka

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz. \quad \square$$



Contoh 14.1

Hitung $\int_C \frac{dz}{(z-3)}$, jika $C : \left| z-2 \right| = 2$.

Penyelesaian :

$f(z) = \frac{1}{z-3}$ tidak analitik di $z=3$ yang berada di dalam interior C . Dibuat lintasan tertutup C_1 di dalam C berpusat di $z=3$ yaitu $C_1 : \left| z-3 \right| = \frac{1}{2}$. Diperoleh $z = 3 + \frac{1}{2} e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ dan $dz = \frac{1}{2} e^{it} \, dt$.

Menurut Teorema Cauchy Goursat yang diperluas,

$$
\begin{aligned}
\oint_C \frac{dz}{(z-3)} &= \oint_{C_1} \frac{dz}{(z-3)} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2} i e^{it} \, dt}{\frac{1}{2} e^{it}} \\
&= i \int_0^{2\pi} dt \\
&= 2\pi i \, .
\end{aligned}
$$

Integral Tentu dan Integral Tak Tentu

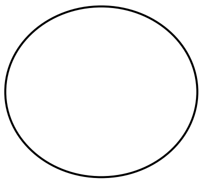
Jika fungsi f analitik di dalam domain terhubung sederhana D , maka $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi) \, d\xi$ mempunyai turunan untuk setiap titik z di dalam D dengan $F'(z) = f(z)$, asalkan lintasan pengintegralan dari z_0 ke z seluruhnya terletak di dalam D. Jadi $F(z)$ juga analitik di dalam D.

Teorema 14.8

Jika α dan β di dalam D, maka

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) \, dz = F(\beta) - F(\alpha) \, . \quad \square$$

D



α $f(z)$ analitik

β

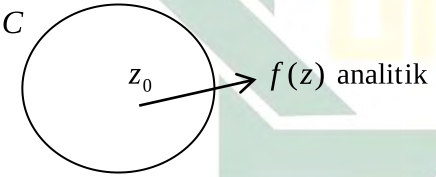
Teorema 14.9 Rumus Integral Cauchy

Jika $f(z)$ analitik di dalam dan pada lintasan tertutup C dan z_0 sebarang titik di dalam C, maka

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

atau

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i \,.\, f(z_0)\,. \qquad \square$$



Turunan Fungsi Analitik

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\,dz \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\,dz = 2\pi i \,.\, f'(z_0)$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3}\,dz \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}.\, f''(z_0)$$

$$\vdots$$

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}.\, f^n(z_0)$$

Contoh 14.2

Hitung $\oint_C \frac{dz}{z-3}$ dengan $C : |z - 2| = 2$.

Penyelesaian :

Diambil : $f(z)=1$ ($f(z)$ analitik di dalam dan pada C)

$z_0 = 3$ di dalam C.

$f(z_0) = f(3) = 1$

Menggunakan rumus integral Cauchy, diperoleh

$$\oint_C \frac{dz}{z-3} = 2\pi i \,.\, f(z_0) = 2\pi i .1 = 2\pi i \,.$$

Contoh 14.3

Hitung $\oint_C \dfrac{dz}{z^3\ (z-2)^2}$ dengan $C : \left| z-3 \right| = 2$.

Penyelesaian :

Diambil : $f(z) = \dfrac{1}{z^3}$ ($f(z)$ analitik di dalam dan pada C)

$z_0 = 2$ di dalam C.

$f'(z) = -\dfrac{3}{z^4} \quad \Rightarrow \quad f'(z_0) = f'(2) = -\dfrac{3}{16}$.

Menggunakan turunan fungsi analitik, diperoleh

$$\oint_C \frac{dz}{z^3\,(z-2)^2} = \frac{2\pi i}{1!} . f(z_0) = \frac{2\pi i}{1} .(-\frac{3}{16}) = -\frac{3}{8}\pi i \,.$$

Teorema 14.10 Teorema Morera

Jika $f(z)$ kontinu dalam domain terhubung D dan untuk setiap lintasan tertutup C dalam D berlaku $\int_C f(z)\ dz = 0$, maka $f(z)$ analitik di seluruh D.

Teorema 14.11

Jika $f(z)$ analitik dan $\left| f(z) \right|$ terbatas di seluruh bidang kompleks, maka $f(z)$ adalah suatu fungsi konstan

Modulus Maksimum

Jika $f(z)$ analitik dan M nilai maksimum dari $|f(z)|$ untuk z di dalam daerah $D = \{z : |z - z_0| \leq r\}$, dan jika $|f(z_0)| = M$, maka $f(z)$ konstan di seluruh daerah D. Akibatnya, jika $f(z)$ analitik dan tidak konstan pada D, maka $|f(z_0)| < M$.

Prinsip Modulus Maksimum

Jika fungsi tak konstan $f(z)$ analitik di z_0, maka di setiap kitar dari z_0, terdapat titik z dan $|f(z_0)| < |f(z)|$.

Teorema 14.13 Teorema Modulus Maksimum

Jika $f(z)$ analitik di dalam dan pada lintasan tertutup sederhana C, dan $f(z)$ tidak konstan, maka $|f(z)|$ mencapai nilai maksimum di suatu titik pada C, yaitu pada perbatasan daerah itu dan tidak di titik interior.

Teorema 14.13 Ketaksamaan Cauchy

Jika $f(z)$ analitik di dalam dan pada lintasan tertutup sederhana $C : |z - z_0| = r$, dan $f(z)$ terbatas pada C, $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in C$ maka

$$|f^n(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Rangkuman

Dari berbagai paparan di atas, maka pada bagian ini dapat dikerucutkan dalam beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Sifat keanalitikan fungsi kompleks di dalam dan pada suatu lintasan tertutup merupakan hal yang harus diperhatikan dalam perhitungan integral fungsi kompleks.

Latihan

Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini!

1. Hitung $\int_{\gamma} z e^{z^2} dz$ jika γ : kurva $y = x^2$ dari $z_0 = 0$ ke $z_1 = 1 + i$.
2. Hitung $\int_{C} f(z)\, dz$ jika $f(z) = z^3$ dengan C : setengah lingkaran $|z| = 2$ dari $z = -2i$ ke $z = 2i$.
3. Hitung integral fungsi $f(z)$ sepanjang lintasan tertutup C berikut :

   a. $f(z) = \dfrac{z e^z}{(4z + \pi i)^2}$, $C : |z| = 1$ (*counterclockwise*).

   b. $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2 (z^2 + 4)}$, C : ellips $x^2 + 4y^2 = 4$ (*counterclockwise*).

   c. $f(z) = \dfrac{Ln(z+3) + \cos z}{(z+1)^2}$, C : segiempat dengan titik-titik sudut $z = \pm 2$ dan $z = \pm 2i$ (*counterclockwise*).

   d. $f(z) = \dfrac{2z^3 - 3}{z(z - 1 - i)^2}$, C : terdiri dari $|z| = 2$ (*counterclockwise*) dan $|z| = 1$ *(clockwiswe).*

   e. $f(z) = \dfrac{(1+z)\sin z}{(2z-1)^2}$, $C : |z - i| = 2$ (*counterclockwise*).

   f. $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z(z-2i)^2}$, C : segiempat dengan titik-titik sudut $z = \pm 3 \pm 3i$ (*counterclockwise*) dan $|z| = 1$ *(clockwiswe).*

g. $f(z) = \dfrac{z^3 + \sin z}{(z - i)^3}$, C : segitiga dengan titik-titik sudut $z = \pm 2$, $z = 2i$ (*counterclockwise*).

Daftar Pustaka

Freitag, Eberhard dan Busam, Rolf. *Complex Analysis*. Heidelberg: Springer, 2005.

Paliouras. John D, *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Jakarta: Erlangga, 1987.

Saff, E.B and A.D Snider. *Fundamentals of complex Analysis with Apllication to Engineering and Science*, New Jersey: Pearson Education Inc, 2003

Wegener, Ingo. *Complexity Theory Exploring the Limits of Efficient Algorithms*. Berlin: Springer, 2005

SISTEM EVALUASI DAN PENILAIAN

A. Proses Penilaian Perkuliahan

Pengambilan nilai dalam mata kuliah Fungsi Kompleks ini menggunakan Sistem Evaluasi Penilaian sebagaimana dalam Buku Panduan Penyelenggaraan Pendidikan IAIN Sunan Ampel Tahun 2013 yang terdiri atas 4 macam penilaian:

1. Ujian Tengah Semester (UTS)
   UTS dapat dilaksanakan setelah mahasiswa menguasai minimal 7 paket I bahan perkuliahan (paket 1–7) . Materi UTS diambil dari pencapaian indikator pada tiap-tiap paket. Bentuk soal dapat berupa pilihan ganda, essay, atau perpaduan antara keduanya. Waktu ujian 2 jam (120 menit). Komponen dan jumlah soal diserahkan kepada Dosen pengampu matakuliah dengan skor maksimal 100.
2. Tugas
   Tugas merupakan produk (hasil kreatifitas) mahasiswa dari keunggulan potensi utama yang ada dalam dirinya. Hasil kreatifitas dapat disusun secara individual atau kelompok yang bersifat *futuristik* dan memberi manfaat bagi orang lain (bangsa dan negara). Petunjuk cara mengerjakan tugas secara lebih rinci diserahkan kepada Dosen pengampu. Skor tugas mahasiswa maksimal 100.
3. Ujian Akhir Semester (UAS)
   UAS dapat dilaksanakan setelah mahasiswa menguasai minimal 7 paket II bahan perkuliahan (paket 8–14). Materi UAS diambil dari pencapaian indikator pada tiap-tiap paket. Bentuk soal dapat berupa pilihan ganda, essay, atau perpaduan antara keduanya. Waktu ujian 2 jam (120 menit). Komponen dan jumlah soal diserahkan kepada Dosen pengampu matakuliah dengan skor maksimal 100.
4. *Performance*
   Performance, merupakan catatan-catatan keaktifan mahasiswa dalam mengikuti perkuliahan mulai pertemuan pertama hingga pertemuan terakhir antara 14–16 pertemuan. Dosen dapat memberi catatan pada setiap proses perkuliahan kepada masing-masing mahasiswa dengan mengamati: (1) ketepatan waktu kehadiran dalam perkuliahan, (2)

penguasaan materi (3) kualitas ide/respon terhadap materi yang dikaji, dan lain-lain (Dosen dapat menambah hal-hal lain yang perlu diamati).

Dosen merekap seluruh catatan selama perkuliahan, dan memberi penilaian performance pada masing-masing mahasiswa dengan skor maksimal 100.

Dosen dapat mengcopy absen perkuliahan, untuk memberi catatan-catatan penilaian *performance* atau membuat format sendiri. Catatan penilaian *performance* tidak diperkenankan langsung di dalam absen perkuliahan mahasiswa.

B. Nilai Matakuliah Akhir Semester

Nilai matakuliah akhir semester adalah perpaduan antara Ujian Tengah Semester (UTS) 20%, Tugas 30 %, Ujian Akhir Semester (UAS) 40 %, dan Performance 10 %.

Nilai matakuliah akhir semester dinyatakan dengan angka yang mempunyai status tertentu, sebagaimana dalam tabel berikut.

Angka Interval Skor (skala 100)	**Skor (skala 4)**	**Huruf**	**Keterangan**
91 – 100	3,76 – 4,00	A+	Lulus
86 – 90	3,51 – 3,75	A	Lulus
81 – 85	3,26 – 3,50	A-	Lulus
76 – 80	3,01 – 3,25	B+	Lulus
71 – 75	2,76 – 3,00	B	Lulus
66 – 70	3,51 – 2,75	B-	Lulus
61 – 65	2,26 – 2,50	C+	Lulus
56 – 60	2,01 – 2,25	C	Lulus
51 – 55	1,76 – 2,00	C-	Tidak Lulus
40 – 50	– 1,75	D	Tidak Lulus
< 39	0	E	Tidak Lulus

Keterangan:

a. Nilai huruf C- dan D pada matakuliah akhir semester harus diulang dengan memprogram kembali pada semester berikutnya
b. Nilai huruf C dan C+ boleh diperbaiki dengan ketentuan harus memprogram ulang dan nilai huruf semula dinyatakan hangus/gugur
c. Rumus menghitung nilai matakuliah (NMK) akhir semester:

$$NMK = \frac{(NUTSx20)+(NTx30)+(NUASx40)+(NPx10)}{100}$$

NMK	=	Nilai Matakuliah
NUTS	=	Nilai Ujian Tengah Semester
NT	=	Nilai Tugas
NUAS	=	Nilai Ujian Akhir Semester
NP	=	Nilai Performance

d. NMK bisa dihitung apabila terdiri dari empat komponen SKS, yaitu: UTS, Tugas, UAS, dan performance. Apabila salah satu kosong (tidak diikuti oleh mahasiswa), maka nilai akhir tidak bisa diperoleh, kecuali salah satunya mendapat nol (mahasiswa mengikuti proses penilaian akan tetapi nilainya nol), maka nilai akhir bisa diperoleh.
e. Nilai akhir matakuliah, ditulis nilai bulat ditambah 2 angka di belakang koma. Contoh: 3,21. 2,80, dst.

DAFTAR PUSTAKA

Freitag, Eberhard dan Busam, Rolf. *Complex Analysis*. Heidelberg: Springer, 2005.

Huybrechts, Daniel. *Complex Geometry an Introduction*. Berlin: Springer, 2005

Jurusan Matematika ITS. *Seri Buku Ajar Kalkulus 1* . Surabaya: Jurusan Matematika FMIPA, 2005.

Paliouras. John D. *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Jakarta: Erlangga, 1987.

Saff, E.B and A.D Snider. *Fundamentals of complex Analysis with Apllication to Engineering and Science*, New Jersey: Pearson Education Inc, 2003

Wegener, Ingo. *Complexity Theory Exploring the Limits of Efficient Algorithms*. Berlin: Springer, 2005

CURRICULUM VITAE TIM PENULIS

AHMAD LUBAB, M.Si, lahir di Tuban 18 Nopember 1981. Pendidikan dasar, menengah, dan atas diselesaikan di Tuban. Pendidikan tinggi S-1 ditempuh di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (MIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya (2005), kemudian melanjutkan S-2 di Pascasarjana ITS Surabaya jurusan Matematika (2009). Karya ilmiah yang telah dipublikasikan antara lain: Sistem dinamik dengan *fuzzy number* (2009), Kalkulus (2011), Analisis Vektor (2012).