

BAB II LANDASAN TEORI

A. Kemampuan Berpikir Matematis

Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) mendefinisikan kemampuan adalah kesanggupan, kecakapan, atau kekuatan¹. Kemampuan dalam arti umum dapat dibatasi sebagai perilaku rasional untuk mencapai tujuan yang dipersyaratkan sesuai dengan kondisi yang diharapkan². Pendapat lain dikemukakan oleh Stephen P. Robbins yang memberikan pengertian kemampuan adalah suatu kapasitas individu untuk mengerjakan berbagai tugas dalam suatu pekerjaan³.

Banyak tokoh yang mengemukakan pendapatnya mengenai pengertian berpikir. Solso mengatakan bahwa berpikir adalah sebuah proses dimana representasi mental baru dibentuk melalui transformasi informasi dengan interaksi yang kompleks atribut-atribut mental seperti penilaian, abstraksi, logika, imajinasi, dan pemecahan masalah⁴. Sementara itu Ngalim Purwanto mendefinisikan berpikir adalah suatu keaktifan pribadi manusia yang mengakibatkan penemuan yang terarah kepada suatu tujuan⁵. Menurut Agus Sujanto, berpikir merupakan suatu proses dialektis, artinya selama kita berpikir, pikiran kita mengadakan tanya jawab pikiran untuk dapat meletakkan hubungan-hubungan antara pengetahuan dengan tepat.

Kemampuan berpikir meliputi kemampuan menganalisis, mengkritisi, dan menarik kesimpulan. Kemampuan berpikir matematis adalah proses dinamis yang menuntut lahirnya beragam ide yang kompleks sehingga terjadi peningkatan pemahaman. Tiga faktor yang mempengaruhi seberapa efektif kemampuan berpikir matematika seseorang, antara lain:

¹ Tim Penyusun Kamus Pusat Bahasa, *Kamus Besar Bahasa Indonesia*, (Jakarta: Balai Pustaka, 2002)

² Danim Sudarwan, *Transformasi Sumber Daya Manusia*, (Jakarta: Bumi Aksara, 1994), 12

³ Stephen P. Robin, *Organizational Behavior*, (Jakarta: Salemba Empat, 2008), 57

⁴ Solso Robert L., dkk, "*Psikologi Kognitif Edisi 8 (alih bahasa Mikael Rahardanto dan Kristanto Batuadji)*", (Jakarta: Erlangga, 2008), 405

⁵ Ngalim Purwanto, *Psikologi Pendidikan*, (Bandung: PT Remaja Rosdakarya, 2007), 43

1. Kemampuan proses dalam memecahkan masalah matematika
2. Pengendalian emosi dan psikologi untuk menguatkan proses pemecahan masalah matematika
3. Pemahaman konsep matematika berikut aplikasinya

Berdasarkan definisi yang telah dipaparkan di atas, dapat disimpulkan bahwa kemampuan berpikir adalah kecakapan atau potensi untuk melakukan kegiatan dalam menggunakan pikiran yang bertujuan untuk mencari makna dan pemahaman terhadap sesuatu serta membuat pertimbangan dan keputusan. Sedangkan kemampuan berpikir matematis adalah kecakapan dalam memahami ide matematika secara lebih mendalam, mengamati data, dan menggali ide yang tersirat, melakukan analogi dan generalisasi, menalar secara logis, menyelesaikan masalah, komunikasi secara matematis, serta mengaitkan ide matematika dengan kegiatan intelektual lainnya.

B. Level Kemampuan Berpikir

Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) mendefinisikan level adalah tingkatan atau tataran⁶. Sehingga level kemampuan berpikir diartikan sebagai sebuah tingkatan kecakapan seseorang untuk mencari makna dan pemahaman terhadap sesuatu dalam membuat pertimbangan serta keputusan.

Banyak tokoh pendidikan yang mencoba menyusun sebuah tingkatan dari kemampuan berpikir, diantaranya adalah Benjamin S. Bloom pada tahun 1949 yang kemudian karya Bloom tersebut direvisi oleh Anderson dan David R. Krathwohl pada Tahun 1990 dan dipublikasikan Tahun 2001 yang dikenal dengan taksonomi Bloom sesudah revisi⁷. Selain itu baru-baru ini pada Tahun 2009 Marzano dan Kendall, kembali melakukan pengembangan taksonomi belajar untuk melengkapi yang telah dikemukakan oleh Anderson, hasil karyanya tersebut dinamai taksonomi Marzano⁸. Tokoh lain yang juga ikut menyumbangkan pemikirannya dalam

⁶ Tim Penyusun Kamus Pusat Bahasa, *Kamus Besar Bahasa Indonesia*, (Jakarta: Balai Pustaka, 2002)

⁷ Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., Airasian, P. W., Cruikshank, K. A., Mayer, R. E., Pintrich, P. R., et al, *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assising: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*, (New York: Longman, 2001), 213

⁸ Tim Kurikulum Pembelajaran, *Buku Kurikulum Pendidikan Tinggi*, (Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2014), 36

mengembangkan taksonomi yaitu John Biggs dan Kevin Collis pada Tahun 1982 yang dikenal sebagai taksonomi SOLO (*The Structure of the Observed Learning Outcome*)⁹.

Level atau tingkatan kemampuan berpikir yang dikemukakan oleh tokoh-tokoh di atas, antara lain:

1. Taksonomi Bloom sebelum revisi (Benjamin S. Bloom)¹⁰

Taksonomi Bloom terbagi atas beberapa tingkatan. Tingkatan yang dimaksud yaitu segala upaya yang mencakup aktivitas otak. Upaya-upaya tersebut tersusun menjadi 6 tingkatan sesuai dengan jenjang terendah hingga tertinggi. Berikut adalah tingkatannya, antara lain:

- a. **Pengetahuan (*knowledge*)**, diartikan kemampuan seseorang dalam menghafal atau mengingat kembali atau mengulang kembali pengetahuan yang pernah diterimanya.
- b. **Pemahaman (*comprehension*)**, diartikan kemampuan seseorang dalam mengartikan, menafsirkan, menerjemahkan, atau menyatakan sesuatu dengan caranya sendiri tentang pengetahuan yang pernah diterimanya.
- c. **Penerapan (*application*)**, diartikan kemampuan seseorang dalam menggunakan pengetahuan dalam memecahkan berbagai masalah yang timbul.
- d. **Analisis (*analysis*)**, diartikan kemampuan menjabarkan atau menguraikan suatu konsep menjadi bagian-bagian yang lebih rinci, memilah-milah, merinci, serta mengaitkan hasil rinciannya.
- e. **Sintetis (*synthesis*)**, diartikan kemampuan menyatukan bagian-bagian secara terintegrasi menjadi suatu bentuk tertentu yang semula belum ada.
- f. **Evaluasi (*evaluation*)**, diartikan kemampuan membuat penilaian *judgment* tentang nilai (*value*) untuk maksud tertentu.

⁹ John Biggs dan Kevin Collis, *Evaluating the Quality of Learning: The SOLO Taxonomy* (New York: Academic Press, 1982), 24

¹⁰ Tim Kurikulum Pembelajaran, *Buku Kurikulum Pendidikan Tinggi*, (Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2014), 34

2. Taksonomi Bloom sesudah revisi (Anderson dan David R. Krathwohl)¹¹

Taksonomi Bloom sesudah revisi memiliki tingkatan yang hampir sama dengan sebelum revisi. perbedaannya hanya pada tingkat pengetahuan diganti nama menjadi mengingat serta pada tingkat evaluasi dan sintesis terjadi pertukaran posisi dengan merubah nama sintesis menjadi mengkreasi. Berikut tingkatannya:

- a. **Mengingat** merupakan kegiatan mengenal, membuat daftar, menggambarkan, menyebutkan.
- b. **Memahami** merupakan kegiatan menginterpretasi, merangkum, mengelompokkan, menerangkan.
- c. **Menerapkan** yaitu menggunakan informasi dalam situasi lain yang meliputi kegiatan menerapkan, melaksanakan, menggunakan, melakukan.
- d. **Menganalisis** yaitu mengelola informasi untuk memahami sesuatu dan mencari hubungan yang meliputi kegiatan membandingkan, mengorganisasi, menata ulang, mengajukan pertanyaan, menemukan.
- e. **Mengevaluasi** yaitu menilai suatu keputusan atau tindakan yang meliputi kegiatan memeriksa, membuat hipotesa, mengkritik, bereksperimen, memberi penilaian.
- f. **Mengkreasi** yaitu menghasilkan ide-ide baru, produk, atau cara memandang terhadap sesuatu yang meliputi kegiatan mendisain, membangun, merencanakan, menemukan.

3. Taksonomi Marzano (Marzano dan Kendall)¹²

Taksonomi Marzano juga merupakan pengembangan dari taksonomi Bloom. Jika tingkatan pada taksonomi Bloom didasarkan pada upaya-upaya yang menyangkut aktifitas otak, maka taksonomi Marzano memadukannya dengan faktor yang berjangkauan luas, yang mempengaruhi bagaimana siswa berpikir. Tingkatan tersebut, antara lain:

¹¹ Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., Airasian, P. W., Cruikshank, K. A., Mayer, R. E., Pintrich, P. R., et al, *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assising: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*, (New York: Longman, 2001), 216

¹² Tim Kurikulum Pembelajaran, *Buku Kurikulum Pendidikan Tinggi*, (Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2014), 37

- a. **Retrieval** merupakan proses dari prosedur pengetahuan, seperti mengingat kembali atau melakukan tanpa pemahaman.
 - b. **Comprehension** merupakan proses dari urutan atau struktur pengetahuan, sintesis atau langkah-langkah dan gambarannya secara mendasar untuk pemahaman pemahaman awal.
 - c. **Analysis** merupakan proses mengakses dan menguji pengetahuan mengenai persamaan dan perbedaan, hubungan yang terkait, serta mendiagnosa kesalahan.
 - d. **Knowledge utilization** merupakan proses dalam menggunakan pengetahuan dimana masalah bisa disikapi atau dipecahkan, investigasi dapat direncanakan, serta keputusan dan aplikasi dapat diperoleh.
 - e. **Metacognitive system** merupakan proses untuk memonitor apa dan bagaimana pengetahuan yang baik bisa dimengerti sehingga tujuan dapat dicapai.
 - f. **Self-system** merupakan proses mengidentifikasi respon/rangsangan emosi, melatih persepsi, motivasi, dan manfaatnya pada kepercayaan terhadap pengetahuan awal.
4. **Taksonomi SOLO (John Biggs dan Kevin Collis)**¹³

Tingkatan pada taksonomi ini didasarkan atas kemampuan siswa dalam merespon sebuah permasalahan. Tingkatan tersebut, antara lain:

- a. **Tahap pre-structural** merupakan tahap dimana siswa hanya memiliki sangat sedikit sekali informasi yang bahkan tidak saling berhubungan, sehingga tidak membentuk sebuah kesatuan konsep sama sekali dan tidak mempunyai makna apapun.
- b. **Tahap uni-structural** merupakan tahap ketika mulai terlihat adanya hubungan yang jelas dan sederhana antara satu konsep dengan konsep lainnya tetapi inti konsep tersebut secara luas belum dipahami.

¹³ John Biggs dan Kevin Collis, *Evaluating the Quality of Learning: The SOLO Taxonomy* (New York: Academic Press, 1982), 24

- c. **Tahap *multi-structural*** merupakan tahap dimana siswa sudah memahami beberapa komponen namun hal ini masih bersifat terpisah satu sama lain sehingga belum membentuk pemahaman secara komprehensif.
- d. **Tahap *relational*** merupakan tahap dimana siswa dapat menghubungkan antara fakta dengan teori serta tindakan dan tujuan.
- e. **Tahap *extended abstract*** merupakan tahap dimana siswa melakukan koneksi tidak hanya sebatas pada konsep-konsep yang sudah diberikan saja melainkan dengan konsep-konsep diluar itu, seperti membuat generalisasi serta dapat melakukan sebuah perumpamaan-perumpamaan pada situasi-situasi spesifik.

Level atau tingkatan kemampuan berpikir yang telah dikemukakan oleh tokoh-tokoh di atas dapat diterapkan untuk mengukur kemampuan berpikir pada semua mata pelajaran dalam aspek kognitif, sehingga lebih fleksibel. Di sisi lain, taksonomi-taksonomi tersebut menjadi tidak praktis karena harus disesuaikan dahulu dengan mata pelajaran yang akan diukur kemampuan berpikirnya. Mengingat pentingnya matematika dalam dunia industri maupun teknologi saat ini, Shafer dan Foster ingin mengembangkan level atau tingkatan kemampuan berpikir yang khusus untuk matematika saja. Level-level tersebut terdiri dari tiga tingkatan yaitu dimulai dari level paling rendah reproduksi, kemudian level kedua yaitu koneksi, dan level paling tinggi adalah analisis¹⁴.

C. Level Kemampuan Berpikir Berdasarkan Shafer dan Foster

Untuk mengakses perkembangan berpikir dan pemahaman siswa pada mata pelajaran matematika, Shafer dan Foster mengajukan tiga tingkatan berpikir matematis yaitu tingkat reproduksi, koneksi dan analisis. Tingkatan reproduksi merupakan tingkatan berpikir paling rendah, sementara analisis adalah tingkatan berpikir yang paling tinggi.

¹⁴ Shafer, M.C. dan Foster, S., *The Changing Face of Assessment*, (Principled Practice in Mathematics and Science, pp. 1-7, Vol.1(2), 1997). 2

Berikut adalah indikator dari masing-masing tingkatan berpikir tersebut¹⁵:

Tabel 2.1 Indikator Level Berpikir Matematis dari Shafer dan Foster

Level	Indikator	Penjelasan
Reproduksi (I)	a. Mengetahui fakta dasar	Dapat memahami soal dengan baik serta dapat menuliskan apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan pada soal secara lengkap
	b. Menerapkan algoritma standar	Melakukan perhitungan dengan menggunakan prosedur yang sederhana berdasarkan rumus yang telah ada tanpa modifikasi rumus.
	c. Mengembangkan keterampilan teknis	Dapat melakukan operasi-operasi standar pada matematika seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dengan baik.
Koneksi (II)	a. Mengintegrasikan informasi	Dapat menggunakan informasi yang diperoleh dari soal untuk menyusun penyelesaian masalah
	b. Membuat koneksi dalam dan antar domain matematika	Menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan lebih dari satu pengetahuan.
	c. Menetapkan rumus (<i>tools</i>) yang akan digunakan untuk menyelesaikan masalah	Dapat memahami situasi baru pada soal dengan memodifikasi prosedur yang telah ada sehingga cocok digunakan untuk memperoleh solusi.

¹⁵Agus Supriyanto, dkk, *Karakteristik Berpikir Matematis Siswa SMP Majelis Tafsir Al-Qur'an (MTA) Gemolong dalam Memecahkan Masalah Matematika Pada Materi Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) Ditinjau dari Kemampuan Penalaran Siswa Dan Gender*, (Surakarta: Jurnal Elektronik Pembelajaran Matematika Vol.2, No.10, hal 1056-1068, ISSN: 2339-1685, 2014). 1061

	d. Memecahkan masalah tidak rutin	Dapat menyelesaikan permasalahan terhadap tipe soal yang tidak umum.
Analisis (III)	a. Matematisasi situasi	Dapat membuat model matematika dari permasalahan yang diberikan
	b. Melakukan analisis	Dapat menganalisa berbagai kemungkinan yang dapat dilakukan untuk memperoleh solusi.
	c. Melakukan interpretasi	Dapat mengkomunikasikan hasil penyelesaian dengan jelas.
	d. Mengembangkan model dan strategi sendiri	Dapat membuat berbagai strategi dari berbagai sudut pandang dalam mencari solusi.
	e. Mengembangkan argumen matematika	Dapat memberikan alasan terhadap solusi yang dihasilkan dengan menggunakan argumen matematika.
	f. Membuat generalisasi	Dapat membuat kesimpulan terhadap hasil yang diperoleh.

Berpikir level I secara sederhana dapat dilihat dan dinilai, sebab pada level ini pertanyaan-pertanyaan difokuskan seperti dalam melakukan kalkulasi, menyelesaikan persamaan, mengemukakan fakta berdasar ingatan, atau respon siswa terhadap pertanyaan benar/salah. Bentuk dari pertanyaan level I berupa pilihan ganda, isian singkat, dan biasanya tidak dikaitkan terhadap situasi nyata ataupun situasi imajinatif¹⁶.

Berpikir level II, respon siswa memerlukan analisis lebih sulit dari pada level I, sebab pertanyaan-pertanyaannya biasanya memerlukan informasi yang terintegrasi, dikaitkan antara atau antar domain matematika, atau menyelesaikan permasalahan yang tidak rutin. Soal-soal seperti ini sulit didesain dan sulit juga direspon siswa. Level II ini lebih tepat disajikan dalam suatu konteks baik itu dalam situasi nyata ataupun situasi imajinatif dan

¹⁶ Shafer, M.C. dan Foster, S., *The Changing Face of Assessment*, (Principled Practice in Mathematics and Science, pp. 1-7, Vol.1(2), 1997). 2

yang terpenting harus melibatkan siswa dalam mengambil keputusan matematik. Melalui permasalahan seperti ini, guru harus memahami cara dan strategi setiap siswa dalam berpikir melalui pengamatan kinerja dan hasil pekerjaan siswa dalam pembelajaran. Penalaran siswa dan langkah-langkah mereka dalam menjawab permasalahan akan menunjukkan perbedaan kemampuan berpikir secara kualitatif¹⁷.

Terakhir adalah berpikir level III. Permasalahan siswa untuk mematematisasi situasi, yaitu dapat memahami dan mengekstraksi matematika yang implisit dalam situasi dan menggunakannya untuk menyelesaikan permasalahan, mengembangkan model dan strategi mereka sendiri, dan membuat argumen-argumen matematik untuk digeneralisasi. Tipe permasalahan ini biasanya *open-ended*. Dapat terjadi lebih dari satu respon siswa yang dinyatakan benar, sepanjang didukung argumen-argumen matematik yang valid. Mengingat karakter dari asesmen untuk berpikir level III seperti di atas, maka permasalahan lebih tepat dalam bentuk konteks nyata atau situasi imajinatif dan memungkinkan siswa menemukan strategi baru dalam menyelesaikannya. Guru harus memantau aktivitas setiap siswa bahkan mengetahui strategi dan argumen masing-masing siswa¹⁸.

Di Indonesia sendiri, tingkatan berpikir yang sering menjadi rujukan adalah taksonomi bloom dan saat ini sudah beralih kepada taksonomi bloom revisi karya Anderson. Jika level kemampuan berpikir milik Shafer dan Foster dipadu padankan dengan taksonomi bloom revisi, ternyata akan memiliki relasi. Berikut hasil padu padannya akan ditampilkan dalam bentuk tabel:

Tabel 2.2 Hasil Padu Padan Level Berpikir Matematis dari Shafer dan Foster dengan Taksonomi Bloom Revisi

Level Kemampuan Berpikir Shafer dan Foster	Tingkatan berpikir taksonomi bloom revisi
Level I (Reproduksi)	
<ul style="list-style-type: none"> • Mengetahui fakta dasar • Menerapkan algoritma standar • Mengembangkan keterampilan teknis 	<ul style="list-style-type: none"> • Mengingat • Memahami (tingkat rendah)

¹⁷ Shafer, M.C. dan Foster, S., *The Changing Face of Assessment*, (Principled Practice in Mathematics and Science, pp. 1-7, Vol.1(2), 1997). 2

¹⁸ Ibid, 2

	<ul style="list-style-type: none"> • Menerapkan (tingkat rendah)
Level II (Koneksi)	
<ul style="list-style-type: none"> • Mengintegrasikan informasi • Membuat koneksi dalam dan antar domain matematika • Menetapkan rumus (tools) yang akan digunakan untuk menyelesaikan masalah 	<ul style="list-style-type: none"> • Mengingat • Memahami • Menerapkan • Menganalisis (tingkat rendah)
Level III (Analisis)	
<ul style="list-style-type: none"> • Matematisasi situasi • Melakukan analisis • Melakukan interpretasi • Mengembangkan model dan strategi sendiri • Mengembangkan argumen matematika • Membuat generalisasi 	<ul style="list-style-type: none"> • Mengingat • Memahami • Menerapkan • Menganalisis • Mengevaluasi • Mengkreasi

Terdapat beberapa peneliti yang tertarik menggunakan level kemampuan berpikir matematis dari Shafer dan Foster untuk penelitiannya seperti Ade Prabowo dan Yunita Sari. Dalam penelitian yang dilakukan Ade Prabowo diperoleh hasil siswa dengan gaya kognitif *field independent* memiliki kemampuan berpikir matematis yang beragam¹⁹. Sedangkan Yunita Sari dalam penelitiannya memperoleh hasil bahwa siswa dengan respon tinggi cenderung berada pada level analisis, siswa dengan respon sedang berada pada level koneksi dan siswa dengan respon rendah berada pada level reproduksi²⁰.

¹⁹ Ade Prabowo, Skripsi: “Analisis Tingkat Berpikir Matematis Siswa yang Memiliki Gaya Kognitif Field Independent Berdasarkan Shafer dan Foster dalam Memecahkan Masalah Matematika pada Pokok Bahasan Pecahan Kelas VII Semester I di SMP Negeri 16 Surakarta Tahun Ajaran 2013/2014”, (Surakarta: Universitas Sebelas Maret, 2014)

²⁰ Yunita Sari dkk, “Penerapan Pendekatan Open-Ended dalam Pembelajaran Matematika untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Matematis Siswa Ditinjau dari Respon Siswa Terhadap Pembelajaran”, (Surakarta: Jurnal Pendidikan Matematika Solusi Vol.1 No.1, 2013)

D. Pemecahan Masalah

Arthur mengemukakan bahwa penyelesaian atau pemecahan masalah merupakan bagian dari berpikir²¹. Menurut Matlin, pemecahan masalah digunakan ketika ingin mencapai suatu tujuan tertentu, tetapi pemecahannya tidak jelas²². Jika pemecahannya jelas, maka sudah bukan merupakan masalah lagi. Jadi jika pemecahan masalah sudah diperoleh, maka masalah tersebut sudah bukan masalah lagi bagi orang tersebut tetapi belum tentu bagi orang lain. Pendapat lainnya menyatakan bahwa pemecahan masalah sebagai usaha mencari jalan keluar dari suatu kesulitan²³. Berdasarkan paparan dari beberapa tokoh mengenai penyelesaian atau pemecahan masalah, maka dapat disimpulkan bahwa penyelesaian masalah adalah suatu proses untuk mengatasi kesulitan yang ditemui dalam mencapai suatu tujuan yang diinginkan.

Banyak tokoh yang mengemukakan bahwa terdapat tahapan dalam menyelesaikan masalah, salah satu yang paling umum digunakan adalah tahapan penyelesaian masalah dari Polya. Polya mengemukakan bahwa dalam menyelesaikan masalah terdapat empat tahap, antara lain²⁴.

1. Memahami masalah (*understand the problem*)

Tahap pertama pada penyelesaian masalah adalah memahami soal. Siswa perlu mengidentifikasi apa yang diketahui, mencari hubungan yang saling terkait serta apa yang akan dicari. Beberapa saran yang dapat membantu siswa dalam memahami masalah yang kompleks yaitu memberikan pertanyaan mengenai apa yang diketahui dan dicari, menjelaskan masalah sesuai dengan kalimat sendiri, menghubungkannya dengan masalah lain yang serupa, fokus pada bagian yang penting dari masalah tersebut, mengembangkan model, dan menggambar diagram.

²¹ Arthur L. Benton, *Problem Solving*. U.S.: Wikimedia Foundation, In, diakses dari: http://en.wikipedia.org/wiki/Problem_Solving, pada tanggal 20 Februari 2017.

²² Matlin, M. W, *Cognition. Fifth Edition*. Rosewood Drive, Danvers, (MA: John Wiley & Sons, Inc, 2003), 361

²³ Polya, G, *On Solving Mathematical Problems in High School*, (New Jersey: Princeton University Press, 1980), 3

²⁴ *Ibid*, 5

2. Membuat rencana (*devise a plan*)

Siswa perlu mengidentifikasi operasi yang terlibat serta strategi yang diperlukan untuk menyelesaikan masalah yang diberikan. Hal ini bisa dilakukan siswa dengan cara seperti menebak, mengembangkan sebuah model, mensketsa diagram, menyederhanakan masalah, mengidentifikasi pola, membuat tabel, eksperimen dan simulasi, bekerja terbalik, menguji semua kemungkinan, mengidentifikasi sub-tujuan, membuat analogi, dan mengurutkan data/informasi.

3. Melaksanakan rencana (*carry out the plan*)

Apa yang diterapkan jelaslah bergantung pada apa yang telah direncanakan sebelumnya dan juga termasuk hal-hal seperti mengartikan informasi yang diberikan ke dalam bentuk matematika dan melaksanakan strategi selama proses dan perhitungan yang berlangsung. Secara umum pada tahap ini siswa perlu mempertahankan rencana yang sudah dipilih. Jika semisal rencana tersebut tidak berjalan lancar, maka siswa dapat memilih cara atau rencana lain.

4. Melihat kembali (*looking back*)

Aspek-aspek berikut perlu diperhatikan ketika mengecek kembali langkah-langkah yang sebelumnya terlibat dalam menyelesaikan masalah, yaitu mengecek kembali semua informasi yang penting yang telah teridentifikasi, mengecek semua perhitungan yang sudah terlibat, mempertimbangkan apakah solusinya logis, melihat alternatif penyelesaian yang lain, dan membaca pertanyaan kembali serta bertanya kepada diri sendiri apakah pertanyaannya sudah benar-benar terjawab.

E. Hubungan Kemampuan Berpikir Matematis terhadap Penyelesaian Masalah

Syaiful mengemukakan bahwa kemampuan pemecahan masalah merupakan tujuan umum pengajaran matematika, bahkan sebagai jantungnya matematika. Pemecahan masalah meliputi metode, prosedur, dan strategi merupakan proses inti dan utama dalam kurikulum matematika. Pemecahan masalah merupakan kemampuan dasar dalam belajar matematika. Pada saat memecahkan masalah matematika, siswa dihadapkan dengan beberapa tantangan seperti kesulitan dalam memahami soal. Hal ini

disebabkan karena masalah yang dihadapi bukanlah masalah yang pernah dihadapi siswa sebelumnya.²⁵

Stanic dan Killpatrick mengidentifikasi peranan pemecahan masalah dalam matematika sekolah antara lain²⁶:

1. Pemecahan masalah sebagai konteks

Sebagai konteks, pemecahan masalah digunakan sebagai *justification* dalam mengajar matematika, meyakinkan siswa terhadap nilai matematika, memotivasi siswa, serta sebagai aktivitas menyenangkan yang diberikan guru terhadap murid akibat jenuh terhadap soal rutin.

2. Pemecahan masalah sebagai keterampilan

pemecahan masalah dapat melatih siswa melakukan prosedur umum pemecahan masalah rutin. Setelah siswa memiliki berbagai keterampilan pemecahan masalah, siswa diarahkan untuk memecahkan masalah non-rutin.

3. Pemecahan masalah sebagai seni

Sebagai seni, pemecahan masalah digunakan untuk mengembangkan kemampuan siswa dalam menghadapi soal-soal unik yang tidak rutin sehingga siswa menjadi lebih cakap, lebih antusias, serta menjadi pemikir *independent* yang mampu mengatasi masalah *open-ended*.

Ketika berlatih memecahkan masalah, siswa telah berlatih melakukan proses kognitif. Meski terkadang dalam melakukan proses pemecahan masalah, siswa sering dihadapkan dengan kegagalan namun tak jarang juga siswa mengalami keberhasilan. Dengan demikian, semakin sering siswa melakukan kegiatan pemecahan masalah maka semakin terasah pula kemampuan kognitif siswa. Seperti yang kita ketahui kemampuan kognitif erat kaitannya dengan kemampuan berpikir. Dapat disimpulkan bahwa semakin baik siswa dalam memecahkan masalah maka semakin berkembang pula kemampuan berpikir matematis siswa.

²⁵ Syaiful, *Peningkatan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematika Melalui Pendekatan Pendidikan Matematika Realistik*, (Jurnal Edumatica 2(1): 36-44, 2012), 37

²⁶ Robert McIntosh dan Denise Jarret, *Teaching Mathematical Problem Solving: Implementing the Vision*, (Mathematics and Science Education Center, 2000), 8-9

F. Aljabar

1. Materi Aljabar

Aljabar adalah salah satu cabang penting dalam matematika. Kata aljabar berasal dari kata *al-jabr* yang diambil dari buku karangan Muhammad Ibn Musa *Al-Khwarizmi* (780-850 M), yaitu kitab *al-jabr wa al-nuqabalah* yang membahas tentang cara menyelesaikan persamaan-persamaan aljabar. Pemakaian aljabar ini sebagai penghormatan kepada *Al-Khwarizmi* atas jasa-jasanya dalam mengembangkan aljabar melalui karya-karya tulisnya.

a. Unsur-Unsur Aljabar

1) Variabel

Variabel adalah sesuatu yang nilainya berubah-ubah dalam suatu permasalahan tertentu. Variabel disebut juga peubah. Variabel biasanya dilambangkan dengan huruf kecil a, b, c, ... z.

Contoh:

Suatu bilangan jika dikalikan 5 kemudian dikurangi 3, hasilnya adalah 12. Buatlah bentuk persamaannya!

Jawab: Misalkan bilangan tersebut x , berarti $5x - 3 = 12$. (x merupakan variabel)

2) Koefisien

Koefisien adalah angka pengali konstan terhadap variabel. Biasanya berupa angka yang melekat pada variabel.

Contoh:

Tentukan koefisien x pada bentuk aljabar berikut.

$$5x^2y + 3x$$

Jawab: Koefisien x dari $5x^2y + 3x$ adalah 3.

3) Konstanta

Konstanta adalah bilangan nyata tunggal yang nilainya tidak berubah-ubah dalam suatu masalah tertentu.

Contoh:

Tentukan konstanta pada bentuk aljabar berikut.

$$2x^2 + 3xy + 7x - y - 8$$

Jawab: Konstanta adalah suku yang tidak memuat variabel, sehingga konstanta dari $2x^2 + 3xy + 7x - y - 8$ adalah -8 .

4) Suku

Suku adalah variabel beserta koefisiennya atau konstanta pada bentuk aljabar yang dipisahkan oleh operasi penjumlahan atau selisih.

- Suku satu adalah bentuk aljabar yang tidak dihubungkan oleh operasi jumlah atau selisih. *Contoh:* $3x, 4a^2, -2ab$,
- Suku dua adalah bentuk aljabar yang dihubungkan oleh satu operasi jumlah atau selisih. *Contoh:* $a^2 + 2, x + 2y, 3x^2 - 5x$,
- Suku tiga adalah bentuk aljabar yang dihubungkan oleh dua operasi jumlah atau selisih. *Contoh:* $3x^2 + 4x - 5, 2x + 2y - xy$,

Bentuk aljabar yang mempunyai lebih dari dua suku disebut suku banyak atau polinom.

b. Operasi Aljabar

1) Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Aljabar

Pada dasarnya, sifat-sifat penjumlahan dan pengurangan yang berlaku pada bilangan riil, berlaku juga untuk penjumlahan dan pengurangan pada bentuk-bentuk aljabar, sebagai berikut.

Sifat Komutatif $a + b = b + a$, dengan a dan b bilangan riil

Sifat Asosiatif $(a + b) + c = a + (b + c)$, dengan a, b , dan c bilangan riil

Sifat Distributif $a(b + c) = ab + ac$, dengan a, b , dan c bilangan riil.

Contoh:

$$3ab + 5ab = 8ab$$

$$\begin{aligned} 12y + 7 + 3y + 2 &= (12y + 3y) + (7 + 2) \\ &= 15y + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5p - 6p^2 - 4p + 9p^2 &= (-6p^2 + 9p^2) + (5p - 4p) \\ &= 3p^2 + p \end{aligned}$$

2) Perkalian Bentuk Aljabar

Perhatikan kembali sifat distributif pada bentuk aljabar. Sifat distributif merupakan konsep dasar perkalian pada

bentuk aljabar. Untuk lebih jelasnya, pelajari uraian berikut.

- a) Perkalian satu suku dengan dua suku

$$a(b + c) = ab + ac$$

Contoh:

$$-5(9 - y) = -45 + 5y$$

- b) Perkalian dua suku dengan dua suku

$$\begin{aligned}(a + b)(c + d) &= (a + b)c + (a + b)d \\ &= ac + bc + ad + bd \\ &= ac + ad + bc + bd\end{aligned}$$

Contoh:

$$\begin{aligned}(x + 5)(x + 3) &= (x + 5)x + (x + 5)3 \\ &= x^2 + 5x + 3x + 15 \\ &= x^2 + 8x + 15\end{aligned}$$

3) Pembagian Bentuk Aljabar

Pembagian bentuk aljabar akan lebih mudah jika dinyatakan dalam bentuk pecahan. Pelajarilah contoh soal berikut.

Contoh:

$$8x : 4 = \frac{8x}{4} = \frac{4 \cdot 2x}{4} = 2x$$

2. Permasalahan Aljabar dalam Mengukur Kemampuan Berpikir Matematis

a. Permasalahan Aljabar untuk Level Pertama.

Soal-soal yang diajukan untuk menguji apakah siswa mampu melewati level pertama pada materi aljabar yaitu berupa soal isian singkat dan menggunakan operasi aljabar sederhana. Selain itu soal-soal aljabar yang diajukan juga harus memuat 3 indikator pada level pertama.

Contoh soal:

Tentukan hasil kali dari $2x - 1$ dengan $x + 2$!

Jawab:

Tabel 2.3 Jawaban dari Contoh Permasalahan Aljabar untuk Level Pertama

Jawaban	Indikator yang dicapai
<p>Diketahui: terdapat 2 bilangan yaitu $2x - 1$ dan $x + 2$</p> <p>Ditanya: hasil kali dari kedua bilangan tersebut.</p>	<p>Mengetahui fakta dasar (dapat menyebutkan apa yang diketahui dan apa yang ditanya)</p>
$(2x - 1)(x + 2)$ $= (2x - 1)x + (2x - 1)2$ $= 2x^2 - x + 4x - 2$ $= 2x^2 + 3x - 2$	<p>Menerapkan algoritma standar (dapat menentukan prosedur/langkah-langkah dalam mengalikan dua bilangan yang terdiri dari 2 suku aljabar)</p> <p>Mengembangkan keterampilan teknis (dapat menghasilkan jawaban dari operasi yang dilakukan dengan tepat)</p>

b. Permasalahan Aljabar untuk Level Kedua.

Soal-soal yang diajukan untuk menguji apakah siswa mampu melewati level kedua pada materi aljabar yaitu berupa soal cerita. Selain itu soal-soal aljabar yang diajukan juga harus memuat 3 indikator pada level pertama dan 4 indikator pada level kedua.

Contoh soal:

Sebuah model kerangka balok dibuat dari kawat dengan ukuran panjang $(2x - 3)cm$, lebar $(3x + 10)cm$, dan tinggi $x cm$. Tentukan panjang kawat yang dibutuhkan untuk membuat kerangka balok tersebut dalam x !

Jawab:

Tabel 2.4 Jawaban dari Contoh Permasalahan Aljabar untuk Level Kedua

Jawaban	Indikator yang dicapai
<p>Diketahui: kawat dibentuk balok dengan ukuran panjang $(2x - 3)cm$, lebar</p>	<p>Mengetahui fakta dasar (dapat menyebutkan apa yang diketahui dan apa yang ditanya)</p>

<p>$(3x + 10)cm$, dan tinggi $x cm$ Ditanya: panjang kawat yang dibutuhkan dalam x.</p>	<p>Mengintegrasikan informasi (dalam menyusun penyelesaian, siswa menggunakan informasi yang ada pada soal)</p>
<p>Panjang kawat = panjang rusuk balok keseluruhan</p>	<p>Membuat koneksi dalam dan antar domain matematika (mengaitkan materi aljabar dengan materi bangun ruang)</p>
<p>Panjang kawat $= 4(p + l + t)$ $= 4(2x - 3 + 3x + 10 + x)$ $= 4(6x + 7)$ $= 24x + 28$</p>	<p>Menetapkan rumus (tools) yang akan digunakan untuk menyelesaikan masalah (menetapkan rumus panjang kawat) Menerapkan algoritma standar (dapat menjumlah dua suku sejenis, dapat mengalikan secara distributif) Mengembangkan keterampilan teknis (dapat menghasilkan jawaban dari operasi yang dilakukan dengan tepat) Memecahkan masalah tidak rutin (memecahkan permasalahan dengan cara dan hasil yang tepat terhadap permasalahan tidak rutin yang telah diberikan)</p>

c. Permasalahan Aljabar untuk Level Ketiga.

Soal-soal yang diajukan untuk menguji apakah siswa mampu melewati level ketiga pada materi aljabar yaitu berupa soal open-ended. Selain itu soal-soal aljabar yang diajukan juga harus memuat 3 indikator pada level pertama, 4 indikator pada level kedua, dan 6 indikator pada level ketiga.

Contoh soal:

Pak Ahmad memiliki mobil box yang dapat mengangkut barang dengan daya angkut maksimal 260 kg. Pak Ahmad memiliki beberapa kotak dan drum yang akan diangkut kedalam mobil box. Berat kotak masing-masing adalah 12000 g dan berat drum sebesar 24000 g. Pak Ahmad sendiri memiliki bobot 68 kg. Tentukan berapa kotak dan

drum yang mampu diangkut kedalam mobil agar mencapai berat maksimal dari dayaampung mobil tersebut!

Jawab:

Tabel 2.5 Jawaban dari Contoh Permasalahan Aljabar untuk Level Ketiga

Jawaban	Indikator yang dicapai
<p>Diketahui:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Dayaampung mobil = 260 kg • Bobot pak Ahmad = 68 kg • Berat kotak = 12000 g • Berat drum = 24000 g <p>Ditanya: banyak kotak dan drum yang mampu diangkut mobil agar mencapai berat maksimal dari dayaampung mobil.</p>	<p>Mengetahui fakta dasar (dapat menyebutkan apa yang diketahui dan apa yang ditanya)</p> <p>Mengintegrasikan informasi (dalam menyusun penyelesaian, siswa menggunakan informasi yang ada pada soal)</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Dayaampung untuk kotak dan drum menjadi: Dayaampung – Bobot pak Ahmat = 260 kg – 68 kg = 192 kg • Berat kotak dan drum dalam kg Berat kotak = 12000 g = 12 kg Berat drum = 24000 g = 24 kg • Misal x = banyaknya kotak yang terangkut y = banyaknya drum yang terangkut sehingga persamaannya: $12x + 24y = 192$ 	<p>Matematisasi situasi (dapat membuat model matematika)</p> <p>Mengembangkan keterampilan teknis (dapat menghasilkan jawaban dari operasi yang dilakukan dengan tepat)</p> <p>Membuat koneksi dalam dan antar domain matematika (mengaitkan materi aljabar dengan materi pengukuran satuan berat)</p>
$12x + 24y = 192$	<p>Menetapkan rumus (tools) yang akan digunakan untuk menyelesaikan masalah (menetapkan</p>

	rumus untuk menentukan banyak kotak dan drum yang dapat diangkut)
$12x + 24y = 192$ <p>Karena hanya ada satu persamaan, maka nilai x dan y dapat bervariasi asal memenuhi persamaan tersebut.</p>	Melakukan analisis (dapat menganalisis berbagai kemungkinan solusi yang dihasilkan)
Dilihat dari keseluruhan penyelesaian yang disajikan siswa dan dari wawancara	Melakukan interpretasi (dapat mengkomunikasikan hasil jawaban dengan baik)
$12x + 24y = 192$ $x + 2y = 16$ $x = 16 - 2y$ <p>Kemudian dimisalkan untuk kemungkinan $y = 0$ dst. Hingga diperoleh pula kemungkinan untuk x.</p> <p>Atau</p> $12x + 24y = 192$ $x + 2y = 16$ $2y = 16 - x$ $y = 8 - \frac{x}{2}$ <p>Kemudian dimisalkan untuk kemungkinan x merupakan bilangan kelipatan 2 dimulai dari 0. Hingga diperoleh pula kemungkinan untuk y.</p>	Mengembangkan model dan strategi sendiri (Dapat membuat berbagai strategi dari berbagai sudut pandang dalam mencari solusi.) Menerapkan algoritma standar (dapat menyelesaikan persamaan aljabar)
Diperoleh melalui wawancara	Mengembangkan argumen matematika (dapat memberi alasan terhadap solusi yang diberikan)
$HP = \{(x,y) \mid (0,8), (2,7), (4,6), (6,5), (8,4), (10,3), (12,2), (14,1), (16,0)\}$	Memecahkan masalah tidak rutin (dengan memberikan 1 solusi atau lebih dari pemecahan

	<p>permasalahan dengan cara dan hasil yang tepat terhadap permasalahan tidak rutin yang telah diberikan)</p> <p>Membuat generalisasi (membuat kesimpulan solusi)</p>
--	---

G. Lokus Kendali

Konsep mengenai lokus kendali pertama kali dikemukakan oleh Julian Rotter seorang ahli dalam pembelajaran sosial. Menurut Rotter lokus kendali merupakan sebuah variabel kepribadian mengenai keyakinan tentang penyebab kesuksesan dan kegagalan yang dialami seseorang, terjadi karena adanya faktor internal atau faktor eksternal. Rotter juga menyatakan bahwa internal dan eksternal mewakili dua ujung kontinum, dalam artian ada kalanya seseorang mempunyai kecenderungan lokus kendali internal dan ada kalanya kecenderungan lokus kendali eksternal, jadi bukan secara terpisah.²⁷ Seseorang dengan lokus kendali internal cenderung menyatakan bahwa sebuah peristiwa berada pada kendali diri mereka sendiri, sedangkan seseorang dengan lokus kendali eksternal lebih cenderung menganggap faktor luar merupakan penyebab peristiwa yang terjadi pada diri mereka.

Menurut Petri, lokus kendali merupakan dimensi kepribadian yang berupa kontinum dari internal menuju eksternal²⁸. Kedua tipe lokus kendali terdapat pada setiap individu, hanya saja ada kecenderungan untuk memiliki salah satu tipe tertentu. Selain itu lokus kendali tidak bersifat statis tetapi juga dapat berubah. Hal tersebut disebabkan karena situasi dan kondisi yang menyertainya. Internalitas individu yang tinggi akan disertai dengan melemahnya eksternalitas, begitu juga sebaliknya. Berdasarkan kajian di atas maka pengertian lokus kendali adalah suatu sifat kepribadian

²⁷ Julian B. Rotter, *Generalized Expectancies for Internal Versus External control of Reinforcement*, (Psychological Monographs, 80 Whole no. 69, 1966).

²⁸ Petri, H.L., *Motivation: Theory and Research*, (California: Wadsworth Publishing Co, 1981), 89

seseorang dalam menginterpretasikan kesuksesan dan kegagalan yang dialami berasal dari faktor internal diri atau faktor eksternal.

Menurut konsep yang dikemukakan oleh Rotter mengenai lokus kendali, terdapat dua tipe yaitu lokus kendali internal dan lokus kendali eksternal. Menurut Crider terdapat perbedaan karakteristik diantara dua tipe tersebut, antara lain²⁹:

1. Lokus kendali internal

- a. Suka bekerja keras.
- b. Memiliki inisiatif yang tinggi.
- c. Selalu berusaha untuk menemukan pemecahan suatu masalah.
- d. Selalu mencoba untuk berpikir seefektif mungkin.
- e. Mempunyai persepsi bahwa usaha harus dilakukan jika ingin meraih kesuksesan.

2. Lokus kendali eksternal

- a. Kurang memiliki inisiatif.
- b. Mempunyai persepsi bahwa hanya ada sedikit korelasi antara usaha dan kesuksesan.
- c. Kurang suka berusaha, karena percaya bahwa kesuksesan dikontrol oleh faktor luar.
- d. Kurang mencari informasi untuk memecahkan suatu masalah.

Individu yang memiliki lokus kendali internal memiliki kecenderungan untuk lebih dalam melakukan suatu usaha serta sifat ambisi yang lebih dominan. Oleh karena itu, apabila mengalami kegagalan maka mereka akan menyalahkan dirinya sendiri karena kurangnya usaha yang dilakukan. Selain itu apabila mereka mengalami keberhasilan maka individu dengan lokus kendali internal ini akan merasa bangga atas pencapaian keberhasilan tersebut dan lebih menghargai prestasi yang telah mereka raih. Sebaliknya, individu yang memiliki lokus kendali eksternal akan cenderung menyalahkan lingkungan sekitar apabila mereka mengalami kegagalan, karena mereka percaya bahwa kesuksesan dan kegagalan disebabkan oleh faktor di luar diri mereka misalnya nasib.

²⁹ M. Nur Ghufroon & Rini Risnawati, *Teori-teori Psikologi*, (Yogyakarta: Ar-Ruzz Media, 2010), 23-24

Lokus kendali ini memiliki peranan bagi seseorang untuk menentukan tindakan yang akan dilakukan pada masa datang. Seseorang dengan lokus kendali internal akan lebih berusaha keras dan memaksimalkan kemampuannya untuk mencapai keberhasilan, sementara seseorang dengan lokus kendali eksternal lebih pasrah dan kurang usaha untuk memperbaiki kegagalan yang dialami karena merasa semua telah ditakdirkan.

H. Hubungan Kemampuan Berpikir Matematis dengan Lokus Kendali

Perbedaan-perbedaan yang ada pada setiap individu merupakan faktor psikologi yang mempengaruhi keberhasilan dan kegagalan dalam belajar matematika. Faktor yang dimaksud adalah lokus kendali siswa. Lokus kendali yang berbeda pada setiap siswa mempengaruhi pikiran-pikiran yang dikembangkannya ketika menyelesaikan soal matematika.

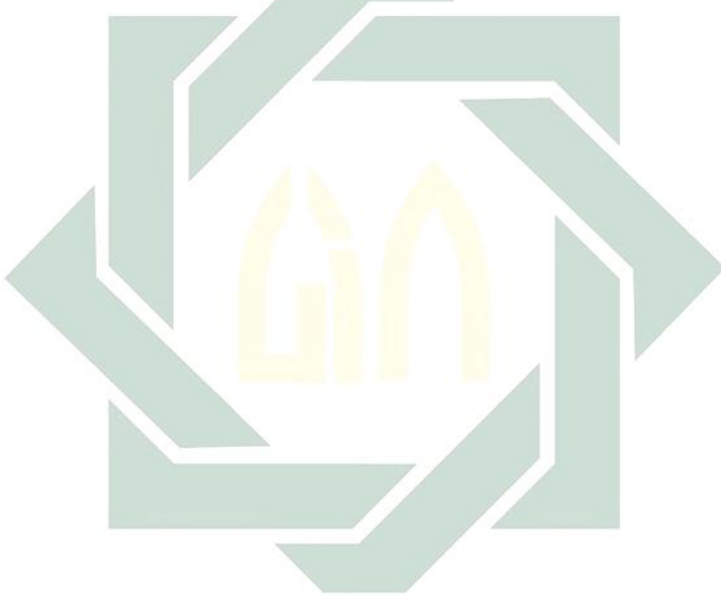
Beberapa peneliti mengasosiasikan lokus kendali internal dengan usaha yang aktif untuk mencapai tujuan, hal ini dimanifestasikan dalam bentuk tindakan mencari informasi serta pengambilan keputusan. Individu yang lebih memandang bahwa hidupnya ditentukan oleh perilakunya sendiri akan lebih percaya diri dan lebih gigih dalam menghadapi permasalahan, sebaliknya individu yang tidak berdaya, tertekan dan selalu memandang bahwa kehidupannya dikontrol oleh kekuatan eksternal (lokus kendali eksternal), akan menambah perasaan pasrah dalam dirinya³⁰. Kegagalan dalam menghadapi permasalahan matematika sebaiknya disikapi dengan kegigihan, ketekunan, serta tidak berputus asa. Mengingat matematika merupakan pelajaran yang sangat kompleks maka sikap tersebut haruslah dimiliki. Semakin tekun usaha yang dilakukan dalam menyelesaikan masalah matematika, maka kemampuan berpikir matematis juga dapat berkembang.

Terdapat beberapa penelitian mengenai lokus kendali. Penelitian pertama adalah penelitian dari Syarifah Wardatul Fitri yang menyimpulkan bahwa siswa dengan kecenderungan lokus kendali internal memiliki kemampuan koneksi matematis yang tinggi sedangkan siswa dengan kecenderungan lokus kendali

³⁰ Myers, E. G, *Social Psychology*, (Tokyo: McGraw Hill, 1983), 434

eksternal memiliki kemampuan koneksi matematis yang rendah³¹. Selain itu penelitian dari Setiawan juga memperoleh hasil bahwa penalaran matematis siswa dengan lokus kendali internal lebih baik dari siswa dengan lokus kendali eksternal³².

Koneksi dan penalaran matematis merupakan salah satu aspek penting yang mempengaruhi tingkat kemampuan berpikir matematis siswa. Dengan demikian, secara tidak langsung kecenderungan lokus kendali pada diri siswa memiliki hubungan terhadap kemampuan berpikir matematis.



³¹ Syarifah Wardatul Fitri, dkk, “Kemampuan Koneksi Matematis Ditinjau dari Lokus kendali dalam Soal Persamaan Garis Lurus di SMP”, (Jurnal Pendidikan dan Pembelajaran, Vol.5 No.1, 2016)

³² Setiawan, dkk, *Pengaruh Pendekatan Pembelajaran dan Lokus of Control terhadap Kemampuan Penalaran Matematika Siswa SMP*, (Medan: Jurnal Pendidikan Matematika PARADIKMA, Vol 5 Nomor 2)