K-ISOMORFISME DALAM K-ALJABAR

SKRIPSI

OLEH

FANNY DWI LESTARI

NIM.H92214026

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN SAINS

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL SURABAYA

SURABAYA

2018

PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: Fanny Dwi Lestari
NIM	: H92214026
Program Studi	: Matematika
Angkatan	: 2014

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul:

K-Isomorfisme dalam K-Aljabar.

Apabila suatu saat nanti terbukti saya melakukan tindakan plagiat, maka saya akan menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian pernyataan keaslian ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 25 Juli 2018

Fanny Dwi Lestari

NIM.H92214026

LEMBAR PENGESAHAN

K-ISOMORFISME DALAM K-ALJABAR

Disusun oleh
Fanny Dwi Lestari
NIM. H92214026

Telah dipertahankan di depan Dewan Penguji
Pada Tanggal 18 Juli 2018
Dan dinyatakan telah memenuhi syarat
untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika (S.Mat.)

Dewan Penguji

Penguji I	**Penguji II**
Dr. Moh. Hafiyusholeh, M.Si., M.Pmat.	**Ahmad Hanif Asyhar, M.Si.**
NIP. 198002042014031001	**NIP. 198601232014031001**
Penguji III	**Penguji IV**
Wika Dianita Utami, M.Sc.	**Putroue Keumala Intan, M.Si.**
NIP. 199206102018012003	**NIP. 198805282018012001**

Mengesahkan
Dekan Fakultas Sains dan teknologi
UIN Sunan Ampel Surabaya

Dr. Eni Purwati, M.Ag.
NIP. 196512211990022001

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL SURABAYA
PERPUSTAKAAN
Jl. Jend. A. Yani 117 Surabaya 60237 Telp. 031-8431972 Fax.031-8413300
E-Mail: perpus@uinsby.ac.id

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika UIN Sunan Ampel Surabaya, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : FANNY DWI LESTARI
NIM : H92214026
Fakultas/Jurusan : SAINTEK / SAINS/ MATEMATIKA
E-mail address : fannydl288@gmail.com

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah :
☑ Sekripsi ☐ Tesis ☐ Desertasi ☐ Lain-lain (……………………………)
yang berjudul :
K-ISOMORFISME DALAM K-ALJABAR

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan Hak Bebas Royalti Non-Ekslusif ini Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (database), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di Internet atau media lain secara ***fulltext*** untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Surabaya,

Penulis

(FANNY DWI L.)

K-ISOMORFISME DALAM K-ALJABAR

ABSTRAK

K-Aljabar $(G,\odot,*,e)$ merupakan suatu sistem yang dibangun atas suatu grup dengan elemen satuan $(G,*)$ dan operasi biner $\odot$, sehingga untuk setiap $x,y \in G$ didefinisikan $x \odot y = x * y^{-1}$ yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. K-Homomorfisme dalam K-Aljabar merupakan pemetaan φ dari K_1-Aljabar ke K_2-Aljabar yang memenuhi $\varphi(x_1 \odot y_1) = \varphi(x_1) \odot \varphi(y_1)$, untuk setiap $x_1, y_1 \in K_1$. Berdasarkan analisa yang telah dilakukan, diperoleh definisi dari K-Isomorfisme dalam K-Aljabar, yaitu K-Homomorfisme φ dari K_1-Aljabar ke K_2-Aljabar disebut sebagai K-Isomorfisme jika φ merupakan suatu pemetaan bijektif. Dengan mengadopsi konsep dari isomorfisme grup, terbukti bahwa beberapa konsep seperti teorema maupun proposisi juga berlaku pada K-Isomorfisme dalam K-Aljabar. Jika $(G,*,\odot,e)$ merupakan K-Aljabar, dan $\varphi: G \to G$ K-Isomorfisme, maka $\varphi^{-1}: G \to G$ merupakan K-Isomorfisme. Lebih lanjut, berlaku $\varphi(e_1) = e_1$, dan $\varphi(x^n) = [\varphi(x)]^n$, untuk $x \in (G,\odot)$ dan $x \in \mathbb{Z}^+$. Order dari sebarang elemen dalam K-Aljabar adalah bilangan bulat genap positif n, sedemikian sehingga $g^n = e$.

Kata kunci: Grup, K-Aljabar, K-Homomorfisme dalam K-Aljabar, K-Isomorfisme dalam K-Aljabar.

K-ISOMORPHISM ON K-ALGEBRA

ABSTRACT

K-Algebra $(G,*,\odot,e)$ is a system that built on a group with unit element $(G,*)$ and binary operation $\odot$, so that for every $x,y \in G$ defined as $x \odot y = x * y^{-1}$ and satisfies certain axioms. K-Homomorphism on K-Algebra that is a mapping φ from K_1-Algebra to K_2-Algebra that satisfies $\varphi(x_1 \odot y_1) = \varphi(x_1) \odot \varphi(y_1)$, for every $x_1, y_1 \in K_1$. Based on the result of analyzing, definition of K-Isomorphism on K-Algebra is obtained, that is K-Homomorphism φ from K_1-Algebra to K_2-Algebra is called K-Isomorphism if φ is bijective function. By adopting a concept of isomorphism group, it has been proven that some of concepts such as theorems and propositions also apply on K-Ismorphism on K-Algebra. If $(G,*,\odot,e)$ is a K-Algebra, and $\varphi: G \to G$ K-Isomorphism, then $\varphi^{-1}: G \to G$ is K-Isomorphism. Then, apply $\varphi(e_1) = e_1$, and $\varphi(x^n) = [\varphi(x)]^n$ for $x \in (G,\odot)$ ann $x \in \mathbb{Z}^+$. Order of any element in K-Algebra is an even positive integer n, so that $g^n = e$.

Keyword: Group, K-Algebra, K-Homomorphism on K-Algebra, K-Isomorphism on K-Algebra.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

f, φ	: Simbol fungsi
$(G,*)$	: Grup dengan operasi biner $*$
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan real
$\mathbb{Z}$	: Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Q}$	: Himpunan bilangan rasional
$\in$	: Elemen atau anggota
$*$	: Operasi biner $*$
$\odot$	: Operasi biner $\odot$
e	: Identitas
$(G,*,\odot,e)$	: K-Aljabar
$\forall$	: Untuk setiap
$\blacksquare$	: Akhir pembuktian teorema

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Matematika merupakan suatu ilmu pengetahuan yang telah lama ada. Hal ini terbukti bahwa pada saat penciptaan alam semesta oleh Allah SWT, dimana dalam penciptaannya, Allah telah mengukur dengan tepat dan akurat. Kemudian oleh manusia diubah menjadi rumus-rumus serta persamaan-persamaan yang merupakan hasil penyimbolan dari fenomena-fenomena yang terjadi pada dunia nyata.

Di dalam matematika terdapat beberapa subkeilmuan, seperti kalkulus, aljabar, statistika, dll. Salah satu subkeilmuan dalam matematika yang mempelajari pembuktian adalah aljabar yang merupakan manipulasi dari simbol-simbol yang terdapat di dalam matematika. Sebagai salah satu subkeilmuan dalam matematika, aljabar juga mempunyai subkeilmuan, salah satu di antaranya yaitu aljabar abstrak.

Aljabar abstrak atau struktur aljabar merupakan suatu himpunan yang tidak kosong H dengan operasi biner pada H (Sadieda, 2014). Beberapa sistem dalam aljabar yang sering dipelajari dan diketahui antara lain adalah grup, ring, field, dll. Selain itu masih terdapat banyak sistem dalam struktur aljabar, salah satunya adalah K-Aljabar.

K-Aljabar diperkenalkan pertama kali oleh Dar dan Akram dalam tulisannya yang berjudul *On a K-Algebra Built on a Group* pada tahun 2005.

Dar dan Akram menggali konsep grup dalam aljabar yang jika ditambahkan dengan operasi biner ternyata menghasilkan suatu konsep baru, yaitu K-Aljabar yang memuat definisi, sifat-sifat, serta beberapa teorema. K-Aljabar merupakan struktur aljabar yang dibangun dari suatu grup G, dengan e adalah elemen identitas pada G untuk setiap $x, y \in G$ (Dar & Akram, 2005). Adapun operasi biner yang digunakan adalah operasi biner $\odot$, yang didefinisikan sebagai $x \odot y = x * y^{-1} = xy^{-1}$ untuk setiap $x, y \in G$ dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Sedangkan menurut Afifah (2013), K-Aljabar merupakan struktur aljabar yang dibangun dari suatu grup, sehingga sifat-sifat yang berlaku pada grup juga akan berlaku pada K-Aljabar.

Apabila di dalam grup terdapat konsep Subgrup, Homomorfisme, Isomorfisme, maka dalam K-Aljabar akan berlaku pula konsep yang ada di grup, yaitu K-Subaljabar, K-Homomorfisme, dan K-Isomorfisme. Adapun K-Homomorfime dalam K-Aljabar telah diteliti oleh Iswati & Suryoto (2015) dalam jurnal berjudul K-Aljabar yang berisi penurunan definisi serta aksioma-aksioma dalam K-Aljabar yang diturunkan dari konsep grup. Sebagaimana yang dinyatakan oleh Afifah (2013), bahwa dalam K-Aljabar berlaku pula sifat-sifat yang terdapat dalam grup. Namun demikian, sampai saat ini, penelitian yang membahas mengenai K-Aljabar baru sampai pada konsep K-Subaljabar dan K-Homomorfisme, belum ada pembahasan mengenai konsep K-Isomorfisme.

Sehingga pada penelitian ini akan dikaji dan dibuktikan konsep K-Isomorfisme dalam K-Aljabar serta beberapa sifat-sifat dan teorema yang berkaitan untuk melengkapi struktur aljabar atas K-Aljabar. Sehingga peneliti tertarik untuk mengambil suatu judul yaitu **"K-Isomorfisme dalam K-Aljabar".**

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah dari peneitian ini, maka dapat disusun rumusan masalah sebagai berikut.

1. Apa yang dimaksud dengan K-Isomorfisme dalam K-Aljabar?
2. Bagaimana sifat-sifat K-Isomorfisme dalam K-Aljabar?

C. Tujuan Penelitian

Sesuai dengan latar belakang yang telah diuraikan, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui apa yang dimaksud dengan K-Isomorfisme dalam K-Aljabar, baik mengenai definisi maupun teorema-teorema yang terkait.
2. Untuk menunjukkan sifat-sifat dari K-Isomorfisme dalam K-Aljabar.

D. Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian mengenai K-Isomorfisme dalam K-Aljabar diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut.

1. Menambah pengetahuan dan keilmuan mengenai konsep-kosep dalam K-Aljabar khususnya K-Isomorfisme.
2. Melengkapi struktur keilmuan dalam aljabar, khususnya yang berkaitan dengan K-Isomorfisme dalam K-Aljabar.

E. Metode Penelitian

Penelitian ini tergolong ke dalam jenis penelitian deskriptif kualitatif, karena penelitian ini menguraikan dan menggambarkan proses penurunan definisi dan sifat-sifat K-Isomorfisme dalam K-Aljabar dari konsep yang diadopsi dari grup. Dengan kata lain, penelitian ini juga dapat dikategorikan sebagai penelitian jenis kajian pustaka yang merupakan serangkaian proses yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca, mencatat serta mengolah bahan koleksi berupa buku maupun jurnal tanpa riset lapangan (Mestika, 2004).

Data yang digunakan pada penelitian ini berasal dari jurnal, buku, serta sumber referensi lain yang dapat mendukung. Selain itu, digunakan digunakan pula data yang diperoleh dari referensi-referensi mengenai Aljabar, khususnya konsep yang berkaitan dengan K-Aljabar. Dari berbagai literatur yang telah dikumpulkan, kemudian dilakukan analisis mengenai K-Aljabar serta penurunannya, selain itu juga dilakukan analisis terhadap K-Homomorfisme dalam K-Aljabar sehingga diperoleh penurunan sifat atau teorema yang dapat diterapkan dalam K-Isomomorfisme dalam K-Aljabar.

F. Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan dalam penyusunan skripsi ini adalah sebagai berikut.

BAB I: PENDAHULUAN

Bab ini memuat latar belakang penelitian, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan skripsi.

BAB 2: TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini terdapat penjelasan teori tentang sistem, antara lain teori fungsi, operasi biner, grup, sifat-sifat dari grup, Subgrup, Homomorfisme dalam grup, Isomorfisme, K-Aljabar, K-Subaljabar, K-Homomorfisme dalam K-Aljabar, serta integrasi keilmuan.

BAB III: PEMBAHASAN

Pada bagian ini terdapat penjelasan hasil analisis dari konsep K-Monomorfisme, K-Epimorfisme, serta K-Isomorfisme dalam K-Aljabar, yang memuat definisi, contoh, Teorema K-Isomorfisme, serta beberapa sifat dari K-Isomorfisme dalam K-Aljabar.

BAB IV: PENUTUP

Bab ini memuat simpulan dan saran dari hasil penelitian yang telah diperoleh.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa teori pendukung yang memuat definisi-definisi serta teorema-teorema yang sangat menunjang, dan juga sebagai pokok pembahasan dalam penelitian ini. Teori-teori penunjang dalam penelitian ini antara lain yaitu teori fungsi, operasi biner, grup, sifat-sifat dari grup, Subgrup, Homomorfisme grup, Isomorfisme grup, K-Aljabar, K-Subaljabar, K-Homomorfisme dalam K-Aljabar, serta integrasi keilmuan.

A. Fungsi

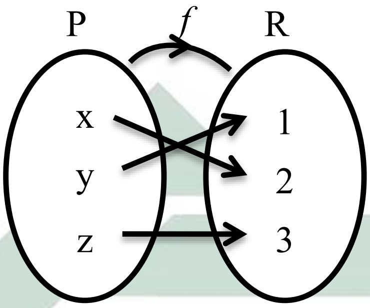
Definisi 2.1

Jika terdapat dua himpunan yaitu himpunan M dan N, maka fungsi atau pemetaan dari himpunan M ke himpunan N adalah himpunan *f* pada pasangan terurut di $M \times N$, sedemikian sehingga untuk setiap $x \in M$ terdapat tepat satu $y \in N$ dengan $(x, y) \in f$ (Bartle, 2010).

Fungsi dari himpunan M ke himpunan N dinotasikan dengan $f: M \longrightarrow N$ yang menunjukkan bahwa *f* adalah fungsi dari himpunan M ke himpunan N, atau pemetaan dari M ke N. Himpunan M pada anggota pertama di *f* disebut sebagai *domain* (daerah asal) dan dinotasikan dengan $D(f)$. Himpunan semua elemen kedua di *f* disebut sebagai *range* (daerah hasil) dan dinotasikan dengan $R(f)$.

Contoh 2.1

Misalkan $P = \{x, y, z\}$ dan $R = \{1,2,3\}$. Pemetaan P ke R,$f: P \to R$ ditunjukkan pada diagram fungsi ($f: P \to R$) berikut.



Gambar 2.1. Diagram fungsi ($f: P \to R$)

Sehingga diperoleh himpunan $f = \{(x, 2), (y, 1), (z, 3)\}$ yang merupakan pemetaan (fungsi) dari P ke R.

Berikut merupakan macam-macam fungsi.

Definisi 2.2

Fungsi $f : M \to N$ dikatakan injektif atau fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in M$ dengan $f(a) = f(b)$ berlaku $a = b$ (Sadieda, 2014).

Contoh 2.2

Diketahui fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(a) = a^3$. Fungsi f disebut sebagai fungsi injektif karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $f(a) = f(b)$ maka $a^3 = b^3$ sehingga berlaku $a = b$. Sedangkan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(m) = m^2$ bukan suatu fungsi injektif karena terdapat $-2, 2 \in \mathbb{R}$ dan $-2 \neq 2$ tetapi $f(-2) = (-2)^2 = 4 = 2^2 = f(2)$.

Definisi 2.3

Fungsi f disebut sebagai fungsi surjektif jika dan hanya jika untuk setiap $b \in N$ terdapat $a \in M$, sedemikian sehingga $b = f(a)$ (Sadieda, 2014).

Contoh 2.3

Diketahui fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(a) = a$. Fungsi *f* disebut sebagai fungsi surjektif, karena untuk setiap $b \in \mathbb{R}$ terdapat $a \in \mathbb{R}$ sehingga berlaku $f(a) = b = a$. Sedangkan pemetaan atau fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan definisi pemetaan $f(a) = a^2$ bukan merupakan fungsi surjektif karena untuk $-2 \in \mathbb{R}$ tidak ada $a \in \mathbb{R}$ sehingga $f(a) = a^2 = -2$.

Definisi 2.4

Fungsi *f* disebut sebagai fungsi bijektif jika *f* merupakan fungsi injektif dan *f* merupakan fungsi surjektif (Sadieda, 2014).

Contoh 2.4

Fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(a) = a^3$ merupakan pemetaan atau fungsi bijektif.

Bukti

Untuk membuktikan fungsi f merupakan bijektif, maka harus ditunjukkan bahwa fungsi f merupakan fungsi injektif dan fungsi surjektif.

1. Dalam contoh 2, telah ditunjukkan bahwa f merupakan fungsi injektif.
2. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa f merupakan fungsi surjektif.

   Misal ambil sebarang $y \in \mathbb{R}$, terdapat $x \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $f(x) = y$. Sebagai contoh untuk $-8 \in \mathbb{R}$, terdapat $-2 \in \mathbb{R}$, sehingga $f(-2) = (-2)^3 = -8$. Karena memenuhi $f(x) = y$, maka f merupakan fungsi surjektif.

Karena telah ditunjukkan bahwa f merupakan fungsi injektif dan fungsi surjektif, maka terbukti bahwa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(a) = a^3$ merupakan fungsi bijektif.

B. Operasi Biner

Operasi biner merupakan suatu operasi yang berlaku dalam konsep grup. Berikut adalah pengertian dari operasi biner.

Definisi 2.5

Jika terdapat suatu himpunan G. Operasi biner pada G adalah pemetaan atau fungsi yang memetakan setiap pasangan terurut dari elemen G ke elemen pada G (Gallian, 2010).

Selain itu, apabila terdapat G yaitu himpunan yang tak kosong. Operasi bintang $(*)$ pada anggota-anggota G disebut sebagai operasi biner, jika untuk setiap dua anggota $a, b \in G$, maka $(a * b) \in G$ atau dapat dikatakan pula bahwa operasi $*$ merupakan pemetaan atau fungsi dari himpunan $G \times G$ ke himpunan G. Operasi $*$ pada G merupakan operasi biner, dapat dikatakan pula bahwa operasi $*$ pada G bersifat tertutup (Sukirman, 2005).

Contoh 2.5

1. Operasi $(\div)$ pada himpunan $\mathbb{Q} - \{0\}$, $\mathbb{C} - \{0\}$, dan $\mathbb{R} - \{0\}$ merupakan operasi biner, karena setiap anggota dalam himpunan $\mathbb{Q} - \{0\}$, $\mathbb{C} - \{0\}$, dan $\mathbb{R} - \{0\}$ jika dikenai operasi biner $(\div)$, maka bersifat tertutup, atau merupakan elemen dari himpunan tersebut pula.

2. Operasi $(\div)$ pada himpunan $\mathbb{Z}$ bukan mrupakan operasi biner, karena ketika diambil sebarang 2 anggota dari $\mathbb{Z}$, misal $2,3 \in \mathbb{Z}$, maka ketika dikenai operasi $(\div)$ bukan merupakan elemen dari $\mathbb{Z}$, yaitu $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

C. Grup

Grup merupakan salah satu sistem yang paling sederhana yang terdapat dalam aljabar abstrak atau struktur aljabar.

Definisi 2.6

Suatu struktur aljabar $(G,*)$ yang terdiri dari himpunan tidak kosong G dan operasi biner $*$ yang terdefinisi di dalamnya disebut grup, apabila memenuhi sifat berikut ini.

1. Tertutup

   Untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $a * b \in G$
2. Asosiatif

   $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk setiap $a, b, c \in G$
3. Identitas

   Terdapat suatu elemen $e \in G$ sehingga $e * x = x * e = x$ untuk setiap $x \in G$
4. Invers

   Untuk setiap $a \in G$, terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

   (Raisinghania & Aggarwal, 1980).

Grup terhadap operasi $*$ biasanya ditulis dengan $(G,*)$. Tetapi ada juga buku yang hanya menuliskan G untuk merepresentasikan grup terhadap operasi $*$.

Berikut beberapa contoh dari himpunan yang merupakan grup dan bukan grup.

Contoh 2.6

1. Himpunan bilangan bulat ($\mathbb{Z}$), himpunan bilangan real ($\mathbb{R}$), dan himpunan bilangan kompleks ($\mathbb{C}$), masing-masing adalah grup terhadap operasi penjumlahan $(+)$.
2. Himpunan bilangan bulat ($\mathbb{Z}$) terhadap operasi perkalian $(\times)$ bukan merupakan grup, karena tidak memenuhi satu aksioma yaitu invers,yaitu untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, tidak terdapat $\frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$ sebagai invers dari a sehingga $a \times \frac{1}{a} = e$. Sebagai contoh, $2 \in \mathbb{Z}$, akan tetapi $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ yang berlaku $2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.
3. Jika terdapat himpunan G yang merupakan himpunan bilangan rasional dengan

$$G = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Q}\}$$

Operasi biner pada G adalah penjumlahan, maka$(G, +)$ merupakan suatu grup.

Bukti

Diketahui $G = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Q}\}$ dengan operasi penjumlahan, akan ditunjukkan $(G, +)$ memenuhi 4 aksioma grup berikut.

Ambil sebarang $p, r, s \in G$ dengan

$p = a + b\sqrt{2}$, dimana a dan $b \in \mathbb{Q}$

$r = c + d\sqrt{2}$, dimana c dan $d \in \mathbb{Q}$

$s = e + f\sqrt{2}$, dimana e dan $f \in \mathbb{Q}$

1. Untuk setiap $p, r \in G$, maka

$$p + r = \left(a + b\sqrt{2}\right) + \left(c + d\sqrt{2}\right)$$

$$= (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

Karena $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, maka $(a + c) \in \mathbb{Q}$ dan $(b + d) \in \mathbb{Q}$.

Jadi $p + r \in G$, terbukti memenuhi sifat tertutup.

2. Untuk setiap $p, r, s \in G$, berlaku

$$p + (r + s) = \left(a + b\sqrt{2}\right) + \left[\left(c + d\sqrt{2}\right) + \left(e + f\sqrt{2}\right)\right]$$

$$= \left(a + b\sqrt{2}\right) + \left[(c + e) + \left(d\sqrt{2} + f\sqrt{2}\right)\right]$$

$$= a + b\sqrt{2} + \left[(c + e) + (d + f)\sqrt{2}\right]$$

$$= (a + c + e) + (b + d + f)\sqrt{2}$$

$$= \left[(a + c) + (b + d)\sqrt{2}\right] + \left(e + f\sqrt{2}\right)$$

$$= \left[\left(a + b\sqrt{2}\right) + \left(c + d\sqrt{2}\right)\right] + \left(e + f\sqrt{2}\right)$$

$$= (p + r) + s$$

Karena terbukti bahwa $p + (r + s) = (p + r) + s$, maka terbukti pula memenuhi sifat asosiatif.

3. Identitas

Untuk setiap $a + b\sqrt{2}$, terdapat e sebagai elemen identitas yaitu $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in G$ dengan $0 \in \mathbb{Q}$, sedemikian sehingga untuk setiap $a + b\sqrt{2}$, berlaku:

$$\left(a + b\sqrt{2}\right) + 0 = \left(a + b\sqrt{2}\right) + \left(0 + 0\sqrt{2}\right)$$

$$= (a + 0) + \left(0 + b\sqrt{2}\right)$$

$$= a + b\sqrt{2}$$

Karena $(a + b\sqrt{2}) + e = (a + b\sqrt{2}) + 0 = a + b\sqrt{2}$, maka terbukti memenuhi sifat identitas.

4. Invers

   Untuk setiap a dan $b \in \mathbb{Q}$ terdapat $-a$ dan $-b \in \mathbb{Q}$. Sehingga untuk setiap $a + b\sqrt{2} \in G$ terdapat $-a - b\sqrt{2} \in G$ sebagai unsur balikan (invers), sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}\left(a + b\sqrt{2}\right) + \left(-a - b\sqrt{2}\right) = \left(-a - b\sqrt{2}\right) + \left(a + b\sqrt{2}\right) &= (-a + a) + \left(-b\sqrt{2} + b\sqrt{2}\right) \\ &= (-a + a) + (-b +)\sqrt{2} \\ &= 0 + 0\sqrt{2}\end{aligned}$$

   Jadi elemen invers dari $a + b\sqrt{2} \in G$ adalah $-a - b\sqrt{2} \in G$. Dan terbukti memenuhi invers.

Karena memenuhi 4 aksioma di atas, yaitu tertutup, asosiatif, identitas, dan invers, maka himpunan G terhadap operasi penjumlahan $(G, +)$ merupakan grup.

Setelah mengetahui definisi serta aksioma-aksioma untuk membuktikan suatu grup, selanjutnya akan dibahas mengenai sifat-sifat yang berlaku dalam grup. Berikut adalah sifat-sifat yang terdapat dalam teori tentang grup.

D. Sifat-sifat Grup

Sebagai akibat dari definisi grup, jika terdapat persamaan $ex = b$, maka akan mempunyai penyelesaian dalam suatu grup yaitu $x = eb$ yang merupakan salah satu sifat grup yang dinyatakan dalam teorema sebagai berikut.

Teorema 2.1

Jika G merupakan suatu grup, maka elemen identitasnya tunggal (Gallian, 2010).

Bukti

Andaikan elemen identitas di G tidak tunggal. Misalkan e dan f menyatakan elemen identitas di grup G, maka:

$$ae = ea = a \text{ untuk setiap } a \in G \ldots(i)$$

$$af = fa = a \text{ untuk setiap } a \in G \ldots(ii)$$

Dari persamaan (i) dan karena $f \in G$maka $ef = f$. Sebaliknya, dari persamaan (ii) dan karena $e \in G$ maka $ef = e$. Sehingga diperoleh $ef = e = f$. Jadi, terbukti bahwa $e = f$, dengan kata lain elemen identitas di grup G adalah tunggal.

Selain itu, masih terdapat beberapa sifat dalam grup yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.2

Pada sebarang grup, berlaku sifat-sifat sebagai berikut.

1. Hukum kanselasi kanan.

   Jika $xa = ya$, maka $x = y$.

2. Hukum kanselasi kiri.

   Jika $ax = ay$, maka $x = y$.

Bukti

Diberikan $xa = ya$. Misal a' adalah invers dari a. Maka perkalian pada sisi kanan oleh a' menghasilkan

$$(xa)a' = (ya)a'$$

$$x(aa') = y(aa') \qquad \text{(Assosiatif)}$$

$$x(e) = y(e) \qquad \text{(Invers)}$$

$$x = y \qquad \text{(Identitas)}$$

Jadi terbukti berlaku sifat kanselasi kanan. Dengan cara yang hampir sama, dapat ditunjukkan pula kebenaran dari hukum kanselasi kiri.

Selanjutnya berlaku sifat ketunggalan invers dan identiras yang ditunjukkan oleh teorema berikut.

Teorema 2.3

Untuk setiap elemen dalam grup G, hanya mempunyai invers tunggal di G.

Bukti

Misalkan e elemen identitas di G, ambil sebarang $p \in G$ dengan invers tidak tunggal yaitu q dan r, maka berlaku $pq = qr = e$ dan $pr = rp = e$.

Sedemikian sehingga

$$q = qe = q(pr) = (qp)r = er = r$$

Jadi, $q = r$. Terbukti bahwa setiap elemen dalam grup G hanya mempunyai invers tunggal.

Teorema 2.4

Jika G suatu grup, maka untuk setiap $m \in G$ berlaku $m = (m^{-1})^{-1}$.

Bukti

Ambil sebarang $m \in G$ dan e sebagai elemen identitas di G. Karena m^{-1} merupakan invers dari m, maka diperoleh $mm^{-1} = m^{-1}m = e$. Selanjutnya

$$mm^{-1} = e$$

$$(mm^{-1})(m^{-1})^{-1} = e(m^{-1})^{-1}$$

$$m[(m^{-1})(m^{-1})^{-1}] = (m^{-1})^{-1} \quad \text{(Assosiatif, identitas)}$$

$$me = (m^{-1})^{-1} \quad \text{(Invers)}$$

$$m = (m^{-1})^{-1} \quad \text{(Identitas)}$$

Jadi terbukti bahwa $m = (m^{-1})^{-1}$.

Suatu sistem dalam aljabar yang besar dapat mengandung sistem bagian yang lebih kecil. Seperti halnya pada grup, terdapat sebuah sistem lagi yang menjadi bagian lebih kecil yaitu subgrup. Berikut definisi dari subgrup.

E. Subgrup

Pada suatu grup $(\mathbb{R}, +)$ terdapat grup yang lebih kecil, antara lain $(\mathbb{Q}, +)$ dan $(\mathbb{Z}, +)$. Sebagaimana di dalam grup $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{ 0 \}$ terdapat $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{ 0\}$ sebagai subgrup. Beberapa contoh di atas menunjukkan bahwa selain sistem tertentu juga dipelajari sistem bagian (subsistem) sehingga dalam konsep atau sistem grup dibahas pula tentang sistem bagiannya yang disebut sebagai subgroup atau grup bagian.

Definisi 2.7

Misalkan G adalah suatu grup, maka grup bagian (subgrup) H dari grup G adalah himpunan bagian dari G yang tidak kosong dan merupakan grup dengan operasi yang sama dengan grup G yang dibatasi pada H. Jika H adalah subgrup dari G, maka dapat ditulis dengan $H \subseteq G$ (Gallian, 2010).

Teorema 2.5

H dikatakan subgrup atau grup bagian dari grup G, jika dan hanya jika

1. Untuk setiap $a, b \in H$, berlaku $ab \in H$ (sifat tertutup)
2. Untuk setiap $a \in H$, berlaku $a^{-1} \in H$ (sifat invers)

Bukti

(⇒) Diketahui H subgrup dari grup G

Akan ditunjukkan:

1. Untuk setiap $a, b \in H$, berlaku $ab \in H$ (sifat tertutup)
2. Untuk setiap $a \in H$, berlaku $a^{-1} \in H$ (sifat invers)

Karena H subgrup maka pasti memiliki sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas dan juga elemen invers.

(⇐) Diketahui:

1. Untuk setiap $a, b \in H$, berlaku $ab \in H$ (sifat tertutup)
2. Untuk setiap $a \in H$,terdapat$a^{-1} \in H$ (sifat invers)

Akan ditunjukkan bahwa H subgrup dari G.

a) Dari syarat 1, terbukti bahwa H memiliki sifat tertutup.

b) Memenuhi sifat asosiatif, karena setiap anggota dalam H juga merupakan anggota pada grup G.

c) Syarat 2 menunjukkan bahwa H memiliki invers.

d) Untuk setiap $a \in H$, terdapat $a^{-1} \in H$ sedemikian sehingga $aa^{-1} = e \in H$. Jadi terbukti memiliki elemen identitas.

Jadi terbukti bahwa H disebut sebagai subgroup atau grup bagian dari grup G jika dan hanya jika memenuhi sifat tertutup dan memiliki invers.

Contoh 2.7

Misalkan $2\mathbb{Z} = \{2n|n \in \mathbb{Z}\} = \{0,2,-2,4,-4,\dots\}$ dengan grup $\mathbb{Z}$ bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan (+), maka $2\mathbb{Z}$ merupakan grup bagian (subgrup) dari $\mathbb{Z}$.

Bukti

Akan ditunjukkan grup ($2\mathbb{Z}$,+) merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}$.

Ambil sebarang $p, q, r \in 2\mathbb{Z}$, maka $p = 2m$ dan $q = 2n$, untuk $m, n \in \mathbb{Z}$.

1. $2\mathbb{Z}$ bukan himpunan kosong. Karena terdapat elemen dalam $2\mathbb{Z}$, yaitu $0 = 2(0)$.
2. $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$, karena setiap anggota $2\mathbb{Z}$ juga merupakan anggota $\mathbb{Z}$.
3. Tertutup

   $p + q = 2m + 2n = 2(m + n) \in 2\mathbb{Z}$.

   Karena $m, n \in \mathbb{Z}$, maka $(m + n) \in \mathbb{Z}$. Jadi $p + q \in 2\mathbb{Z}$, terbukti bersifat tertutup.
4. Invers

   Untuk setiap $p \in 2\mathbb{Z}$ dengan $p = 2m$, terdapat $q = 2(-m) = -2m \in 2\mathbb{Z}$, sehingga berlaku

   $$p + q = 2m + (-2m) = 2m - 2m = 0 = e$$

   Jadi, terbukti memenuhi sifat invers.

Karena $2\mathbb{Z}$ memenuhi operasi yang sama dengan grup $\mathbb{Z}$, maka dapat dibuktikan bahwa bilangan genap $2\mathbb{Z}$ merupakan grup bagian (subgroup).

F. Homomorfisme

Kata homomorfisme terdiri dari kata *homo* yaitu suka, dan *morphe* yang memiliki arti bentuk. Homomorfisme merupakan bentuk umum yang asli pada isomorfisme dan terdapat hubungan yang erat antaragrup-grup faktor pada grup dan homomorfisme grup. Definisi homomorfisme menurut Gallian (2010) adalah sebagai berikut.

Definisi 2.8

Misal $(G,*)$ dan $(H,\cdot)$ adalah suatu grup. Fungsi atau pemetaan $f: G \rightarrow H$ disebut homomorfisme grup, jika fungsi f memenuhi operasi $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$ untuk setiap $x, y \in G$ (Gallian, 2010).

Contoh 2.8

Misalkan terdapat grup bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan $(\mathbb{Z}, +)$ dan grup bilangan real taknol terhadap operasi perkalian $(\mathbb{R} - \{0\},\times)$. Diberikan φ yang merupakan pemetaan dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{R} - \{0\}$ atau $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ dengan $\varphi(m) = 2^m$.

Ambil sebarang $m, n \in \mathbb{Z}$, sedemikian sehingga

$$\varphi(m + n) = 2^{m+n} = 2^m 2^n = \varphi(m)\varphi(n)$$

Karena untuk setiap $m, n \in \mathbb{Z}$ berlaku $\varphi(m + n) = \varphi(m)\varphi(n)$, maka terbukti bahwa pemetaan φ dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{R} - \{0\}$ atau $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ merupakan homomorfisme.

Terdapat beberapa definisi pada konsep homomorfisme grup pada fungsi f, yaitu:

a. Jika pemetaan atau fungsi f surjektif (onto), maka homomorfisme f yang memetakan G ke H disebut epimorfisme.

b. Jika pemetaan atau fungsi f injektif (satu-satu), maka homomorfisme f yang memetakan G ke H disebut monomorfisme.

c. Jika pemetaan atau fungsi f surjektif dan injektif, maka homomorfisme f yang memetakan G ke H disebut isomorfisme.

Definisi 2.9

Diketahui G, G' adalah grup, dan $\varphi: G \rightarrow G'$ merupakan homomorfisme grup. Pemetaan φ disebut monomorfisme grup jika dan hanya jika φ merupakan fungsi satu-satu dari G ke G'. Dengan kata lain, jika $\varphi(x) = \varphi(y)$ maka $x = y$ untuk $x, y \in G$ (Redfield, 2001).

Definisi 2.10

Diketahui G, G' adalah grup, dan fungsi $\varphi: G \rightarrow G'$ merupakan homomorfisme grup. Fungsi φ disebut epimorfisme grup jika setiap $g \in G'$ terdapat $g \in G$ sehingga $\varphi(g) = g'$. Dengan kata lain, setiap anggota G' mempunyai kawan anggota G. Dapat pula dikatakan bahwa homomorfisme φ dari G ke G' (G onto G') atau dapat disingkat homomorfisme φ onto (Redfield, 2001).

Definisi 2.11

Diberikan grup G dan G'. Homomorfisme $f: G \rightarrow G'$ disebut isomorfisme jika f bersifat injektif dan surjektif. Lebih khusus, ditulis $G \sim G'$, dikatakan bahwa G isomorfik dengan G' (Gallian, 2010).

Contoh 2.9

Misal G grup semua bilangan bulat dengan operasi penjumlahan, dan $G^{'}$ grup semua bilangan bulat genap dengan operasi penjumlahan. Didefinisikan fungsi $\varphi: G \to G^{'}$ dengan $\varphi(p) = 2p$.

Bukti

a. Akan dibuktikan φ merupakan homomorfisme dari G ke $G^{'}$.

   Ambil sebarang $p, q \in G$, maka

$$\varphi(p + q) = 2(p + q) = 2p + 2q = \varphi(p) + \varphi(q)$$

   Jadi terbukti bahwa φ adalah pemetaan homomorfisme dari G ke $G^{'}$.

b. Akan dibuktikan φ merupakan pemetaan injektif.

   Ambil sebarang $p, q \in G$, maka $\varphi(p) = 2p$ dan $\varphi(q) = 2q$. Oleh karena

$$\varphi(p) = \varphi(q)$$

$$2p = 2q$$

$$p = q$$

   maka terbukti bahwa φ merupakan pemetaan injektif.

c. Akan dibuktikan φ adalah pemetaan surjektif.

   Ambil sebarang $q \in G'$. Andaikan $q = 2p$, maka $p = \frac{q}{2}$.

   Oleh karena untuk $q \in G'$ maka $\frac{q}{2} \in G^{'}$ dengan kata lain $p \in G'$.

   Jadi untuk setiap $q \in G'$ $\exists$ $p = \frac{q}{2} \in G'$, sedemikian sehingga

$$\varphi(p) = \varphi\left(\frac{q}{2}\right) = 2\left(\frac{q}{2}\right) = q$$

   Terbukti bahwa φ merupakan pemetaan surjektif.

Karena φ merupakan pemetaan homomorfisme dari grup G ke $G^{'}$ dan pemetaan injektif dan surjektif, maka terbukti bahwa φ merupakan isomorfisme dari G ke $G^{'}$.

G. K-Aljabar

K-Aljabar merupakan suatu struktur aljabar yang dibangun atas suatu grup, sehingga sifat-sifat yang berlaku pada grup juga akan berlaku pada K-Aljabar (Iswati & Suryoto, 2010). Berikut ini adalah definisi dari K-Aljabar.

Definisi 2.12

Misalkan $(G,*)$ suatu grup dan pada grup G didefinisikan operasi $\odot$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in G, x \odot y = x * y^{-1}$ maka akan membentuk suatu struktur aljabar baru yaitu $(G,*,\odot,e)$. Suatu $(G,*,\odot,e)$ dinamakan K-Aljabar jika G adalah bukan grup dengan order-2 dan untuk setiap $x, y, z \in G$ berlaku:

1. $(x \odot y) \odot (x \odot z) = \{x \odot [(e \odot z) \odot (e \odot y)]\} \odot x$,
2. $x \odot (x \odot y) = [x \odot (e \odot y)] \odot x$,
3. $x \odot x = e$,
4. $x \odot e = x$,
5. $e \odot x = x^{-1}$,

(Dar & Akram, 2005).

Berikut merupakan contoh dari K-Aljabar.

Contoh 2.10

Misalkan $(\mathbb{Z},+)$ adalah suatu grup dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada grup $\mathbb{Z}$, sehingga untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka $a \odot b = a + b^{-1} = a + (-b)$. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}, +, \odot, 0)$ adalah K-Aljabar.

Bukti

Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku:

1. $(a \odot b) \odot (a \odot c) = \big(a + (-b)\big) \odot \big(a + (-c)\big)$

$$= [a + (-b)] + \{-[a + (-c)]\}$$

$$= (a - b) + [-a + c]$$

$$= a - b - a + c$$

$$= a - b + c - a$$

$$= a - b + c + (-a)$$

$$= (a - b + c) \odot a$$

$$= \{a + [-(-c + b)]\} \odot a$$

$$= [a \odot (-c + b)] \odot a$$

$$= [a \odot (e - e - c + b)] \odot a$$

$$= \{a \odot [(e - c) + (-(e - b))]\} \odot a$$

$$= \Big\{a \odot \Big[\big(e + (-c)\big) + \Big(-\big(e + (-b)\big)\Big)\Big]\Big\} \odot a$$

$$= \{a \odot [\big(e + (-c)\big) \odot \big(e + (-b)\big)]\} \odot a$$

$$= \{a \odot [(e \odot c) \odot (e \odot b)]\} \odot a$$

Jadi terbukti memenuhi aksioma pertama, yaitu $(a \odot b) \odot (a \odot c) = \{a \odot [(e \odot c) \odot (e \odot b)]\} \odot a$.

2. $a \odot (a \odot b) = a \odot [a + (-b)]$

$$= a + \{-[a + (-b)]\}$$

$$= a + (-a + b)$$

$$= a - a + b$$

$$= a - a - e + b$$

$$= (a - e + b) - a$$

$$= (a - e + b) + (-a)$$

$$= (a - e + b) \odot a$$

$$= [a - (e - b)] \odot a$$

$$= \{a + [-(e - b)]\} \odot a$$

$$= \{a + [-(e + (-b))]\} \odot a$$

$$= \{a + [-(e \odot b)]\} \odot a$$

$$= [a \odot (e \odot b)] \odot a$$

Jadi terbukti memenuhi aksioma kedua, yaitu $a \odot (a \odot b) = [a \odot (e \odot b)] \odot a$.

3. $a \odot a = a + (-a)$

$$= a - a$$

$$= 0$$

Jadi terbukti memenuhi aksioma ketiga, yaitu $a \odot a = 0$.

4. $a \odot 0 = a + 0$

$$= a$$

Jadi terbukti memenuhi aksioma keempat, yaitu $a \odot 0 = a$.

5. $0 \odot a = 0 + a^{-1}$

$= (a)^{-1}$

Jadi terbukti memenuhi aksioma kelima, yaitu $0 \odot a = (a)^{-1}$.

Karena memenuhi 5 aksioma di atas, maka terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +, \odot, 0)$ adalah K-Aljabar.

H. K-Subaljabar

K-Aljabar merupakan suatu struktur aljabar yang dibangun atas suatu grup, sehingga semua konsep yang terdapat dalam grup juga terdapat dalam K-Aljabar, seperti halnya subgrup. Di dalam K-Aljabar juga terdapat K-Subaljabar sebagai salah satu konsep dari grup. Berikut adalah definisi dari K-Subaljabar.

Definisi 2.13

Suatu himpunan bagian tidak kosong H dari K-Aljabar$(G, *, \odot, e)$ disebut K-Subaljabar jika:

1. $e \in H$,
2. $h_1 \odot h_2 \in H$, untuk setiap $h_1, h_2 \in H$

(Dar & Akram, 2006).

Contoh 2.11

Pada Contoh 2.10, diketahui bahwa $(\mathbb{Z}, +, \odot, 0)$ merupakan K-Aljabar. Dan ditinjau himpunan $P = \{e, m, n\}$ yang merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{Z}$. Operasi biner $\odot$ pada $\mathbb{Z}$ diberikan oleh Tabel 2.1.

Tabel 2.1. Operasi $\odot$ Pada *P*

$\odot$	0	m	n
0	0	n	m
m	m	0	n
n	n	m	0

Sehingga karena dipenuhi:

1. $P = \{0, m, n\}$ maka $0 \in P$
2. Dari tabel di atas, terlihat bahwa $m \odot n \in P$, untuk setiap $m, n \in P$.

Maka terbukti bahwa $(P, +, \odot, 0)$ merupakan K-Subaljabar dari $(\mathbb{Z}, +, \odot, 0)$.

Contoh 2.12

Misal $(G, *, \odot, e)$ adalah suatu K-Aljabar. Diberikan himpunan $H = \{g \odot (g \odot x) : x \in G\}$, akan ditunjukkan bahwa himpunan H merupakan K-Subaljabar dari $(G, *, \odot, e)$.

Untuk menunjukkan H K-Subaljabar, maka harus ditunjukkan memenuhi 2 syarat, yaitu:

1. $e \in H$

   Karena H bukan himpunan kososng, maka di H terdapat elemen-elemen salah satunya adalah elemen identitas. Jadi terbukti bahwa di dalam himpunan H terdapat elemen identitas atau dapat ditulis $e \in H$.

2. $h_1 \odot h_2 \in H$

   Ambil sebarang $h_1 = g \odot (g \odot m)$, dan $h_2 = g \odot (g \odot n)$, dengan $m, n \in G$. Akan ditunjukkan $h_1 \odot h_2 \in H$.

$$
\begin{aligned}
h_1 \odot h_2 &= [g \odot (g \odot m)] \odot [g \odot (g \odot n)] \\
&= [g \odot (g \odot m)] * [g \odot (g \odot n)]^{-1} \\
&= [g \odot (g * m^{-1})] * [g \odot (g * n^{-1})]^{-1}
\end{aligned}
$$

$$= \left[g * (g * m^{-1})^{-1}\right] * \left[g * (g * n^{-1})^{-1}\right]^{-1}$$

$$= [g * m * g^{-1}] * [g * n * g^{-1}]^{-1}$$

$$= g * m * g^{-1} * g * n^{-1} * g^{-1}$$

$$= g * m * e * n^{-1} * g^{-1}$$

$$= g * m * n^{-1} * g^{-1}$$

$$= g * (g * n * m^{-1})^{-1}$$

$$= g \odot (g * n * m^{-1})$$

$$= g \odot \left(g * (m * n^{-1})^{-1}\right)$$

$$= g \odot \left(g \odot (m * n^{-1})\right)$$

$$= g \odot (g \odot (m \odot n))$$

Untuk $m, n \in G$, maka $(m \odot n) \in G$. Dengan demikian terbukti bahwa $h_1 \odot h_2 = g \odot \left(g \odot (m \odot n)\right) \in H$,

Karena telah ditunjukkan memenuhi 2 syarat di atas, maka terbukti bahwa himpunan $H = g \odot (g \odot x)$ adalah K-Subaljabar dari K-Aljabar $(G, *, \odot, e)$.

I. K-Homomorfisme dalam K-Aljabar

Di dalam K-Aljabar juga berlaku pemetaan antara dua K-Aljabar. Apabila terdapat $K_1 = (G_1, *, \odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2, *, \odot, e_2)$ sebagai K-Aljabar, maka dapat didefinisikan dari K_1 ke K_2. Pemetaan tersebut antara lain adalah K-Homomorfisme dalam K-Aljabar yang dijelaskan dalam definisi berikut.

Definisi 2.14

Pemetaan φ dari K-Aljabar K_1 ke K_2 disebut sebagai K-Homomorfisme jika untuk setiap $x_1, y_1 \in K_1$, $\varphi(x_1 \odot y_1) = \varphi(x_1) \odot \varphi(y_1)$, dengan $\varphi(x_1), \varphi(y_1) \in K_2$ (Dar & Akram, 2007).

Contoh 2.13

Misal $(G,\odot)$ suatu K-Aljabar, dibentuk himpunan bagian $H = \{\, g \odot (g \odot x) : x \in (G,\odot)\}$, dimana H merupakan K-Subaljabar dari G. Selanjutnya didefinisikan pemetaan $\varphi: (G,\odot) \to (H,\odot)$, dengan $\varphi(x) = g \odot (g \odot x)$ untuk setiap $x \in (G,\odot)$. Akan ditunjukkan bahwa $\varphi: (G,\odot) \to (H,\odot)$ merupakan suatu K-homomorfisme.

Bukti

Ambil sebarang unsur $x, y \in (G,\odot)$, maka $x \odot y \in (G,\odot)$ dan

$$\begin{aligned}\varphi(x \odot y) &= g \odot (g \odot (x \odot y)) \\ &= [g \odot \{e \odot (x \odot y)\}] \odot g \\ &= \big[g \odot \big((e \odot y) \odot (e \odot x)\big)\big] \odot g \\ &= \big(g \odot (g \odot x)\big) \odot \big(g \odot (g \odot y)\big) \\ &= \varphi(x) \odot \varphi(y)\end{aligned}$$

Karena $\varphi(x \odot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$, maka $\varphi: (G,\odot) \to (H,\odot)$ merupakan suatu K-Homomorfisme.

Berikut merupakan beberapa sifat dari K-Homomorfisme yang diberikan oleh proposisi berikut.

Proposisi 2.1

Misal $K_1 = (G_1, *, \odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2, *, \odot, e_2)$ serta $\varphi: K_1 \to K_2$ suatu K-Homomorfisme. Jika K_1 suatu K-Aljabar, maka untuk setiap $x_1, x_2 \in K_1$ berlaku:

1. $\varphi(e_1) = e_2$
2. $\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$
3. $\varphi(e_1 \odot x_1) = e_2 \odot \varphi(x_1)$
4. $\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2$ jika dan hanya jika $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$
5. Jika H_1 adalah subaljabar dari K_1, maka $\varphi(H_1)$ adalah subaljabar dari K_2

   (Dar & Akram, 2007).

Bukti:

1. Apabila K_1 ke K_2 merupakan K-Homomorfisme dalam K-Aljabar, dimana e_1 dan e_2 menyatakan elemen identitas dari K_1 dan K_2 terhadap operasi biner $\odot$.

   Akan ditunjukkan $\varphi(e_1) = e_2$.

   Ambil sebarang unsur di K_1 yaitu $x \in K_1$, maka $x \odot e_1 = x$ dan

   $$\varphi(x \odot e_1) = \varphi(x)$$

   Karena $\varphi: K_1 \to K_2$ suatu K-Homomorfisme, maka diperoleh

   $$\varphi(x) \odot \varphi(e_1) = \varphi(x)$$

   $$\varphi(x) * \varphi(e_1)^{-1} = \varphi(x)$$

   $$\varphi(x)^{-1} * \varphi(x) * \varphi(e_1)^{-1} = \varphi(x)^{-1} * \varphi(x)$$

   $$[\varphi(x)^{-1} * \varphi(x)] * \varphi(e_1)^{-1} = \varphi(x)^{-1} * \varphi(x)$$

   Karena $\varphi(x)^{-1}$ dan $\varphi(x)$ ada di K_2, maka

   $$[\varphi(x)^{-1} * \varphi(x)] * \varphi(e_1)^{-1} = e_2$$

$$e_2 * \varphi(e_1)^{-1} = e_2$$

$$\varphi(e_1)^{-1} = e_2$$

$$\varphi(e_1)^{-1} = e_2$$

$$(\varphi(e_1)^{-1})^{-1} = (e_2)^{-1}$$

$$\varphi(e_1) = (e_2)^{-1}$$

$$\varphi(e_1) = e_2$$

Jadi terbukti bahwa $\varphi(e_1) = e_2$.

2. Misalkan $e_1$menyatakan unsur identitas dari K_1. Akan ditunjukkan bahwa $\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$.

   Ambil sebarang unsur di K_1 yaitu $x \in K_1$, maka $e_1 \odot x = x^{-1}$.

   Karena $e \odot x = x^{-1} \in K_1$ dan φ suatu K-Homomorfisme, maka diperoleh

$$\varphi(e_1 \odot x) = \varphi(x^{-1})$$

$$\varphi(e_1) \odot \varphi(x) = \varphi(x^{-1})$$

   Selanjutnya, karena $\varphi(e_1) = e_2$, maka

$$e_2 \odot \varphi(x) = \varphi(x^{-1})$$

$$e_2 * \varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$$

$$\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$$

   Jadi terbukti bahwa $\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$.

3. Misal e_1 adalah suatu anggota identitas dari K_1. Akan ditunjukkan bahwa

$$\varphi(e_1 \odot x_1) = e_2 \odot \varphi(x_1)$$

   Ambil sebarang unsur $e_1 \in K_1$ maka $e_1 \odot x \in K_1$ dan berlaku

$$\varphi(e_1 \odot x_1) = \varphi(e_1) \odot \varphi(x_1)$$

   Karena φ merupakan K-Homomorfisme, maka

$$\varphi(e_1 \odot x_1) = e_2 \odot \varphi(x_1)$$

Jadi terbukti bahwa $\varphi(e_1 \odot x_1) = e_2 \odot \varphi(x_1)$.

4. Jika diketahui $\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2$. Akan ditunjukkan $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.

   Diambil sebarang unsur x_1,$x_2 \in K_1$ maka $x_1 \odot x_2 \in K_1$. Dan berlaku

$$\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2$$
$$\varphi(x_1 \odot x_2) \odot \varphi({x_2}^{-1}) = e_2 \odot \varphi({x_2}^{-1})$$
$$\varphi[(x_1 \odot x_2) \odot {x_2}^{-1}] = e_2 \odot \varphi({x_2}^{-1})$$
$$\varphi[(x_1 * {x_2}^{-1}) * x_2] = [\varphi({x_2}^{-1})]^{-1}$$
$$\varphi[x_1 * ({x_2}^{-1} * x_2)] = [\varphi({x_2}^{-1})]^{-1}$$
$$\varphi[x_1 * e_1] = [\varphi({x_2}^{-1})]^{-1}$$
$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$$

   Jadi terbukti bahwa $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.

5. Misal H_1 adalah subaljabar dari K_1. Akan ditunjukkan bahwa $\varphi(H_1)$ adalah subaljabar dari K_2.

   a. $H_1 \neq \emptyset$ karena dalam H_1 terdapat anggota identitas yaitu $e_1 \in H_1$ maka $\varphi(e_1) = e_2 \in \varphi(H_1)$. Dengan kata lain $\varphi(H_1) \neq \emptyset$.

   b. Diambil sebarang unsur y_1,$y_2 \in \varphi(H_1)$, maka terdapat x_1,$x_2 \in H_1$ sedemikian sehingga $\varphi(x_1) = y_1$, $\varphi(x_2) = y_2$ dan

$$y_1 \odot y_2 = \varphi(x_1) \odot \varphi(x_2)$$
$$= \varphi(x_1 \odot x_2) \in \varphi(H_1)$$

   Karena x_1, $x_2 \in H_1$, maka $x_1 \odot x_2 \in H_1$, sehingga $\varphi(x_1 \odot x_2) \in \varphi(H_1)$. Jadi terbukti bahwa $\varphi(H_1)$ adalah subaljabar dari K_2.

J. Integrasi Keilmuan

1. Kekonsistenan

Matematika merupakan ilmu yang sangat luas, yang tidak selalu berhubungan dengan perhitungan saja. Hal ini dikarenakan di dalam matematika juga terdapat pembuktian-pembuktian yang menggunakan logika, seperti pembuktian rumus, ataupun teorema-teorema. Dalam membuktikan suatu teorema, dibutuhkan keuletan serta kekonsistenan agar diperoleh hasil yang sesuai. Sebagaimana ditelaah dalam ajaran agama Islam, sifat konsisten atau yang disebut dengan istiqomah adalah suatu sikap konsisten dalam suatu prinsip. Allah SWT berfirman dalam QS. Fussilat Ayat 31, yang menunjukkan keutamaan dari sikap istiqomah.

Jika direlasikan dengan matematika, telah dikatakan sebelumnya bahwa dalam proses pembuktian membutuhkan keistiqomahan atau kekonsistenan. Karena pembuktian merupakan proses yang cukup panjang dan membutuhkan ketelitian, maka dengan sikap konsisten kemungkinan besar akan dicapai hasil yang tepat. Akan tetapi jika terjadi keputusasaan di sebagian proses, maka tidak akan diperoleh hasil akhir yang diharapkan. Sebagaimana firman Allah SWT dalam QS. Al-Hijr Ayat 56, bahwa sikap putus asa itu sangat dilarang dalam ajaran agama Islam, dan tidak ada orang yang berputus asa kecuali orang-orang orang-orang yang sesat.

2. Fungsi

Dalam struktur aljabar terdapat beberapa materi antara lain grup, ring, field, dll. selain itu ada juga konsep yang dikembangkan dari grup, yaitu K-

Aljabar. Salah satu konsep yang mendasari yaitu fungsi atau pemetaan yang mempunyai definisi sebagai berikut. Jika terdapat dua himpunan yaitu himpunan A dan B, maka fungsi dari A ke B adalah himpunan f pada pasangan terurut di $A \times B$, sedemikian sehingga untuk setiap $a \in A$ terdapat tepat satu $b \in B$ dengan $(a, b) \in f$. Dengan kata lain, jika $(a, b) \in f$ dan $(a, b') \in f$, maka $b = b^{'}$ (Bartle, 2010).

Konsep fungsi tidak terlepas dari himpunan, karena dari pengertiannya sendiri fungsi merupakan pengaitan dari himpunan satu ke himpunan lainnya. Konsep mengenai fungsi dapat dijumpai dalam Al-Qur'an tentang hubungan atau interakasi sosial antara makhluk Allah, baik dengan benda mati, maupun dengan benda hidup. Contohnya seperti manusia dengan partikel penyusun lingkungan sekitarnya, baik tumbuhan, hewan, maupun dengan benda mati lainnya. Selain itu, hubungan antar manusia juga dapat diartikan sebagai hubungan antar golongan satu dengan golongan lainnya, maupun hubungan antar bangsa dan antar suku yang dijelaskan dalam QS. Al-Hujurat Ayat 13 yaitu

يَا أَيُّهَا النَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَاكُم مِّن ذَكَرٍ وَأُنثَى وَجَعَلْنَاكُمْ شُعُوبًا وَقَبَائِلَ لِتَعَارَفُوا إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِندَ اللَّهِ أَتْقَاكُمْ

إِنَّ اللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ ﴿١٣﴾

Artinya:

"*Hai manusia, sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu di sisi Allah ialah orang yang paling takwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lahi Maha Mengenal.*" (QS. Al-Hujurat:13)

Jika dikaitkan dengan konsep fungsi atau pemetaan, dalam ayat tersebut menjelaskan beberapa golongan yaitu bangsa-bangsa dan suku-suku yang merupakan kumpulan atau himpunan dari manusia yang memiliki kriteria tertentu. Jika diperhatikan, dalam hal ini terdapat penerapan konsep fungsi yaitu pengaitan antara himpunan bangsa satu dengan bangsa lainnya, serta antar suku yang dihubungkan dengan saling mengenal satu sama lain. Selain itu, sesuai dengan hukum alam yang berlaku, bahwa manusia merupakan makhluk sosial, yang saling membutuhkan antara satu dengan yang lainnya, seperti halnya saling membantu dalam hal tolong menolong yang termuat dalam QS. Al-Maidah Ayat 2.

BAB III
PEMBAHASAN

Pembahasan mengenai K-Isomorfisme dalam K-Aljabar tidak dapat dipisahkan dengan konsep K-Homomorfisme yang merupakan salah satu konsep paling dasar untuk dikaji. Selain itu terdapat pula beberapa konsep yang berkaitan, yaitu K-Monomorfisme dan K-Epimorfisme, termasuk di dalamnya adalah fungsi injektif, fungsi surjektif, serta fungsi bijektif yang dapat digunakan dalam membangun suatu konsep K-Isomorfisme dalam K-Aljabar.

A. K-Isomorfisme dalam K-Aljabar

Konsep awal yang harus dikaji adalah konsep K-Monomorfisme K-Epimorfisme, konsep tersebut berkaitan dengan fungsi injektif dan surjektif, berikut diberikan definisi dari K-Monomorfisme dan K-Epimorfisme dalam K-Aljabar.

1. K-Monomorfisme dalam K-Aljabar

Definisi 3.1

K-Homomorfisme φ dari K-Aljabar K_1 ke K_2 disebut sebagai K-Monomorfisme jika φ merupakan suatu pemetaan injektif.

Contoh 3.1

Misal $(G,*,\odot,e)$ suatu K-Aljabar. Diberikan himpunan $H = \{ g \odot (g \odot x) : x \in G\}$, dimana H merupakan K-Subaljabar dari G. Pemetaan yang didefinisikan oleh $\varphi: (G,\odot) \rightarrow (H,\odot)$, dengan $\varphi(x) = g \odot (g \odot x)$, untuk setiap $x \in G$ merupakan suatu K-Monomorfisme dalam K-Aljabar.

Pada Contoh 2.12, telah ditunjukkan bahwa pemetaan $\varphi: (G,\odot) \rightarrow (H,\odot)$ dengan $\varphi(x) = g \odot (g \odot x)$, untuk setiap $x \in G$ merupakan suatu K-Homomorfisme. Selanjutnya harus ditunjukkan bahwa φ merupakan pemetaan injektif, yaitu untuk setiap $x, y \in G$ dengan $\varphi(x) = \varphi(y)$ berlaku $x = y$.

$$\varphi(x) = \varphi(y)$$

$$g \odot (g \odot x) = g \odot (g \odot y)$$

Dengan memperhatikan definisi K-Aljabar, operasi biner pada K-Aljabar, dan dengan mengoperasikan g dengan operasi biner $*$ dari sebelah kanan g^{-1} dari kiri, diperoleh

$$e * x = e * y$$

Lebih lanjut, dengan memperhatikan definisi dari identitas pada grup didapatkan

$$x = y$$

Karena dapat ditunjukkan untuk setiap $x, y \in G$ dengan $\varphi(x) = \varphi(y)$ berlaku $x = y$, maka terbukti bahwa $\varphi: (G,\odot) \rightarrow (H,\odot)$ merupakan fungsi injektif. Uraian secara detail dari pembuktian φ dapat dilihat pada Lampiran 1.

Berdasarkan Definisi 15, pemetaan $\varphi: (G,\odot) \rightarrow (H,\odot)$ adalah K-Monomorfisme dalam K-Aljabar, karena memenuhi dua syarat, yaitu K-Homomorfisme dalam K-Aljabar dan pemetaan φ adalah pemetaan injektif.

Contoh 3.2

Misalkan $(\mathbb{R}, \times, \odot, e)$ merupakan suatu K-Aljabar. Pemetaan $\varphi: (\mathbb{R}, \odot) \to (\mathbb{R}, \odot)$ yang didefinisikan oleh $\varphi(x) = x \odot x$ untuk setiap $x \in (\mathbb{R}, \odot)$ bukan merupakan K-Monomorfisme.

Untuk membuktikan bahwa $\varphi: (\mathbb{R}, \odot) \to (\mathbb{R}, \odot)$ yang didefinisikan oleh $\varphi(x) = x \odot x$ merupakan K-Monomorfisme, maka harus ditunjukkan bahwa $\varphi: (\mathbb{R}, \odot) \to (\mathbb{R}, \odot)$ merupakan K-Homomorfisme, dan φ merupakan fungsi injektif. Akan tetapi, apabila akan menunjukkan bahwa φ bukan K-Monomorfisme, maka harus ditunjukkan bahwa φ merupakan K-Homomorfisme, dan φ bukan fungsi injektif.

Pertama akan ditunjukkan bahwa φ merupakan K-Homomorfisme. Ambil sebarang unsur $x, y \in (\mathbb{R}, \odot)$, maka $x \odot y \in (\mathbb{R}, \odot)$, akan ditunjukkan

$$\varphi(x \odot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\varphi(x \odot y) &= (x \odot y) \odot (x \odot y) \\
&= (x \times y^{-1}) \odot (x \times y^{-1}) \\
&= (x \times y^{-1}) \times (x \times y^{-1})^{-1} \\
&= (x \times y^{-1}) \times (y \times x^{-1}) \\
&= x \times x^{-1} \times y \times y^{-1} \\
&= (x \times x^{-1}) \times (y \times y^{-1}) \\
&= (x \times x^{-1}) \odot (y \times y^{-1})^{-1} \\
&= (x \times x^{-1}) \odot (y \times y^{-1})
\end{aligned}$$

$$= (x \odot x) \odot (y \odot y)$$

$$= \varphi(x) \odot \varphi(y)$$

Dengan demikian diperoleh $\varphi(x \odot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$, maka terbukti $\varphi: (\mathbb{R},\odot) \to (\mathbb{R},\odot)$ dengan $\varphi(x) = x \odot x$ adalah K-Homomorfisme.

Selanjutnya

$$\varphi(x) = \varphi(y)$$

$$x \odot x = y \odot y$$

$$e = e$$

Misal untuk $x = -2$, dan $y = 2$. Diperhatikan

$$\varphi(x) = \varphi(-2) = (-2) \odot (-2) = e = (2) \odot (2) = \varphi(2) = \varphi(y)$$

Diperoleh $\varphi(-2) = \varphi(2)$, akan tetapi $-2 \neq 2$.

Jadi, terdapat $x, y \in (\mathbb{R},\odot)$ sedemikian sehingga $\varphi(x) = \varphi(y)$, akan tetapi $x \neq y$. Maka jelas bahwa $\varphi: (\mathbb{R},\odot) \to (\mathbb{R},\odot)$ bukan merupakan fungsi injektif. Dengan demikian pemetaan $\varphi: (\mathbb{R},\odot) \to (\mathbb{R},\odot)$ yang didefinisikan oleh $\varphi(x) = x \odot x$ bukan merupakan K-Monomorfisme.

2. K-Epimorfisme dalam K-Aljabar

Definisi 3.2

K-Homomorfisme φ dari K-Aljabar K_1 ke K_2 disebut sebagai K-Epimorfisme jika φ merupakan suatu pemetaan surjektif.

Contoh 3.3

Misal $(G,*,\odot,e)$ suatu K-Aljabar. Dibentuk himpunan bagian $H = \{ g \odot (g \odot x) : x \in G\}$, dimana H merupakan K-Subaljabar dari G. Selanjutnya didefinisikan pemetaan $\varphi: (G,\odot) \to (H,\odot)$, dengan $\varphi(x) = g \odot (g \odot$

x), untuk setiap $x \in G$. Akan ditunjukkan pemetaan $\varphi: (G,\odot) \to (H,\odot)$ merupakan suatu K-Epimorfisme.

Pada Contoh 3.1, telah ditunjukkan bahwa pemetaan $\varphi: (G,\odot) \to (H,\odot)$ dengan $\varphi(x) = g \odot (g \odot x)$, untuk setiap $x \in G$ merupakan suatu K-Homomorfisme, dan φ merupakan fungsi injektif atau dapat disebut sebagai K-Monomorfisme. Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa pemetaan $\varphi: (G,\odot) \to (H,\odot)$ merupakan suatu K-Epimorfisme, maka harus ditunjukkan φ merupakan fungsi (pemetaan) surjektif.

Ambil sebarang unsur $y \in H$. Akan ditunjukkan untuk setiap $y \in (H,\odot)$, terdapat $x \in (G,\odot)$ sedemikian sehingga $\varphi(x) = y$.

$$\varphi(x) = y$$

$$g \odot (g \odot x) = y$$

Dengan menggunakan definisi K-Aljabar diperoleh

$$(g * x) * g^{-1} = y$$

Selanjutnya operasikan g dengan operasi biner $*$ dari kanan dan g^{-1} dari kiri sedemikian sehingga

$$e * x = g^{-1} * (y * g)$$

Kemudian dengan menggunakan definisi dari K-Aljabar diperoleh hasil sebagai berikut.

$$x = g^{-1} \odot (g^{-1} * y^{-1})$$

$$x = g^{-1} \odot (g^{-1} \odot y)$$

Karena H merupakan K-Subaljabar dari $(G,\odot)$, maka $x = g^{-1} \odot (g^{-1} \odot y)$ merupakan elemen dari H. Oleh karenanya, φ

merupakan K-Epimorfisme. Uraian pembuktian yang lebih detail dapat dilihat pada Lampiran 2.

Contoh 3.4

Misalkan $(\mathbb{R}, \times, \odot, e)$ merupakan suatu K-Aljabar. Pemetaan $\varphi: (\mathbb{R}, \odot) \rightarrow (\mathbb{R}, \odot)$ yang didefinisikan oleh $\varphi(x) = x \odot x$ untuk setiap $x \in (\mathbb{R}, \odot)$ bukan merupakan K-Epimorfisme.

Pada Contoh 3.2 telah ditunjukkan $\varphi: (\mathbb{R}, \odot) \rightarrow (\mathbb{R}, \odot)$ merupakan K-Homomorfisme. Selanjutnya untuk membuktikan bukan K-Epimorfisme, maka harus ditunjukkan bahwa φ bukan merupakan fungsi surjektif.

$$\varphi(x) = x \odot x = e = y$$

Misal diambil $y = 2$, untuk setiap $x \in (\mathbb{R}, \odot)$

$$\varphi(x) = x \odot x = e \neq y$$

Karena Terdapat $y \in (\mathbb{R}, \odot)$, untuk setiap $x \in (\mathbb{R}, \odot)$ sedemikian sehingga $\varphi(x) \neq y$. Sehingga φ bukan fungsi surjektif. Dengan demikian terbukti bahwa $\varphi: (\mathbb{R}, \odot) \rightarrow (\mathbb{R}, \odot)$ bukan K-Epimorfisme, karena pemetaan $(\mathbb{R}, \odot)$ ke $(\mathbb{R}, \odot)$ bukan pemetaan surjektif.

3. **K-Isomorfisme dalam K-Aljabar**

Definisi 3.3

K-Homomorfisme φ dari K-Aljabar K_1 ke K_2 disebut sebagai K-Isomorfisme jika φ merupakan suatu pemetaan bijektif (injektif dan surjektif).

Contoh 3.5

Misal $(G,\odot)$ suatu K-Aljabar. Diberikan himpunan $H = \{\, g \odot (g \odot x) : x \in G\}$, dimana H merupakan K-Subaljabar dari G. Selanjutnya didefinisikan pemetaan $\varphi: (G,\odot) \to (H,\odot)$, dengan $\varphi(x) = g \odot (g \odot x)$, untuk setiap $x \in G$. Akan ditunjukkan bahwa $\varphi: (G,\odot) \to (H,\odot)$ merupakan suatu K-Isomorfisme.

Untuk menunjukkan bahwa $\varphi: (G,\odot) \to (H,\odot)$merupakan suatu K-Isomorfisme, maka berdasarkan Definisi 3.3 harus ditunjukkan terlebih dahulu bahwa $\varphi: (G,\odot) \to (H,\odot)$ merupakan suatu K-Homomorfisme, dan φ merupakan pemetaan bijektif (injektif dan surjektif).

Pada Contoh 3.1, telah ditunjukkan bahwa pemetaan $\varphi: (G,\odot) \to (H,\odot)$ dengan $\varphi(x) = g \odot (g \odot x)$, untuk setiap $x \in (G,\odot)$ merupakan suatu K-Homomorfisme, dan φ merupakan fungsi injektif. Selanjutnya pada Contoh 3.3 telah ditunjukkan pula bahwa pemetaan φ merupakan suatu fungsi surjektif. Karena telah terbukti bahwa $\varphi: (G,\odot) \to (H,\odot)$ merupakan suatu K-Homomorfisme, dan φ merupakan fungsi bijektif, maka terbukti bahwa $\varphi: (G,*,\odot,e) \to (H,*,\odot,e)$ dengan $\varphi(x) = g \odot (g \odot x)$, untuk setiap $x \in (G,\odot)$ merupakan suatu K-Isomorfisme.

Contoh 3.6

Misalkan $(\mathbb{R},\times,\odot,e)$ merupakan suatu K-Aljabar. Tunjukkan bahwa pemetaan $\varphi:(\mathbb{R},\odot)\to(\mathbb{R},\odot)$ yang didefinisikan oleh $\varphi(x)=x\odot x$ bukan merupakan K-Isomorfisme.

Untuk menunjukkan bahwa $\varphi:(\mathbb{R},\odot)\to(\mathbb{R},\odot)$ merupakan suatu K-Isomorfisme, maka berdasarkan Definisi 3.3 harus ditunjukkan terlebih dahulu bahwa $\varphi:(\mathbb{R},\odot)\to(\mathbb{R},\odot)$ merupakan suatu K-Homomorfisme, dan φ merupakan pemetaan bijektif (injektif dan surjektif).

Pada Contoh 3.2 dan 3.4, telah ditunjukkan bahwa pemetaan $\varphi:(\mathbb{R},\odot)\to(\mathbb{R},\odot)$ dengan $\varphi(x)=x\odot x$ merupakan suatu K-Homomorfisme, dan φ bukan merupakan fungsi injektif. Akan tetapi, untuk mengetahui jika φ bukan K-Isomorfisme, maka harus ditunjukkan bahwa φ bukan pemetaan bijektif. Selanjutnya pada Contoh 3.4 telah ditunjukkan pula bahwa pemetaan φ bukan merupakan suatu fungsi surjektif. Karena telah terbukti bahwa $\varphi:(\mathbb{R},\odot)\to(\mathbb{R},\odot)$ merupakan suatu K-Homomorfisme, dan φ bukan merupakan fungsi bijektif, maka terbukti bahwa $\varphi:(\mathbb{R},\odot)\to(\mathbb{R},\odot)$ dengan $\varphi(x)=x\odot x$ bukan merupakan K-Isomorfisme.

Definisi 3.4

Misal n adalah bilangan bulat positif, g pangkat n ditulis g^n didefinisikan sebagai $g^n=g\odot g\odot\ldots\odot g$.

Definisi 3.5

Diberikan K-Aljabar $(G,*,\odot,e)$. Order dari elemen $g \in (G,\odot)$, adalah bilangan bulat positif terkecil n, sedemikian sehingga $g^n = e$, dengan $g^n = g \odot g \odot \dots \odot g$.

B. Sifat-sifat K-Isomorfisme dan K-Aljabar

Di dalam K-Isomorfisme terdapat beberapa teorema dan sifat yang diturunkan dari konsep Isomorfisme dalam Grup. Berikut adalah teorema serta sifat K-Isomorfisme dalam K-Aljabar.

1. **Teorema 3.1**

   Diberikan suatu K-Aljabar $K_1 = (G_1,*,\odot,e_1)$ dan $K_2 = (G_2,*,\odot,e_2)$ suatu K-Aljabar, jika $\varphi: K_1 \to K_2$ K-Isomorfisme, maka $\varphi^{-1}: K_2 \to K_1$ juga merupakan K-Isomorfisme.

   Bukti

   Diketahui $\varphi: K_1 \to K_2$ merupakan K-Isomorfisme, sedemikian sehingga φ merupakan fungsi bijektif, demikian juga halnya dengan φ^{-1} yang merupakan fungsi bijektif. Selanjutnya, karena φ merupakan K-Isomorfisme maka harus ditunjukkan bahwa φ^{-1} merupakan K-Homomorfisme.

   Karena $\varphi: K_1 \to K_2$ merupakan fungsi bijektif, jika diambil sebarang $u, v \in K_2$, maka terdapat $a, b \in K_1$, sedemikian sehingga $\varphi(a) = u$ dan $\varphi(b) = v$. Akibatnya untuk $\varphi^{-1}: K_2 \to K_1$, diperoleh $\varphi^{-1}(u) = a$ dan $\varphi^{-1}(v) = b$.

Akan ditunjukkan bahwa φ^{-1} merupakan K-Homomorfisme, untuk setiap $u, v \in K_2$, maka $\varphi^{-1}(u \odot v) = \varphi^{-1}(u) \odot \varphi^{-1}(v)$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} u \odot v &= u * v^{-1} \\ &= \varphi(a) * [\varphi(b)]^{-1} \\ &= \varphi(a) \odot \varphi(b) \\ &= \varphi(a \odot b) \end{aligned}$$

Karena $\varphi(a \odot b) = u \odot v$, maka berakibat pada $\varphi^{-1}(u \odot v) = a \odot b$.

Selanjutnya perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(u \odot v) &= a \odot b \\ &= \varphi^{-1}(u) \odot \varphi^{-1}(v) \end{aligned}$$

Karena telah ditunjukkan bahwa φ^{-1} pemetaan bijektif dan $\varphi^{-1}: K_2 \to K_1$ merupakan K-Homomorfisme, maka terbukti bahwa φ^{-1} K-Isomorfisme. ■

2. **Proposisi 1**

Misalkan $K_1 = (G_1, *, \odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2, *, \odot, e_2)$ merupakan K-Aljabar. Jika $\varphi: K_1 \to K_2$ suatu K-Isomorfisme, maka:

1. $\varphi(e_1) = e_2$

2. $\varphi(x^n) = (\varphi(x))^n$, untuk n bilangan bulat positif.

Bukti

1. Diketahui pemetaan $\varphi: K_1 \to K_2$ merupakan K-Isomorfisme sedemikian sehingga φ K-Homomorfisme dalam K-Aljabar. Misalkan e_1 dan e_2 berturut-turut menyatakan unsur identitas dari K_1 dan K_2 terhadap operasi biner $\odot$. Akan ditunjukkan $\varphi(e_1) = e_2$.

Ambil sebarang $x \in K_1$. Karena telah diketahui bahwa φ merupakan K-Isomorfisme, maka sebagai akibatnya φ merupakan suatu pemetaan injektif dan surjektif. Karena φ merupakan pemetaan surjektif, akibatnya untuk setiap $y \in K_2$ berlaku

$$\varphi(x) = y$$

Diperhatikan bahwa $x \odot e_1 = x$ dan

$$\varphi(x \odot e_1) = y$$

Karena $\varphi: K_1 \to K_2$ suatu K-Homomorfisme, maka diperoleh

$$\varphi(x) \odot \varphi(e_1) = \varphi(x)$$

$$\varphi(x) * \varphi(e_1)^{-1} = \varphi(x)$$

$$\varphi(x)^{-1} * \varphi(x) * \varphi(e_1)^{-1} = \varphi(x)^{-1} * \varphi(x)$$

$$[\varphi(x)^{-1} * \varphi(x)] * \varphi(e_1)^{-1} = \varphi(x)^{-1} * \varphi(x)$$

Karena $\varphi(x)^{-1}$ dan $\varphi(x)$ ada di K_2, maka

$$[\varphi(x)^{-1} * \varphi(x)] * \varphi(e_1)^{-1} = e_2$$

$$e_2 * \varphi(e_1)^{-1} = e_2$$

$$\varphi(e_1)^{-1} = e_2$$

$$\varphi(e_1)^{-1} = e_2$$

$$(\varphi(e_1)^{-1})^{-1} = (e_2)^{-1}$$

$$\varphi(e_1) = (e_2)^{-1}$$

$$\varphi(e_1) = e_2$$

Jadi terbukti bahwa $\varphi(e_1) = e_2$.

2. Akan dibuktikan $\varphi(x^n) = \varphi(x)^n$ dengan menggunakan induksi matematika.

Untuk $n = 1$, pernyataan tersebut benar, karena

- $\varphi(x^1) = \varphi(x)$
- $\varphi(x)^1 = \varphi(x)$

Jadi $\varphi(x^1) = \varphi(x)^1$ atau $\varphi(x) = \varphi(x)$.

Misal benar untuk $n = k$, yaitu

$\varphi(x^k) = \varphi(x)^k$

Akan ditunjukkan benar untuk $n = k + 1$, yaitu

$\varphi(x^{k+1}) = \varphi(x^k \odot x)$ (Definisi 3.4)

$= \varphi(x^k) \odot \varphi(x)$ (K-Homomorfisme)

$= \varphi(x)^k \odot \varphi(x)$ (Proposisi 1)

$= \varphi(x)^{k+1}$ (Definisi 3.4)

Jadi, terbukti $\varphi(x^n) = (\varphi(x))^n$. ■

3. **Teorema 3.2**

Diberikan K-Aljabar $(G,*,\odot,e)$. Untuk sebarang $g \in (G,\odot)$, order g adalah bilangan bulat genap positif n, sedemikian sehingga $g^n = e$.

Bukti

Misal n bilangan bulat genap positif, maka dapat dituliskan dengan $n = 2k$ dengan $k \in \mathbb{Z}$. Ambil sebarang $g \in (G,\odot)$, akan digunakan induksi matematika untuk menunjukkan bahwa order dari g adalah bilangan bulat genap positif n, sedemikian sehingga $g^n = e$.

(i) Untuk $k = 1$, maka $n = 2k = 2$, benar karena

$$g^n = g^2 = e$$

(ii) Misal benar untuk k, maka $n = 2k$, yaitu

$$g^n = g^{2k} = e$$

(iii) Akan ditunjukkan benar untuk $k = k + 1$, maka $n = 2(k + 1)$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} g^n &= g^{2(k+1)} \\ &= g^{2k} \odot g^2 \\ &= e \odot e && \text{(Dari (i), (ii))} \\ &= e && \blacksquare \end{aligned}$$

BAB IV

PENUTUP

A. Simpulan

Berdasarkan penjelasan pada pembahasan dapat disimpulkan bahwa K-Homomorfisme φ dari K-Aljabar K_1 ke K_2 disebut sebagai K-Isomorfisme jika φ merupakan suatu pemetaan bijektif. Suatu K-Aljabar $K_1 = (G_1,*,\odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2,*,\odot, e_2)$ suatu K-Aljabar, jika $\varphi: K_1 \rightarrow K_2$ K-Isomorfisme, maka $\varphi^{-1}: K_2 \rightarrow K_1$ juga merupakan K-Isomorfisme.

K-Isomorfisme juga mempunyai sifat-sifat, yaitu misalkan $K_1 = (G_1,*,\odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2,*,\odot, e_2)$ merupakan K-Aljabar. Jika $\varphi: K_1 \rightarrow K_2$ suatu K-Isomorfisme, maka untuk setiap $x \in K_1$ berlaku:(1.) $\varphi(e_1) = e_2$; (2.) $\varphi(x^n) = (\varphi(x))^n$.

Sebagai akibat dari Proposisi 1, terdapat teorema order dalam K-Isomorfisme, yang berbunyi diberikan K-Aljabar $(G,*,\odot, e)$. Untuk sebarang $g \in (G,\odot)$, order g adalah bilangan bulat positif n, sedemikian sehingga $g^n = e$.

B. Saran

Setelah dilakukan penurunan terhadap K-Isomorfisme dalam K-aljabar, perlu dilakukan penelitian lanjutan untuk membuktikan beberapa sifat yang mungkin berkaitan dengan konsep K-Isomorfisme dalam K-Aljabar, serta membangkitkan konsep generator dalam K-Isomorfisme. Hal ini dikarenakan sifat-sifat isomorfisme dalam grup berkaitan dengan generator grup.

DAFTAR PUSTAKA

Afifah, A. (2013). *K-Homomorfisme Pada Q-Aljabar*. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim.

Bartle, R. G. (2010). *Introduction to Real Analysis, Fourth Edition.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

Dar, K., & Akram, M. (2005). On a K-Algebra Built on a Group. *Southeast Asean Bulletin of Mathematics, 29*, 41-49.

Dar, K., & Akram, M. (2006). On Subclasses OF K(G)-Algebras. *Annuals of University of Crainova, 33*, 235-240.

Dar, K., & Akram, M. (2007). On K-Homomorphisms of K-Algebras. *International Mathematical Forum*, *2*(46), 2283-2293.

Gallian, J. A. (2010). *Contemporary Abstract Algebra.* Canada: Nelson Education, Ltd.

Iswati, & Suryoto. (2010). K-Aljabar. *Jurnal Matematika*, *13*, 20-33.

Luck, W., Reich, H., Rognes, J., & Varisco, M. (2017). Algebraic K-theory of Group Rings and The Cyclotomic Trace Map. *Advances in Mathematics, 304*, 930-1020.

Mestika, Z. (2004). *Metode Penelitian Kepustakaan.* Jakarta: Yayasan Bogor Indonesia.

Raisinghania, M., & Aggarwal, K. (1980). *Modern Algebra.* New Delhi: S. Chand & Company LTD.

Redfield, R. H. (2001). *Abstract Algebra A Concrete Introduction.* United State of America: Addison Wesley Longman, Inc.

Sadieda, L. U. (2014). *Struktur Aljabar 1.* Surabaya: UIN Sunan Ampel Press.

Setiawan, A. (2011). *Aljabar Abstrak (Teori Grup dan Teori Ring).* Salatiga: UKSW Press.

Sudira, P. (2009). *Grounded Theory.* Yogyakarta: PPS UNY Press.

Sugiyono. (2010). *Metode Penelitian Pendidikan: Pendekatan Kuantitatif, Kualitatif, dan R&D.* Bandung: Alfabet.

Sukirman. (2005). *Pengantar Struktur Aljabar*. Malang: Universitas Negeri Malang.