SUBMODUL PRIMA PADA MODUL BEBAS ATAS RING KOMUTATIF DENGAN ELEMEN SATUAN

SKRIPSI

Disusun Oleh

ROCHMATUL HIDAYAH

NIM: H72215021

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL

SURABAYA

2019

PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini,

Nama	: Rochmatul Hidayah
NIM	: H72215021
Program Studi	: Matematika
Angkatan	: 2015

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul: "Submodul Prima pada Modul Bebas atas Ring Komutatif dengan Elemen Satuan". Apabila suatu saat nanti terbukti saya melakukan tindakan plagiat, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian pernyataan keaslian ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 08 Juli 2019

Yang menyatakan,

METERAI TEMPEL

TGL. 20

C5EF6AFF709933885

6000

ENAM RIBU RUPIAH

(Rochmatul Hidayah)

NIM. H72215021

LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

Skripsi oleh

Nama : Rochmatul Hidayah

NIM : H72215021

Judul : Submodul Prima pada Modul Bebas atas Ring Komutatif dengan Elemen Satuan

Ini telah diperiksa dan disetujui untuk diujikan.

Surabaya, 08 Juli 2019

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
(Dr. Moh. Hafiyusholeh, M.Si.)	**(Wika Dianita Utami, M.Sc.)**
NIP. 198002042014031001	**NIP. 199206102018012003**

PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI

Skripsi oleh

Nama : Rochmatul Hidayah

NIM : H72215021

Judul : Submodul Prima pada Modul Bebas atas Ring Komutatif dengan Elemen Satuan

Telah dipertahankan di depan tim penguji skripsi

Pada hari Kamis Tanggal, 11 Juli 2019

Mengesahkan,

Tim Penguji

Penguji I	Penguji II
(Dr. Moh. Hafiyusholeh, M.Si.)	**(Wika Dianita Utami, M.Sc.)**
NIP. 198002042014031001	**NIP. 199206102018012003**
Penguji III	Penguji IV
(Putroue Keumala Intan, M.Si.)	**(Nurissaidah Ulinnuha, M.Kom.)**
NIP. 198805282018012001	**NIP. 199011022014032004**

Mengetahui,
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Ampel Surabaya

Dr. Evi Purwati, M.Ag.
NIP. 196512211990022001

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL SURABAYA
PERPUSTAKAAN
Jl. Jend. A. Yani 117 Surabaya 60237 Telp. 031-8431972 Fax.031-8413300
E-Mail: perpus@uinsby.ac.id

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI

KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika UIN Sunan Ampel Surabaya, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama	: Rochmatul Hidayah
NIM	: H72215021
Fakultas/Jurusan	: Sains dan Teknologi/Matematika
E-mail address	: rochmatulhidayah9@gmail.com

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah :

☑ Sekripsi ☐ Tesis ☐ Desertasi ☐ Lain-lain (.....)

yang berjudul :

SUBMODUL PRIMA PADA MODUL BEBAS ATAS RING KOMUTATIF DENGAN ELEMEN SATUAN

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan Hak Bebas Royalti Non-Ekslusif ini Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (database), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di Internet atau media lain secara ***fulltext*** untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Surabaya, 11 Juli 2019

Penulis

(Rochmatul Hidayah)

SUBMODUL PRIMA PADA MODUL BEBAS
ATAS RING KOMUTATIF DENGAN ELEMEN SATUAN

ABSTRAK

Modul bebas merupakan modul M atas ring R yang memiliki basis. Sedangkan submodul merupakan himpunan bagian dari modul dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Dalam submodul N yang memenuhi sifat $N \neq M$, untuk setiap $r \in R, m \in M$, jika $r \cdot m \in N$ maka $m \in N$ atau $r \in (N: M)$ dimana $(N: M) = \{ r \in R \mid r \cdot M \subseteq N\}$ disebut submodul prima. Pada kenyataanya, semua submodul dari modul bebas atas daerah ideal utama memiliki basis, namun hal tersebut tidak berlaku pada modul atas ring. Oleh karena itu, penelitian ini akan diperdalam untuk meneliti sifat-sifat submodul prima pada modul bebas atas ring komutatif dengan elemen satuan.

Hasil dari penelitian menunjukkan bahwa, submodul prima N pada modul bebas M yang dinotasikan $(N: M)$ merupakan suatu ideal prima di R. Apabila diketahui $\Psi = (X_1, \ldots, X_m)$ merupakan pembangun berhingga dari submodul prima N, maka berlaku $\mathfrak{R} \subseteq (N: M) \subseteq \sqrt{\mathfrak{R}}$ dimana $\sqrt{\mathfrak{R}}$ adalah ideal radikal di $\mathfrak{R}$ dan untuk suatu $X_i \in M$ dengan $1 \leq i \leq m$, $m < n$ maka berlaku $(N: M) = 0$. Kemudian, jika $(N: M) = p$ maka berlaku $N = p^{(n)}$ dengan $x_{ij} \in p$, $\forall\, i_j \in \Omega$, $i \leq j \leq n$ dan berlaku $x_{i_1 1} x_{i_2 2} \ldots x_{i_n n} N + pM = N$ untuk $x_{i_j j} \notin p$ dengan p adalah ideal maksimal di R.

Kata kunci: Modul, Submodul prima, Ring komutatif dengan elemen satuan

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

PRIME SUBMODULES OF A FREE MODULE OVER A COMMUTATIVE RING WITH IDENTITY

ABSTRACT

Free modules is a modules over ring that has a base. While submodules is a subset of modules and has certain characteristics. Submodules N called prime submodules if $N \neq M, \forall\, r \in R, m \in M,$ if $r \cdot m \in N$ then $m \in N$ or $r \in (N{:}M)$ where $(N{:}M) = \{\, r \in R \mid r \cdot M \subseteq N\}$. In fact, all submodules of free modules over principal ideal domain has a bases, but that doesn't apply to the modules over ring. Since, this research will be deepened to examine the characteristics prime submodules of a free modules over a commutative ring with identity.

The result can be concluded that, prime submodules N of free modules M denoted $(N{:}M)$ is prime ideal in R. If $\Psi = (X_1, \ldots, X_m)$ is finitely generated of prime submodules then $\mathfrak{R} \subseteq (N{:}M) \subseteq \sqrt{\mathfrak{R}}$ where $\sqrt{\mathfrak{R}}$ is radical ideal of $\mathfrak{R}$ and for a $X_i \in M$ with $1 \leq i \leq m,\ m < n$ then applied $(N{:}M) = 0$. If $(N{:}M) = p$ then $N = p^{(n)}$ with $x_{ij} \in p$ for some $i_j \in \Omega,\ \ i \leq j \leq n$ and applied $x_{i_1 1} x_{i_2 2} \ldots x_{i_n n} N + pM = N$ for $x_{i_j j} \notin p$ with p is maximum ideal in R.

Keywords: *Module, Prime Submodules, Commutative Ring with identity*

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

DAFTAR ISI

COVER i
HALAMAN JUDUL ii
PERNYATAAN KEASLIAN iii
LEMBAR PENGESAHAN v
LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING iii
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI vi
PEDOMAN TRANSLITERASI vii
HALAMAN MOTTO viii
HALAMAN PERSEMBAHAN ix
KATA PENGANTAR x
ABSTRAK xii
ABSTRACT xiii
DAFTAR ISI xiv
DAFTAR SIMBOL xvi
BAB I PENDAHULUAN 1
A. Latar Belakang 1
B. Rumusan Masalah 4
C. Tujuan Penelitian 4
D. Manfaat Penelitian 4
E. Batasan Masalah 4
BAB II KAJIAN PUSTAKA 5
A. Ring 5
B. Modul 12
C. Submodul 14
D. Modul Bebas 20
E. Matriks atas Ring Komutatif 22
F. Integrasi Aljabar dengan Al Quran 23

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

BAB III METODE PENELITIAN 26
BAB IV ANALISIS DAN HASIL PEMBAHASAN 28
BAB V PENUTUP 40
A. Simpulan 40
B. Saran 40
DAFTAR PUSTAKA 41

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan real
$\mathbb{Z}$	: Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{C}$	: Himpunan bilangan kompleks
$\mathbb{Q}$	: Himpunan bilangan rasional
$\mathbb{Z}_n$	: Himpunan bilangan bulat modulo n
$\forall$	: untuk setiap
$\subseteq$	: Himpunan bagian
$\subsetneq$	: Himpunan bagian tidak sama dengan
R	: Ring
I	: Ideal atas ring
$\mathfrak{R}$	: Ideal atas ring komutatif dengan elemen satuan
$\sqrt{\mathfrak{R}}$	: Ideal radikal dari $\mathfrak{R}$
N	: Submodul
M	: Modul
R^n	: Modul bebas atas ring dengan dimensi n
$(N: M)$	: Submodul prima N pada modul bebas M
Ω	: $\{1, \ldots, n\}$
$M_{m\times n}(R)$	: Himpunan matriks atas ring komutatif R berukuran m (baris) $\times$ n (kolom)
$B_{(j_i,\ldots,j_k)}$	: submatriks B dengan indeks $j_i, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$ sebagai kolom
B^t	: Transpose dari matriks B
$\in$	: Elemen atau anggota
$< \Psi >$	: Pembangun berhingga

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$*, \cdot, +$	: Operasi biner $*, \cdot, +$
$\emptyset$	: Himpunan tak kosong
$=$	: Sama dengan
$\neq$	: Tidak sama dengan
$\cup$	: Gabungan
$\cap$	: Irisan
$\mathbb{Z}_5 \backslash \{0\}$	: Himpunan bilangan bulat modulo 5 kecuali $\{0\}$
$D_{ij}(A)$	: Diagonal matriks A dengan indeks ij
Σ	: Notasi sigma
$\blacksquare$	: Terbukti
δ_{ij}	: Fungsi kronecker delta dengan indeks ij

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Matematika mempunyai peran penting untuk menjawab permasalahan keseharian. Matematika juga merupakan teknik yang bermanfaat sebagai alat assential untuk sains, teknologi, dan perdagangan serta untuk masuk ke banyak pilihan (Skemp, 1971). Ilmu matematika juga tidak terlepas dalam agama Islam. Hal tersebut dapat ditinjau dari beberapa ayat Al-Qur'an yang memiliki keterkaitan dengan matematika, misalnya ayat yang mengenai perhitungan, bilangan, dan pengukuran seperti yang telah dijelaskan dalam QS. Maryam ayat 94 yaitu,

لَّقَدْ أَحْصَىٰهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا

"*Sesungguhnya Dia (Allah) telah menentukan mereka dan menghitung mereka dengan perhitungan yang teliti*". (QS. 19:94)

Kini telah banyak ditemukan kaidah untuk memecahkan permasalahan pengukuran yang ditulis dalam formula matematika dan dapat dikaji pada salah satu subkeilmuan matematika yaitu aljabar abstrak. Aljabar merupakan satu diantara lima standar penting dalam matematika diantaranya, aljabar, operasi bilangan, pengukuran, geometri, probabilitas dan analisis data (Dewi & dkk, 2015; Hafiyusholeh, 2015). Adapun beberapa bagian dalam struktur aljabar yang sering

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

dipelajari diantaranya, grup, gelanggang atau ring, ideal, modul bahkan dalam perkembangannya terdapat pula K-aljabar (Dar & Akhram, 2007; Lestari & dkk, 2019) dan Q-aljabar.

Grup adalah himpunan G yang memiliki satu operasi biner dengan dinotasikan $*: G \times G \rightarrow G$ dan memiliki aksioma yaitu, tertutup, asosiatif, eksistensi elemen identitas dan eksistensi elemen invers. Jika grup G atau $(G,*)$ memiliki sifat komutatif disebut grup komutatif (Raisinghania & Anggarwal, 1980; Adkins & Weintrub, 1992; Roman, 2007).

Ring merupakan himpunan R yang memiliki dua operasi biner yang dinotasikan $+: R \times R \rightarrow R$ terhadap operasi penjumlahan dan $\cdot: R \times R \rightarrow R$ terhadap operasi perkalian yang memiliki sifat-sifat diantaranya $(R,+)$ grup komutatif, $(R,\cdot)$ tertutup dan asosiatif, serta distributif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian (Raisinghania & Anggarwal, 1980; Adkins & Weintrub, 1992). Jika ring R dalam operasi perkalian memiliki sifat komutatif maka ring R disebut ring komutatif. Sementara itu, ring $R \neq \{0\}$ dan memiliki elemen satuan terhadap operasi perkalian sehingga $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \ \forall\, a \in R$ sehingga disebut ring dengan elemen satuan (Roman, 2007; Adkins & Weintrub, 1992).

Modul M atas ring R atau dinotasikan $M: R$ −modul merupakan himpunan M yang memiliki dua operasi biner dan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan yang elemennya berupa skalar (Mardiani, 2016; Roman, 2007). Himpunan N dikatakan submodul pada modul M apabila $N \subset M$ serta memenuhi sifat-sifat pada modul. Himpunan N disebut submodul prima pada M, apabila $r \cdot m \in N$ dan untuk setiap $r \in R, m \in M$ berlaku $m \in N$ atau $r \in (N: M)$ dengan

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$(N: M) = \{ r \in R \mid r \cdot M \subseteq N\}$. Sementara itu, modul yang memiliki basis disebut modul bebas dengan kata lain modul yang memiliki sifat bebas linear dan membangun (Adkins & Weintrub, 1992; Grillet, 2007; Roman, 2007).

Penelitian sebelumnya oleh Tiras, Harmanci, dan Smith (1999) berjudul karakteristik submodul prima mengatakan bahwa setiap submodul prima pada modul terdapat korespondensi terhadap ideal prima atas ring. Dalam submodul prima, ring yang digunakan merupakan kondisi khusus, yaitu ring komutatif dengan elemen satuan. Adapun penelitian Dilek dan Yilmaz (2003) berjudul submodul prima dengan pembangun berhingga pada modul bebas mengatakan bahwa daerah komutatif merupakan suatu kasus yang menarik untuk dikaji. Sebagaimana penelitian Hedayat & Nekooei (2005) yang telah mengkaji karakteristik submodul prima dengan pembangun berhingga pada modul bebas atas daerah ideal utama. Namun hal menarik yang dapat dilihat dari modul bahwasannya modul merupakan perumunan dari ring yang berarti ring dengan kejadian khusus. Oleh karena itu, penelitian ini akan diperdalam untuk meneliti kemungkinan pengembangan sifat-sifat tertentu suatu ring ke dalam submodul atau modul.

Oleh karena itu, peneliti tertarik membahas mengenai sifat-sifat submodul prima dari modul bebas yang akan diperluas terhadap ring komutatif dengan elemen satuan. Oleh sebab itu penelitian ini berjudul "*Submodul Prima Pada Modul Bebas Atas Ring Komutatif Dengan Elemen Satuan*".

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang yang telah dipaparkan, rumusan masalah yang akan dikaji adalah bagaimana sifat-sifat submodul prima pada modul bebas atas ring komutatif dengan elemen satuan ?

C. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini yang ditinjau dari rumusan masalah yang telah dipaparkan yaitu untuk mengetahui sifat-sifat submodul prima pada modul bebas atas ring komutatif dengan elemen satuan.

D. Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat yaitu:

1. Menambah pemahaman mengenai submodul prima pada modul bebas dan sifat-sifatnya.
2. Menambah pemahaman mengenai sifat-sifat submodul prima pada modul bebas atas ring komutatif dengan elemen satuan.
3. Dijadikan sebagai referensi untuk pembaca dalam melakukan penelitian di bidang aljabar.

E. Batasan Masalah

Pada penelitian ini himpunan matriks yang digunakan merupakan matriks atas ring komutatif bukan himpunan matriks biasa dan setiap submodul prima memiliki pembangun terbatas pada modul bebas dengan dimensi terbatasnya adalah n.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini dikaji mengenai beberapa kajian pendukung berupa definisi beserta contohnya yang bertujuan sebagai acuan dalam pembahasan penelitian ini diantaranya yaitu, ring, ideal, modul, submodul, submodul prima, modul bebas, dan matriks atas ring komutatif.

A. Ring

Ring merupakan struktur paling sederhana setelah grup dalam aljabar abstrak. Ring disebut juga dengan gelanggang. Pada subbab ini akan dikaji mengenai Definisi beserta contohnya dan Teorema yang berkaitan dengan ring.

Definisi 2.1

Himpunan R yang memiliki dua operasi biner yaitu penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ yang dinotasikan $(R,+,\cdot)$ disebut ring. Jika memenuhi aksioma sebagai berikut (Adkins & Weintrub, 1992; Grillet, 2007):

1. $(R,+)$ merupakan grup komutatif yaitu $\forall\, p,q,s \in R$ maka berlaku:
   a. Tertutup yaitu, berlaku $p+q \in R,\ \forall\, p,q \in R$
   b. Asosiatif yaitu, berlaku $p+(q+s)=(p+q)+s,\ \forall\, p,q,s \in R$
   c. Memiliki Identitas, yaitu terdapat $0 \in R$ sebagai unsur identitas sehingga berlaku $p+0=0+p=p,\ \forall\, p \in R$
   d. Memiliki Invers

      Untuk setiap $p \in R$ terdapat $-p \in R$ maka berlaku,

$$p+(-p)=(-p)+p=0$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

e. Komutatif yaitu, berlaku $p + q = q + p,\ \forall\, p, q \in R$

2. Memiliki sifat $(R,\cdot)$ tertutup dan asosiatif yaitu, $\forall\, p, q, s \in R$ memenuhi,

$$p \cdot (q \cdot s) = (p \cdot q) \cdot s$$

3. Memiliki sifat distributif kanan dan kiri, yaitu :

   Untuk setiap $p, q, s \in R$ memenuhi $p \cdot (q + s) = p \cdot q + p \cdot s$ dan

   $(p + q) \cdot s = p \cdot s + q \cdot s$

Contoh 2.2

1. Himpunan $\mathbb{Z}$ yang memiliki operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ dinotasikan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ disebut ring karena,

   a. $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup komutatif yaitu $\forall\, p, q, s \in \mathbb{Z}$ berlaku:

      1) Tertutup yaitu, berlaku $p + q \in \mathbb{Z}, \forall\, p, q \in \mathbb{Z}$

      2) Asosiatif yaitu, berlaku $p + (q + s) = (p + q) + s, \forall\, p, q, s \in \mathbb{Z}$

      3) Memiliki Identitas, yaitu terdapat $0 \in \mathbb{Z}$ sebagai unsur identitas sehingga berlaku $p + 0 = 0 + p = p\ , \forall\, p \in \mathbb{Z}$

      4) Memiliki Invers

         Terdapat $-p \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga berlaku,

         $p + (-p) = (-p) + p = 0$

      5) Komutatif yaitu, berlaku $p + q = q + p, \forall\, p, q \in \mathbb{Z}$

   b. Memiliki sifat asosiatif terhadap perkalian, yaitu $\forall\, p, q, s \in \mathbb{Z}$ maka berlaku $q \cdot (p \cdot s) = (p \cdot q) \cdot s$

   c. Memiliki sifat distributif, yaitu $\forall\, p, q, s \in \mathbb{Z}$ berlaku,

$$p \cdot (q + s) = p \cdot q + p \cdot s \text{ dan}$$

$$(p + q) \cdot s = p \cdot s + q \cdot s$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Definisi 2.3

Jika ring R dalam operasi perkalian memiliki sifat komutatif yaitu $p \cdot q = q \cdot p$ dengan $p, q \in R$ maka berlaku R merupakan ring komutatif. Apabila ring $R \neq \{0\}$ sehingga memiliki elemen satuan terhadap operasi perkalian maka terdapat $1 \cdot p = p \cdot 1 = p, \ \forall\, p \in R$, sehingga R merupakan ring dengan elemen satuan (Adkins & Weintrub, 1992).

Contoh 2.4

Pada himpunan $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot), (\mathbb{Z}n, +, \cdot)$ disebut ring komutatif dengan elemen satuan.

Definisi 2.5

Diberikan himpunan S adalah himpunan bagian dari ring R. Himpunan S disebut subring jika dan hanya jika S adalah ring yang memiliki operasi penjumlahan dan perkalian dari ring R (Roman, 2007; Grillet, 2007; Wahyuni & dkk, 2016).

Teorema 2.6

Himpunan S dari ring R disebut subring dari R yang dinotasikan $(S, +, \cdot)$ jika memenuhi sifat-sifat berikut ini (Adkins & Weintrub, 1992; Roman, 2007):

1. $0 \in S$
2. Untuk setiap $x, y \in S$, maka berlaku $x - y \in S$
3. Untuk setiap $x, y \in S$, maka berlaku $x \cdot y \in S$ ■

Contoh 2.7

Diberikan himpunan $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{\begin{bmatrix} p & q \\ s & t \end{bmatrix} \mid p, q, s, t \in \mathbb{R}\right\}$ merupakan suatu ring.

Himpunan $S = \left\{\begin{bmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R}\right\}$ merupakan subring dari R sebab,

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

1. S adalah himpunan bagian tak kosong dari $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ karena ada $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$.

2. Ambil sebarang $x = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ p_2 & 0 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ q_2 & 0 \end{bmatrix} \in S$, karena terdapat $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ sehingga berlaku,

   $$x - y = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ p_2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ q_2 & 0 \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} p_1 - q_1 & 0 \\ p_2 - q_2 & 0 \end{bmatrix} \in S$$

   Dikarenakan terdapat $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ maka $p_1 - q_1 \in \mathbb{R}$ dan $p_2 - q_2 \in \mathbb{R}$

3. Ambil sebarang $x = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ p_2 & 0 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ q_2 & 0 \end{bmatrix} \in S$, karena terdapat $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ sehingga berlaku,

   $$x \cdot y = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ p_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ q_2 & 0 \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} p_1 \cdot q_1 & 0 \\ p_2 \cdot q_1 & 0 \end{bmatrix} \in S$$

   Dikarenakan ada $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ maka $p_1 \cdot q_1 \in \mathbb{R}$ dan $p_2 \cdot q_2 \in \mathbb{R}$

Definisi 2.8

Diberikan $(R, +, \cdot)$ adalah ring dan $I \neq \emptyset$ dengan $I \subset R$. Himpunan I merupakan ideal di R, jika berlaku sifat-sifat berikut ini:

1. $(I, +, \cdot)$ adalah subring
2. Memiliki sifat tambahan ideal kiri dan kanan, yaitu $\forall\, r \in R,\ x \in I$, berlaku $r \cdot x \in I$ dan $x \cdot r \in I$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Contoh 2.9

1. Diberikan himpunan $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ = \left\{\begin{bmatrix} p & q \\ s & t \end{bmatrix} \mid p, q, s, t \in \mathbb{R}\right\}$ adalah suatu ring.

   Himpunan $I \ = \left\{\begin{bmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R}\right\}$ merupakan ideal dari $\mathbb{R}$ sebab,

   a. I adalah subring yang telah dibuktikan pada Contoh 2.6.

   b. Memenuhi sifat ideal kanan dan ideal kiri yaitu untuk sebarang $r = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ s_1 & t_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}$ dan $x = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ p_2 & 0 \end{bmatrix} \in I$ dengan $p_1, p_2, q_1, s_1, t_1 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga,

   $$r \cdot x = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ s_1 & t_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ p_2 & 0 \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} p_1p_1 + q_1p_2 & 0 \\ s_1p_1 + t_1p_2 & 0 \end{bmatrix} \in I \quad \text{(ideal kiri) dan}$$

   $$x \cdot r = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ p_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ s_1 & t_1 \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} p_1p_1 & p_1q_1 \\ p_2p_1 & p_2q_1 \end{bmatrix} \notin I \text{ (bukan ideal kanan)}$$

   Jadi, I bukan ideal kanan tetapi I ideal kiri.

2. Misalkan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan ring maka $I = \{p + q\sqrt{3} \ ; \ p, q \in \mathbb{R}\}$ merupakan ideal di $\mathbb{R}$ sebab,

   a. I merupakan subring

      1) Ambil sebarang $x, y \in I$, dimana $x = \ p_1 + q_1\sqrt{3} \ ; \ p_1 \ , \ q_1 \in \mathbb{R}$ dan $y = \ p_2 + q_2\sqrt{3} \ ; \ p_2 \ , q_2 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga,

      $$x - y = \left(p_1 + q_1\sqrt{3}\right) - \ (p_2 + q_2\sqrt{3}\ )$$

      $$= (p_1 - p_2) + (q_1\sqrt{3} - q_2\sqrt{3}\ ) \in I$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

2) Ambil sebarang $x, y \in I$, dimana $x = p_1 + q_1\sqrt{3}$; p_1 , $q_1 \in \mathbb{R}$ dan $y = p_2 + q_2\sqrt{3}$; p_2 , $q_2 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga,

$$x \cdot y = \left(p_1 + q_1\sqrt{3}\right) \cdot \left(p_2 + q_2\sqrt{3}\right)$$

$$= (p_1 \cdot p_2) + \left(p_1 \cdot q_2\sqrt{3}\right) + \left(q_1\sqrt{3} \cdot p_2\right) + \left(q_1\sqrt{3} \cdot q_2\sqrt{3}\right) \in I$$

b. Memenuhi sifat ideal kanan dan ideal kiri yaitu untuk sebarang $r \in \mathbb{R}$, $x \in I$ dengan $x = p_1 + q_1\sqrt{3}$; p_1 , $q_1 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga,

$$r \cdot x = r \cdot \left(p_1 + q_1\sqrt{3}\right)$$

$$= r \cdot p_1 + r \cdot b_1\sqrt{3} \in I \text{ (ideal kiri) dan}$$

$$x \cdot r = \left(p_1 + q_1\sqrt{3}\right) \cdot r$$

$$= p_1 \cdot r + q_1\sqrt{3} \cdot r \in I \text{ (ideal kanan)}$$

Definisi 2.10

Jika $I \neq R$ dari ring komutatif R yang memiliki sifat $p \cdot q \in I$ dan berakibat $p \in I$ atau $q \in I$ untuk setiap $p, q \in R$ maka disebut ideal prima (Adkins & Weintrub, 1992).

Contoh 2.11

Misalkan pada ring $\mathbb{Z}$. Ideal yang dibangun oleh 7 atau dinotasikan $I = < 7 >$ merupakan ideal prima. Oleh sebab itu, berlaku $\{ar | r \in \mathbb{Z}\} = \{7r | r \in \mathbb{Z}\} = \{, \ldots, -14, -7, 0, 7, 14, \ldots\}$ terdapat $2 \cdot 7 = 14 \in I$ dengan $2 \notin I$ atau $7 \in I$.

Definisi 2.12

Diberikan R adalah ring komutatif dan I ideal di R. Sehingga ideal I dikatakan ideal radikal jika dan hanya jika $I = \sqrt{I}$ yang dinotasikan dengan himpunan

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$\sqrt{I} = \{x \in R \mid x^n \in I$ untuk suatu $n \geq 1\}$. Setiap ideal prima dari ring R merupakan ideal radikal (Matsumura, 1986; Rajaee, 2011).

Contoh 2.13

Diberikan $\mathbb{Z}$ merupakan ring dan $4\mathbb{Z}$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}$, akan ditunjukkan $\sqrt{4\mathbb{Z}} = 2\mathbb{Z}$. Ambil sebarang $\{0\} \in 4\mathbb{Z}$ yang merupakan ideal yang dibangun oleh 0. Sedemikian berlaku $\sqrt{0} = \{0 \in \mathbb{Z} \mid 0^n \in 4\mathbb{Z}\} = \{0\}$, maka berlaku juga $\sqrt{4\mathbb{Z}} = 2\mathbb{Z}$.

Definisi 2.14

Diberikan R adalah ring komutatif dan I ideal di R. Sehingga ideal I dikatakan ideal maksimal jika $I \neq R$ dan tidak ada ideal J di R sedemikian sehingga $I \subseteq J \subseteq R$ maka berakibat $J = I$ atau $J = R$ (Adkins & Weintrub, 1992; Grillet, 2007; Roman, 2007; Wahyuni & dkk, 2016).

Contoh 2.15

Diketahui himpunan bilangan bulat modulo 4 atau dinotasikan $\mathbb{Z}_4$ merupakan ring. Himpunan $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ dan ideal dari $\mathbb{Z}_4$ yaitu,

$0 = \{0.k \mid k \in \mathbb{Z}_6\} = \{0\}$

$1 = \{1.k \mid k \in \mathbb{Z}_6\} = \{0,1,2,3\}$

$2 = \{2.k \mid k \in \mathbb{Z}_6\} = \{0,2\}$

$3 = \{3.k \mid k \in \mathbb{Z}_6\} = \{0,3,2,1\}$.

Sedemikian sehingga diperoleh $\{0\} \subseteq \{0,2\} \subseteq \{0,1,2,3\}$ maka ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_4$ adalah $\{0,2\}$.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

B. Modul

Modul atas ring adalah generalisasi atas ruang vektor atas lapang. Sembarang ruang vektor V atas lapangan F, maka dapat dipandang sebagai modul atas ring F. Pada bagian ini dijelaskan mengenai definisi dan contoh yang berkaitan dengan modul. Diberikan M merupakan himpunan dengan dua operasi dan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan yang elemennya berupa skalar maka disebut R −modul atau modul M atas ring R (Roman, 2007; Wahyuni & dkk, 2016)

Berdasarkan pengertian R −modul atau modul M atas ring R dibedakan menjadi dua, yaitu modul kiri dan modul kanan. Berikut penjelasan dari definisi beserta aksioma yang memenuhi modul kiri dan modul kanan.

Definisi 2.16

Diberikan M merupakan modul kiri atas ring R, yaitu untuk setiap $m_1, m_2 \in M$, $r_1, r_2 \in R$, dengan operasi fungsi pemetaan $* : R \times M \to M$ jika memenuhi aksioma berikut ini:

1. $r_1 * (m_1 + m_2) = r_1 * m_1 + r_1 * m_2$
2. $(r_1 + r_2) * m_1 = r_1 * m_1 + r_2 * m_1$
3. $(r_1 \cdot r_2) * m_1 = r_1 * (r_2 * m_1)$
4. $1_R * m_1 = m_1$

Definisi 2.17

Diberikan M merupakan modul kanan atas ring R, yaitu $\forall\, m_1, m_2 \in M$ dan $r_1, r_2 \in R$, dengan operasi fungsi pemetaan $* : M \times R \to M$ jika memenuhi aksioma berikut ini:

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

1. $(m_1 + m_2) * r_1 = m_1 * r_1 + m_2 * r_1$
2. $m_1 * (r_1 + r_2) = m_1 * r_1 + m_1 * r_2$
3. $m_1 * (r_1 \cdot r_2) = (m_1 * r_1) * r_2$
4. $m_1 * 1_R = m_1$

Apabila memenuhi modul kiri dan modul kanan maka disebut sebagai modul M atas ring R. Lebih lanjut, R −modul atau modul M atas ring R dinotasikan dengan $M : R$ −modul.

Contoh 2.18

Diberikan himpunan matriks berukuran 3×1 atas bilangan real yaitu,

$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$ dan himpunan matriks atas ring $\mathbb{R}$ berukuran 3×3,

$M_{3x3}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{22} & p_{33} \end{bmatrix}, p_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1,2,3 \right\}$.

$\mathbb{R}^3$ merupakan modul kiri atas ring $M_{3x3}(\mathbb{R})$ sebab,

1. Untuk sebarang matriks $\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{22} & p_{33} \end{bmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ dan $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

   maka berlaku,

   $$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{22} & p_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{22} & p_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{22} & p_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

2. Untuk sebarang matriks

   $\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{22} & p_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{22} & q_{33} \end{bmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ dan $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. memenuhi,

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$$\begin{bmatrix} p_{11}+q_{11} & p_{12}+q_{12} & p_{13}+q_{13} \\ p_{21}+q_{21} & p_{22}+q_{22} & p_{23}+q_{23} \\ p_{31}+q_{31} & p_{22}+q_{32} & p_{33}+q_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{22} & p_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{22} & q_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

3. Untuk sebarang matriks

$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{22} & p_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{22} & q_{33} \end{bmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ dan $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. berlaku,

$$\left(\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{22} & p_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{22} & q_{33} \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{22} & p_{33} \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{22} & q_{33} \end{bmatrix} \right)$$

4. Untuk sebarang matriks $\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{22} & p_{33} \end{bmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ dan $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

   terdapat $1 \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ sehingga berlaku,

   $$1 * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Jadi terbukti bahwa $\mathbb{R}^3$ merupakan modul kiri atas ring $M_{3x3}(\mathbb{R})$.

C. Submodul

Pada subbab ini akan dikaji mengenai definisi serta contoh yang berkaitan dengan submodul dan submodul prima.

Definisi 2.19

Diberikan suatu M merupakan $R-$ modul dan $N \subseteq M$ dengan N himpunan tak kosong. N dikatakan submodul dari M apabila memenuhi sifat berikut ini (Adkins & Weintrub, 1992):

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

1. $(N, +)$ grup komutatif
2. Untuk setiap $r \in R$, $n \in N$ berlaku $r \cdot n \in N$ dan $n \cdot r \in N$

Contoh 2.20

1. Diketahui himpunan bilangan bulat modulo 5 atau dinotasikan $\mathbb{Z}_5$ merupakan modul atas ring $\mathbb{Z}$. Submodul dari $\mathbb{Z}_5$ yaitu,

   $N_1 = \{0.k | k \in \mathbb{Z}_5\} = \{0\}$

   $N_2 = \{1.k | k \in \mathbb{Z}_5\} = \{0,1,2,3,4\}$
2. Diketahui himpunan bilangan bulat modulo 6 atau dinotasikan $\mathbb{Z}_6$ merupakan modul atas ring $\mathbb{Z}$. Submodul dari $\mathbb{Z}_6$ yaitu,

   $N_1 = \{0.k | k \in \mathbb{Z}_6\} = \{0\}$

   $N_2 = \{1.k | k \in \mathbb{Z}_6\} = \{0,1,2,3,4,5\}$

   $N_3 = \{2.k | k \in \mathbb{Z}_6\} = \{0,2,4\}$

   $N_4 = \{3.k | k \in \mathbb{Z}_6\} = \{0,3\}$
3. Diketahui $\mathbb{R}$– modul $\mathbb{R}^3$ dan $N \subseteq \mathbb{R}^3$. Sehingga N submodul di $\mathbb{R}^3$, dengan

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

   Dikarenakan jika ambil sebarang $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p \\ q \\ 0 \end{bmatrix} \in N$ dan $r \in \mathbb{R}$ maka berlaku,

   N memenuhi sifat $(N, +)$ grup komutatif yaitu,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - p \\ y - q \\ 0 \end{bmatrix} \in N$$

   dan memenuhi sifat $r \cdot n \in N$ dan $n \cdot r \in N$ yaitu,

$$r \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot x \\ r \cdot y \\ 0 \end{bmatrix} \in N$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Lemma 2.21

Jika terdapat suatu M merupakan R– modul dimana terdapat $N \subseteq M$ dan N bukan himpunan kosong dikatakan submodul apabila memenuhi sifat berikut ini (Mardiani, 2016; Roman, 2007):

1. $0 \in N$
2. Untuk setiap $x, y \in N$ berlaku $x - y \in N$
3. Untuk setiap $r \in R$, $x \in N$ berlaku $r \cdot x \in N$ dan $x \cdot r \in N$

Bukti

1. Jelas, karena $N \neq \emptyset$ yang memiliki elemen-elemen salah satunya elemen identitas, sedemikian sehingga terbukti himpunan N terdapat elemen identitas atau dapat ditulis $0 \in N$.
2. Ambil sebarang $x = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{bmatrix} \in N$, karena terdapat $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ sehingga berlaku,

$$x - y = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 - y_1 & 0 \\ x_2 - y_2 & 0 \end{bmatrix} \in N$$

3. Ambil sebarang $r = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ r_2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}$ dan $x = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix} \in N$ sedemikian sehingga,

$$r \cdot x = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ r_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_1 x_1 & 0 \\ r_2 x_1 & 0 \end{bmatrix} \in N \quad \text{dan}$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$$x \cdot r = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ r_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 r_1 & 0 \\ x_2 r_1 & 0 \end{bmatrix} \in N \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.22

Jika terdapat suatu N_1, N_2 yang masing-masingnya merupakan submodul dari $M : R -$ modul maka $N_1 \cap N_2$ adalah submodul (Mardiani, 2016; Roman, 2007).

Bukti

1. Ambil sebarang N_1, N_2 submodul dari $M : R -$ modul maka terdapat $0 \in N_1$ dan $0 \in N_2$, sehingga diperoleh $0 \in N_1 \cap N_2$.
2. Akan ditunjukkan $x - y \in N_1 \cap N_2$.

   Ambil sebarang $x \in N_1 \cap N_2$ dengan $x \in N_1$, $x \in N_2$ dan $y \in N_1 \cap N_2$ dengan $y \in N_1$, $y \in N_2$. Dikarenakan N_1 submodul berakibat $x - y \in N_1$ dan karena N_2 submodul berakibat $x - y \in N_2$ sehingga terbukti bahwa $x - y \in N_1 \cap N_2$.
3. Akan ditunjukkan $r \cdot x \in N_1 \cap N_2$ dan $x \cdot r \in N_1 \cap N_2$

   Ambil sebarang $r \in R$ dan $x \in N_1 \cap N_2$, berarti $x \in N_1 \cap N_2$ dengan $x \in N_1$, $x \in N_2$. Dikarenakan N_1 submodul berakibat $x \cdot r \in N_1$ dan karena N_2 submodul berakibat $r \cdot x \in N_2$, $x \cdot r \in N_2$. Sehingga terbukti bahwa $r \cdot x \in N_1 \cap N_2$ dan $x \cdot r \in N_1 \cap N_2$.

Namun teorema tersebut tidak berlaku untuk $N_1 \cup N_2$ dikarenakan terdapat $\mathbb{Z} : \mathbb{Z} -$ modul dengan $N_1 = 2\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\}$ dan $N_2 = 3\mathbb{Z} = \{0, \pm 3, \pm 6, \ldots\}$ sehingga diperoleh $N_1 \cup N_2 = \{0, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \ldots\}$ untuk

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$x = 2$ dan $y = 3$ maka terdapat $x - y = -1 \notin N_1 \cup N_2$ akibatnya diperoleh $x - y \notin N_1$ dan $x - y \notin N_2$. Sehingga terbukti bahwa $-y \notin N_1 \cup N_2$. ■

Teorema 2.23

Jika terdapat suatu N_1, N_2, N_3 yang masing-masingnya merupakan submodul dari $M : R -$ modul maka $N_1 + N_2 + N_3$ adalah submodul (Mardiani, 2016; Roman, 2007).

Bukti

1. Jelas bahwa $0 \in N_1 + N_2 + N_3$ sebab $0 = 0 + 0 + 0$ untuk setiap $0 \in N_1$ $0 \in N_2$, dan $0 \in N_3$.
2. Akan ditunjukkan $x - y \in N_1 + N_2 + N_3$.

   Ambil sebarang $x, y \in N_1 + N_2 + N_3$. Demikian sehingga diperoleh $x = n_1 + n_2 + n_3 \in N_1 + N_2 + N_3$, $y = n_4 + n_5 + n_6 \in N_1 + N_2 + N_3$ dengan $n_1, n_4 \in N_1$, $n_2, n_5 \in N_2$, dan $n_3, n_6 \in N_3$ Sedemikian sehingga,

   $$\begin{aligned} x - y &= (n_1 + n_2 + n_3) - (n_4 + n_5 + n_6) \\ &= (n_1 - n_4) + (n_2 - n_5) + (n_3 - n_6) \\ &\in N_1 + N_2 + N_3 \end{aligned}$$

   Jadi, terbukti bahwa $x - y \in N_1 + N_2 + N_3$
3. Akan ditunjukkan $r \cdot x \in N_1 + N_2 + N_3$ dan $x \cdot r \in N_1 + N_2 + N_3$.

   Ambil sebarang $r \in R$ dan $x \in N_1 + N_2 + N_3$, sedemikian sehingga $x = n_1 + n_2 + n_3$, $\forall\, n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$, dan $n_3 \in N_3$. Sehingga berlaku,

   $$\begin{aligned} r \cdot x &= r \cdot (n_1 + n_2 + n_3) \\ &= r \cdot n_1 + r \cdot n_2 + r \cdot n_3 \\ &\in N_1 + N_2 + N_3 \end{aligned}$$ dan

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$$x \cdot r = (n_1 + n_2 + n_3) \cdot r$$
$$= n_1 \cdot r + n_2 \cdot r + n_3 \cdot r$$
$$\in N_1 + N_2 + N_3$$

Jadi, terbukti bahwa $r \cdot x \in N_1 + N_2 + N_3$ dan $x \cdot r \in N_1 + N_2 + N_3$. ■

Definisi 2.24

Diberikan modul M atas ring R dan N submodul dari M. Submodul prima adalah submodul N yang memenuhi sifat yaitu, $N \neq M$ untuk setiap $r \in R, m \in M$ jika $r \cdot m \in N$ maka $m \in N$ atau $r \in (N: M)$ dimana $(N: M) = \{ r \in R \mid r \cdot M \subseteq N\}$ (Sirad, 2018; Mirzaei & Nekooei, 2017; Khusnawati, 2017; Ameri, 2003; Mirzaei & Nekooei, 2016).

Contoh 2.25

1. Submodul $\{0\}$ dalam $\mathbb{Z}_5 \backslash \{0\} : \mathbb{Z} -$ modul merupakan submodul prima. Dikarenakan untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}_5 \backslash \{0\}$ dengan $rm = 0$ atau $r \in (\{0\} : \mathbb{Z}_5 \backslash \{0\}) = 5\mathbb{Z}$.
2. Misalkan $\mathbb{Q}$ merupakan himpunan semua bilangan rasional. Himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ bukan submodul prima di $\mathbb{Q}$ dengan pemetaan $\mathbb{Q} : \mathbb{Z}$ −modul dikarenakan terdapat $\frac{1}{6} \in \mathbb{Q}$ dan $6 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $6 \cdot \frac{1}{6} \in \mathbb{Z}$. Namun hal tersebut tidak selalu $6 \cdot \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}$. Jika diambil $\frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$ maka berlaku $6 \cdot \frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$.
3. Pada pemetaan $\mathbb{Z} : \mathbb{Z}$ −modul, submodul $p\mathbb{Z}$ merupakan submodul prima dengan p merupakan sebarang bilangan prima. Hal ini dikarenakan, jika ambil sebarang $r \in \mathbb{Z}$ dan $m \in \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ dengan $r \cdot m \in \mathbb{Z}$ maka berlaku $r \cdot \mathbb{Z} \subseteq p\mathbb{Z}$ yang berarti bahwa $(p\mathbb{Z} : \mathbb{Z})$.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

D. Modul Bebas

Pada subbab ini dijelaskan mengenai definisi serta contoh yang berkaitan dengan modul bebas.

Definisi 2.26

Diberikan modul M atas ring R. Modul M dikatakan modul bebas apabila memiliki basis yaitu terdapat $X \subseteq M$ dengan sifat-sifat sebagai berikut (Roman, 2007; Mardiani, 2016; Wahyuni & dkk, 2016):

1. X dikatakan bebas linear yaitu,

   Jika $\forall\, r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ dengan elemen berbeda $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ memenuhi $r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_nx_n = 0_M$ maka,

   $$r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0_R$$

2. X dikatakan merentang atau membangun M dinotasikan $M = < X >$,

   Jika untuk setiap $m \in M$ terdapat $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ dengan elemen-elemen berbeda $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ maka berlaku,

   $$m = \sum_{i=1}^{n} r_i\, x_i\,.$$

Contoh 2.27

Diberikan modul $\mathbb{R}^3$ atas ring R. Modul $\mathbb{R}^3$ merupakan modul bebas sebab $\mathbb{R}^3$ memiliki basis yaitu, $S = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1,)\}$. Dengan demikian berlaku,

1. Sifat bebas linear. Ambil sebarang $r_1, r_2, r_3 \in R$ berlaku,

$$r_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + r_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + r_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}r_1 + r_2 + r_3\\ r_2 + r_3\\ r_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Sehingga diperoleh $r_1 = r_2 = r_3 = 0$.

2. Sifat merentang. Ambil sebarang $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sehingga diperoleh,

$$r_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_1 + r_2 + r_3 \\ r_2 + r_3 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $r_3 = c,\ r_2 = b - c,\ r_1 = a - b$.

Definisi 2.28

Jika terdapat suatu $M = R^n$ merupakan R −modul bebas dengan pembangun berhingga maka berlaku M memiliki basis yang berhingga, yaitu $\{m_1, \ldots, m_n\}$ (Brown, 1993).

Contoh 2.29

Diberikan $R^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in R \right\}$ dengan R^n merupakan himpunan semua kolom berukuran n. Berdasarkan definisi penjumlahan dan perkalian skalar, R^n merupakan R −modul. Diberikan $\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\cdots$, $\varepsilon_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Maka diperoleh $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ adalah basis di R^n. Oleh sebab itu, R^n merupakan R −modul bebas dengan pembangun berhingga.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

E. Matriks atas Ring Komutatif

Pada sub bab ini dijelaskan mengenai definisi dan Teorema yang berkaitan dengan matriks atas ring komutatif. Diawali dengan mendefinisikan suatu matriks yang entri-entrinya adalah elemen atas ring komutatif. Telah diketahui bahwa apabila R adalah ring komutatif sehingga himpunan matriks berukuran $m \times n$ atas R, dinotasikan $M_{m\times n}(R)$ dengan kata lain matriks atas ring komutatif R (Brown, 1993; Prokip, 2005; Abdurrazaq, Wardayani, & Suroto, 2015).

Definisi 2.30

Diberikan $i, j \in A$ yang dinotasikan $[A]_{ij}$ dan $A \in M_{m\times n}(R)$ dengan baris i pada A dinotasikan $\mathrm{Row}_i(A)$ dan kolom j pada A dinotasikan $\mathrm{Col}_j(A)$ (Brown, 1993).

Jika $A = \begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(R)$ maka diperoleh formula:

$\mathrm{Row}_i(A) = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ untuk $i = 1, \dots, m$

$\mathrm{Col}_j(A) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^t$ untuk $j = 1, \dots, n$

Lebih lanjut, diberikan Teorema yang menyatakan fungsi determinan matriks pada matriks atas ring komutatif. Sebelumnya telah didefinisikan bahwa fungsi kronecker delta atau yang dinotasikan δ_{ij} merupakan suatu fungsi dari dua variabel dan umumnya bilangan bulat yang didefinisikan sebagai berikut:

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases}$ Untuk setiap $i = 1, \dots, m$ dan $j = 1, \dots, n$.

Teorema 2.31

Diberikan R merupakan ring komutatif dan $A \in M_{n\times n}(R)$, sehingga berlaku (Brown, 1993),

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

1. $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}\, a_{kj} det\left(A_{kj}\right) = \delta_{kj} det(A)$ untuk setiap $j, k = 1, \ldots, n$ dan
2. $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}\, a_{ki} det(A_{ki}) = \delta_{ki} det(A)$) untuk setiap $i, k = 1, \ldots, n$ ■

Catatan, fungsi $A \longmapsto a_{ki} det\left(A_{kj}\right)$ merupakan n −linear di $M_n(R)$ sebab sebuah kombinasi linear pada fungsi n −linear adalah n −linear, sedemikian sehingga D_{ij} adalah n −linear. Misalkan $A \in M_n(R)$ merupakan matriks dengan baris p dan q sama. Jika $k \neq p, q$ maka A_{kj} memiliki dua baris yang sama, jadi $det\left(A_{kj}\right) = 0$.

F. Integrasi Aljabar dengan Al Quran

Matematika merupakan ilmu mengenai bentuk (abstrak), relasi, dan ukuran. Matematika juga memiliki ciri khas yang tidak dimiliki oleh ilmu pengetahuan lain yakni, bahwa matematika adalah abstraksi dari dunia nyata yang menggunakan bahasa simbol, berpola pikir deduktif, bertumpu pada kesepakatan, konsisten dalam sistemnya, dan memperhatikan semesta pembicaraan. Misalnya dalam pembuktian Teorema yang berkaitan pada sebuah Definisi. Kemudian Teorema tersebut menimbulkan sebuah akibat yang dikenal Lemma ataupun *Corollary*. Adanya simbol-simbol tersebut mendorong pesatnya perkembangan formula persamaan dan memberikan kesempatan luas untuk matematika dapat digunakan oleh berbagai ilmu dan kehidupan nyata.

Dalam subbab ini akan dipadukan matematika aljabar yang terkait dalam penelitian ini dengan ayat-ayat Alquran sehingga menjadi sebuah integrasi keilmuan antara ilmu matematika aljabar dan Islam. Integrasi ini bertujuan untuk menyatukan kedua ilmu yang berbeda tanpa menghilangkan keunikan dari kedua ilmu tersebut selain itu menambah rasa syukur, mempertebal keimanan dan

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

mengingat kebesaran Allah SWT. Sebagaimana Allah SWT telah berfirman dalam QS. Az-Dzariyat: 49 yaitu,

وَمِن كُلِّ شَيْءٍ خَلَقْنَا زَوْجَيْنِ لَعَلَّكُمْ تَذَكَّرُونَ (٤٩)

"Dan segala sesuatu kami ciptakan berpasang-pasangan supaya kamu mengingat kebesaran Allah SWT."

Berdasarkan QS. Az Dzariyat:49 diatas bahwa Allah SWT menciptakan segala sesuatu berpasang-pasangan dari dua jenis yaitu, laki-laki dan wanita, bumi dan langit, matahari dan bulan, siang dan malam, manis dan pahit, sains (salah satunya matematika) dan Islam. Semuanya dimaksudkan supaya manusia mengingat dan sadar atas kebesaran Allah SWT.

Dalam penelitian ini tidak terlepas dengan himpunan dan pemetaan. Misalnya pada konsep pemetaan modul $* : R \times M \rightarrow M$ dimana M merupakan himpunan tak kosong yang memenuhi aksioma modul dan R merupakan himpunan tak kosong yang memenuhi aksioma ring. Pemetaan merupakan relasi khusus yang menghubungkan setiap anggota himpunan di *domain* dengan tepat satu anggota di *kodomain*. Pada konteks kehidupan terdapat dua golongan yakni, manusia dan jin ada yang beriman, beramal sholeh dan taat kepada Allah SWT ataupun sebaliknya ada yang fasik, kafir, dan ingkar kepada Allah SWT. Kemudian tempat kedua golongan tersebut akan berakhir pada dua kemungkinan yakni surga dan neraka. Surga merupakan tempat untuk golongan yang bertakwa. Sedangkan neraka merupakan tempat untuk golongan ingkar. Sebagaimana firman Allah SWT dalam QS. Adz-Dzaariyat:56 yaitu,

وَمَا خَلَقْتُ ٱلْجِنَّ وَٱلْإِنسَ إِلَّا لِيَعْبُدُونِ (٥٦)

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

"*Dan aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka mengabdi kepada-Ku.*"

Berdasarkan QS. Adz-Dzaariyat:56 diatas ditegaskan bahwa Allah SWT tidaklah menjadikan golongan jin dan manusia melainkan untuk mengenal-Nya dan agar beribadah kepada-Nya dimana ibadah itu sangat bermanfaat dengan tujuan pada tempat berakhir mereka nantinya.

Dalam aljabar sering kali yang dibahas mengenai pembuktian Teorema, Lemma, Proposisi dengan proses pembuktian yang panjang dan teliti. Akan tetapi dalam proses pembuktian tersebut diperlukan sumber pendukung yang dijamin akuratnya sebab itu, perlu dilakukannya *tabayyun*. Dalam bahasa Indonesia *tabayyun* merupakan mencari kejelasan, meneliti suatu hal sebelum mengungkapkannya dengan tujuan mendapatkan hasil simpulan yang bijak, arif, dan tepat sesuai keadaan. Sebagaimana firman Allah SWT dalam QS. Al-Hujurat:6 sebagai berikut,

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِن جَآءَكُمۡ فَاسِقُۢ بِنَبَإٖ فَتَبَيَّنُوٓاْ أَن تُصِيبُواْ قَوۡمَۢا بِجَهَٰلَةٖ فَتُصۡبِحُواْ عَلَىٰ مَا فَعَلۡتُمۡ نَٰدِمِينَ (٦)

"*Hai orang-orang yang beriman, jika datang kepadamu orang fasik membawa berita maka periksalah dengan teliti agar kamu tidak menimpakan suatu musibah kepada suatu kaum tanpa mengetahui keadaanya yang menyebabkan kamu menyesal atas perbuatanmu itu.*"

Berdasarkan QS. Al-Hujurat:6 diatas bahwa suatu informasi atau berita pasti memiliki nilai kebenaran yakni salah atau benar. Sehingga supaya tidak menghasilkan suatu informasi yang bohong maka harus dibuktikan terlebih dahulu nilai kebenaran suatu informasi tersebut.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini dikategori penelitian deskriptif kualitatif, sebab mengkaji tahapan suatu Definisi, Teorema serta karakteristik sifat-sifat dari submodul prima pada modul bebas atas ring komutatif dengan elemen satuan. Berdasarkan penjelasan (Purwono, 2010), penelitian ini dapat dikategorikan sebagai kajian pustaka (*literature review*) yaitu informasi yang berkaitan dengan masalah penelitian yang diperoleh dari sumber cetak maupun elektronik yang bertujuan sebagai dasar acuan atau pendukung dalam mengatasi permasalahan penelitian.

Data yang digunakan dalam penelitian ini diambil dari beberapa referensi diantaranya buku ilmiah, jurnal, dan referensi lain yang berkaitan dengan ring komutatif dengan elemen satuan, modul, submodul, submodul prima, modul bebas, dan matriks atas ring komutatif.

Adapun tahapan-tahapan dan analisis pembahasan dalam penyelesaiannya sebagai berikut:

1. Melakukan studi pustaka yang berkaitan dengan penelitian meliputi buku, jurnal dan sumber referensi lain yang mendukung.
2. Menjelaskan definisi serta contoh yang berkaitan dengan sifat-sifat ring komutatif dengan elemen satuan, submodul, submodul prima, modul, modul bebas, matriks atas ring komutatif

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

3. Membuktikan Teorema yang berkaitan dengan sifat submodul prima pada modul bebas yang memiliki pembangun berhingga
4. Membuktikan Teorema, Lemma, Proposisi dari sifat-sifat submodul prima pada modul bebas yang memiliki pembangun berhingga atas ring komutatif dengan elemen satuan
5. Menarik kesimpulan dari analisis pembahasan

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

BAB IV

ANALISIS DAN HASIL PEMBAHASAN

Pada bab ini dikaji tentang submodul bebas pada modul bebas atas ring komutatif dengan elemen satuan yang berupa Teorema, Lemma, Proposisi, dan *Corollary*. Pada penelitian ini, telah didefinisikan bahwa submodul prima N pada $M = R^n : R$ −modul bebas yang memiliki pembangun berhingga dan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan. Misalkan $X_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in}) \in M = R^n$ untuk suatu $x_{ij} \in R$ dengan $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$ sehingga diperoleh,

$$B_{m\times n} = [X_1 \ldots X_m] = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(R).$$

Himpunan tak kosong N merupakan submodul dari M yang dibangun oleh himpunan $\Psi = \{X_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in}) \in M : i \in \Omega\}$ dan $\mathfrak{R} = \sum_{i_1,\ldots,i_n \in \Omega} RD_{i_1,\ldots,i_n}$ dimana, $D_{i_1,\ldots,i_n} = det[X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}]$. Himpunan $B_{(j_1,\ldots,j_k)} \in M_{m\times n}(R)$ dinotasikan sebagai submatriks B dengan kolomnya adalah $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$ di B dan $[B_{(j_1,\ldots,j_k)}]_{ls}$ merupakan $B_{(j_1,\ldots,j_k)}$ tanpa baris l dan kolom s.

Lemma 4.1

Misalkan $M = R^n$ adalah R −modul bebas dan Ψ merupakan pembangun berhingga dari submodul prima N yang dinotasikan $N = < \Psi >$ maka berlaku $\mathfrak{R} \subseteq (N: M) \subseteq \sqrt{\mathfrak{R}}$.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Bukti

1. Diketahui $M = R^n$ adalah $R -$ modul bebas dan $N = < \Psi >$. Akan dibuktikan $\mathfrak{R} \subseteq (N{:}M)$.

   Ambil sebarang $detB = det\left[X_{i_1} \dots X_{i_n}\right] \in \mathfrak{R}$. Akan ditunjukkan bahwa $detB = det[X_{i_1} \dots X_{i_n}] \in (N{:}M)$.

   Dikarenakan $\mathfrak{R}$ merupakan ideal di R maka $\Psi = (0, \dots, 0,1,0, \dots, 0) \in M$ dengan 1 adalah elemen ke$-k$, $1 \leq k \leq n$ dan $B = [X_{i_1} \dots X_{i_n}] \in M_{m \times n}(R)$ untuk suatu $i_j \in \Omega$, $X_{i_j} \in \Psi, 1 \leq j \leq n$ berlaku,

$$\begin{aligned} detB \cdot (\Psi) &= detB \cdot (0, \dots, 0,1,0, \dots, 0) \\ &= (0, \dots, 0, det\, B\, , 0, \dots, 0) \\ &= (0, \dots, 0, \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, x_{i_j k}\, det\, B_{i_j k}\, , 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

   dengan $B_{i_j k}$ merupakan submatriks di B tanpa baris i_j dan kolom k.

   Mengingat, $M = R^n$ adalah $R -$modul bebas maka M mempunyai basis. Misalkan terdapat $\Psi = (x_{i1}, \dots, x_{in}) = (0, \dots, 0,1,0, \dots, 0)$ sebagai basis di M sehingga Ψ bersifat bebas linear dan merentang atau membangun maka $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, x_{i_j t} \det B_{i_j k} = 0$ untuk setiap $1 \leq t \leq n$ dengan $t \neq k$. Mengingat $N = < \Psi >$ merupakan pembangun berhingga dari submodul prima maka untuk setiap $detB \in \mathfrak{R}$, $\Psi \in M$ berlaku,

$$\begin{aligned} detB(\Psi) &= detB(0, \dots, 0,1,0, \dots, 0) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, x_{i_j k}\, det\, B_{i_j k}\, (x_{i_j 1, \dots} x_{i_j n}) \in N \end{aligned}$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Dengan demikian $detB \in (N:M)$. Jadi terbukti bahwa $\mathfrak{R} \subseteq (N:M)$ dengan $(N:M) = \{detB \in \mathfrak{R} \mid detB(\Psi) \subseteq N\}$.

2. Diketahui $M = R^n$ adalah $R -$ modul bebas dan $N = < \Psi >$. Akan dibuktikan $(N:M) \subseteq \sqrt{\mathfrak{R}}$ dengan $\sqrt{\mathfrak{R}}$ merupakan ideal radikal dari $\mathfrak{R}$.

   Ambil sebarang $x \in (N:M)$. Akan dibuktikan bahwa $x \in \sqrt{\mathfrak{R}}$. Dikarenakan $x \in (N:M)$ maka berlaku $x \in N$ atau $x \in M$. Mengingat, Ψ adalah pembangun berhingga dari submodul prima N pada M yang dinotasikan $N = < \Psi >$ dimana $\Psi = (x_{i1}, \ldots, x_{in}) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0) \in N$ dengan x elemen ke$-k$, $1 \leq k \leq n$ dan $M = R^n$ adalah $R -$ modul bebas maka memiliki basis. Dalam hal ini, Ψ adalah basis di M. Oleh sebab itu, Ψ bersifat bebas linear dan merentang yang dapat dituliskan sebagai kombinasi linear, yaitu:

$$(0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0) = r_{k1}X_{i_1}(k) + \ldots + r_{km_k}X_{i_{m_k}}(k)$$

   untuk setiap $r_{kj} \in R$ berlaku $X_{i_j}(k) \in \Psi$ dan $m_k \in N$. Sedemikian sehingga berlaku,

$$x^n = det\begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & & 0 \\ & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$= det\begin{pmatrix} r_{11}X_{i_1}(1) + \ldots + r_{1m_1}X_{i_{m1}}(1) \\ \vdots \quad \vdots \\ r_{n1}X_{i_1}(n) + \ldots + r_{nm_n}X_{i_{mn}}(n) \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Dikarenakan pada persamaan tersebut adalah multilinear dan sisi kanan dari persamaannya berada di elemen $\mathfrak{R}$, maka diperoleh $x \in \sqrt{\mathfrak{R}}$. Jadi terbukti bahwa $(N:M) \subseteq \sqrt{\mathfrak{R}}$. ■

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Proposisi 4.2

Diberikan $M = R^n$ merupakan R −modul bebas . Jika $N = < X_1, \ldots, X_m >$ untuk suatu $X_i \in M$ dengan $1 \leq i \leq m$ dan $m < n$ maka $(N: M) = 0$.

Bukti

Ambil sebarang $x \in (N: M)$. Akan ditunjukkan $(N: M) = 0$ atau dengan kata lain $x = 0$. Dikarenakan $x \in (N: M)$ maka berlaku $x \in N$ atau $x \in M$. Mengingat bahwa Ψ adalah pembangun berhingga dari submodul prima N pada M yang sehingga diperoleh,

$$N = < x_{i1}, \ldots, x_{in} > = < \Psi >, \ \Psi = (x_{i1}, \ldots, x_{in}) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0) \in N$$

dengan x elemen ke$-k$, $1 \leq k \leq n$ dan M adalah modul bebas yang memiliki basis. Dalam hal ini, Ψ adalah basis di M. Maka Ψ bersifat bebas linear dan merentang. Misalkan, $(0, \ldots 0, x, 0, \ldots, 0) = \sum_{i=1}^{m} r_{ki} X_i$ dengan $r_{ki} \in R, 1 \leq i \leq m$. Sedemikian sehingga diperoleh,

$$x^n = det \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & & 0 \\ & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{pmatrix}_{n \times n} = det \begin{pmatrix} r_{11} X_1 + \ldots + r_{1m} X_m \\ \vdots \quad \vdots \\ r_{n1} X_1 + \ldots + r_{nm} X_m \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Dikarenakan $m < n$ maka berlaku $\sum_{i=1}^{m} r_{ki} X_i = 0$. Sedemikian sehingga $x^n = 0$. Jadi dapat disimpulkan bahwa $x = 0$, berakibat $(N: M) = 0$. ■

Teorema 4.3

Diberikan $(N: M)$ merupakan submodul prima N pada modul bebas M, maka $(N: M)$ adalah suatu ideal prima di R .

Bukti

Diketahui N merupakan submodul prima pada modul bebas M. Akan dibuktikan $(N: M)$ adalah suatu ideal prima dari R. Dalam menunjukkan $(N: M)$ adalah ideal

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

prima dari R, maka terlebih dahulu harus ditunjukkan bahwa $(N:M)$ adalah ideal dari R dan $(N:M)$ adalah ideal prima dari R yaitu,

1. Akan dibuktikan bahwa $(N:M)$ merupakan ideal dari R.
   a. Jelas bahwa $(N:M) \neq \emptyset$.

      Ambil sebarang $0 \in R$ sehingga $0 \cdot M = \{0\} \subseteq N$.

      Dikarenakan $(N:M) = \{ r \in R \mid r \cdot M \subseteq N\}$ maka $0 \in (N:M)$ dengan kata lain bahwa $(N:M) \neq \emptyset$.
   b. Akan ditunjukkan untuk sebarang $x, y \in (N:M)$, berlaku $x - y \in (N:M)$.

      Oleh sebab itu, $x \cdot M \subseteq N$ dan $y \cdot M \subseteq N$. Mengingat, N adalah submodul dari M. Demikian sehingga untuk sebarang $y \in (N:M)$ terdapat $-y \in (N:M)$ sehingga berlaku $(-y) \cdot M = -(y \cdot M) \subseteq N$. Oleh sebab itu, $x \cdot m + (-y) \cdot m = (x - y) \cdot m$ untuk setiap $m \in M$ yang berarti bahwa $(x - y) \in (N:M)$.
   c. Akan ditunjukkan untuk sebarang $x \in (N:M)$ dan $r \in R$, $xM \subseteq N$ maka berlaku $r \cdot x \in (N:M)$ dan $x \cdot r \in (N:M)$.

      Dikarenakan N merupakan submodul dari M maka diperoleh $r(xM) \subseteq N$. Berdasarkan definisi modul maka berlaku $r(xM) = (rx)M$. Mengingat bahwa submodul prima N pada modul bebas M yang dinotasikan $(N:M) = \{ r \in R \mid r \cdot M \subseteq N\}$ maka dapat disimpulkan $r \cdot x \in (N:M)$.

Berdasarkan pembuktian a,b,c di atas, maka $(N:M)$ merupakan ideal dari R.

2. Akan dibuktikan $(N:M)$ adalah suatu ideal prima dari R.

   Ambil sembarang $x, y \in R$ dengan $x \cdot y \in (N:M)$, akan dibuktikan terdapat $x \in (N:M)$ atau $y \in (N:M)$.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Misalkan $x \notin (N:M)$. Akan ditunjukkan $y \in (N:M)$. Untuk $x \cdot y \in (N:M)$ maka berlaku $(x \cdot y) \cdot M \subseteq N$ yang berarti bahwa $(x \cdot y) \cdot m \in N$ untuk setiap $m \in M$. Dikarenakan N adalah submodul prima dari M maka $N \neq M$. Untuk setiap $x, y \in R$, $m \in M$, diperoleh $x \cdot m \in N$ sedemikian sehingga $m \in N$ atau $x \in (N:M)$. Untuk $y \cdot m \in N$ maka $m \in N$ atau $y \in (N:M)$.

Dikarenakan $x \notin (N:M)$ akibatnya diperoleh $y \in (N:M)$. Sedemikian sehingga terbukti $(N:M)$ merupakan ideal prima di R. ■

***Corollary* 4.4**

Diberikan $M = R^n$ merupakan R −modul bebas. Himpunan Ψ merupakan pembangun berhingga dari submodul prima N yang dinotasikan $N = < \Psi >$ dan $(N:M)$ merupakan submodul prima N pada modul bebas M, maka berlaku $(N:M) \subseteq \sqrt{\mathfrak{R}}$.

Bukti

Ambil sebarang $x \in (N:M)$. Dikarenakan $x \in (N:M)$ maka berlaku $x \in N$ atau $x \in M$. Akan ditunjukkan $(N:M) \subseteq \sqrt{\mathfrak{R}}$. Mengingat, Ψ adalah pembangun berhingga dari submodul prima N pada M sehingga diperoleh,

$$N = < x_{i1}, \ldots, x_{in} > = < \Psi >, \ \Psi = (x_{i1}, \ldots, x_{in}) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0) \in N$$

dengan x elemen ke$-k$, $1 \leq k \leq n$. Dipunyai, N merupakan submodul prima pada M dan pembuktian Teorema 4.3 maka berlaku $(N:M)$ adalah ideal prima di R. Berdasarkan Teorema 4.3 dan Lemma 4.1 sedemikian sehingga terbukti bahwa $(N:M) = \sqrt{(N:M)} = \sqrt{\mathfrak{R}}$. ■

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Proposisi 4.5

Misalkan $M = R^n$ merupakan R −modul bebas dan $(N: M) = p$ dengan p merupakan ideal prima di R. Sedemikian sehingga,

1. Jika $x_{ij} \in p$ untuk setiap $i \in \Omega$, $i \leq j \leq n$ maka berlaku $N = p^n$
2. Jika p adalah ideal maksimal di R dan terdapat $i_j \in \Omega$ untuk semua $1 \leq j \leq n$ sedemikian sehingga $x_{i_j j} \notin p$, maka berlaku,

$$x_{i_1 1} x_{i_2 2} \dots x_{i_n n} N + pM = N$$

Bukti

1. Diketahui $p = (N: M)$. Oleh sebab itu, $p^n \subseteq N$. Misalkan $x_{ij} \in p$ untuk sebarang $i \in \Omega$, $1 \leq j \leq n$ maka berlaku $N \subseteq p^n$. Dikarenakan $p^n \subseteq N$ dan $N \subseteq p^n$ berakibat $N = p^n$.
2. Diketahui p merupakan ideal maksimal di R, $x_{i_1 1} x_{i_2 2} \dots x_{i_n n} \notin p$ untuk suatu $i_j \in \Omega$, dan $x_{i_j j} \in R, 1 \leq j \leq n$. Dikarenakan p dan N bersifat tertutup sehingga jelas bahwa $x_{i_1 1} x_{i_2 2} \dots x_{i_n n} N + pM \subseteq N$.

   Misalkan $(x_1, \dots, x_n) \in N$ untuk suatu $x_i \in R$, $1 \leq i \leq n$. Dikarenakan $x_{i_1 1} \dots x_{i_n n} R + p = R$, $x_k = x_{i_1 1} \dots x_{i_n n} r_k + y_k$ untuk suatu $r_k \in R$ dan $y_k \in p, 1 \leq k \leq n$. Akibatnya diperoleh,

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) + x_{i_1 1} \dots x_{i_n n} (r_1, \dots, r_n).$$

   Hal ini menyebabkan bahwa terdapat $x_{i_1 1} \dots x_{i_n n} (r_1, \dots, r_n) \in N$. Mengingat bahwa p adalah ideal maksimal di R, dan N merupakan submodul prima pada modul bebas M, dan karena $(r_1, \dots, r_n) \in N$ sehingga disimpulkan bahwa, $(x_1, \dots, x_n) \in x_{i_1 1} x_{i_2 2} \dots x_{i_n n} N + pM = N$, $N \subseteq x_{i_1 1} x_{i_2 2} \dots x_{i_n n} N + pM$. ■

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Lemma 4.6

Misalkan $M = R^{(n)}$ adalah $R-$modul bebas dan ideal prima p di R. Diberikan $B = [X_{i1} \dots X_{in}] \in M_{k\times n}(R)$ dan untuk suatu $X_i \in M, 1 \leq i \leq k\,, k < n.$ Jika $T_p = \{X = (x_1, \dots, x_n) \in M \mid det\beta(i_1, \dots, i_{k+1}) \in p,\ \forall\, i_1, \dots, i_{k+1} \in \{1, \dots, n\}\}$ dimana $\beta = [X\, X_1 \dots X_k] \in M_{(k+1)\times n}(R)$ maka berlaku,

1. T_p adalah submodul pada M.
2. Jika $X = (x_1, \dots, x_n) \in T_p$ maka $det(B(i_1, \dots, i_k))X \in pM + < B >$ untuk semua submatriks $B(i_1, \dots, i_k) \in B$.
3. Jika setiap determinan submatriks $k \times k$ di B barada di p, maka $T_p = M$.
4. Jika terdapat submatriks $B = (j_1, \dots, j_k) \in M_{k\times k}\,(R)$ di B sedemikian sehingga $detB(j_1, \dots, j_{k+1}) \notin p$, maka berlaku T_p adalah submodul $p-$prima di M.

Bukti

1. Ambil sebarang $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n) \in T_p$, $\forall\, x_i\,, y_i \in R\,,$ $1 \leq i \leq n.$ Untuk menunjukkan T_p adalah submodul di M, maka ditunjukkan terlebih dahulu bahwa T_p adalah grup komutatif dan $r \in R, X \in T_p$ memenuhi $r \cdot X \in T_p$ yaitu,
   a. Akan dibuktikan bahwa T_p adalah grup komutatif.

      Diketahui $T_p = \{X = (x_1, \dots, x_n) \in M \mid det\beta(i_1, \dots, i_{k+1}) \in p,$ untuk setiap $i_1, \dots, i_{k+1} \in \{1, \dots, n\}\}$. Ambil sebarang $X = (x_1, \dots, x_n)$ dan $Y = (y_1, \dots, y_n) \in T_p$ maka berlaku,

      $X + Y = det\beta_{X+Y}(i_1, \dots, i_{k+1})$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$= det\beta_X(i_1, \ldots, i_{k+1}) + det\beta_Y(i_1, \ldots, i_{k+1})$

$= det\beta_Y(i_1, \ldots, i_{k+1}) + det\beta_X(i_1, \ldots, i_{k+1})$

$= det\beta_{Y+X}(i_1, \ldots, i_{k+1})$

$= Y + X \in T_p$

Sedemikian sehingga dapat disimpulkan bahwa $X + Y = Y + X \in T_p$ berakibat T_p adalah grup komutatif.

b. Akan dibuktikan bahwa untuk sebarang $r \in R$ dan $X \in T_p$ memenuhi sifat $r \cdot X \in T_p$.

Dikarenakan $T_p = \{X = (x_1, \ldots, x_n) \in M \mid det\beta(i_1, \ldots, i_{k+1}) \in p,$ untuk setiap $i_1, \ldots, i_{k+1} \in \{1, \ldots, n\}\}$. Ambil sebarang $det\beta_X(i_1, \ldots, i_{k+1}) \in T_p$ dan $r \in R$ maka berlaku,

$$det\beta_{r \cdot X}(i_1, \ldots, i_{k+1}) = r \cdot det\beta_X(i_1, \ldots, i_{k+1})$$

dimana $\beta_{r \cdot X} = [X\, X_1 \ldots X_k]$. Sedemkian sehingga dapat disimpulkan bahwa $r \cdot X \in T_p$.

Dari pembuktian a dan b, disimpulkan bahwa T_p adalah submodul pada M.

2. Misalkan $X = (x_1, \ldots, x_n) \in T_p$ dan $B = (j_1, \ldots, j_k) \in M_{k \times k}(R)$ adalah submatriks di B. Asumsikan $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ sebab $det\beta(i_1, \ldots, i_{k+1}) \in p$ untuk setiap $i_1, \ldots, i_{k+1} \in \{1, \ldots, n\}$ maka terdapat $p_t \in p$ sedemikian sehingga diperoleh,

$$x_t detB(j_1, \ldots, j_k) = p_t + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} x_{jt}\, detB(t, j_1, \ldots, j_{i-1}, j_{i+1}, \ldots, j_k)$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

untuk setiap $1 \leq t \leq n,\ t \neq j_i,\ 1 \leq i \leq k$. Berdasarkan pernyataan tersebut didapat $det(B(j_1,\ldots,j_k))(x_1,\ldots,x_n) = X_p + \sum_{i=1}^{k} Y_i$, untuk suatu $X_p \in p^{(n)}$ dan $Y_i = (y_{i1},\ldots,y_{in}) \in M, 1 \leq i \leq k$. Oleh karena itu,

a. $y_{it} = \left(-1\right)^{i+1} x_{j_i} detB(t, j_1,\ldots,j_{i-1}, j_{i-1},\ldots,j_k), 1 \leq t \leq n,$

$t \neq j_i,\ldots,j_k$

b. $y_{ij_i} = x_{ji}\ detB(\ j_1,\ldots,j_k)$ dan

c. $y_{ij_s} = 0,\ 1 \leq s \leq k,\ \ s \neq i$

Sehingga diperoleh,

a. $y_{it} = \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m+i}\ x_{m_t} x_{j_i}\ det[B(t, j_1,\ldots,j_{i-1}, j_{i-1},\ldots,j_k)]_{ml},$

$1 \leq t \leq n,\ \ t \neq j_i,\ldots,j_k$

b. $y_{ij_i} = \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m+i}\ x_{mj_i} x_{j_i}\ det[B(\ j_1,\ldots,j_k)]_{mi}$ dan

c. $y_{ij_s} = \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m+i}\ x_{mj_s} x_{j_i}\ det[B(\ j_1,\ldots,j_{i-1}, j_{i-1},\ldots,j_k)]_{mi} = 0,$

$1 \leq s \leq k,\ \ s \neq i.$

Sedemikian sehingga,

$Y_i = \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m+i}\ x_{j_i}\ det[B(\ j_1,\ldots,j_k)]_{mi} X_m$ karena terdapat $Y_i \in < B >$, $1 \leq i \leq k$, maka disimpulkan $det(B(j_1,\ldots,j_k))(x_1,\ldots,x_n) \in pM + < B >$.

3. Diketahui $T_p = \{X = (x_1,\ldots,x_n) \in M \mid det\beta(i_1,\ldots,i_{k+1}) \in p,$ untuk setiap $i_1,\ldots,i_{k+1} \in \{1,\ldots,n\}\}$ dimana $\beta = [X\ X_1 \ldots X_k] \in M_{(k+1)\times n}(R)$ berarti $X \in M$ dan $X \in T_p$ sehingga $T_p \subseteq M$.

   Lebih lanjut, ambil sebarang $X = (x_1,\ldots,x_n) \in M$. Misalkan untuk setiap determinan submatriks $k \times k$ pada B berada di p maka berlaku,

$$det\beta(i_1,\ldots,i_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1}\ x_{ij}\ detB(\ i_1,\ldots,i_{j-1}, i_{j+1},\ldots,i_{k+1})$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

yang berada di p untuk setiap $i_1, \ldots, i_{k+1} \in \{1, \ldots, n\}$. Maka disimpulkan bahwa $X \in T_p$ berakibat $M \subseteq T_p$.

Dikarenakan $T_p \subseteq M$ dan $M \subseteq T_p$ maka $T_p = M$.

4. Untuk menunjukkan T_p adalah submodul $p-$ prima pada M, maka ditunjukkan terlebih dahulu bahwa $(T_p : M) = p$ dan T_p adalah submodul $p-$ prima pada M yaitu,

   a. Akan dibuktikan bahwa $(T_p : M) = p$.

      Diketahui $B = (j_1, \ldots, j_k) \in M_{k \times k}(R)$ yang merupakan submatriks di B, berlaku $detB(j_1, \ldots, j_k) \notin p$. Mengingat $(0, \ldots 1, \ldots, 0) \in M$ dengan 1 adalah komponen ke$-s$, $1 \leq s \leq k$, $s \neq j_1, \ldots, j_k$.

      Berdasarkan pembuktian (iii) bahwa $T_p = M$ maka berlaku, $J = (0, \ldots 1, \ldots, 0) \in T_p$ sehingga diperoleh $det\beta(s, j_1, \ldots, j_k) \in p$ dengan $\beta = [X\, X_1 \ldots X_k]$. Dikarenakan $det\beta(s, j_1, \ldots, j_k) = detB(j_1, \ldots, j_k) \notin p$ telah diketahui maka terjadi kontradiksi dengan pembuktian (iii). Sedemikian sehingga $T_p \neq M$ berakibat $T_p \subsetneq M$. Jadi dapat dikatakan bahwa $p \subseteq (T_p : M)$ yang berarti $p \in T_p$ atau $p \in M$.

      Misalkan $x \in T_p$ untuk suatu $x \in R$ sehingga $X = (0, \ldots, x, \ldots, 0) \in T_p$ dengan x adalah komponen ke$-s$, $1 \leq s \leq n$, $s \neq j_1, \ldots, j_k$. Maka $det\beta(s, j_1, \ldots, j_k) \in p$ dimana $\beta = [X\, X_1 \ldots X_k]$. Oleh karena itu, $det\beta(s, j_1, \ldots, j_k) = x \cdot detB(j_1, \ldots, j_k)$ sehingga $x \in p$. Dengan demikian $(T_p : M) \subseteq p$. Dikarenakan berlaku $p \subseteq (T_p : M)$ dan $(T_p : M) \subseteq p$ maka berakibat $(T_p : M) = p$.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

b. Akan dibuktikan T_p adalah submodul $p-$ prima pada M.

Diperhatikan $r \cdot X = r \cdot (x_1, \ldots, x_n) \in T_p$ untuk suatu $X \in M$ dan $r \in R$. Sedemikian sehingga diperoleh,

$$det\beta_{r \cdot X}(i_1, \ldots, i_{k+1}) = r \cdot det\beta_X(i_1, \ldots, i_{k+1}) \in p$$

untuk setiap $i_1, \ldots, i_{k+1} \in \{1, \ldots, n\}$. Jika $det\beta_X(i_1, \ldots, i_{k+1}) \in p$ untuk setiap $i_1, \ldots, i_{k+1} \in \{1, \ldots, n\}$ maka berlaku $X \in T_p$. Tetapi jika $det\beta_X(i_1, \ldots, i_{k+1}) \notin p$ untuk setiap $i_1, \ldots, i_{k+1} \in \{1, \ldots, n\}$ maka $r \in p$ dimana $p = (T_p : M)$. Dengan demikian dapat disimpulkan T_p adalah submodul $p-$ prima pada M. ■

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

BAB V

PENUTUP

A. Simpulan

Berdasarkan uraian dari hasil pembahasan yang telah dipaparkan dapat disimpulkan bahwa terdapat sifat-sifat submodul prima pada modul bebas atas ring komutatif dengan elemen satuan yaitu, submodul prima N pada modul bebas M yang dinotasikan $(N:M)$ merupakan suatu ideal prima di R. Apabila diketahui bahwa $\Psi = (X_1, \ldots, X_m)$ merupakan pembangun berhingga dari submodul prima N, maka berlaku $\mathfrak{R} \subseteq (N:M) \subseteq \sqrt{\mathfrak{R}}$ dimana $\sqrt{\mathfrak{R}}$ merupakan ideal radikal di $\mathfrak{R}$ dan untuk suatu $X_i \in M$ dengan $1 \leq i \leq m$ dan $m < n$ maka berlaku $(N:M) = 0$. Kemudian, jika $(N:M) = p$ maka berlaku $N = p^{(n)}$ dengan $x_{ij} \in p$ untuk setiap $i_j \in \Omega$, $i \leq j \leq n$ dan berlaku $x_{i_1 1} x_{i_2 2} \ldots x_{i_n n} N + pM = N$ untuk $x_{i_j j} \notin p$ dengan p adalah ideal maksimal di R.

B. Saran

Penelitian ini mengkaji hanya terbatas submodul prima pada modul bebas atas ring komutatif dengan elemen satuan. Penelitian selanjutnya disarankan untuk memperdalam daerah pengembangan submodul atau modul misalnya, struktur submodul prima pada modul atas daerah dedekind, eksistensi dekomposisi primer dari submodul pada modul bebas.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

DAFTAR PUSTAKA

Abdurrazaq, A., Wardayani, A., & Suroto. (2015). Ring Matriks Atas Ring Komutatif. *JMP, Vol. 7*(No. 1), 11-18.

Adkins, W. A., & Weintrub, S. H. (1992). *Algebra : An Approach via Module Theory*. New York: Springer.

Ameri, R. (2003). On The Prime Submodules Of Multiplication Modules. *International journal of mathematics and mathematical sciences*, 1715-1725.

Brown, W. C. (1993). Matrices Over Commutative Rings. In I. Marcel Dekker. New York.

Dar, K. H., & Akhram, M. (2007). On K-Homomorphisms of K-Algebras. *International Mathematical Forum, II*(46), 2283-2293.

Dewi, S. H., & dkk. (2015). Pengembangan Perangkat Pembelajaran Berstandar NCTM (National Council of Teacher of Mathematics) di Sekolah Menengah Pertama (SMP) Kelas VII Pada Pokok Bahasan Statistika. *Jurnal Edukasi*, 25-30.

Dummit, D., & Foote, R. (2004). Abstract Algebra Third Edition . New York: John Wilet dan Sons, Inc.

Grillet, P. A. (2007). *Abstract Algebra* (2nd ed.). New York: Springer.

Hafiyusholeh, M. (2015). Literasi Statistik dan Urgensinya bagi Siswa.

Hedayat, S., & Nekooei, R. (2006). Prime and Radical Submodules Of Free Modules Over A PID. *Houston Journal Of Mathematics, Vol.32, No. 2*, 355-367.

Khusnawati, L. D. (2017). Submodul Prima, Semiprima, dan Primer di Modul dan Modul Fraksi. *Jurnal Gammat, II*(7).

Lestari, F. D., & dkk. (2019). Properties of K-Isomorphism on K-Algebra. *Journal of Physics*.

Mardiani, D. (2016, September). Modul dan Keujudan Basis Pada Modul Bebas. *Mosharafa, Vol. 5 No. 3*.

Matsumura, H. (1986). Commutative Ring Theory. New York: Cambridge University Press.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Mirzaei, F., & Nekooei, R. (2016). On Prime Submodule of a Finitely Generated Free Modul Over a Commutative Ring. *Communications in Algebra, 44*(9), 3966-3975.

Mirzaei, F., & Nekooei, R. (2017). Characterization Of Prime Submodules Of A Free Module Of Finite Rank Over A Valuation Domain. *J. Korean Math. Soc, Vol. 54*(No. 1), 59-68. Retrieved from https://doi.org/10.4134/JKMS.j150591

Munendra, S., & Susanto, H. (2017, Januari 26). Sifat-Sifat Radikal dari Suatu Submodul dari Modul Perkalian Bebas.

Prokip, V. (2005). On Similarity of Matrices Over Commutative Rings. *Linear Algebra and its Applications*, 225-233.

Purwono. (2010). Studi Kepustakaan. Retrieved from https://id.scribd.com/doc/49046967/Studi Kepustakaan

Pusat, D., & Yilmaz. (2003). On Prime Submodules of Finitely Generated Free Modules. *Turk J Math*, 329-342.

Raisinghania, M. D., & Anggarwal, R. S. (1980). Modern ALgebra. New Delhi: S. Chand dan Company Ltd.

Rajaee, S. (2011). Some Remarks on Free Multiplication Modules. *International Journal of Algebra, Vol. 5*(no. 14), 655-659.

Roman, S. (2007). *Advance Linear Algebra.* New York: Springer.

Sirad, L. O. (2018, Januari). Karakteristik Modul Dedekind yang Dibangun Secara Hingga Melalui Order Modul. *Jurnal Saintifik, Vol.4, No.1*.

Skemp, R. R. (1971). The Psycholology Of Learning Mathematics. Baltimore: MD: Richard Clay (The Causer Press) Ltd.

Tiras, Y., Harmanci, A., & Smith, P. F. (1999). A Characterization of Prime Submodules . *Journal of Algebra*, 743-752.

Wahyuni, S., & dkk. (2016). *Modul dan Homomorfisma Modul Atas Ring.* Yogyakarta: Gajah Mada University Press.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id