NORMALLY FLAT CONTENT SEMIMODULES

SKRIPSI

Disusun Oleh

ZAIDATUN NI'MAH

NIM: H02215010

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL

SURABAYA

2019

PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini.

Nama	: Zaidatun Ni'mah
NIM	: H02215010
Program Studi	: Matematika
Angkatan	: 2015

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul: "NORMALLY FLAT CONTENT SEMIMODULES". Apabila suatu saat nanti terbukti saya melakukan tindakan plagiat, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian pernyataan keaslian ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 02 Juli 2019

Yang menyatakan,

(Zaidatun Ni'mah)

NIM. H02215010

LEMBAR PERSUTUJUAN PEMBIMBING

Skripsi oleh

NAMA : Zaidatun Ni'mah

NIM : H02215010

JUDUL : Normally Flat Content Semimodules

Ini telah diperiksa dan disetujui untuk diujikan.

Surabaya, 02 Juli 2019

Dosen Pembimbing 1	Dosen Pembimbing 2
(Dr. Moh. Hafiyusholeh, M.Si)	(Wika Dianita Utami, M.Sc)
NIP. 198002042014031001	NIP. 199206102018012003

LEMBAR PENGESAHAN

Skripsi oleh

Nama : Zaidatun Ni'mah
NIM : H02215010
Judul : *Normally Flat Content Semimodules*

Telah dipertahankan di depan tim penguji skripsi
Pada hari Selasa Tanggal 9 Juli 2019

Mengesahkan,
Tim Penguji

Penguji I	Penguji II
(Dr. Moh. Hafiyusholeh, M.Si)	(Wika Dianita Utami, M.Sc)
NIP. 198002042014031001	NIP. 199206102018012003

Penguji III	Penguji IV
(Nurissaidah Ulinnuha, M.Kom)	(Putroue Keumala Intan, M.Si)
NIP. 199011022014032004	NIP. 198805282018012001

Mengetahui,
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Ampel Surabaya

(Dr. Eni Purwati, M.Ag)
NIP. 196512211990022001

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL SURABAYA
PERPUSTAKAAN
Jl. Jend. A. Yani 117 Surabaya 60237 Telp. 031-8431972 Fax.031-8413300
E-Mail: perpus@uinsby.ac.id

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika UIN Sunan Ampel Surabaya, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama	:	ZAIDATUN NI'MAH
NIM	:	H02215010
Fakultas/Jurusan	:	SAINS DAN TEKNOLOGI / MATEMATIKA
E-mail address	:	zaidatunimahh@gmail.com

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah :
☑ Sekripsi ☐ Tesis ☐ Desertasi ☐ Lain-lain (……………………………)
yang berjudul :

NORMALLY FLAT CONTENT SEMIMODULES

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan Hak Bebas Royalti Non-Ekslusif ini Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (database), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di Internet atau media lain secara ***fulltext*** untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Surabaya, 30 Juli 2019

Penulis

(ZAIDATUN NI'MAH

ABSTRAK

NORMALLY FLAT CONTENT SEMIMODULES

Suatu semimodul M dikatakan *content semimodules* jika untuk setiap $x \in M$ maka $x \in c(x)M$ dengan $c(x) = \bigcap\{I, I$ ideal dari $S, x \in IM\}$ dan c merupakan pemetaan dari M ke I yang disebut sebagai fungsi *content*. Semimodul L dikatakan *normally flat* atas M (*normally* M*-flat*), jika $N \otimes_S L \leq_S^n M \otimes_S L$ untuk setiap $N \leq_S^n M$ dengan $N \otimes_S L$ dan $M \otimes_S L$ merupakan hasil kali tensor yang memenuhi beberapa kondisi. Berdasarkan analisa yang telah dilakukan, diperoleh beberapa konsep yaitu untuk semimodul M atas semiring S terdapat suatu isomorfisma $S \otimes M \cong M$ dan setiap ideal I dari semiring S berlaku $(\bigcap I_i)M = \bigcap(I_i M)$. Suatu *content semimodule* M memenuhi $s\big(c(x)\big) = c(sx)$ jika dan hanya jika $(I :_S s)M = (IM :_M s)$ untuk setiap $x \in M$. Lebih lanjut, untuk semidomain S dan *content torsionfree* S*-semimodule* berlaku $s\big(c(x)\big) = c(sx)$ untuk setiap $s \in S$ dan $x \in M$. Dengan mengadopsi konsep dari semidomain terbukti bahwa jika setiap ideal prima dari S adalah subtraktif dan M merupakan *normally flat semimodules* maka M merupakan *semimodule torsionfree*, yang berakibat untuk setiap $s \in S$ dan $x \in M$ dengan M adalah *normally flat content semimodules* berlaku $s\big(c(x)\big) = c(sx)$. Suatu *content semimodule* M dan setiap ideal I dari S yang memenuhi $(I :_S s)M = (IM :_M s)$ berlaku $(I :_S J)M = (IM :_M J)$ untuk setiap I, J ideal dari S yang selanjutnya berakibat untuk suatu *normally flat content semimodule* M berlaku $(I :_S J)M = (IM :_M J)$.

Kata kunci: semimodul, *content semimodule*, *normally flat semimodules*.

ABSTRACT
NORMALLY FLAT CONTENT SEMIMODULES

A semimodule M will be called a content semimodules if for every $x \in M$ then $x \in c(x)M$ which $c(x) = \bigcap\{I, I$ ideal of $S, x \in IM\}$ and c is a function from M to I which is called the content function. Semimodule L will be called normally flat over M (normally M-flat) if $N \otimes_S L \leq_S^n M \otimes_S L$ for every $N \leq_S^n M$ which $N \otimes_S L$ and $M \otimes_S L$ is a tensor product that satisfy some conditions. Based on the result of analyzing, obtained some concepts that is for semimodule M over semiring S there exist isomorphism $S \otimes M \cong M$ and for every ideal I of semiring S applies $(\bigcap I_i)M = \bigcap(I_i M)$. A content semimodule M satisfy $s\big(c(x)\big) = c(sx)$ if and only if $(I:_S s)M = (IM:_M s)$ for all $x \in M$. Furtheremore, for semidomain S and content torsionfree S-semimodule applies $s\big(c(x)\big) = c(sx)$ for all $s \in S$ and $x \in M$. By adopting a concept of semidomain, it has been proven that if every principal ideal of S is subtractive and M be a normally flat semimodules then M is semimodule torsionfree, implies that for all $s \in S$ and $x \in M$ with M is normally flat content semimodules applies $s\big(c(x)\big) = c(sx)$. A content semimodule M and every ideal I of S that satisfy $(I:_S s)M = (IM:_M s)$ applies $(I:_S J)M = (IM:_M J)$ for all I, J ideal of S, implies that for normally flat content semimodule M applies $(I:_S J)M = (IM:_M J)$.

Kata kunci: semimodule, content semimodule, normally flat semimodules.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$\cap$	: Irisan
$\in$	: Elemen
$c(x)$	: Fungsi *content*
$*$	: Operasi biner $*$
$\bullet, \varphi, f, \theta, g$	: Pemetaan fungsi
$\otimes$	: Pemetaan fungsi $M \times N \to M \otimes_S N$
g^{-1}	: Pemetaan invers fungsi dari g
$\mathbb{Z}$	: Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan real
$\mathbb{Z}_n$	: Himpunan bilangan bulat modulo n
$\mathbb{Z}_0^+$	: Himpunan bilangan bulat positif dan nol
$\subseteq, \subset$	: Himpunan bagian
$\emptyset$	: Himpunan kosong
$\circ$	: Fungsi komposisi
Id	: Identitas
$\Longrightarrow$	: Pembuktian dari kiri ke kanan
$\Longleftarrow$	: Pembuktian dari kanan ke kiri
$\odot$	: Operasi biner $\odot$
$\blacksquare$	: Akhir dari pembuktian

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Matematika merupakan bidang ilmu eksak yang sangat luas cakupannya, diantaranya statistika, terapan, ilmu komputasi, dan analisis. Bidang analisis merupakan salah satu cabang matematika yang mempelajari konsep-konsep aljabar. Pola mempelajari suatu konsep analisis diawali dengan definisi, aksioma, serta sistem aksioma yang kemudian digunakan untuk membuktikan proposisi, teorema, maupun lemma. Aljabar abstrak merupakan salah satu bidang kajian matematika yang mempelajari struktur aljabar, diantaranya yaitu grup, ring, lapangan, ruang vektor, modul, dan homomorfisma.

Suatu himpunan tak kosong G merupakan grup apabila memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki identitas, dan memiliki invers terhadap satu operasi biner. Grup G merupakan grup komutatif atau grup abelian apabila berlaku sifat komutatif terhadap satu operasi biner. Grup dapat digeneralisasi menjadi semigrup yaitu dengan menghilangkan syarat eksistensi elemen identitas dan invers terhadap suatu operasi biner. Himpunan tak kosong G yang dilengkapi satu operasi biner dikatakan semigrup jika untuk setiap $x, y \in G$ berlaku sifat tetutup dan asosiatif (Adkins & Weintraub, 1992; Gallian, 2010; Herstein, 1975).

Dalam perkembangannya, terdapat juga sistem aljabar yang dikenal dengan istilah K-Aljabar yang melibatkan operasi $\odot$ yang dibangun atas suatu grup, sedemikian sehingga sifat-sifat yang berlaku dalam grup berlaku juga dalam K-Aljabar (F D Lestari, Hafiyusholeh, Asyhar, Utami, & Arifin, 2019; Fanny Dwi Lestari, 2018). Selain itu, juga dikenal istilah Q-Aljabar yaitu suatu himpunan tak kosong yang memuat konstanta nol dengan suatu operasi biner $*$ dan memenuhi beberapa aksioma (Mudrik & Lukito, 2018). Lebih lanjut suatu himpunan tak kosong R yang dilengkapi dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian yang memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas, setiap elemen memiliki invers terhadap operasi penjumlahan dan berlaku sifat tertutup, asosiatif terhadap operasi perkalian serta berlaku sifat distributif disebut Ring (Adkins & Weintraub, 1992; Gallian, 2010; Herstein, 1975).

Ring R merupakan ring komutatif apabila terhadap operasi perkalian berlaku sifat komutatif dan ring R merupakan ring satuan apabila memiliki identitas terhadap operasi perkalian. Apabila ring R terhadap operasi perkalian berlaku sifat komutatif dan memiliki elemen identitas maka disebut ring komutatif dengan elemen satuan (Lal, 2017; Subiono, 2016). Dengan ide yang sama pada generalisasi grup menjadi semigrup, ring dapat digeneralisasi menjadi semiring, yaitu dengan menghilangkan syarat eksistensi elemen invers terhadap operasi penjumlahan (monoid komutatif terhadap operasi penjumlahannya).

Dalam konteks khusus aljabar yaitu pada suatu vektor dikenal mengenai ruang vektor atas lapangan. Suatu himpunan tak kosong V dikatakan ruang vektor atas lapangan F, jika V terhadap operasi penjumlahan merupakan grup komutatif dan terdapat pemetaan $\bullet: V \times F \to V$ yang memenuhi aksioma ruang vektor atas lapangan (D. Lestari, 2012). Misal diberikan himpunan semua matriks berukuran 3×1 yang setiap elemennya bilangan real (dinotasikan $\mathbb{R}^3$) dan himpunan semua bilangan (dinotasikan $\mathbb{R}$), maka $\mathbb{R}^3$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$.

Sementara itu, jika dipunyai himpunan semua matriks berukuran 3×3 dengan setiap elemennya bilangan real (dinotasikan $M_{3\times3}(\mathbb{R})$) maka $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ bukan lapangan dikarenakan tidak memiliki elemen invers terhadap operasi perkalian, lebih lanjut $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ merupakan ring. Dikarenakan ring adalah generalisasi dari lapangan, maka konsep ruang vektor atas lapangan digeneralisasi menjadi konsep modul atas ring. Analog dengan ide yang sama pada generalisasi grup menjadi semigrup dan generalisasi ring menjadi semiring, modul juga dapat digeneralisasi menjadi semimodul dengan mengganti skalar pada ruang vektor dengan sebarang semiring. Dalam hal ini, struktur yang terbentuk dari suatu semigrup dan suatu semiring dengan suatu perkalian skalar dinamakan semimodul atas semiring.

Pada teori modul dikenal adanya *content module*. Diberikan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan M adalah *unitary module* atas R. Fungsi *content* c dari M ke ideal atas R didefinisikan oleh

$$c(x) = \bigcap\{I \mid I \text{ adalah ideal dari } R \text{ dan } x \in IM\}$$

Modul M dikatakan *content module* jika untuk setiap $x \in M$ maka berlaku $x \in c(x)M$ (Ohm & Rush, 1972). Oleh karena semimodul merupakan struktur yang lebih luas dari modul, maka perlu dipelajari sifat-sifat pada modul yang masih dipertahankan pada semimodul. Apabila terdapat sifat modul yang tidak berlaku pada semimodul, maka perlu diselidiki syarat yang harus dihilangkan sehingga sifat tersebut berlaku pada semimodul.

Mengingat semimodul merupakan generalisasi dari modul, maka peneliti tertarik untuk menyelidiki apakah sifat-sifat yang dimiliki oleh *content module* berlaku pula di *content semimodule*. Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh Abuhlail (2014) mengenai beberapa teori *tensor product* dan kerataan semimodul diperoleh suatu gagasan baru yaitu *normally flat semimodules*, untuk selanjutnya *normally flat semimodules* ditulis dengan NFS. Selain itu Nazari dan Ghalandarzadeh (2018) juga telah melakukan penelitian yang menggeneralisasikan teorema-teorema dalam NFS. Permasalahannya kemudian apakah sifat-sifat *content semimodules* dapat diterapkan dalam teorema NFS. Sehingga dalam penelitian ini, peneliti mengkaji mengenai *normally flat content semimodules*.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang diatas, rumusan masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah apa sajakah sifat-sifat dari *content semimodules* yang dapat diterapkan dalam teorema *normally flat semimodules*.

C. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui sifat-sifat dari *content semimodules* yang dapat diterapkan dalam teorema *normally flat semimodules*.

D. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah untuk melengkapi hasanah keilmuan dalam bidang aljabar mengenai *normally flat content semimodules*.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

A. Semigrup

Semigrup merupakan generalisasi dari grup. Jika dalam grup suatu himpunan tak kosong dikatakan grup apabila dikenai satu operasi biner memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan setiap elemen memiliki invers, maka dalam semigrup suatu himpunan tak kosong dikatakan semigrup cukup memenuhi dua sifat yaitu sifat tertutup dan asosiatif.

Definisi 2.1

Himpunan tak kosong G yang dilengkapi satu operasi biner, dinotasikan $(G, *)$, dikatakan semigrup apabila untuk setiap $x, y, z \in G$ memenuhi aksioma-aksioma berikut (Rosales & Garcia-Sanchez, 2009):

(i). Berlaku sifat tertutup, yaitu $x * y \in G$

(ii). Berlaku sifat asosiatif, yaitu $(x * y) * z = x * (y * z)$

Definisi 2.2

Semigrup yang dilengkapi elemen identitas disebut monoid.

Definisi 2.3

Semigrup G dikatakan komutatif apabila untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $x * y = y * x$.

Berdasarkan Definisi 2.2 dan Definisi 2.3 diperoleh suatu definisi baru yaitu monoid komutatif. Monoid komutatif merupakan suatu semigrup G

yang memiliki elemen identitas dan berlaku sifat komutatif. Himpunan bilangan bulat, bilangan rasional, bilangan real, dan bilangan kompleks merupakan monoid komutatif.

Definisi 2.4

Diberikan dua semigrup yaitu $(G_1,*)$ dan $(G_2,*)$. Pemetaan $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ dinamakan homomorfisma semigrup apabila $\varphi(x * y) = \varphi(x) * \varphi(y)$ untuk setiap $x, y \in G_1$.

B. Semiring

Semiring merupakan generalisasi dari ring. Jika dalam semigrup suatu himpunan tak kosong dikatakan semigrup apabila dikenai satu operasi penjumlahan atau perkalian yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu, maka dalam semiring suatu himpunan tak kosong dikatakan semiring apabila dikenai dua operasi biner penjumlahan dan perkalian yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu.

Definisi 2.5

Suatu himpunan tak kosong S yang dikenai dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian disebut semiring jika memenuhi aksioma-aksioma berikut (Nola & Russo, 2018):

(i). Semiring S merupakan monoid komutatif dengan elemen identitas sama dengan 0 pada operasi penjumlahan.

(ii). Semiring S merupakan monoid dengan elemen identitas sama dengan 1 pada operasi perkalian.

(iii). Sifat distributif.

(iv). $0 \times a = 0 = a \times 0$ untuk setiap $a \in S$.

Semiring S dikatakan komutatif jika terhadap operasi perkalian berlaku $a \times b = b \times a$ untuk setiap $a, b \in S$. Apabila semiring S memiliki elemen identitas terhadap operasi perkalian dengan kata lain berlaku $a \times 1_S = 1_S \times a = a$ untuk setiap $a \in S$ maka semiring S dinamakan semiring satuan atau identitas. Semiring S dinamakan idempoten jika terhadap operasi perkalian berlaku $a \times a = a$ untuk setiap $a \in S$.

Contoh 2.6

Diberikan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. $\mathbb{Z}_6$ merupakan semiring komutatif dengan elemen satuan sebab untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$ memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(i). $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan monoid komutatif. Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat di Tabel 2.1

Tabel 2.1 Tabel Cayley $\mathbb{Z}_6$ terhadap operasi penjumlahan

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Berdasarkan Tabel 2.1 terlihat bahwa $\mathbb{Z}_6$ berlaku sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas yaitu $\bar{0}$ dan berlaku sifat komutatif.

(ii). $(\mathbb{Z}_6, \times)$ merupakan monoid komutatif. Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat di Tabel 2.2

Tabel 2.2 Tabel Cayley $\mathbb{Z}_6$ terhadap operasi perkalian

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 2.2 terlihat bahwa $\mathbb{Z}_6$ berlaku sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas yaitu $\bar{1}$ dan berlaku sifat komutatif.

(iii). Berlaku hukum distributif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$ berlaku

$$(a + b) \times c = (a \times b) + (b \times c)$$

(iv). $0 \times a = 0 = a \times 0$, untuk lebih jelasnya dapat dilihat di Tabel 2.2

Contoh 2.7

Diberikan $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. $\mathbb{Z}_2$ merupakan semiring idempoten sebab untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_2$ berlaku $a \times a = a$, untuk lebih jelasnya dapat dilihat di Tabel 2.3.

Tabel 2.3 Tabel Cayley $\mathbb{Z}_2$ terhadap operasi perkalian

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Definisi 2.8

Diberikan himpunan tak kosong S semiring komutatif dengan elemen satuan. Semiring S dinamakan semidomain jika untuk setiap $a \neq 0 \in S$ adalah *Multiplicatively Cancellable* (MC) yaitu jika $ab = ac$ maka $b = c$ untuk setiap $a, b, c \in S$ (Nazari & Ghalandarzadeh, 2017).

Selanjutnya akan dibahas mengenai definisi dari ideal pada semiring S.

Definisi 2.9

Diketahui semiring S dan $I \subset S, I \neq \emptyset$. Himpunan I merupakan ideal pada S jika untuk setiap $x, y \in I$ dan $r \in S$ maka berlaku:

(i). $x - y \in I$

(ii). $rx \in I$ dan $xr \in I$

(Rimadhany & Setyawati, 2014).

Contoh 2.10

Diberikan semiring $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat dan $2\mathbb{Z}$ merupakan subset dari $\mathbb{Z}$. Himpunan $2\mathbb{Z}$ merupakan ideal dikarenakan untuk setiap $x, y \in 2\mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$ diperoleh untuk sebarang $x, y \in 2\mathbb{Z}$ dengan $x = 2m_1$ dan $y = 2m_2$, untuk suatu $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ memenuhi $x - y = 2m_1 - 2m_2 = 2(m_1 - m_2) \in 2\mathbb{Z}$ dan berlaku $rx = r(2m_1) = 2rm_1 \in 2\mathbb{Z}$ dan $xr = (2m_1)r = 2m_1r \in 2\mathbb{Z}$ untuk setiap $m_1 \in \mathbb{Z}$.

Definisi 2.11

Diberikan himpunan tak kosong S semiring komutatif dengan elemen satuan. Ideal I dari semiring S dinamakan ideal prima jika $xy \in I$ maka $x \in I$ atau $y \in I$ untuk setiap $x, y \in S$ (Rimadhany & Setyawati, 2014).

Contoh 2.12

Diberikan semiring $\mathbb{Z}$ dan $2\mathbb{Z}$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}$. Ideal $2\mathbb{Z}$ merupakan ideal prima karena $xy \in 2\mathbb{Z}$ yang artinya $xy = 2k \in 2\mathbb{Z}$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$ maka $x = 2p_1 \in 2\mathbb{Z}$ atau $y = 2p_2 \in 2\mathbb{Z}$ untuk setiap p_1, p_2 faktor dari k dan $x, y \in \mathbb{Z}$.

Definisi 2.13

Diberikan himpunan tak kosong S semiring komutatif dengan elemen satuan. Ideal I dari semiring S dinamakan subtraktif jika $x, (x + y) \in I$, dan $y \in S$ maka $y \in I$ (Nazari & Ghalandarzadeh, 2017).

Contoh 2.14

Diberikan semiring $\mathbb{Z}$ dan ideal $2\mathbb{Z}$. Ideal $2\mathbb{Z}$ merupakan ideal subtraktif karena untuk $x = 2k_1 \in 2\mathbb{Z}$, $(x + y) \in 2\mathbb{Z}$, dan $y \in \mathbb{Z}$ diperoleh

$$x + y = 2k_2 \in 2\mathbb{Z}$$

$$2k_1 + y = 2k_2$$

$$y = 2k_2 - 2k_1 = 2(k_1 - k_2) \in 2\mathbb{Z}$$

Sedemikian sehingga didapatkan $y \in 2\mathbb{Z}$ untuk suatu $k_1, k_2 \in 2\mathbb{Z}$.

C. Semimodul

Semimodul merupakan generalisasi dari modul. Perbedaan antara modul dengan semimodul terletak pada syarat pertama, yaitu $(M, +)$. Jika pada modul $(M, +)$ merupakan grup komutatif yang memenuhi sifat tetutup, asosiatif, memiliki elemen identitas, setiap elemen memiliki invers, dan komutatif, maka pada semimodul $(M, +)$ merupakan monoid komutatif yang memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan komutatif. Dengan kata lain perbedaan utama pada modul dan semimodul adalah jika pada modul disyaratkan setiap elemen memiliki invers, maka pada semimodul tidak terdapat syarat memiliki invers untuk setiap elemen (Andari, 2016).

Definisi 2.15

Diberikan M himpunan tak kosong dan S merupakan semiring komutatif dengan elemen satuan. M disebut semimodul kanan atas semiring S, dinotasikan $M{:}\,S -$ semimodul kanan, apabila memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $(M, +)$ merupakan monoid komutatif
2. Didefinisikan pemetaan fungsi $\bullet : M \times S \to M$ dengan pengaitan $(m, s) \mapsto \bullet(m, s) = m \bullet s = ms$ dan untuk setiap $s, s_1, s_2 \in S$, $m, m_1, m_2 \in M$ memenuhi:
    a. $(m_1 + m_2)s = m_1 s + m_2 s$
    b. $m(s_1 + s_2) = ms_1 + ms_2$
    c. $m(s_1 s_2) = (ms_1)s_2$
    d. $m.1_S = m$
    e. $m.0_S = 0_M$

Definisi 2.16

Diberikan dua himpunan tak kosong yaitu M dan S. Himpunan S merupakan semiring komutatif dengan elemen satuan. M disebut semimodul kiri atas semiring S, dinotasikan $M{:}\,S-$semimodul kiri, apabila memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $(\mathrm{M},+)$ merupakan monoid komutatif
2. Didefinisikan pemetaan

   $$\bullet : S \times M \to M$$

   $$(\mathrm{s}, \mathrm{m}) \mapsto \ \bullet(\mathrm{s},\mathrm{m}) = \mathrm{s}\bullet\mathrm{m} = \mathrm{sm}$$

   dan untuk setiap $s, s_1, s_2 \in S,\ m, m_1, m_2\ \in M$ memenuhi:

   a. $s(m_1 + m_2) = sm_1 + sm_2$
   b. $(s_1 + s_2)m = s_1m + s_2m$
   c. $(s_1s_2)m = s_1(s_2m)$
   d. $1_S.m = m$
   e. $0_S.m = 0_M$

Contoh 2.17

Diberikan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$. $\mathbb{Z}_6$ merupakan semimodul kiri atas semiring $\mathbb{Z}_6$, dinotasikan $\mathbb{Z}_6{:}\,\mathbb{Z}_6 -$semimodul kiri, sebab:

1. $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan monoid komutatif
2. Didefinisikan pemetaan

   $$\bullet : \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$$

   $$(s, m) \longmapsto sm$$

untuk setiap $s, s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_6$ dan untuk setiap $m, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_6$ memenuhi:

a. $s(m_1 + m_2) = sm_1 + sm_2$

b. $(s_1 + s_2)m = s_1m + s_2m$

c. $(s_1s_2)m = s_1(s_2m)$

d. $1_S.m = m$

e. $0_S.m = 0_M$

Contoh 2.18

Diberikan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. $\mathbb{Z}_6$ merupakan semimodul kanan atas semiring $\mathbb{Z}_6$, dinotasikan $\mathbb{Z}_6 : \mathbb{Z}_6 -$ semimodul kanan, sebab:

1. $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan monoid komutatif
2. Didefinisikan pemetaan

$$\bullet : \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$$

$$(m, s) \mapsto ms$$

untuk setiap $s, s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_6$ dan untuk setiap $m, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_6$ memenuhi:

a. $(m_1 + m_2)s = m_1s + m_2s$

b. $m(s_1 + s_2) = ms_1 + ms_2$

c. $m(s_1s_2) = (ms_1)s_2$

d. $m.1_S = m$

e. $m.0_S = 0_M = 0_M.m$

Berdasarkan Contoh 2.16 dan 2.17 diperoleh $\mathbb{Z}_6$ merupakan semimodul kiri dam semimodul kanan. Sedemikian sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_6$ merupakan semimodul atas semiring $\mathbb{Z}_6$ ($\mathbb{Z}_6 : \mathbb{Z}_6$ $-$semimodul).

Definisi 2.19

Diberikan S adalah semidomain dan M adalah semimodul. Semimodul M dinamakan *torsionfree* jika untuk setiap $a \neq 0 \in S$ terhadap operasi perkalian oleh a atas M adalah injektif, yaitu jika $am_1 = am_2$ untuk suatu $m_1, m_2 \in M$ maka $m_1 = m_2$ (Nazari & Ghalandarzadeh, 2017).

D. Subsemimodul

Dalam aljabar linear, telah diperkenalkan suatu himpunan bagian dari ruang vektor yang membentuk subruang. Dalam konteks ini akan dibahas mengenai himpunan bagian dari suatu semimodul yang membentuk semimodul terhadap operasi pergandaan skalar yang sama dengan operasi pergandaan skalar pada semimodul, yang selanjutnya dinamakan dengan subsemimodul.

Definisi 2.20

Diberikan himpunan tak kosong S semiring komutatif dengan elemen satuan, himpunan tak kosong M semimodul atas semiring S, yaitu $M : S$ $-$semimodul dan $N \subseteq M, N \neq \emptyset$. Himpunan N disebut subsemimodul dari M apabila dengan operasi yang sama dengan M, himpunan N merupakan semimodul yang memenuhi (Andari, 2016):

(i). Untuk setiap $n_1, n_2 \in N$ berlaku $n_1 + n_2 \in N$

(ii). Untuk setiap $s \in S, n \in N$ berlaku $sn \in N$

Setiap semimodul M paling sedikit memiliki dua subsemimodul yaitu M dan $E = \{e\}$ dan dinamakan sebagai subsemimodul tak sejati. Suatu subsemimodul selain M dan E dinamakan sebagai subsemimodul sejati.

Contoh 2.21

Diberikan $S = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Berdasarkan Contoh 2.16 dan 2.17 $\mathbb{Z}_6$ merupakan semimodul atas semiring $\mathbb{Z}_6$. Adapun subsemimodul tak sejati dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $\mathbb{Z}_6$ dan $E = \{0\}$. Sedangkan subsemimodul sejati dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $n\mathbb{Z}_6$ dengan $n = 2,3,4$ karena apabila diambil sebarang $nk_1, nk_2 \in n\mathbb{Z}_6$ dan $k_1, k_2, s \in \mathbb{Z}_6$, diperoleh $nk_1 + nk_2 = n(k_1 + k_2) \in n\mathbb{Z}_6$ dan $snk_1 = n(sk_1) \in n\mathbb{Z}_6$. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat di Tabel 2.2.

Definisi 2.22

Diberikan M adalah semimodul atas semiring S dan N adalah subsemimodul dari M. Subsemimodul N dikatakan subsemimodul subtraktif apabila $n_1, (n_1 + n_2) \in N$ dan $n_2 \in M$ maka $n_2 \in N$ untuk setiap $n_1, n_2 \in M$ (Chaudhari & Bonde, 2010).

Contoh 2.23

Diberikan semimodul $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ atas semiring $\mathbb{Z}_6$. Subsemimodul tak sejati $E = \{0\}$ merupakan subsemimodul subtraktif karena $0, (0 + 0) = 0 \in E$ dan $0 \in \mathbb{Z}_6$.

Definisi 2.24

Diberikan M semimodul atas semiring S, N subsemimodul dari M, dan I ideal dari S. Didefinisikan

$$(N :_M I) = \{x | x \in M \text{ dan } Ix \subseteq N\}$$

Lebih lanjut $(N :_M I)$ adalah subsemimodul dari M sebab

(i). Ambil sebarang $x, y \in (N :_M I)$ yang berarti $Ix \subseteq N$ dan $Iy \subseteq N$. Karena N adalah subsemimodul dari M maka $Ix + Iy = I(x + y) \subseteq N$. Karena diperoleh $I(x + y) \subseteq N$ akibatnya $x + y \in (N :_M I)$.

(ii). Ambil sebarang $x \in (N :_M I)$ dan $s \in S$. Dipunyai $x \in (N :_M I)$ yang berati $Ix \subseteq N$. Karena N adalah subsemimodul maka $(Ix)s = I(xs) \subseteq N$. Krena diperoleh $I(xs) \subseteq N$ akibatnya $sx \in (N :_M I)$.

(Nazari & Ghalandarzadeh, 2017).

E. Semimodul Faktor

Semimodul merupakan generalisasi dari modul. Seperti halnya pada modul, adanya istilah modul faktor juga berlaku pada semimodul yaitu semimodul faktor. Selanjutnya akan dibahas mengenai semimodul faktor.

Definisi 2.25

Diberikan M adalah semimodul atas semiring S dan N adalah subsemimodul dari M. Himpunan $\frac{M}{N}$ merupakan himpunan koset-koset dari N di semimodul M terhadap operasi penjumlahan dan $\frac{M}{N}$ merupakan semimodul. himpunan $\frac{M}{N} = \{m + N, m \in M\}$ didefinisikan:

(i). $(m_1 + N) + (m_2 + N) = (m_1 + m_2) + N$

(ii). $s(m_1 + N) = sm_1 + N$

untuk suatu $s \in S$ dan $m_1 + N \in \frac{M}{N}$. Lebih lanjut himpunan $\frac{M}{N}$ disebut semimodul faktor dan $m_1 + N = m_2 + N$ jika dan hanya jika $m_1 - m_2 \in N$ (Andari, 2016).

Contoh 2.26

Diketahui $\mathbb{Z}_6$ merupakan semimodul atas semiring $\mathbb{Z}$ dan $N = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ adalah subsemimodul dari $\mathbb{Z}_6$. Selanjutnya karena $N = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ maka diperoleh

$$\bar{1} + N = \{\bar{1}, \bar{4}\}$$

$$\bar{2} + N = \{\bar{2}, \bar{5}\}$$

$$\bar{3} + N = \{\bar{3}, \bar{0}\} = N$$

$$\bar{4} + N = \{\bar{1}, \bar{4}\} = \bar{1} + N \text{ dan seterusnya}$$

Perhitungan tersebut akan terus berulang sehingga didapatkan elemen dari $\frac{\mathbb{Z}_6}{N} = \{N, \bar{1} + N, \bar{2} + N\}$.

Lebih lanjut akan ditunjukkan bahwa $\frac{\mathbb{Z}_6}{N}$ merupakan semimodul faktor. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat di Tabel 2.4

Tabel 2.4 Operasi penjumlahan pada $\frac{\mathbb{Z}_6}{N}$

$+$	$\bar{0} + N$	$\bar{1} + N$	$\bar{2} + N$
$\bar{0} + N$	$\bar{0} + N$	$\bar{1} + N$	$\bar{2} + N$
$\bar{1} + N$	$\bar{1} + N$	$\bar{2} + N$	$\bar{0} + N$
$\bar{2} + N$	$\bar{2} + N$	$\bar{0} + N$	$\bar{1} + N$

Berdasarkan Tabel 2.4 terbukti bahwa $\left(\frac{\mathbb{Z}_6}{N}, +\right)$ merupakan monoid komutatif, karena berlaku sifat tertutup, asosiatif, memliki elemen identitas yaitu N, dan berlaku sifat komutatif. Selanjutnya didefinisikan pemetaan $\bullet : \mathbb{Z} \times \frac{\mathbb{Z}_6}{N} \to \frac{\mathbb{Z}_6}{N}$ dengan pengaitan $(s, m + N) \mapsto s \bullet (m + N) = sm + N$. Ambil sebarang $s, s_1, s_2 \in S$ dan $a, b \in \mathbb{Z}_6$ dengan $a = \bar{1} + N$ dan $b = \bar{2} + N$ sehingga memenuhi:

(i). $s(a+b) = s[(\bar{1}+N)+(\bar{2}+N)]$

$= s(\bar{1}+\bar{2}+N)$

$= s(\bar{0}+N)$

$= s(\bar{1}+N)+s(\bar{2}+N)$

$= sa+sb$

(ii). $(s_1+s_2)a = (s_1+s_2)(\bar{1}+N)$

$= s_1(\bar{1}+N)+s_2(\bar{1}+N)$

$= s_1a+s_2a$

(iii). $(s_1s_2)a = (s_1s_2)(\bar{1}+N)$

$= (s_1s_2)+N$

$= s_1(s_2(\bar{1}+N))$

$= s_1(s_2a)$

(iv). $1.a = 1(\bar{1}+N) = (\bar{1}+N) = a$

Dengan cara yang sama berlaku juga untuk setiap $s, s_1, s_2 \in S$ dan $a, b \in \mathbb{Z}_6$ sedemikian sehingga $\frac{\mathbb{Z}_6}{N}$ merupakan semimodul faktor.

F. Homomorfisma Semimodul

Dalam aljabar linear, telah didefinisikan apabila diberikan ruang vektor V_1 dan V_2 atas lapangan (yang sama) F maka fungsi $f: V_1 \to V_2$ dinamakan transformasi linear yang memenuhi:

(i). $f(u+v) = f(u)+f(v)$ untuk setiap $u, v \in V_1$

(ii). $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ untuk setiap $\alpha \in F$ dan $u \in V_1$

Mengingat semimodul atas semiring merupakan generalisasi dari modul atas ring dan modul atas ring merupakan generalisasi dari ruang vektor atas lapangan, sehingga muncul pertanyaan apakah definisi transformasi linear pada ruang vektor tersebut berlaku juga disemimodul atas semiring. Oleh karena itu muncul definisi dari homomorfisma semimodul (Wahyuni, Wijayanti, Yuwaningsih, & Hartanto, 2016).

Definisi 2.27

Diberikan suatu himpunan tak kosong semimodul M dan M' atas semiring S. Pemetaan $\rho: M \to M'$ disebut homomorfisma semimodul apabila untuk setiap $m_1,\ m_2 \in M,\ r \in S$ memenuhi aksioma berikut (Andari, 2016):

1. $\rho(m_1 + m_2) = \rho(m_1) + \rho(m_2)$
2. $\rho(r \times m_1) = r \times \rho(m_1)$

Contoh 2.28

Diberikan $S = \mathbb{Z}_0^+$ adalah semiring komutatif dengan elemen satuan dan $P = \{(a,b);\ a,b \in S\}$

Pemetaan

$$\theta : P \to P$$

$$(a,b) \mapsto (a,0)$$

didefinisikan operasi penjumlahan dan penggandaan dengan skalar sebagai berikut:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$r(a,b) = (ra, rb)$$

$$P : S - \text{semimodul}$$

Untuk setiap $(a,b),(c,d) \in P,\ r \in S$

Pemetaan $\theta: P \to P$ merupakan homomorfisma semimodul.

Bukti:

$\theta : P \to P$

$(a, b) \mapsto (a, 0)$

1. $\theta[(a, b) + (c, d)] = \theta(a + c, b + d)$

$= (a + c, 0)$

$= (a, 0) + (c, 0)$

$= \theta(a, b) + \theta(c, d)$

2. $\theta[r(a, b)] = \theta(ra, rb)$

$= (ra, 0)$

$= r(a, 0)$

$= r\,\theta(a, b)$

Karena pemetaan $\theta : (a, b) \mapsto (a, 0)$ memenuhi 1 dan 2 maka dapat disimpulkan bahwa θ merupakan homomorfisma semimodul.

F. Pemetaan *Balance*

Definisi 2.29

Diberikan M dan N berturut-turut menyatakan semimodul kanan dan kiri atas semiring S. Jika G menyatakan monoid komutatif, maka $g: M \times N \to G$ adalah pemetaan *balance* jika memenuhi:

(i). $g(m_1 + m_2, n) = g(m_1, n) + g(m_2, n)$

(ii). $g(m, n_1 + n_2) = g(m, n_1) + g(m, n_2)$

(iii). $g(ms, n) = g(m, sn)$

Untuk setiap $m, m_1, m_2 \in M, n, n_1, n_2 \in N$, dan $s \in S$.

Kondisi (i) dan (ii) mengatakan bahwa g adalah suatu pemetaan bilinear (Kurniadi, Dewanto, & Kartiwa, 2013).

Contoh 2.30

Diberikan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Berdasarkan Contoh 2.5 $\mathbb{Z}_6$ adalah semiring komutatif dengan elemen satuan. Selain itu berdasarkan Contoh 2.16 dan 2.17 dapat dikatakan bahwa $\mathbb{Z}_6$ adalah semimodul atas semiring $\mathbb{Z}_6$. Jika didefinisikan pemetaan $g : \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$ dengan pengaitan $g(m,n) \longmapsto 2mn$, untuk setiap $m \in \mathbb{Z}_6, n \in \mathbb{Z}_6$ maka pemetaan g merupakaan pemetaan $balance$, sebab untuk setiap $m, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_6, n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_6$, dan $s \in \mathbb{Z}_6$ memenuhi:

(i). $g(m_1 + m_2, n) = 2(m_1 + m_2)n$

$= 2m_1n + 2m_2n$

$= g(m_1, n) + g(m_2, n)$

(ii). $g(m, n_1 + n_2) = 2m(n_1 + n_2)$

$= 2mn_1 + 2mn_2$

$= g(m, n_1) + g(m, n_2)$

(iii). $g(ms, n) = 2(ms)n$

$= 2msn$

$= 2m(sn)$

$= g(m, sn)$

G. Hasil Kali Tensor (*Tensor Product*)

Tensor product merupakan salah satu konsep dari semimodul. selanjutnya dalam subbab akan diuraikan mengenai definisi dan teorema dari *tensor product*.

Definisi 2.31

Diberikan M dan N berturut-turut menyatakan semimodul kanan dan kiri atas semiring S. Suatu monoid komutatif $M \otimes_S N$ yang diikuti dengan pemetaan *balance* $\otimes : M \times N \to M \otimes_S N$ dengan pengaitan $\otimes(m, n) \longmapsto m \otimes n$ dinamakan *tensor product* dari M dan N atas S, jika untuk setiap monoid komutatif A dan untuk setiap pemetaan *balance* $f : M \times N \to A$ terdapat suatu homomorfisma semigrup tunggal $g : M \otimes_S N \to A$ sedemikian sehingga $g \circ \otimes = f$ (Kurniadi et al., 2013; Nazari & Ghalandarzadeh, 2017).

Teorema 2.32

Diberikan semiring S, ideal I, dan semimodul M. $\left(\frac{S}{I}\right) \otimes_S M$ isomorfisma terhadap $\frac{M}{IM}$.

Untuk menunjukkan bahwa $\left(\frac{S}{I}\right) \otimes_S M$ isomorfisma terhadap $\frac{M}{IM}$, didefinisikan pemetaan $f : \frac{S}{I} \times M \to \frac{M}{IM}$ dengan pengaitan $(x + I, m) \longmapsto xm + IM$ untuk setiap $x + I \in \frac{S}{I}$ dan $m \in M$.

(i). Fungsi f *well defined*

Untuk setiap $x + I, y + I \in \frac{S}{I}$ dan $m \in M$ sedemikian sehingga $x + I = y + I$, maka $x - y \in I$. Oleh karena itu diperoleh:

$$xm = ym$$

$$xm - ym = 0$$

$$(x - y)m = 0$$

$$(x - y)m \in IM$$

$$(x - y)m + IM = IM$$

$$(xm + IM) - (ym + IM) = IM$$

$$xm + IM = ym + IM$$

$$f(x + I, m) = f(y + I, m)$$

(ii). Fungsi f adalah pemetaan bilinear

Untuk setiap $z \in S, x + I, y + I \in \frac{S}{I}$ dan $m, n \in M$, maka

- $f(z(x + I) + (y + I), m) = f\big((zx + I) + (y + I), m\big)$

$$= f(zx + y + I, m)$$

$$= (zx + y)m + IM$$

$$= zxm + ym + IM$$

$$= (zxm + IM) + (ym + IM)$$

$$= z(xm + IM) + (ym + IM)$$

$$= zf(x + I, M) + f(y + I, M)$$

- $f(x + I,\ zm + n) = x(zm + n) + IM$

$$= zxm + xn + IM$$

$$= (zxm + IM) + (xn + IM)$$

$$= z(xm + IM) + (xn + IM)$$

$$= zf(x + I, m) + f(x + I, n)$$

Karena f memenuhi pemetaan bilinear, maka berdasarkan sifat umum dari *tensor product*, terdapat homomorfisma semimodul tunggal $g : \frac{S}{I} \otimes_S M \rightarrow \frac{M}{IM}$ dengan pengaitan $\big((x + I) \otimes m\big) \longmapsto xm + IM$ untuk setiap $x \in S$ dan $m \in M$.

Didefinisikan pemetaan lain $g^{-1} : \frac{M}{IM} \rightarrow \frac{S}{I} \otimes_S M$ untuk setiap $m + IM \in \frac{M}{IM}$, berlaku $g^{-1}(m + IM) = (1 + I) \otimes m$.

(iii). Fungsi g *well defined*

Untuk setiap $m, n \in M$ sedemikian sehingga

$$m = n$$

$$m + IM = n + IM$$

$$m - n \in IM$$

maka terdapat $a \in I$ dan $l \in M$ sedemikian sehingga $m - n = al$. Oleh karena itu

$$\begin{aligned}
g^{-1}(m + IM) &= (1 + I) \otimes m \\
&= (1 + I) \otimes (al + n) \\
&= (1 + I) \otimes (al) + (1 + I) \otimes n \\
&= [a(1 + I)] \otimes l + (1 + I) \otimes n \\
&= (a + I) \otimes l + (1 + I) \otimes n \\
&= 0 \otimes l + (1 + I) \otimes n \\
&= 0 + (1 + I) \otimes n \\
&= (1 + I) \otimes n \\
&= g^{-1}(n + IM)
\end{aligned}$$

(iv). Fungsi g homomorfisma semimodul

Untuk setiap $m, n \in M$ dan $x \in S$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
g^{-1}(x(m+IM)+(n+IM)) &= g^{-1}(xm+n+IM) \\
&= (1+I)\otimes(xm+n) \\
&= (1+I)\otimes(xm)+(1+I)\otimes n \\
&= x(1+I)\otimes m+(1+I)\otimes n \\
&= xg^{-1}(m+IM)+g^{-1}(n+IM)
\end{aligned}
$$

(v). $g^{-1} \circ g = Id$

Untuk setiap $(x+I)\otimes m \in \frac{S}{I}\otimes_S M$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
g^{-1} \circ g\big((x+I)\otimes m\big) &= g^{-1}(xm+IM) \\
&= (1+I)\otimes(xm) \\
&= [x(1+I)]\otimes m \\
&= (x+I)\otimes m
\end{aligned}
$$

(vi). $g \circ g^{-1} = Id$

Untuk setiap $m+IM \in \frac{M}{IM}$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
g \circ g^{-1}(m+IM) &= g\big((1+I)\otimes m\big) \\
&= 1m+IM \\
&= m+IM
\end{aligned}
$$

Dari kondisi-kondisi tersebut dapat dikatakan bahwa g dan g^{-1} adalah isomorsfima semimodul atas semiring S. oleh karena itu terbukti bahwa $\frac{S}{I}\otimes_S M \to \frac{M}{IM}$ adalah isomorfisma. ■

H. Subsemimodul Normal

Subsemimodul normal merupakan salah satu konsep dari subsemimodul. Berikut definisi dari subsemimodul normal.

Definisi 2.33

Diberikan M adalah semimodul atas semiring S dan $N \subseteq M$, sehingga N adalah subsemimodul dari M. N dikatakan subsemimodul normal dari M, dinotasikan $N \leq_S^n M$, jika $N \hookrightarrow M$ adalah monomorfisma normal maka $N = \ker(f)$ untuk suatu homomorfisma $f : M \to L$, dengan L adalah semimodul atas semiring S.

Dengan kata lain $N \leq_S^n M \leftrightarrow N = \overline{N}$, *normal closure* dari N yang didefinisikan $\overline{N} := \{m \in M | m + n_1 = n_2,$ untuk suatu $n_1, n_2 \in N\}$. Oleh karena itu $N \leq_S^n M \leftrightarrow N$ adalah subsemimodul subtraktif dari M.

I. Integrasi Aljabar dengan Islam

Secara umum beberapa konsep matematika telah dijelaskan dalam Alquran, diantaranya yaitu permasalahan logika, peluang, pemodelan, statistika, teori graf, maupun aljabar. Aljabar merupakan salah satu konsep yang perlu dikaji dalam bidang analisis. Pola mempelajari suatu konsep analisis yaitu berupa pembuktian proposisi, teorema, maupun lemma. Salah satu pembahasan dalam aljabar diantaranya adalah semigrup, semiring, dan semimodul. Suatu himpunan dapat dikatakan semigrup, semiring, atau semimodul apabila memenuhi beberapa aksioma atau syarat tertentu yang selanjutnya dipunyai beberapa teorema yang mendukung. Apabila kondisi tersebut dikaitkan dengan Alquran maka dapat direlasikan dengan seseorang dapat masuk surga apabila memenuhi syarat-syarat tertentu yang selanjutnya diperoleh kenikmatan dari Allah SWT. Sebagaimana telah dijelaskan dalam Alquran Surat Ath-Thur Ayat 17-18:

إِنَّ الْمُتَّقِينَ فِي جَنَّاتٍ وَنَعِيمٍ (17) فَاكِهِينَ بِمَا آتَاهُمْ رَبُّهُمْ ۖ وَوَقَاهُمْ رَبُّهُمْ عَذَابَ الْجَحِيمِ (18)

Artinya:

“Sesungguhnya orang-orang yang bertakwa berada dalam surga dan kenikmatan (17) mereka bersuka ria dengan apa yang diberikan Tuhan kepada mereka dan Tuhan memelihara mereka dari adzab neraka (18)” (Q.S. Ath-Thur: 17-18).

Berdasarkan Q.S. Ath-Thur: 17-18 diatas menjelaskan bahwa ayat tersebut berkaitan dengan suatu himpunan dapat dikatakan semigrup, semiring, atau semimodul apabila memenuhi syarat atau aksioma-aksioma tertentu. Himpunan dalam konteks ini merupakan orang islam, sedangkan syarat yang dimaksud yaitu bertakwa kepada Allah SWT.

Lebih lanjut suatu himpunan yang memenuhi beberapa syarat atau aksioma tentertu akan dipunyai teorema-teorema yang mendukung yang telah terbukti. Dalam proses pembuktian teorema tersebut dibutuhkan komponen-komponen pendukung yang pasti dan telah terbukti kebenarannya. Hal tersebut tidak lepas dari Ayat Allah yang memerintahkan hambanya untuk selalu mencari kebenaran tentang apa yang akan disampaikan dan melarang untuk melakukan suatu amalan tanpa landasan ilmu pengetahuan . Sebagaimana firman Allah dalam Alquran Surat Al-Isra Ayat 36:

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِ عِلْمٌ ۚ إِنَّ السَّمْعَ وَالْبَصَرَ وَالْفُؤَادَ كُلُّ أُولَٰئِكَ كَانَ عَنْهُ مَسْئُولًا (36)

Artinya:

"Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya. Sesungguhnya pendengaran, penglihatan, dan hati semuanya akan dimintai pentanggungjawaban" (Q.S. Al-Isra: 36).

BAB III

METODE PENELITIAN

A. Jenis Penelitian

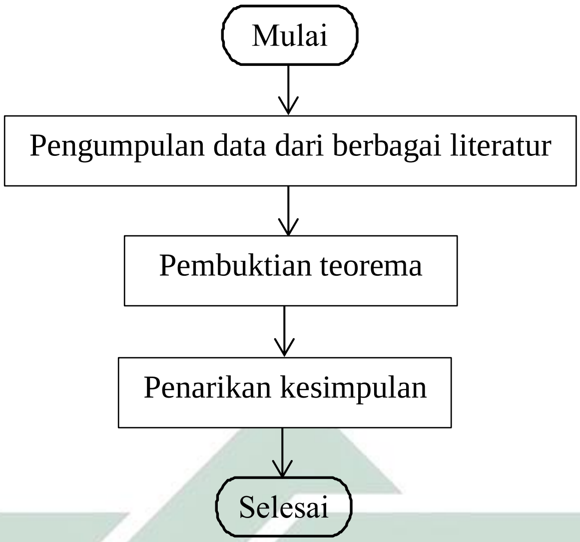
Penelitian ini merupakan jenis penelitian deskripsi kualitatif, karena dalam penelitian ini menguraikan teorema *normally semimodules* dalam *content semimodules*. Penelitian ini juga dapat digolongkan dalam jenis penelitian kajian pustaka karena sebagaimana yang dinyatakan oleh Sholihah dan Mahmudi (2015) bahwa pada tahapan proses yang berkenaan dengan metode pengolahan bahan kaji meliputi buku maupun jurnal dilakukan tanpa adanya riset lapangan.

B. Metode Pengumpulan Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini berasal dari beberapa karya ilmiah para pakar, baik dalam bentuk buku, jurnal-jurnal ilmiah, maupun referensi yang mendukung penelitian.

C. Analisis Data

Teknik analisis data merupakan cara yang dipakai untuk menelaah seluruh data yang diperoleh dari berbagai sumber. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah berupa definisi atau sifat-sifat yang dimiliki oleh *content semimodules* yang selanjutnya dianalisis untuk mendapatkan sifat-sifat dari *normally flat content semimodules* yang dilengkapi dengan bukti. Adapun tahapan proses penelitian dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 alur penelitian

BAB IV

PEMBAHASAN

Pembahasan mengenai *normally flat content semimodules* tidak dapat dipisahkan dengan konsep *content semimodules* yang merupakan salah satu konsep dasar untuk dikaji yang selanjutnya digunakaan dalam membangun konsep *normally flat content semimodules*.

A. *Content Semimodule*

Konsep awal dari *content semimodule* diperoleh dari *content module*. Hal tersebut dikeranakan semimodul merupakan generalisasi dari modul. Diberikan semiring S dan semimodul M atas semiring S, untuk suatu $x \in M$ didefinisikan *content* dari x yaitu:

$$c(x) = \bigcap\{I \mid I \text{ adalah ideal dari } S \text{ dan } x \in IM\}$$

Lebih lanjut c merupakan pemetaan fungsi dari M ke I sedemikian sehingga dinamakan dengan fungsi *content*. (Nasehpour, 2016; Nazari & Ghalandarzadeh, 2017).

Definisi 4.1

Diberikan semiring S dan semimodul M atas semiring S. Semimodul M dinamakan *content semimodule* atas semiring S jika untuk setiap $x \in M$ maka $x \in c(x)M$.

Contoh 4.2

Diberikan $S = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ adalah semiring idempoten terhadap operasi perkalian, J adalah ideal dari S, dan $x \in J$. Dikarenakan J adalah ideal dari S, maka diperoleh $J_1 = \{0\}$ dan $J_2 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Berdasarkan definisi *content* dari x maka $c(x) = J_1 \cap J_2 = \{0\}$. Pada saat $x = 0$ maka diperoleh $(0) = \{0\} \subseteq \mathbb{Z}_2$. Sedemikian sehingga $(0)J \subseteq c(0)J$ yaitu

$$\begin{aligned}(0)J &= \{0\}\mathbb{Z}_2 \\ &= \{0\}\{\bar{0}, \bar{1}\} \\ &= \{0\} \subseteq c(0)J\end{aligned}$$

Karena $0 = 0^2 \in (x)J$, definisi idempoten terhadap operasi perkalian, dan $0 \in c(0)J$ maka dapat dikatakan bahwa J adalah *content semimodule* atas semiring S.

Teorema 4.3

Diberikan semimodul M atas semiring S dan I ideal dari S, jika M adalah *content semimodules* maka $(\cap I_i)M = \cap(I_i M)$.

Bukti:

Diketahui M adalah *content semimodules* atas semiring, artinya untuk setiap $x \in M$, maka $x \in c(x)M$ dengan $c(x) = \cap\{I | I$ adalah ideal dari S dan $x \in IM\}$. Akan ditunjukkan $(\cap I_i)M = \cap(I_i M)$ untuk setiap I ideal dari S, atau dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa $(\cap I_i)M \subseteq \cap(I_i M)$ dan $\cap(I_i M) \subseteq (\cap I_i)M$.

Untuk menunjukkan $(\cap I_i)M \subseteq \cap(I_i M)$, ambil sebarang $a \in (\cap I_i)M$, sedemikian sehingga akan ditunjukkan bahwa $a \in \cap(I_i M)$.

Diperhatikan untuk $a \in (\bigcap I_i)M$ artinya $a = xy$, untuk suatu $x \in \bigcap I_i$ dan $y \in M$. Karena $y \in M$ dan M adalah *content semimodules* maka $y \in c(y)M$ dengan $c(y) = \bigcap\{I|I$ adalah ideal dari S dan $y \in IM\}$. Disisi lain mengingat $x \in \bigcap I_i$ maka $x \in c(x)$ sebab $c(x) = \bigcap\{I|I$ adalah ideal dari S dan $x \in IM\}$. Lebih lanjut karena $x \in c(x)$ dan $y \in M$ maka $xy \in c(x)M$. Selain itu, karena $c(x) \subseteq I$ maka $xy \in I_iM$ yang berarti $xy \in I_1M, xy \in I_2M,\ xy \in I_3M, \dots, xy \in I_nM$. Sedemikian sehingga diperoleh $xy \in \bigcap(I_iM)$ yang mengakibatkan $a \in \bigcap(I_iM)$. Oleh karena itu terbukti $(\bigcap I_i)M \subseteq \bigcap(I_iM)$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $\bigcap(I_iM) \subseteq (\bigcap I_i)M$, yaitu ambil sebarang $a \in \bigcap(I_iM)$. Karena $a \in \bigcap(I_iM)$ maka $a \in I_i$ dan $a \in M$ artinya $a \in I_1, a \in I_2, a \in I_3, \dots, a \in I_n$ dan $a \in M$ dengan $1 \leq i \leq n$. Sedemikian sehingga diperoleh $a \in \bigcap I_i$ dan $a \in M$ artinya $a \in (\bigcap I_i)M$. Oleh karena itu terbukti $\bigcap(I_iM) \subseteq (\bigcap I_i)M$.

Berdasarkan pembuktian tersebut, terbukti bahwa $(\bigcap I_i)M \subseteq \bigcap(I_iM)$ dan $\bigcap(I_iM) \subseteq (\bigcap I_i)M$ sehingga diperoleh $(\bigcap I_i)M = \bigcap(I_iM)$. ■

Teorema 4.4

Diberikan M adalah *content semimodule* atas semiring S. Untuk setiap $x \in M$ dan $s \in S$, $s\big(c(x)\big) = c(sx)$ jika dan hanya jika $(I :_S s)M = (IM :_M s)$ untuk setiap I ideal dari S.

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui M adalah *content semimodule* atas semiring S dan untuk setiap $x \in M$, $s\big(c(x)\big) = c(sx)$. Akan ditunjukkan $(I :_S s)M = (IM :_M s)$

untuk setiap I ideal dari S. Untuk membuktikan $(I :_S s)M = (IM :_M s)$ maka perlu ditunjukkan:

(i). $(I :_S s)M \subseteq (IM :_M s)$

(ii). $(IM :_M s) \subseteq (I :_S s)M$.

Pada kasus (i) jelas bahwa $(I :_S s)M \subseteq (IM :_M s)$ benar. Hal tersebut dikarenakan *content semimodule* pasti memenuhi sifat-sifat semiring yang berakibat semua unsur $(I :_S s)$ termuat dalam $(IM :_M s)$ yaitu semua unsur disemiring termuat di *content semimodule*.

Selanjutnya akan ditunjukkan $(IM :_M s) \subseteq (I :_S s)M$. Misalkan $x \in (IM :_M s)$ yang artinya $sx \in IM$. Dengan memperhatikan $c(sx) = \cap\{I|I$ ideal dari $S, sx \in IM\}$ maka $c(sx) \subset I$. Mengingat $s\big(c(x)\big) = c(sx)$ maka diperoleh $c(x) \subset I: s$ yang artinya $s(c(x)) \subset I$. Mengingat M adalah *content semimodule* sehingga untuk setiap $x \in M$ berlaku $x \in c(x)M$. Disisi lain $c(x) \subset I: s$ sehingga diperoleh $x \in (I: s)M$. Oleh karena itu terbukti bahwa $(IM :_M s) \subseteq (I :_S s)M$.

($\Leftarrow$) Diketahui M adalah *content semimodule* atas semiring S, sehingga untuk setiap $x \in M$ berlaku $x \in c(x)M$. Oleh karenanya $sx \in s(c(x))M$. Selanjutnya karena $sx \in s(c(x))M$ maka terdapat ideal yang dibangun secara terbatas yaitu I_i, $1 \leq i \leq n$,dengan $I \subset s(c(x))$, sedemikian sehingga $sx \in IM$ dan oleh karena itu $s(c(x)) = I$ yang berarti $s(c(x)) \subseteq I$ dan $I \subseteq s(c(x))$. Dengan memperhatikan $c(sx) = \cap\{I|I$ ideal dari $S, sx \in IM\}$ maka $c(sx) \subset I$, disisi lain karena $I \subseteq s(c(x))$ sehingga diperoleh $c(sx) \subseteq s(c(x))$.

Karena $(I :_S s)M = (IM :_M s)$ untuk setiap I ideal dari S, $s(c(x)) = I$ dan $c(sx) \subseteq s(c(x))$ sehingga dapat ditulis $(c(sx) :_S s)M = (c(sx)M :_M s)$. Disisi lain karena $sx \in s(c(x))M$ dan $c(sx) \subseteq s(c(x))$ maka $sx \in c(sx)M$. Hal tersebut mengakibatkan $x \in (c(sx) :_M s)M = (c(sx)M :_S s)$, disisi lain karena $x \in c(x)M$ sehingga diperoleh $c(x) \subseteq (c(sx) : s)$. Oleh karenanya $s(c(x)) \subseteq c(sx)$. Mengingat $c(sx) \subseteq s(c(x))$ dan $s(c(x)) \subseteq c(sx)$ maka terbukti bahwa $s(c(x)) = c(sx)$. ■

Teorema 4.5

Diberikan S adalah semidomain dan M adalah *content semimodule torsionfree* atas semidomain S, sedemikian sehingga untuk setiap $s \in S$ dan $x \in M$ berlaku $s(c(x)) = c(sx)$.

Bukti:

Diketahui S semidomain dan M *content semimodule torsionfree*. Akan ditunjukkan untuk setiap $s \in S$ dan $x \in M$ berlaku $s\big(c(x)\big) = c(sx)$, yaitu $s\big(c(x)\big) \subseteq c(sx)$ dan $c(sx) \subseteq s(c(x))$.

Karena M adalah *content semimodule* maka untuk setiap $x \in M$ berlaku $x \in c(x)M$. Oleh karenanya $sx \in s\big(c(x)\big)M$. Selanjutnya karena $sx \in s\big(c(x)\big)M$ maka terdapat ideal yang dibangun secara berhingga yaitu I, dengan $I \subset s(c(x))$ sedemikian sehingga $sx \in IM$ dan oleh karena itu $s\big(c(x)\big) = I$ yang berarti $s\big(c(x)\big) \subseteq I$ dan $I \subseteq s\big(c(x)\big)$. Dengan memperhatikan $c(sx) = \cap \{I|I$

ideal dari $S, sx \in IM\}$ maka $c(sx) \subset I$, disisi lain karena $I \subseteq s(c(x))$ sehingga diperoleh

$$c(sx) \subseteq s(c(x)) \qquad \text{................(4.6)}$$

Selanjutnya karena $x \in M$ maka $sx \in sM$. Dengan memperhartikan pemetaan $c: SM \to SI$ yang dikaitkan oleh $sx \longmapsto c(sx) \in (s)$ sedemikian sehingga diperoleh $c(sx) \subseteq (s)$. Lebih lanjut diberikan sebarang ideal dari S yaitu $J = ((c(sx)): s)$ sehingga diperoleh $c(sx) = (s)J$.

Karena $sx \in s(c(sx))M$, $sx \in IM$, dan $c(sx) \subset I$ maka diperoleh $sx \in c(sx)M = sJM$. Selanjutnya karena S adalah semidomain dan M adalah *torsionfree*, maka jika diberikan $sx = sz$ untuk suatu $z \in JM$ diperoleh $x = z$ dan dapat dikatakan bahwa $x \in JM$. Mengingat $x \in c(x)M$ dan $x \in JM$ maka $c(x) \subseteq J$ sehingga diperoleh

$$(c(sx)) \subseteq sJ = c(sx) \qquad \text{................(4.7)}$$

Dari Persamaan (4.6) dan (4.7) diperoleh $s(c(x)) = c(sx)$. ■

B. *Normally Flat Semimodules* (NFS)

Normally flat semimodules merupakan salah satu konsep dari subsemimodul normal. Selanjutnya dalam subbab ini akan dibahas mengenai definisi dan teorema dari *normally flat smiemodules.*

Definisi 4.8

Diberikan M dan L adalah semimodul atas semiring S. Semimodul L dikatakan *normally flat* atas M (*normally* M-*flat*), jika $N \otimes_S L \leq_S^n M \otimes_S L$ untuk setiap $N \leq_S^n M$.

Teorema 4.9

Diberikan semiring S dan semimodul M, terdapat suatu isomorfisma $S \otimes M \cong M$.

Bukti:

Untuk menunjukkan terdapat suatu isomorfisma $S \otimes M \cong M$, pertama harus ditunjukkan pemetaan $f: S \times M \to M$ dengan pengaitan $(s, m) = sm$ untuk setiap $s \in S$ dan $m \in M$ memenuhi kriteria *well defined* dan pemetaan *balance*.

(i). Fungsi f *well defined*

Untuk setiap $s_1, s_2 \in S$ dan $m \in M$ dengan $s_1 = s_2$, diperoleh $s_1 m = s_2 m$ sehingga didapatkan $f(s_1, m) = f(s_2, m)$.

(ii). Fungsi f adalah pemetaan *balance*

Untuk setiap $s_1, s_2 \in S$ dan $m_1, m_2 \in M$ memenuhi:

- $$\begin{aligned} f(s_1 + s_2, m) &= (s_1 + s_2)m \\ &= s_1 m + s_2 m \\ &= f(s_1, m) + f(s_2, m) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} f(s_1, m_1 + m_2) &= s_1(m_1 + m_2) \\ &= s_1 m_1 + s_1 m_2 \\ &= f(s_1, m_1) + f(s_1, m_2) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} f(s_1 s_2, m_1) &= (s_1 s_2)m_1 \\ &= s_1(s_2 m_1) \\ &= f(s_1, s_2 m_1) \end{aligned}$$

Karena fungsi f memenuhi pemetaan *balance*, maka berdasarkan definisi *tensor product* terdapat homomorfisma semigrup tunggal yaitu $g: S\otimes M \rightarrow M$ dengan pengaitan $(s\otimes m) \longmapsto sm$ untuk setiap $s \in S$ dan $m \in M$. Hal tersebut dikarenakan untuk setiap $x, y \in S\otimes M$ dengan $x = s_1\otimes m_1$ dan $y = s_2\otimes m_2$ diperoleh:

$$\begin{aligned} g(x\otimes y) &= g((s_1\otimes m_1)\otimes(s_2\otimes m_2)) \\ &= (s_1\otimes m_1).(s_2\otimes m_2) \\ &= x.y \\ &= g(x).g(y) \end{aligned}$$

Didefinisikan pemetaan lain $g^{-1}: M \rightarrow S\otimes M$ dengan pengaitan $m \longmapsto 1\otimes m$ untuk setiap $m \in M$. Oleh karena itu fungsi g^{-1} memenuhi

(i). $g \circ g^{-1} = Id$, karena

Untuk setiap $m \in M$ diperoleh

$$\begin{aligned} (g \circ g^{-1})(m) &= g(g^{-1}(m)) \\ &= g(1\otimes m) \\ &= 1.m \\ &= m \end{aligned}$$

(ii). $g^{-1} \circ g = Id$, karena

Untuk setiap $s\otimes m \in S\otimes M$ diperoleh

$$\begin{aligned} (g^{-1} \circ g)(s\otimes m) &= g^{-1}\big(g(s\otimes m)\big) \\ &= g^{-1}(sm) \\ &= 1\otimes sm \\ &= s\otimes m \end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi-kondisi tersebut dapat dikatakan bahwa g dan g^{-1} adalah isomorfisma semimodul atas semiring S, sehingga terbukti bahwa $S \otimes M \cong M$ adalah isomorfisma. ■

Teorema 4.10

Diberikan S adalah semidomain, ideal prima dari S adalah subtraktif dan M adalah semimodul. Jika M adalah NFS atas semiring S, maka M adalah *semimodule torsionfree*.

Bukti:

Diketahui S adalah semidomain, ideal prima dari S adalah subtraktif, dan M adalah NFS atas semiring S. Akan ditunjukkan bahwa M adalah semimodul *torsionfree*, yaitu M memenuhi pemetaan injektif.

Misal diberikan $a \neq 0 \in S$. Karena S adalah semidomain, maka jika diberikan pemetaan $f: S \to S$ dengan pengaitan $s \longmapsto as$, f adalah monomorfisma, yaitu:

(i). Fungsi f adalah *well define*

Untuk setiap $s, s' \in S$ dengan $s = s'$ berlaku $as = as'$ sehingga diperoleh $f(s) = f(s')$.

(ii). Fungsi f adalah homomorfisma semimodul

Untuk setiap $s, s' \in S$ dan $r \in S$, f adalah homomorfisma semimodul, dikarenakan

$$f(s + s') = a(s + s') = as + as' = f(s) + f(s')$$

dan

$$f(rs) = ars = ras = rf(s)$$

(iii). Fungsi f adalah injektif

Untuk setiap $s, s' \in S$ dengan $f(s) = f(s')$ berlaku $as = as'$ yang berakibat $s = s'$.

Lebih lanjut $f(S) = Sa$ adalah subsemimodul subtraktif dari S. Karena M adalah NFS, maka untuk pemetaan $\bar{f} : S \otimes_S M \to S \otimes_S M$ dengan pengaitan $s \otimes m \longmapsto a(s \otimes m)$ adalah injektif, sebab untuk setiap $s \otimes m$ dan $s' \otimes m' \in S \otimes_S M$ dengan $\bar{f}(s \otimes m) = \bar{f}(s' \otimes m')$ berlaku $s \otimes m = s' \otimes m'$, yaitu

$$\bar{f}(s \otimes m) = \bar{f}(s' \otimes m')$$

$$a(s \otimes m) = a(s' \otimes m')$$

$$s \otimes m = s' \otimes m'$$

Selanjutnya karena $\bar{f} : S \otimes_S M \to S \otimes_S M$, dan $\theta : S \otimes_S M \to M$, serta $\theta^{-1} : M \to S \otimes_S M$ maka diperoleh $\theta \circ \bar{f} \circ \theta^{-1} : M \to M$ dengan pengaitan $m \longmapsto am$. Oleh karena itu jika $(\theta \circ \bar{f} \circ \theta^{-1})(m) = (\theta \circ \bar{f} \circ \theta^{-1})(m')$ maka diperoleh $am = am'$. Dengan menggunakan hukum MC didapatkan $m = m'$ untuk setiap $m, m' \in M$. Sedemikian sehingga dapat dikatakan bahwa M adalah semimodul *torsionfree*. ■

Akibat 4.11

Diberikan S adalah semidomain, setiap ideal prima dari S subtraktif dan M adalah semimodul. Jika M adalah *normally flat content semimodule*, maka untuk setiap $s \in S, x \in M$ berlaku $s(c(x)) = c(sx)$.

Bukti:

Diketahui S adalah semidomain, setiap ideal prima dari S subtraktif, dan M adalah *normally flat content semimodule*. Akan ditunjukkkan untuk setiap $s \in S, x \in M$ berlaku $s\big(c(x)\big) = c(sx)$.

Berdasarkan Teorema 4.10 terbukti bahwa M adalah *torsionfree* S-semimodul. Selain itu, berdasarkan Teorema 4.5 terbukti bahwa jika diketahui S adalah semidomain dan M adalah *content semimodule torsionfree* atas semiring S, maka untuk setiap $s \in S$ dan $x \in M$ berlaku $s(c(x)) = c(sx)$. ∎

Teorema 4.12

Diberikan S adalah semiring dan M adalah *content S-semimodule*. Jika untuk setiap $s \in S$ dan setiap ideal I dari S berlaku $(I :_S s)M = (IM :_M s)$, maka $(I :_S J)M = (IM :_M J)$ untuk setiap I, J ideal dari S.

Bukti:

Diketahui S adalah semiring, M adalah *content S-semimodule*, dan untuk setiap $s \in S$ dan setiap I ideal dari S dengan $(I :_S s)M = (IM :_M s)$. Akan ditunjukkan $(I :_S J)M = (IM :_M J)$ untuk setiap I, J ideal dari S.

Berdasarkan Teorema 4.3 diperoleh

$$
\begin{aligned}
(I :_S J)M &= [\cap\{(I : j) | j \in J\}]M \\
&= \cap\{(I : j)M | j \in J\} \\
&= \cap\{IM : j | j \in J\} \\
&= (IM : J)
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu terbukti bahwa $(I :_S J)M = (IM :_M J)$. ∎

Akibat 4.13

Diberikan S adalah semidomain, ideal prima dari S subtraktif dan M adalah semimodul atas semidomain S. Jika M adalah *content normally flat* S-*semimodule*, maka $(I :_S J)M = (IM :_M J)$ untuk setiap I, J ideal dari S.

Bukti:

Diketahui S adalah semidomain, setiap ideal prima dari S adalah subtraktif, dan M adalah *content normally flat* S-*semimodule*. Akan ditunjukkan $(I :_S J)M = (IM :_M J)$ untuk setiap I, J ideal dari S.

Berdasarkan Teorema 4.11 untuk setiap $s \in S$ dan $x \in M$, memenuhi $s\big(c(x)\big) = c(sx)$. Selain itu berdasarkan Teorema 4.4 diperoleh bahwa jika $s\big(c(x)\big) = c(sx)$ maka $(I :_S s)M = (IM :_M s)$ untuk setiap I ideal dari S dan $s \in S$. Berdasarkan Teorema 4.12 jika $(I :_S s)M = (IM :_M s)$ maka $(I :_S J)M = (IM :_M J)$. Dengan demikian terbukti bahwa $(I :_S J)M = (IM :_M J)$. ■

BAB V

PENUTUP

A. Simpulan

Berdasarkan penjelasan dalam pembahasan, dapat disimpulkan bahwa untuk semimodul M atas semiring S terdapat suatu isomorfisma $S \otimes M \cong M$ dan setiap ideal I dari S berlaku $(\bigcap I_i)M = \bigcap (I_i M)$. Lebih lanjut suatu *content semimodule* M atas semiring S memenuhi $s\big(c(x)\big) = c(sx)$ jika dan hanya jika $(I :_S s)M = (IM :_M s)$ untuk setiap $x \in M$. Selain itu, untuk semidomain S dan *content torsionfree* S*-semimodule* juga berlaku $s\big(c(x)\big) = c(sx)$ untuk setiap $s \in S$ dan $x \in M$.

Suatu semidomain S juga memenuhi beberapa kondisi yaitu jika setiap ideal prima dari S adalah subtraktif dan M merupakan NFS atas semiring S, maka M merupakan *semimodule torsionfree*, sehingga timbul suatu akibat dari kondisi tersebut yaitu untuk setiap $s \in S, x \in M$ dengan M adalah *normally flat content semimodule* berlaku $s\big(c(x)\big) = c(sx)$. Suatu *content semimodule* M atas semiring S dan setiap ideal I dari S yang memenuhi $(I :_S s)M = (IM :_M s)$ berlaku $(I :_S J)M = (IM :_M J)$ untuk setiap I, J ideal dari S. Kondisi tersebut mengakibatkan untuk suatu *normally flat content semimodule* M atas semiring S juga berlaku $(I :_S J)M = (IM :_M J)$ untuk setiap I, J ideal dari S.

B. Saran

Berdasarkan pembuktian teorema-teorema *normally flat content semimodules*, selanjutnya penulis menyarankan untuk melakukan penelitian lanjut mengenai beberapa sifat yang berkaitan dengan *normally flat content semimodules* serta *content semimodules* atas semiring valuasi diskrit. Hal tersebut dikarenakan beberapa sifat yang dimiliki oleh semiring valuasi diskrit berkaitan dengan sifat *normally flat semimodules*.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, W. A., & Weintraub, S. H. (1992). *Graduate Texts in Mathematics* (1st Ed.). https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0923-2

Andari, A. (2016). *Semimodul atas Semiring*. Malang: UB Press.

Chaudhari, J. N., & Bonde, D. R. (2010). *On Partitioning and Subtractive Subsemimodules of Semimodules over Semirings. Kyungpook Math., 50, 329–336.*

Gallian, J. A. (2010). *Contemporary Abstract Algebra* (7th Ed.). USA: Richard Stratton.

Herstein, I. N. (1975). *Topics in Algebra* (2nd Ed.). United States of America: Xerox Corporation.

Kurniadi, E., Dewanto, S. P., & Kartiwa, A. (2013). Karakteristik Koproduk Grup Hingga. *Jurnal Matematika Integratif*, *9*(2), 139–145.

Lal, R. (2017). *Algebra 1* (G. P. I. Fonseca, Ed.). <https://doi.org/10.1007/978-981-10-4253-9>

Lestari, D. (2012). Ruang Vektor. Diakses pada 17 Juli 2019. Dipublikasikan oleh UNY <http://staffnew.uny.ac.id>

Lestari, F. D. (2018). *K-isomorfisme dalam k-aljabar*. UIN Sunan Ampel Surabaya.

Lestari, F. D., Hafiyusholeh, M., Asyhar, A. H., Utami, W. D., & Arifin, A. Z. (2019). Properties of K-Isomorphism on K-Algebra. *Journal of Physics: Conference Series*, *1211*, 1–7. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1211/1/012053>

Mudrik, M. B., & Lukito, A. (2018). Sifat-Sifat Q-Aljabar. *Jurnal Ilmiah Matematika*, *6*(3), 23–30.

Nasehpour, P. (2016). On the content of polynomials over semirings and its applications. *Journal of Algebra and Its Applications*, *15*(5), 1–32. <https://doi.org/10.1142/S0219498816500882>

Nazari, R. R., & Ghalandarzadeh, S. (2017). Content Semimodules. *Extracta Mathematicae*, *32*, 239–254.

Nola, A. Di, & Russo, C. (2018). *Semiring and semimodule issues in MV-Algebra*. Italy.

Ohm, J., & Rush, D. E. (1972). Content Module and Algebras. *Math Scand*, *31*, 49–68.

Rimadhany, R., & Setyawati, D. W. (2014). Kajian Bentuk-Bentuk Ideal pada Semiring. *Jurnal Sains Dan Seni Pomits*, *2*(1), 2337–3520.

Rosales, J. C., & Garcia-Sanchez, P. A. (2009). *Numerical Semigroups* (K. Alladi, Ed.). <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0160-6>

Subiono. (2016). Draft Aljabar Linier Lanjut. Diakses pada 6 Maret 2019. Dipublikasikan oleh Matematika ITS <http://mathematics.its.ac.id>

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. (2016). *Teori Ring dan Modul* (1st Ed.). Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.