

**ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA SEICR PADA  
PENYEBARAN HEPATITIS B DENGAN PEMBERIAN VAKSINASI**

**SKRIPSI**



**UIN SUNAN AMPEL  
S U R A B A Y A**

Disusun Oleh

**GITA PURNAMASARI RIWAYANTI**

**H72216053**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL  
SURABAYA**

**2019**

## PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini,

Nama : GITA PURNAMASARI RIWAYANTI

NIM : H72216053

Program Studi : Matematika

Angkatan : 2016

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul " ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA SEICR PADA PENYEBARAN HEPATITIS B DENGAN PEMBERIAN VAKSINASI ". Apabila suatu saat nanti terbukti saya melakukan tindakan plagiat, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian pernyataan keaslian ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 20 Desember 2019

Yang menyatakan,



GITA PURNAMASARI RIWAYANTI  
NIM. H72216053

## LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

Skripsi oleh

Nama : GITA PURNAMASARI RIWAYANTI

NIM : H72216053

Judul Skripsi : ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA  
SEICR PADA PENYEBARAN HEPATITIS B DENGAN  
PEMBERIAN VAKSINASI

telah diperiksa dan disetujui untuk diujikan.

Surabaya, 20 Desember 2019

Pembimbing



---

Wika Dianita Utami, M.Sc  
NIP. 199206102018012003

## PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI

Skripsi oleh

Nama : GITA PURNAMASARI RIWAYANTI  
NIM : H72216053  
Judul Skripsi : ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA  
SEICR PADA PENYEBARAN HEPATITIS B DENGAN  
PEMBERIAN VAKSINASI

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji  
pada tanggal 30 Desember 2019

Mengesahkan,  
Tim Penguji

Penguji I



Wika Dianita Utami, M.Sc  
NIP. 199206102018012003

Penguji II



Yuniar Farida, MT  
NIP. 197905272014032002

Penguji III



Dian C. Rini Novitasari, M. Kom  
NIP. 198511242014032001

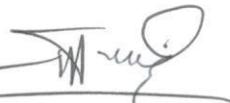
Penguji IV



Putroe Keumala Intan, M.Si  
NIP. 198805282018012001

Mengetahui,

Dekan Fakultas Sains dan Teknologi  
Sunan Ampel Surabaya



Dr. Hj. Eni Purwati, M.Ag  
NIP. 196512211990022001



KEMENTERIAN AGAMA  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL SURABAYA  
PERPUSTAKAAN

Jl. Jend. A. Yani 117 Surabaya 60237 Telp. 031-8431972 Fax.031-8413300  
E-Mail: perpus@uinsby.ac.id

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI  
KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika UIN Sunan Ampel Surabaya, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : Gita Purnamasari Riwayanti  
NIM : H12216053  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika  
E-mail address : gitapurnamasari86@gmail.com

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah :

Sekripsi  Tesis  Desertasi  Lain-lain (.....)

yang berjudul :

Analisis Keastabilan Model Matematika SEICR pada Penyebaran  
Hepatitis B dengan Pemberian Vaksinasi

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif ini Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (database), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di Internet atau media lain secara **fulltext** untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Surabaya, 31 Desember 2019

Penulis

(GITA PURNAMASARI RIWAYANTI)  
nama terang dan tanda tangan







2.3.2.	Sistem Persamaan Differensial Non-Linier . . . . .	18
2.4.	Model Epidemi SEICR . . . . .	18
2.5.	Titik Ekuilibrium . . . . .	22
2.6.	Linearisasi . . . . .	24
2.7.	Kriteria Routh-Hurwitz . . . . .	26
2.8.	Bilangan Reproduksi Dasar . . . . .	30
2.9.	Bifurkasi . . . . .	33
2.9.1.	Bifurkasi <i>Saddle-Node</i> . . . . .	34
2.9.2.	Bifurkasi <i>Transcritical</i> . . . . .	34
2.9.3.	Bifurkasi <i>Pitchfork</i> . . . . .	35
2.9.4.	Bifurkasi <i>Hopf</i> . . . . .	35
<b>III</b>	<b>METODE PENELITIAN . . . . .</b>	<b>37</b>
3.1.	Jenis Penelitian . . . . .	37
3.2.	Jenis dan Sumber Data . . . . .	37
3.3.	Teknik Analisis Data . . . . .	38
<b>IV</b>	<b>HASIL DAN PEMBAHASAN . . . . .</b>	<b>41</b>
4.1.	Penentuan Titik Ekuilibrium . . . . .	41
4.2.	Bilangan Reproduksi Dasar . . . . .	45
4.3.	Analisis Titik Ekuilibrium . . . . .	47
4.3.1.	Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit . . . . .	48
4.3.2.	Titik Ekuilibrium Endemik . . . . .	50
4.4.	Analisis Bifurkasi . . . . .	53
4.5.	Simulasi Model . . . . .	55
4.5.1.	Simulasi Awal . . . . .	55
4.5.2.	Perubahan Nilai Parameter $p$ . . . . .	57
<b>V</b>	<b>PENUTUP . . . . .</b>	<b>64</b>
5.1.	Simpulan . . . . .	64
5.2.	Saran . . . . .	66
	<b>DAFTAR PUSTAKA . . . . .</b>	<b>67</b>











yang penyebarannya sangat cepat. Model matematika mengenai epidemiologi ini akan memungkinkan untuk memprediksi dinamika epidemi pada suatu populasi, dengan faktor-faktor epidemi, dinamika awal invansi, dan dampak dari adanya vaksinasi (Khan, Ullah, Ali, & Zaman, 2019). Penyakit yang berpotensi menjadi epidemi di suatu wilayah, misalnya: penyakit HIV/AIDS, hepatitis, tuberkulosis dan lainnya. Penyakit-penyakit tersebut mampu menjadi wabah disuatu populasi karena penyebarannya yang cepat. Salah satu model epidemi dalam penyebaran penyakit ialah penyebaran penyakit hepatitis B. Penyebaran penyakit ini dapat dirumuskan kedalam model matematika.

Hepatitis B merupakan penyakit menular yang disebabkan karena adanya infeksi virus HBV (*Hepatitis B Virus*) yang umumnya menginfeksi hati (Pusat Data dan Informasi, 2014). Ada tujuh jenis hepatitis, yaitu hepatitis A, B, C, D, E, G, dan TTV (*Transmission Transfusion Virus*). Dari ketujuh jenis hepatitis tersebut, Hepatitis B paling banyak dijumpai di seluruh dunia dan menjadi yang berbahaya dibandingkan hepatitis lain. Hal ini dikarenakan Hepatitis B dapat membunuh penderitanya pelan-pelan karena mampu bertahan dan menetap dalam tubuh. Penyakit ini juga mampu berkembang menjadi sirosis hati (pengerasan hati) kemudian berakhir menjadi kanker hati. Rata-rata penderita penyakit ini awalnya tidak menyadari dirinya terkena HBV (*Hepatitis B Virus*), yang kemudian disadari ketika keadaan telah menjadi kronis. Diperkirakan 350 juta orang didunia telah terinfeksi HBV, dengan 5% merupakan penderita hepatitis akut dan antara 500.000 hingga 12 juta orang meninggal setiap tahunnya dikarenakan infeksi HBV (Thornley, Bullen, & Roberts, 2008). HBV telah menjadi penyakit endemis di berbagai negara di dunia (Liang, Zu, & Zhuang, 2018).





Perkembangan model epidemi matematika telah berkembang dari model sederhana menjadi model yang lebih kompleks, termasuk dengan melibatkan faktor vaksinasi sebagai kontrol optimum. Model epidemik penyebaran yang sering digunakan ialah model SIR. Model ini mengelompokkan populasi menjadi 3 sub populasi yaitu: *Susceptible* (individu yang rentan), *Infected* (individu terinfeksi), dan *Recovered* (individu sembuh). Model SIR ditemukan pada tahun 1927 oleh Kermack dan McKendrick. Penelitian yang dilakukan oleh Khan, et al (2019) dalam penelitiannya tentang penyebaran Hepatitis B dengan menggunakan model SIR menjelaskan tentang formulasi model epidemi Hepatitis B. Hasil dari penelitian tersebut di dapatkan bahwa dari setiap individu sub populasi membutuhkan penanganan atau kontrol untuk pencegahan penyebaran, dikarenakan bilangan reproduksi ( $R_o > 1$ ) yang berarti Hepatitis B menjadi penyakit epidemi (Khan, Ullah, Ali, & Zaman, 2019).

Meskipun model SIR merupakan model yang baik, namun untuk beberapa penyakit model ini kurang sesuai. Misalnya pada penyakit yang memungkinkan adanya penularan akibat kontak langsung atau dari gen pembawa dari ibu. Oleh karena itu, muncul model yang melibatkan adanya penambahan sub populasi, yaitu populasi terinfeksi akut dan populasi individu pembawa. Individu pembawa yang dimaksud ialah individu yang terkena penyakit karena adanya faktor turunan gen dari orang tua. Model ini disebut sebagai model SACR (*Susceptible, Acute Infection, Carrier, Recovery*). Penelitian dengan menggunakan model SACR pernah dilakukan oleh Dontwi, et al (2010) tentang model matematika terhadap penyebaran Hepatitis C melalui pengguna narkoba. Model tersebut menganalisis tentang tingkat epidemi pada setiap sub populasi.

Model yang akan diteliti dalam penelitian ini ialah model SEICR yang

merupakan pengembangan dari model SACR. Dimana dalam model ini ditambahkan sub populasi individu laten yaitu individu yang terkena virus namun tidak berpotensi untuk menularkan ke individu lain. Kemudian dalam model tersebut ditambahkan pula faktor kontrol vaksinasi dengan tujuan mengontrol penyebaran Hepatitis B di suatu populasi dan menentukan tingkat vaksin untuk menghentikan laju penyebaran.

Model SEICR dengan menambahkan faktor vaksin pernah dilakukan oleh Ali Vahidian, et al (2014) dalam penelitiannya mengenai penyebaran virus Hepatitis B. Penelitian tersebut menunjukkan hasil kombinasi yang baik dari faktor kontrol optimum vaksinasi dan pengobatan sehingga dapat menjadi cara yang paling efektif untuk pengendalian HBV dan juga dapat meminimumkan biaya pengobatan. Penelitian lain juga pernah dilakukan oleh Simon Thornley, et al (2008) dan Jianhua Pang, et al (2010), dimana penelitian tersebut bertujuan membangun strategi untuk mengeliminasi HBV pada kondisi penyebaran prevalensi tinggi serta menginterpretasikan simulasi model penyebaran Hepatitis B agar dapat digunakan untuk memprediksi efektivitas jangka panjang dari program imunisasi dan membantu dalam memilih strategi vaksinasi HBV.

Pada penulisan ini digunakan model epidemi SEICR berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh Jianhua Pang, et,al tahun 2010 dengan menggunakan data dari Cina. Model epidemi yang terbentuk tersebut digunakan untuk mempelajari perilaku penularan penyakit yang menular secara horizontal dan vertikal dengan memperhatikan pemberian vaksin. Perilaku dinamik yang diselidiki dari model SEICR ialah adanya analisis kestabilan titik ekuilibrium, lalu pada skripsi ini ditambahkan mengenai kemungkinan adanya bifurkasi pada nilai parameter tertentu. Analisis bifurkasi merupakan analisis yang dilakukan untuk mengetahui adanya perubahan kestabilan apabila terjadi perubahan atau



































































#### 4. Linearisasi

Linearisasi dilakukan untuk mengubah sistem persamaan diferensial non-linear menjadi sistem persamaan diferensial linear. Dalam melakukan linearisasi metode yang biasa dilakukan ialah dengan menggunakan matriks Jacobian.

#### 5. Perhitungan titik ekuilibrium, kestabilan, dan bilangan reproduksi

Persamaan yang telah linear selanjutnya dilakukan pencarian titik ekuilibrium yang merupakan titik setimbang keadaan suatu penyakit. Titik setimbang dapat diperoleh dari turunan pertama sistem persamaan diferensial. Selanjutnya analisis kestabilan dari titik setimbang dilakukan dengan menggunakan analisis dari matriks Jacobian yang memiliki nilai eigen ( $\lambda$ ), sesuai dengan ketentuan-ketentuan yang berlaku. Nilai eigen dapat diperoleh dari persamaan karakteristik yang kemudian dilakukan perhitungan dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*. Selanjutnya perhitungan nilai bilangan reproduksi dasar dilakukan untuk mengetahui endemi dari penyakit. Perhitungan bilangan reproduksi dasar dapat menggunakan persamaan dari matriks *next generation*.

#### 6. Analisis Bifurkasi

Analisis bifurkasi dilakukan dengan melakukan analisis banyaknya penyelesaian dari populasi terinfeksi dan dari  $R_0$  yang akan mempengaruhi bifurkasi.

#### 7. Simulasi Model

Simulasi model dilakukan untuk mengetahui grafik numerik atau pola penyebaran di masing-masing sub populasi dari model tersebut. Dimana pada penelitian ini simulasi model dilakukan dengan memasukkan data-data parameter berdasarkan penelitian dari Jianhua Pang, et al (2010).







$$x^* = \frac{\frac{y(r_1 + \mu)(\sigma + \mu)(r_2 + \mu) - \mu\omega\varepsilon(qr_1y) + \sigma}{\sigma(r_2 + \mu)}}{\beta y \left( \frac{(r_2 + \mu) + \alpha qr_1}{r_2 + \mu} \right)}$$

$$x^* = \frac{(r_1 + \mu)(\sigma + \mu)(r_2 + \mu) - \mu\omega\varepsilon qr_1 \sigma}{\beta \sigma (r_2 + \mu + \alpha qr_1)} \quad (4.5)$$

Terakhir, akan dicari  $y^*$  dengan membuat ruas kiri  $\dot{x} = 0$ . Kemudian mensubstitusikan persamaan-persamaan yang didapat.

$$\dot{x} = 0$$

$$\mu\omega(1 - \varepsilon c) - \beta x(y + \alpha c) - (1 - \omega)px + \delta[1 - (x + e + y + c)] - \mu x = 0$$

$$-\delta y - \beta xy = (1 - \omega)px + \delta x + \delta e - \delta + \delta c + \mu x + \beta x \alpha c$$

$$-\mu\omega(1 - \varepsilon c)$$

$$y(-\delta - \beta x) = ((1 - \omega)p + \delta + \mu)x^* - \mu\omega(1 - \varepsilon c) + \delta e - \delta + \delta c + \beta x \alpha c$$

$$y(-\delta - \beta x) = ((1 - \omega)p + \delta + \mu)x^* - \mu\omega \left(1 - \frac{\varepsilon qr_1 y}{r_2 + \mu}\right) + \frac{\delta y^*(r_1 + \mu)}{\sigma} - \delta + \frac{\delta qr_1 y}{r_2 + \mu} + \frac{\beta x^* \alpha qr_1 y}{r_2 + \mu}$$

$$y(-\delta - \beta x) = ((1 - \omega)p + \delta + \mu)x^* - \mu\omega + \frac{\mu\omega\varepsilon qr_1 y}{r_2 + \mu} + \frac{\delta y(r_1 + \mu)}{\sigma} - \delta + \frac{\delta qr_1 y}{r_2 + \mu} + \frac{\beta x^* \alpha qr_1 y}{r_2 + \mu}$$

$$((1 - \omega)p + \delta + \mu)x - (\mu\omega + \delta) = y(-\delta - \beta x) - \frac{\mu\omega\varepsilon qr_1 y}{r_2 + \mu} - \frac{\delta y(r_1 + \mu)}{\sigma} - \frac{\delta qr_1 y}{r_2 + \mu} - \frac{\beta x^* \alpha qr_1 y}{r_2 + \mu}$$

$$y\left[(-\delta - \beta x) - \frac{\mu\omega\epsilon qr_1}{r_2 + \mu} - \frac{\delta(r_1 + \mu)}{\sigma} - \frac{\delta qr_1}{r_2 + \mu} - \frac{\beta x^* \alpha qr_1}{r_2 + \mu}\right] = ((1 - \omega)p + \delta + \mu)x - (\mu\omega + \delta)$$

$$y\left[-\beta x^*\left(1 + \frac{\alpha qr_2}{r_2 + \mu}\right) - \delta\left(\frac{r_1 + \mu}{\sigma} + 1 + \frac{qr_1}{r_2 + \mu}\right) - \frac{\mu\omega\epsilon qr_1}{r_2 + \mu}\right] = ((1 - \omega)p + \delta + \mu)x - (\mu\omega + \delta)$$

$$y^* = \frac{((1 - \omega)p + \delta + \mu)x - (\mu\omega + \delta)}{-\beta x^*\left(1 + \frac{\alpha qr_2}{r_2 + \mu}\right) - \delta\left(\frac{r_1 + \mu}{\sigma} + 1 + \frac{qr_1}{r_2 + \mu}\right) - \frac{\mu\omega\epsilon qr_1}{r_2 + \mu}} \quad (4.6)$$

## 4.2. Bilangan Reproduksi Dasar

Perhitungan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) dilakukan dengan menggunakan metode *next generation matrix* dari sistem persamaan model yang telah terbentuk. Pada sistem ini yang termasuk kelas terinfeksi ialah individu pada kelas *Exposed*, teinfeksi akut, dan *carrier*. Sehingga didapatkan:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \beta x(y + \alpha c) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \psi = \begin{bmatrix} -\mu\omega\epsilon c + \sigma e + \mu e \\ -\sigma e + r_1 y + \mu y \\ -qr_1 y + r_2 c + \mu c \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari matriks Jacobian dari  $\varphi$  dan  $\psi$  untuk mendapatkan nilai  $F$  dan  $V$  sebagai berikut:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_{(1,1)}}{\partial e} & \frac{\partial\varphi_{(1,1)}}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_{(1,1)}}{\partial c} \\ \frac{\partial\varphi_{(2,1)}}{\partial e} & \frac{\partial\varphi_{(2,2)}}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_{(2,3)}}{\partial c} \\ \frac{\partial\varphi_{(3,1)}}{\partial e} & \frac{\partial\varphi_{(3,2)}}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_{(3,3)}}{\partial c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta x & \beta x \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

















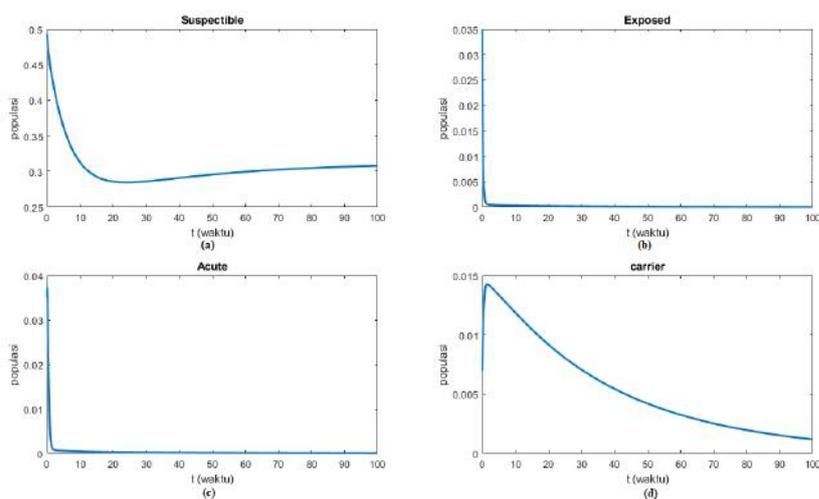




Tabel 4.2 Nilai Awal Populasi

Populasi	Nilai Awal
<i>Susceptible</i> ( $\dot{x}$ )	0.493
<i>Exposed</i> ( $\dot{e}$ )	0.035
<i>Infection Acute</i> ( $\dot{y}$ )	0.035
<i>Carrier Infection</i> ( $\dot{c}$ )	0.007

Berdasarkan nilai dari tabel didapatkan  $R_0$  sebesar 1.585903 . Kemudian dengan bantuan aplikasi didapatkan pula empat nilai eigen yaitu:  $\lambda_1 = -0.1497, \lambda_2 = -6.6105, \lambda_3 = -3.4326$  dan  $\lambda_4 = -0.0248$ . Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa dengan nilai awal parameter sesuai Tabel (4.1) dan Tabel (4.2) keberadaan virus Hepatitis B bersifat endemik stabil, dikarenakan  $R_0 > 1$  dan semua nilai eigen bernilai negatif. Grafik berikut ini menunjukkan penyebaran penyakit.



Gambar 4.1 Grafik Penyebaran masing-masing Populasi

Berdasarkan Gambar 4.1 (a) memperlihatkan dinamika populasi *Susceptible* dari waktu ke waktu. Simulasi ini menggunakan nilai  $p = 0.1$ , diawal

grafik menunjukkan adanya penurunan jumlah individu. Menurunnya jumlah individu *susceptible* diawal menunjukkan masih terdapat penyebaran penyakit. Namun, setelah mengalami penurunan drastis diawal waktu, grafik mengalami kenaikan secara perlahan, dikarenakan pengaruh vaksinasi yang kurang efektif sehingga grafik belum mengalami keseimbangan.

Gambar 4.1 (b), (c), (d) yang merupakan grafik dinamika populasi yang terinfeksi. Pada grafik populasi *Exposed* dan *Acute Infection* yang ditunjukkan oleh Gambar (b) dan (c), jumlah individu mengalami penurunan hingga mendekati nol. Hal itu berarti pada kedua kelas tidak terjadi penyebaran virus Hepatitis B. Namun, pada Gambar 4.1 (d) yang menunjukkan penyebaran pada kelas *Carrier* hasil dari grafik tidak menunjukkan nilai yang mendekati nol. Maka, menunjukkan dengan nilai  $p$  10% masih terdapat penyebaran virus Hepatitis B pada kelas *Carrier*.

#### 4.5.2. Perubahan Nilai Parameter $p$

Parameter  $p$  merupakan parameter yang menandakan adanya individu tervaksin pada populasi *susceptible*. Bertambah besarnya nilai  $p$  yang digunakan akan menyebabkan penyebaran virus Hepatitis B berhenti seiring waktu dan menyebabkan pula kestabilan bebas penyakit. Hal ini dapat ditunjukkan oleh tabel berikut:

Tabel 4.3 Perubahan Parameter  $p$ 

Nilai $p$	$R_0$	Nilai eigen ( $\lambda$ )	Keterangann
0.1	1.585903	$\lambda =$ -0.1497 -6.6105 -3.4326 -0.0248	Endemik stabil
0.2	0.990545	$\lambda =$ -0.2397 -6.4163 -3.6211 -0.0304	Bebas penyakit stabil
0.3	0.720183	$\lambda =$ -0.3297 -6.3187 -3.7162 -0.0329	Bebas penyakit stabil
0.4	0.565763	$\lambda =$ -0.4197 -6.2596 -3.7740 -0.0343	Bebas penyakit stabil
0.5	0.465872	$\lambda =$ -0.5097 -6.2199 -3.8128 -0.0351	Bebas penyakit stabil



**Tabel 4.4 Nilai Parameter Bebas Penyakit**

No	Parameter	Nilai
1	$\beta$	0.85
2	$\sigma$	6
3	$r_1$	4
4	$r_2$	0.025
5	$\mu$	$\frac{1}{70}$
6	$\varepsilon$	0.8
7	$p$	0.5
8	$\alpha$	0.5
9	$\omega$	0.1
10	$q$	0.1
11	$\delta$	$\frac{1}{22}$

Hasil simulasi berdasarkan nilai parameter pada Tabel (4.4) didapatkan nilai  $R_0$  sebesar 0.465872, lalu nilai eigen sesuai dengan Tabel (4.3). Hal ini menunjukkan dengan perubahan parameter  $p$  kestabilan sistem berubah menjadi stabil bebas penyakit ditandai dengan nilai  $R_0 < 1$  dan semua nilai eigen bertanda negatif.















- Modeling of Transmission Dynamics and Optimal Control of Vaccination and Treatment for Hepatitis B Virus*. 2014, 80–90.
- Khan, T., Ullah, Z., Ali, N., & Zaman, G. (2019). *Modeling and control of the hepatitis B virus spreading using an epidemic model*. *Chaos, Solitons and Fractals*. 124, 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.04.033>
- Liang, P., Zu, J., & Zhuang, G. (2018). *A Literature Review of Mathematical Models of Hepatitis B Virus Transmission Applied to Immunization Strategies From 1994 to 2015*. 28(76), 221–229.
- Martin, N. K., Vickerman, P., & Hickman, M. (2011). *Mathematical modelling of hepatitis C treatment for injecting drug users*. *Journal of Theoretical Biology*, 274(1), 58–66. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2010.12.041>
- Ningsih, D. K., & Winarko, S. (2016). *Analisis Bifurkasi Pada Model Epidemiologi SEIR Demam Berdarah Di Surabaya*. 5(1), 7–13.
- Ningsih, D. K., & Winarko, S. (2016). *Analisis Bifurkasi Pada Model Epidemiologi SEIR Demam Berdarah Di Surabaya*. 5(1), 7–13.
- Nurfitriah, Kiftiah, M., & Yudhi. (2019). *Analisis Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Hepatitis A dengan Vaksinasi dan Sanitasi*. *Bimaster*, 08(2), 327–334.
- Olsder, G. J. (2003). *Mathematical Systems Theory*. Second Edition. Delft University, Netherlad: Delft University Press.
- Pang, J., Cui, J., & Zhou, X. (2010). *Dynamical behavior of a hepatitis B virus transmission model with vaccination*. *Journal of Theoretical Biology*, 265(4), 572–578. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2010.05.038>

- Perko, L. (2001). *Equations and Dynamical Systems*. Third Edition; J. . Marsden, L. Sirovich, & M.Golubitsky, Eds. Flagstaff, USA.
- Pusat Data dan Informasi. (2014). *Situasi dan Analisis Hepatitis*. Jakarta Selatan.
- Pusat Data dan Informasi. (2017). *Situasi Penyakit Hepatitis B di Indonesia*. Jakarta.
- Riogilang, R. (1997). *Persamaan Diferensial*. Bandung: Binacipta.
- Ross, S. L. (1984). *Differential Equations*. Canada: University of New Hampshire.
- Sair, I. S. (2018). *Solusi Numerik Model Penyebaran pada Penyakit Hepatitis B di Provinsi Sulawesi Selatan menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat*. Universitas Negeri Makassar.
- Saputri, A. D., Hariyanto, H., & Winarko, M. S. (2019). *Analisis Bifurkasi Hopf Pada Sistem Keuangan Dengan Kontrol Input*. *Jurnal Sains Dan Seni ITS*, 7(2). <https://doi.org/10.12962/j23373520.v7i2.30171>
- Setiawan, R. (2009). *Bifurkasi Hopf dalam Model Epidemologi dengan Waktu Tundaan Diskret*. *Journal of Chemical Information and Modeling*, 53(9), 54–60. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>
- Side, S., Sanusi, W., & Setiawan, N. F. (2016). *Analisis dan Simulasi Model SITR pada Penyebaran Penyakit Tuberculosis di Kota Makassar City*. V(2). Makassar
- Soehardjo. (2004). *Persamaan Diferensial Parsial*. Surabaya: URANUS.
- Subiono. (2013). *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh November.
- Susanto, A. (2012). *Kestabilan Global Titik Ekuilibrium Model Dasar Infeksi Virus untuk Hepatitis B*. *Jurnal Saintek*, IV, 42–51.

