

**GRUP ABELIAN YANG DIBANGUN OLEH *ENGEL SET* BERHINGGA**

**SKRIPSI**



**UIN SUNAN AMPEL  
S U R A B A Y A**

Disusun Oleh

**LAILATUL ISRO'IYYAH**

**H72216055**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL  
SURABAYA**

**2019**

## PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini,

Nama : LAILATUL ISRO'IYYAH

NIM : H72216055

Program Studi : Matematika

Angkatan : 2016

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul " GRUP ABELIAN YANG DIBANGUN OLEH *ENGEL SET* BERHINGGA ". Apabila suatu saat nanti terbukti saya melakukan tindakan plagiat, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian pernyataan keaslian ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 20 Desember 2019

Yang menyatakan,



LAILATUL ISRO'IYYAH  
NIM. H72216055

## LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

Skripsi oleh

Nama : LAILATUL ISRO'IYYAH

NIM : H72216055

Judul Skripsi : GRUP ABELIAN YANG DIBANGUN OLEH *ENGEL*  
*SET BERHINGGA*

telah diperiksa dan disetujui untuk diujikan.

Surabaya, 20 Desember 2019

Pembimbing



---

Wika Dianita Utami, M.Sc  
NIP. 199206102018012003

## PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI

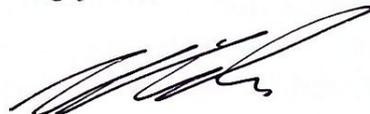
Skripsi oleh

Nama : LAILATUL ISRO'IYYAH  
NIM : H72216055  
Judul Skripsi : GRUP ABELIAN YANG DIBANGUN OLEH *ENGEL SET* BERHINGGA

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji  
pada tanggal 27 Desember 2019

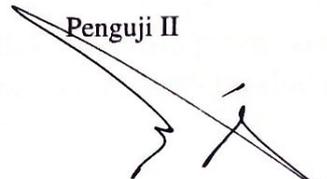
Mengesahkan,  
Tim Penguji

Penguji I



Wika Dianita Utami, M.Sc  
NIP. 199206102018012003

Penguji II



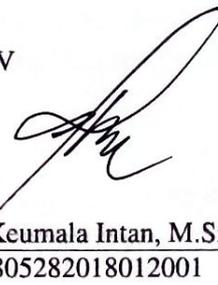
Dr. Moh. Hafiyusholeh, M.Si, M.Pmat  
NIP. 198002042014031001

Penguji III



Aris Fanani, M.Kom  
NIP. 198701272014031002

Penguji IV



Putrou Keumala Intan, M.Si  
NIP. 198805282018012001

Mengetahui,

Dekan Fakultas Sains dan Teknologi  
UIN Sunan Ampel Surabaya



Dr. Hj. Em. Burwath, M.Ag  
NIP. 196512211990022001



KEMENTERIAN AGAMA  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL SURABAYA  
PERPUSTAKAAN

Jl. Jend. A. Yani 117 Surabaya 60237 Telp. 031-8431972 Fax.031-8413300  
E-Mail: perpustakaan@uinsby.ac.id

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI  
KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika UIN Sunan Ampel Surabaya, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : Lailatul Isro'iyah  
NIM : H72216055  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika  
E-mail address : lailatulisrolyyah@gmail.com

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah :

Skripsi  Tesis  Desertasi  Lain-lain (.....)  
yang berjudul :

Grup Abelian yang Dibangun oleh Engel Set Berhingga

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif ini Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (database), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di Internet atau media lain secara **fulltext** untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Surabaya,

Penulis

( LAILATUL ISRO'IYAH )  
nama terang dan tanda tangan







2.2.3. $p$ -Grup . . . . .	20
2.2.4. Aksi Grup . . . . .	21
2.3. Grup Nilpoten . . . . .	23
2.3.1. Komutator . . . . .	23
2.3.2. <i>Center</i> Grup . . . . .	25
2.3.3. Grup Nilpoten . . . . .	28
2.4. Kajian Aljabar dalam Al-Qur'an . . . . .	33
<b>III HASIL DAN PEMBAHASAN . . . . .</b>	<b>35</b>
3.1. <i>Engel Set</i> . . . . .	35
3.2. Grup Abelian yang Dibangun oleh <i>Engel Set</i> . . . . .	39
<b>IV PENUTUP . . . . .</b>	<b>50</b>
4.1. Simpulan . . . . .	50
4.2. Saran . . . . .	51
<b>DAFTAR PUSTAKA . . . . .</b>	<b>52</b>







masing-masing elemen inversnya. Suatu grup Abelian dengan operasi penjumlahan memiliki komutator sama dengan 0, sedangkan grup Abelian dengan operasi perkalian memiliki komutator sama dengan 1. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa komutator dari grup Abelian adalah elemen identitas pada grup tersebut (Abdollahi, 2010).

Suatu komutator dapat digunakan untuk menentukan *center* dari suatu grup yang dinotasikan dengan  $Z(G)$ . *Center* grup adalah suatu himpunan yang anggotanya merupakan elemen-elemen grup  $G$  yang bersifat komutatif. Lebih lanjut, untuk  $m > 0$  *center* grup dapat didefinisikan dengan  $Z^m(G) = \{g \in G \mid [g, x] \in Z^{m-1}(G), \forall x \in G\}$ . Untuk suatu bilangan bulat positif  $m$ , jika  $Z^m(G) = G$  maka grup  $G$  disebut dengan grup nilpoten. Salah satu contoh dari grup nilpoten adalah grup berhingga (Patma dkk., n.d).

Berdasarkan sifat dari komutator suatu grup juga dapat ditentukan bilangan bulat non-negatif  $n$  pada suatu komutator sedemikian sehingga membentuk definisi dari *Engel set*. Misalkan himpunan tak kosong  $H$  subset dari  $G$ . Himpunan  $H$  dikatakan *Engel Set* jika untuk setiap  $x, y \in H$  terdapat bilangan bulat non-negatif  $n = n(x, y)$  sedemikian sehingga berlaku komutator  $[x, {}_n y] = 1$ . Berdasarkan definisi tersebut, elemen  $y \in H$  dikatakan sebagai *left engel element*, sedangkan jika berlaku komutator  $[y, {}_n x] = 1$  maka elemen  $y$  dikatakan sebagai *right engel element*. Lebih lanjut untuk suatu bilangan bulat positif  $m$ , elemen  $y$  disebut dengan *m-left engel element* jika berlaku komutator  $[x, {}_m y] = 1$ , begitu pula ketika komutator  $[y, {}_m x] = 1$  maka  $y$  disebut *m-right engel element* (Abdollahi, 2010).

Penelitian yang dilakukan oleh A. Abdollahi dengan judul *Groups Generated by a Finite Engel Set* menunjukkan bahwa suatu grup dapat dibangun oleh suatu *Engel Set*. Hasil penelitian tersebut menyatakan jika suatu grup yang dibangun oleh *Engel Set*  $S$  menjadi grup nilpoten maka  $S$  berhingga. Namun pada

































**Tabel 2.3 Tabel Cayley dari  $S_3$  terhadap operasi komposisi fungsi**

$\circ$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
$f_1$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
$f_2$	$f_2$	$f_6$	$f_4$	$f_5$	$f_3$	$f_1$
$f_3$	$f_3$	$f_5$	$f_1$	$f_6$	$f_2$	$f_4$
$f_4$	$f_4$	$f_3$	$f_2$	$f_1$	$f_6$	$f_5$
$f_5$	$f_5$	$f_4$	$f_6$	$f_2$	$f_1$	$f_3$
$f_6$	$f_6$	$f_1$	$f_5$	$f_3$	$f_4$	$f_2$

Berdasarkan perhitungan di atas  $(S_3, \circ)$  merupakan grup karena memenuhi aksioma grup, yaitu:

- i). Tertutup, karena setiap elemen  $a, b \in S_3$ , memenuhi  $a \circ b \in S_3$
- ii). Asosiatif, karena untuk setiap elemen  $a, b, c \in S_3$ , berlaku  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- iii). Eksistensi elemen identitas, yaitu terdapat  $f_1 = (1)$  sebagai elemen identitas sedemikian sehingga untuk setiap elemen  $a \in S_3$  berlaku  $a \circ f_1 = a \circ (1) = (1) \circ a = f_1 \circ a = a$
- iv). Eksistensi elemen invers, yaitu setiap elemen  $a \in S_3$  terdapat elemen invers  $a^{-1} \in S_3$  sehingga berlaku  $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e = (1) = f_1$ . Pada Tabel 2.3 di atas untuk setiap  $a \in S_3$  memiliki invers yaitu:



















































Dan untuk  $h = h^{xp}$  didapat  $1 = [y_{n-2}x, h^{xp}] = [y_{n-2}x, h]$ . Karena  $a \in A$  dan  $h \in H$  maka  $[y_{n-2}x, h] = [y_{n-2}x, ah]$ . Diketahui bahwa  $x = ah$  sehingga didapat  $[y_{n-2}x, x] = [y_{n-1}x]$ . Hal ini adalah kontradiksi sehingga terbukti  $[y, x, x, x] = [y, x] = 1$ .

■

**Lemma 3.2.4** Misalkan  $G$  adalah grup Abelian,  $A$  adalah subgrup normal minimal dari  $G$ , dan  $H$  adalah subgrup normal maksimal dari  $G$ . Misalkan  $x = ah$ ,  $y = bk$  dimana  $x, y \in G$ ,  $a, b \in A$  dan  $h, k \in H$ . Jika  $[x, y] = [h, k]$  maka  $[a, k^{-1}] = [b, h^{-1}]$ ,  $[a, h] = 1$  dan  $[b, k] = 1$  dengan  $a \neq 1$  dan  $b \neq 1$ .

**Bukti.** Diketahui  $x = ah$  dan  $y = bk$ ,  $x, y \in G$ ,  $a, b \in A$ ,  $h, k \in H$ .

$$\begin{aligned}
 [h, k] = [x, y] &= [ah, bk] \\
 &= (ah)^{-1}(bk)^{-1}(ah)(bk) && \text{(definisi komutator)} \\
 &= h^{-1}a^{-1}k^{-1}b^{-1}ahbk \\
 &= h^{-1}a^{-1}k^{-1}ab^{-1}hbk && \text{(sifat komutatif)} \\
 &= h^{-1}a^{-1}k^{-1}a(kk^{-1})(hh^{-1})b^{-1}hbk \\
 &= h^{-1}(a^{-1}k^{-1}ak)k^{-1}hh^{-1}b^{-1}hbk && \text{(sifat asosiatif)} \\
 &= h^{-1}(a^{-1}k^{-1}ak)(hh^{-1})k^{-1}h(kk^{-1})h^{-1}b^{-1}hbk \\
 &= h^{-1}(a^{-1}k^{-1}ak)h(h^{-1}k^{-1}hk)k^{-1}(h^{-1}b^{-1}hb)k && \text{(sifat asosiatif)} \\
 &= [a, k]^h[h, k][h, b]^k
 \end{aligned}$$

Karena  $1 = [x, y] = [h, k]$  maka didapat  $1 = [a, k]^h[h, k][h, b]^k = [a, k]^h[h, b]^{h^{-1}kh}$

- i). Akan ditunjukkan  $[a, k^{-1}] = [b, h^{-1}]$ . Diperhatikan  $1 = [a, k]^h[h, b]^{h^{-1}kh}$ , invers dari  $[h, b]^{h^{-1}kh}$  adalah  $[a, k]^h$ , oleh karenanya didapatkan















- Muhsin, M., 2014, *Grup Faktor dan Komutator dari Grup Dihedral- $2n$* , Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang.
- Newman M.F., Nickel W., 1993, Engel Elements in Groups, *Journal of Pure and Applied Mathematics*, 96:39-45.
- Patma, dan Susanto, H., (n.d), *Grup Hingga Nilpotent*, Universitas Negeri Malang, Malang.
- Purwagani, M., 2012, *Grup Non-Abelian yang Abelian Secara Grafis*, Universitas Airlangga, Surabaya.
- Robinson, D.J.S., 1995, *A Course in the Theory of Groups*, Second Edition, Springer Science and Business Media, USA.
- Sedghi, S., 1991, *Relation between Engel Groups and Nilpotent*, The Islamic Azad University, Iran.
- Setiawan, A., 2011, *Aljabar Abstrak*, (Teori Grup dan Teori Ring), Universitas Kristen Satya Wacana, Salatiga.
- Subiono, 2015, *Aljabar: Sebagai Suatu Pondasi Matematika*, Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya.
- Trybulec, Wojciech A., 2000, Commutator and Center of a Groups, *Journal of Formalized Mathematics*, vol 3.
- Wehrfritz, B.A.F., 1999, *Finite Groups, A Second Course on Group Theory*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., Singapore.