GRUP ABELIAN YANG DIBANGUN OLEH *ENGEL SET* BERHINGGA

SKRIPSI

UIN SUNAN AMPEL
SURABAYA

Disusun Oleh

LAILATUL ISRO'IYYAH

H72216055

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL

SURABAYA

2019

PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini,

Nama	:	LAILATUL ISRO'IYYAH
NIM	:	H72216055
Program Studi	:	Matematika
Angkatan	:	2016

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul " GRUP ABELIAN YANG DIBANGUN OLEH *ENGEL SET* BERHINGGA ". Apabila suatu saat nanti terbukti saya melakukan tindakan plagiat, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian pernyataan keaslian ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 20 Desember 2019

Yang menyatakan,

LAILATUL ISRO'IYYAH

NIM. H72216055

LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

Skripsi oleh

Nama	:	LAILATUL ISRO'IYYAH
NIM	:	H72216055
Judul Skripsi	:	GRUP ABELIAN YANG DIBANGUN OLEH *ENGEL SET* BERHINGGA

telah diperiksa dan disetujui untuk diujikan.

Surabaya, 20 Desember 2019

Pembimbing

Wika Dianita Utami, M.Sc

NIP. 199206102018012003

PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI

Skripsi oleh

Nama	:	LAILATUL ISRO'IYYAH
NIM	:	H72216055
Judul Skripsi	:	GRUP ABELIAN YANG DIBANGUN OLEH *ENGEL SET* BERHINGGA

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji
pada tanggal 27 Desember 2019

Mengesahkan,
Tim Penguji

Penguji I

Wika Dianita Utami, M.Sc
NIP. 199206102018012003

Penguji II

Dr. Moh. Hafiyusholeh, M.Si, M.Pmat
NIP. 198002042014031001

Penguji III

Aris Fanani, M.Kom
NIP. 198701272014031002

Penguji IV

Putroue Keumala Intan, M.Si
NIP. 198805282018012001

Mengetahui,
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Ampel Surabaya

Dr. Hj. Evi Fatimatur Rusydiyah...

NIP. 196512211990022001

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL SURABAYA
PERPUSTAKAAN
Jl. Jend. A. Yani 117 Surabaya 60237 Telp. 031-8431972 Fax.031-8413300
E-Mail: perpus@uinsby.ac.id

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika UIN Sunan Ampel Surabaya, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama	:	Lailatul Isro'iyyah
NIM	:	H72216055
Fakultas/Jurusan	:	Sains dan Teknologi / Matematika
E-mail address	:	lailatulisroiyyah@gmail.com

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah :
☑ Sekripsi ☐ Tesis ☐ Desertasi ☐ Lain-lain (……………………………)
yang berjudul :

Grup Abelian yang Dibangun oleh Engel Set Berhingga

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan Hak Bebas Royalti Non-Ekslusif ini Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (database), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di Internet atau media lain secara ***fulltext*** untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Surabaya,

Penulis

(LAILATUL ISRO'IYYAH)
nama terang dan tanda tangan

ABSTRAK

GRUP ABELIAN YANG DIBANGUN OLEH *ENGEL SET* BERHINGGA

Grup Abelian didefinisikan sebagai suatu grup G dengan operasi biner $*$ yang memenuhi sifat komutatif $x * y = y * x$ untuk setiap $x, y \in G$. Komutator dari $x, y \in G$ didefinisikan dengan $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Berdasarkan definisi komutator memotivasi munculnya definisi *center* grup, yaitu $Z_i(G) = \{g \in G \mid [g, x] \in Z^{i-1}(G), \forall x \in G\}$ untuk suatu i bilangan bulat positif. Suatu grup G dikatakan nilpoten jika $Z_i(G) = G$. Himpunan tak kosong S subset dari G dikatakan *Engel Set* jika untuk setiap $x, y \in S$ terdapat bilangan bulat non negatif $n = n(x, y)$ sedemikian sehingga komutator $[x,_n y] = 1$. Terdapat suatu sifat yang menyatakan jika $G = \langle S \rangle$ nilpoten maka S berhingga. Namun suatu grup yang dibangun oleh *Engel Set* berhingga tidak selalu nilpoten, yaitu jika suatu grup yang dibangun oleh *Engel Set* dengan tiga elemen atau lebih maka menjadi grup non-nilpoten. Pada penelitian ini akan dikaji sifat-sifat suatu grup yang dibangun oleh *Engel Set* berhingga menjadi grup nilpoten. Diperoleh sifat bahwa suatu grup Abelian yang dibangun oleh *Engel Set size 2* merupakan grup nilpoten.

Kata kunci: Grup Abelian, *Engel Set*, dan Grup Nilpoten.

ABSTRACT

ABELIAN GROUPS GENERATED BY A FINITE ENGEL SET

Abelian group defined as group G with a binary operation $*$ that satisfies commutative of $x * y = y * x$ for all $x, y \in G$. A commutator of $x, y \in G$ defined $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. By definition of commutator motivates the emergence of definition of center group, that is $Z_i(G) = \{g \in G \mid [g, x] \in Z^{i-1}(G), \forall x \in G\}$ for some positive integer i. In particular, G is said to be nilpotent if $Z_i(G) = G$. A non-empty subset S of G is called an Engel Set if for $x, y \in S$ there is a non-negative integer $n = n(x, y)$ such that the commutator $[x,_n y] = 1$. It is known that if $G = \langle S \rangle$ is nilpotent then S is finite. However, a group generated by a finite Engel set is not necessarily nilpotent, there exist a non-nilpotent group generated by an Engel Set with three or more elements. This research will find a conditions for a group generated by a finite Engel Set to be nilpotent. It is shown that any Abelian groups generated by an Engel Set of size two is nilpotent.

Keywords: Abelian Group, Engel Set, Nilpotent Group.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMBANG

$x \in A$	: x anggota A
$A \subseteq X$	: A himpunan bagian (*subset*) atau sama dengan X
$\mathbb{Z}$	: himpunan semua bilangan bulat
$\mathbb{Q}$	: himpunan semua bilangan rasional
$\mathbb{R}$	:himpunan semua bilangan real
$\mathbb{C}$	: himpunan semua bilangan kompleks
$H \leqslant G$	: H subgrup dari G
$N \trianglelefteq G$	: N subgrup normal di G
Q_8	: grup quaternion order 8
S_n	: grup simetri order n
$A \cong B$	: A isomorfik terhadap B
$C_G(A)$	: *centralizer* A di G
$Z(G)$	: *center* dari grup G
G_s	: stabilizer s di G
$\langle A \rangle$	: grup yang dibangun oleh himpunan A
$\langle x \rangle$	: grup yang dibangun oleh elemen x
$[x, y]$	: komutator dari x dan y
$\gamma_i(G)$	: *lower central series* dari G
$\blacksquare$	: akhir suatu bukti

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Suatu cabang matematika yang terdiri dari suatu himpunan objek dengan satu atau lebih operasi biner disebut dengan aljabar abstrak. Operasi biner $*$ adalah pemetaan pasangan berurutan (x, y) anggota dari suatu himpunan tak kosong F dengan tepat satu anggota $x * y \in F$. Dari definisi tersebut operasi biner dapat dibagi menjadi dua bagian yaitu operasi biner terdefinisikan dengan baik *(well defined)* jika untuk setiap x, y anggota dari F tepat memiliki satu nilai sebagai hasil dari $x * y$, dan tertutup terhadap operasi biner $*$ jika untuk setiap nilai $x * y$ masih merupakan anggota dari F (Setiawan, 2011).

Dalam aljabar abstrak dibahas beberapa teori, salah satunya adalah teori grup. Diberikan G himpunan tidak kosong yang dikenakan operasi biner $*$, G disebut dengan grup jika pada himpunan tersebut memenuhi beberapa aksioma, yaitu bersifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan memiliki elemen invers (Muhsin, 2014). Himpunan dari setiap bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang dikenakan operasi penjumlahan ($\mathbb{Z}$, +), dan himpunan setiap bilangan Real tanpa 0 $\mathbb{R}$-$\{0\}$ yang dikenakan operasi perkalian ($\mathbb{R} - \{0\}, \times$) merupakan grup. Lebih lanjut jika grup tersebut berlaku sifat komutatif $x * y = y * x$ untuk setiap $x, y \in G$ maka disebut dengan grup Abelian.

Pada suatu grup G, berdasarkan sifat komutatif maka dapat dibentuk suatu struktur yang dinamakan dengan komutator, yaitu operasi dua elemen dengan masing-masing elemen inversnya. Suatu grup Abelian dengan operasi penjumlahan memiliki komutator sama dengan 0, sedangkan grup Abelian dengan operasi perkalian memiliki komutator sama dengan 1. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa komutator dari grup Abelian adalah elemen identitas pada grup tersebut (Abdollahi, 2010).

Suatu komutator dapat digunakan untuk menentukan *center* dari suatu grup yang dinotasikan dengan $Z(G)$. *Center* grup adalah suatu himpunan yang anggotanya merupakan elemen-elemen grup G yang bersifat komutatif. Lebih lanjut, untuk $m > 0$ *center* grup dapat didefinisikan dengan $Z^m(G) = \{g \in G \mid [g, x] \in Z^{m-1}(G), \forall x \in G\}$. Untuk suatu bilagan bulat positif m, jika $Z^m(G) = G$ maka grup G disebut dengan grup nilpoten. Salah satu contoh dari grup nilpoten adalah grup berhingga (Patma dkk., n.d).

Berdasarkan sifat dari komutator suatu grup juga dapat ditentukan bilangan bulat non-negatif n pada suatu komutator sedemikian sehingga membentuk definisi dari *Engel set*. Misalkan himpunan tak kosong H subset dari G. Himpunan H dikatakan *Engel Set* jika untuk setiap $x, y \in H$ terdapat bilangan bulat non-negatif $n = n(x, y)$ sedemikian sehingga berlaku komutator $[x,_n y] = 1$. Berdasarkan definisi tersebut, elemen $y \in H$ dikatakan sebagai *left engel element*, sedangkan jika berlaku komutator $[y,_n x] = 1$ maka elemen y dikatakan sebagai *right engel element*. Lebih lanjut untuk suatu bilangan bulat positif m, elemen y disebut dengan *m-left engel element* jika berlaku komutator $[x,_m y] = 1$, begitu pula ketika komutator $[y,_m x] = 1$ maka y disebut *m- right engel element* (Abdollahi, 2010).

Penelitian yang dilakukan oleh A. Abdollahi dengan judul *Groups Generated by a Finite Engel Set* menunjukkan bahwa suatu grup dapat dibangun oleh suatu *Engel Set*. Hasil penelitian tersebut menyatakan jika suatu grup yang dibangun oleh *Engel Set* S menjadi grup nilpoten maka S berhingga. Namun pada penelitian yang dilakukan oleh Sedghi yang berjudul *Relation between Engel Groups and Nilpotent Groups* menuliskan bahwa suatu grup yang dibangun oleh *Engel Set* berhingga tidak selalu menjadi grup nilpoten. Sebagai contoh ketika suatu grup dibangun oleh *Engel Set* dengan tiga elemen atau lebih maka menjadi grup non-nilpoten (Abdollahi et al., 2011). Dari permasalahan tersebut maka peneliti tertarik untuk mengetahui syarat suatu grup Abelian yang dibangun oleh *Engel Set* berhingga menjadi grup nilpoten. Dengan demikian, pada penelitian ini akan dikaji sifat-sifat dari grup Abelian yang dibangun oleh *Engel Set* berhingga.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas maka rumusan masalah yang akan diselidiki pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana sifat-sifat dari *Engel Set*?
2. Bagaimana sifat-sifat suatu grup Abelian yang dibangun oleh *Engel Set* berhingga menjadi grup nilpoten?

1.3. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah

1. Mempelajari tentang sifat-sifat dari *Engel Set*.
2. Menyelidiki sifat-sifat grup Abelian yang dibangun oleh *Engel Set* berhingga menjadi grup nilpoten.

1.4. Manfaat Penelitian

Secara teoritis, diharapkan penelitian ini dapat:

1. Memberikan pengetahuan tentang *Engel Set* dan sifat-sifat *Engel Set*.
2. Memberikan sifat-sifat grup Abelian yang dibangun secara berhingga oleh *Engel Set* menjadi grup nilpoten.
3. Memberikan referensi tambahan dan pengembangan untuk penelitian selanjutnya.

1.5. Sistematika Penulisan

Bagian ini berisi tentang paparan garis-garis besar isi tiap bab.

BAB I: PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II: DASAR TEORI

Bab ini menjelaskan tentang beberapa teori yang digunakan dalam mendukung penyelesaian penelitian diantaranya teori tentang grup, grup berhingga, komutator, *center* grup, dan grup nilpoten.

BAB III: HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan pembuktian teorema-teorema tentang *Engel Set* dan grup Abelian yang dibangun oleh *Engel Set* berhingga menjadi grup nilpoten.

BAB IV: KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini berisi kesimpulan hasil penelitian dan disertai saran-saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Topik yang akan dibahas dalam proposal ini adalah syarat suatu grup Abelian yang dibangun secara berhingga oleh *Engel Set* menjadi grup nilpoten. Oleh karena itu perlu adanya pembahasan terlebih dahulu tentang grup, grup berhingga, *Engel Set*, dan grup nilpoten.

2.1. Grup

Berikut ini diberikan beberapa definisi tentang grup, grup Abelian, subgrup dan subgrup normal.

2.1.1. Grup

Definisi 2.1.1 *(Fraleigh, 2003) Misalkan F adalah suatu himpunan tidak kosong. Suatu operasi biner * yang dikenakan pada F merupakan pemetaan dari* $F \times F$ *ke dalam F yaitu*

$$\begin{aligned} * : F \times F &\to F \\ (x, y) &\mapsto x * y; \forall x, y \in F \end{aligned}$$

Contoh 2.1.2 Diberikan himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Operasi $-$ pada $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner.

$$\begin{aligned} - : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ (x, y) &\mapsto x - y, \forall x, y \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Dari definisi tersebut operasi biner dapat dibagi menjadi dua bagian yaitu operasi biner *(well defined)* yaitu jika untuk setiap elemen x, y anggota dari F memiliki tepat satu nilai $x * y$, dan jika untuk setiap nilai $x * y$ masih merupakan anggota dari F maka F disebut tertutup terhadap operasi biner * (Setiawan, 2011).

Definisi 2.1.3 *(Fraleigh, 2003) Grup adalah suatu himpunan tidak kosong G yang tertutup terhadap operasi biner *, dinotasikan* $(G, *)$ *dan memenuhi beberapa aksioma berikut:*

(i). Asosiatif, yaitu setiap elemen $x, y, z \in G$ *memenuhi* $(x * y) * z = x * (y * z)$

(ii). Mempunyai elemen identitas, yaitu terdapat $e \in G$ *sebagai elemen identitas untuk setiap* $x \in G$ *sedemikian sehingga berlaku* $x * e = e * x = x$

(iii). Mempunyai elemen invers, yaitu untuk setiap $x \in G$ *terdapat* $x^{-1} \in G$ *sebagai elemen invers sedemikian sehingga berlaku* $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.

Contoh 2.1.4 Berikut adalah beberapa contoh dari grup.

1. Himpunan setiap bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +)$, himpunan setiap bilangan rasional terhadap operasi penjumlahan $(\mathbb{Q}, +)$, himpunan setiap bilangan riil terhadap operasi penjumlahan $(\mathbb{R}, +)$, dan himpunan setiap bilangan kompleks terhadap operasi penjumlahan $(\mathbb{C}, +)$.

2. Himpunan bilangan riil $\mathbb{R} - \{0\}$ dengan operasi perkalian bilangan merupakan grup.

3. Himpunan setiap bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang dikenakan operasi biner perkalian bilangan bukan merupakan grup, karena untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ tidak terdapat $x^{-1} \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$.

Definisi 2.1.5 *(Fraleigh, 2003) Misalkan himpunan berhingga G dan terhadap suatu operasi biner tertentu $(G, *)$ merupakan grup. Tabel Cayley dari $(G, *)$ adalah tabel dengan baris dan kolomnya sesuai dengan elemen-elemen di G dan entri baris dari elemen a dan kolom dari elemen b adalah hasil dari operasi $a * b$.*

Contoh 2.1.6 Himpunan $\mathbb{Z}_6$ terhadap operasi penjumlahan modulo merupakan grup.

$\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$

Selanjutnya digunakan Tabel Cayley untuk mengetahui hasil operasi dari masing-masing elemen pada $\mathbb{Z}_6$ yang ditunjukkan seperti tabel berikut:

Tabel 2.1 Tabel Cayley $\mathbb{Z}_6$ terhadap operasi penjumlahan modulo

$+_6$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$

(i). $\mathbb{Z}_6$ tertutup terhadap operasi penjumlahan modulo 6. Berdasarkan Tabel 2.1, hasil dari operasi penjumlahan modulo 6 adalah elemen-elemen pada $\mathbb{Z}_6$ sehingga $\mathbb{Z}_6$ bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan modulo 6.

(ii). Berdasarkan hasil pada Tabel 2.1 untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$ berlaku sifat asosiatif, yaitu $(a +_6 b) +_6 c = a +_6 (b +_6 c)$

(iii). Berdasarkan Tabel 2.1, terdapat $e = \overline{0} \in \mathbb{Z}_6$ sebagai elemen identitas untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_6$ sedemikian sehingga berlaku $a = e +_6 a = a +_6 e$.

(iv). Untuk setiap elemen $a \in \mathbb{Z}_6$ terdapat $a^{-1} \in \mathbb{Z}_6$ sebagai elemen invers sehingga berlaku $e = a^{-1} +_6 a = a +_6 a^{-1}$. Berdasarkan Tabel 2.1 dapat diketahui bahwa:

$$(\overline{0})^{-1} = \overline{0}$$

$$(\overline{1})^{-1} = \overline{5}$$

$$(\overline{2})^{-1} = \overline{4}$$

$$(\overline{3})^{-1} = \overline{3}$$

$$(\overline{4})^{-1} = \overline{2}$$

$$(\overline{5})^{-1} = \overline{1}$$

Teorema 2.1.7 *(Fraleigh, 2003) Misalkan $(G, *)$ adalah grup. Diperoleh*

i). Terdapat tepat satu elemen di G yang merupakan elemen identitas.

ii). Setiap elemen $a \in G$ memiliki tepat satu elemen $a^{-1} \in G$ yang merupakan elemen invers dari a.

Bukti.

i). Misalkan G dengan operasi * adalah grup, maka terdapat $e \in G$ sebagai elemen identitas. Andaikan terdapat elemen identitas lain, yaitu $f \in G$, akan ditunjukkan bahwa $e = f$. Karena e adalah elemen identitas, maka $e * f = f$, dan jika f adalah elemen identitas maka $f * e = e$. Dengan demikian, $f = e * f = f * e = e$, sehingga terbukti bahwa terdapat tepat satu elemen di G yang merupakan elemen identitas.

ii). Misalkan G dengan operasi * adalah grup. Diberikan $a \in G$ maka terdapat $b \in G$ yang merupakan elemen invers dari a sehingga $a * b = b * a = e$. Andaikan terdapat $c \in G$ yang juga merupakan elemen invers dari a yang memenuhi $a * c = c * a = e$ maka akan ditunjukkan bahwa $b = c$. Diketahui bahwa $b*a = e$, maka $(b*a)*c = e*c = c$, dan diketahui pula bahwa $c*a = e$, sehingga $b * (c * a) = b * e = b$. Dengan demikian $(b * a) * c = b * (a * c)$ sehingga $b = c$.

■

Teorema 2.1.8 *(Fraleigh, 2003) Diberikan suatu grup $(G, *)$. Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku hukum kanselasi, yaitu:*

i). Hukum kanselasi kiri, yaitu jika ac = ab, maka c = b

ii). Hukum kanselasi kanan, yaitu jika ba = ca, maka b = c

Bukti.

i). Diketahui bahwa G adalah grup, maka terdapat elemen identitas $e \in G$ dan $a^{-1} \in G$, maka $a^{-1}(ac) = a^{1}(ab)$, dengan sifat asosiatif didapat $(a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c$, maka $(e)b = (e)c$, sehingga $b = c$.

ii). Diketahui bahwa G adalah grup, maka terdapat elemen identitas $e \in G$ dan $a^{-1} \in G$. Dengan mengalikan kedua ruas dengan a^{-1} disebelah kiri, dan dengan memanfaatkan sifat asosiatif maka diperoleh $b(e) = c(e)$, sehingga $b = c$.

■

2.1.2. Grup Abelian

Definisi 2.1.9 *(Fraleigh, 2003) Sebuah grup G disebut dengan grup Abelian jika berlaku sifat komutatif, yaitu b*a=a*b , untuk setiap $a, b \in G$ sehingga grup Abelian juga merupakan grup komutatif.*

Contoh 2.1.10 Beberapa contoh dari grup Abelian diantaranya:

1. Himpunan setiap bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +)$, himpunan setiap bilangan rasional terhadap operasi penjumlahan $(\mathbb{Q}, +)$, himpunan setiap bilangan riil terhadap operasi penjumlahan $(\mathbb{R}, +)$, dan himpunan setiap bilangan kompleks terhadap operasi penjumlahan $(\mathbb{C}, +)$.

2. Himpunan bilangan riil $\mathbb{R} - \{0\}$ dengan operasi perkalian bilangan adalah grup Abelian

3. Diberikan himpunan tak kosong $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}$. Himpunan G terhadap operasi perkalian matriks, dinotasikan $(G, \times)$ bukan merupakan grup Abelian, karena untuk sebarang $A, B \in G$, dengan:

$A = \left\{ \begin{bmatrix} o & p \\ q & r \end{bmatrix} \middle| o, p, q, r \in \mathbb{R}, or - pq \neq 0 \right\}$ dan

$B = \left\{ \begin{bmatrix} s & u \\ t & v \end{bmatrix} \middle| s, t, u, v \in \mathbb{R}, sv - ut \neq 0 \right\}$ maka $A \times B \neq B \times A$.

Diperhatikan

$$A \times B = \begin{bmatrix} o & q \\ p & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & u \\ t & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} os + qt & ou + qv \\ ps + rt & pu + rv \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} s & u \\ t & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} o & q \\ p & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} so + uq & sp + ur \\ to + vq & tp + rv \end{bmatrix}$$

Karena $A \times B \neq B \times A$ sehingga G tidak berlaku sifat komutatif.

Sebagai contoh, ambil sebarang $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \in G$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \in G$.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 20 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 34 & 12 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas, $A \times B \neq B \times A$. Dengan demikian, himpunan G terhadap operasi perkalian matriks, atau $(G, \times)$ merupakan grup non-Abelian.

Teorema 2.1.11 *(Fraleigh, 2003) Diberikan grup Abelian* $(G, *)$. *Untuk setiap* $a, b \in G, a^2b^2 = (ab)^2$.

Bukti. Diketahui $(G, *)$ adalah grup Abelian, maka berlaku sifat komutatif $ab = ba$, untuk setiap $a, b \in G$. Akan ditunjukkan bahwa $(ab)^2 = a^2b^2$

$$\begin{aligned} ab &= ba \\ ab(ab) &= ba(ab) && \text{Kedua ruas dikalikan dengan } ab \\ (ab)^2 &= ba^2b \\ (ab)^2 &= a^2bb && \text{Berlaku sifat komutatif} \\ (ab)^2 &= a^2b^2 \end{aligned}$$

■

2.1.3. Subgrup

Definisi 2.1.12 *(Fraleigh, 2003) Misalkan* $H \neq \emptyset$ *dan* $H \subseteq G$. *Himpunan H disebut subgrup dari G jika H membentuk grup dibawah operasi yang sama dengan G,* *dinotasikan dengan* $H \leq G$.

Dengan demikian untuk membuktikan bahwa H subgrup dari G maka ditunjukkan bahwa:

1. H merupakan himpunan tak kosong
2. H merupakan bagian dari G
3. H tertutup terhadap operasi di G
4. H memiliki elemen invers.

Contoh 2.1.13 Diberikan grup $(\mathbb{Z}, +)$ dan himpunan $n\mathbb{Z} = \{x \mid x = nm, \forall m \in Z\}$ dengan $n \in \mathbb{Z}$. Himpunan $(n\mathbb{Z}, +)$ adalah subgrup dari $(\mathbb{Z}, +)$.

i). $n\mathbb{Z}$ bukan merupakan himpunan kosong karena terdapat $0 \in Z$

ii). $n\mathbb{Z}$ merupakan subset dari $\mathbb{Z}$ karena $nm \in n\mathbb{Z}$ dengan $n, m \in \mathbb{Z}$ maka $nm \in \mathbb{Z}$

iii). Ambil sebarang $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, dengan $x_1 = nm_1, x_2 = nm_2$. Akan ditunjukkan $x_1 + x_2 \in n\mathbb{Z}$. Diperhatikan
$x_1+x_2 = nm_1+nm_2 = n(m_1+m_2)$, karena $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ maka $(m_1+m_2) \in \mathbb{Z}$ sehingga $n(m_1 + m_2) \in n\mathbb{Z}$
Dengaan demikian $(n\mathbb{Z}, +)$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.

iv). Akan ditunjukkan untuk setiap $x \in n\mathbb{Z}$ memiliki elemen invers $x^{-1} \in n\mathbb{Z}$ sedemikian hingga berlaku $x + x^{-1} = e$. Dipunyai:

$$x + x^{-1} = e = 0$$
$$nm + (nm)^{-1} = 0$$
$$(nm)^{-1} = -(nm)$$

2.1.4. Subgrup Normal

Definisi 2.1.14 *(Dummit et.al., 2004) Misalkan G adalah grup dan N adalah subgrup dari G. Subgrup N disebut subgrup normal dari G, dinotasikan $H \triangleleft G$ jika untuk setiap $g \in G$ berlaku $gN = Ng$ dengan $gN = \{gn \mid g \in G, n \in N\}$ adalah koset kiri dari H dan $Ng = \{ng \mid g \in G, n \in N\}$ adalah koset kanan dari H.*

Contoh 2.1.15 Berdasarkan pada Contoh 2.1.6 dapat diketahui bahwa $\mathbb{Z}_6$ terhadap operasi penjumlahan modulo merupakan grup. Diberikan $N = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ subgrup dari $\mathbb{Z}_6$. Untuk menunjukkan bahwa himpunan N merupakan subgrup normal dari $\mathbb{Z}_6$, maka dapat ditunjukkan bahwa $gN = Ng$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_6$.

$gN = \{gn \mid g \in \mathbb{Z}_6, n \in N\}$

$\overline{0}N = \overline{0} +_6 \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$

$\overline{1}N = \overline{1} +_6 \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\}$

$\overline{2}N = \overline{2} +_6 \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{0}\}$

$\overline{3}N = \overline{3} +_6 \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} = \{\overline{3}, \overline{5}, \overline{1}\}$

$\overline{4}N = \overline{4} +_6 \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} = \{\overline{4}, \overline{0}, \overline{2}\}$

$\overline{5}N = \overline{5} +_6 \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} = \{\overline{5}, \overline{1}, \overline{3}\}$

$Ng = \{ng \mid g \in \mathbb{Z}_6, n \in N\}$

$N\overline{0} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} +_6 \overline{0} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$

$N\overline{1} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} +_6 \overline{1} = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\}$

$N\overline{2} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} +_6 \overline{2} = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{0}\}$

$N\overline{3} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} +_6 \overline{3} = \{\overline{3}, \overline{5}, \overline{1}\}$

$N\overline{4} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} +_6 \overline{4} = \{\overline{4}, \overline{0}, \overline{2}\}$

$N\overline{5} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} +_6 \overline{5} = \{\overline{5}, \overline{1}, \overline{3}\}$

Dari hasil di atas didapatkan bahwa $gN = Ng, \forall g \in \mathbb{Z}_6$ maka $N = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$

merupakan subgrup normal dari $(\mathbb{Z}_6, +_6)$

2.1.5. Grup yang Dibangun oleh Himpunan

Definisi 2.1.16 *(Dummit et.al., 2004) Diberikan grup G dan elemen $a \in G$. Grup G disebut grup siklik jika G dibangun oleh satu elemen, yaitu $a \in G$ sedemikian sehingga $G = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.*

Dalam suatu notasi penjumlahan dapat ditulis $G = \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Berdasarkan definisi tersebut grup siklik dapat dinotasikan $G = \langle n \rangle$ dan n disebut *generator* dari G.

Contoh 2.1.17 Misalkan $\mathbb{Z}_6$ adalah grup. Generator dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $\langle 1 \rangle$ dan $\langle 5 \rangle$.
Untuk a =1,

$$1^0 = 0$$

$$1^1 = 1$$

$$1^2 = 2$$

$$1^3 = 3$$

$$1^4 = 4$$

$$1^5 = 5$$

Sehingga $\mathbb{Z}_6 = \{1^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \langle 1 \rangle$.

Untuk a =5,

$$
\begin{aligned}
5^0 &= 0 \\
5^5 &= 1 \\
5^4 &= 2 \\
5^3 &= 3 \\
5^2 &= 4 \\
5^1 &= 5
\end{aligned}
$$

Sehingga $\mathbb{Z}_6 = \{5^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \langle 5 \rangle$.

Dengan demikian $\mathbb{Z}_6$ merupakan grup siklik.

Definisi 2.1.18 *(Fraleigh, 2003) Misalkan G adalah grup dan A adalah himpunan bagian dari G. Subgrup terkecil H yang memuat A disebut subgrup dari G yang dibangun oleh A, dinotasikan $H = \langle A \rangle$. Jika $H = G$ maka $\langle A \rangle = G$ sehingga G disebut grup yang dibagun oleh suatu himpunan A.*

Contoh 2.1.19 Berdasarkan Contoh 2.1.17 diketahui bahwa grup $\mathbb{Z}_6$ dibangun oleh $\langle 1 \rangle$ dan $\langle 5 \rangle$. Grup $\mathbb{Z}_6$ juga dapat dibangun oleh himpunan $A = \{2, 3\}$, karena subgrup terkecil yang memuat A adalah $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \mathbb{Z}_6$. Himpunan-himpunan bagian yang dapat membangun $\mathbb{Z}_6$ diantaranya $\{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 5\}$. Grup $\mathbb{Z}_6$ tidak dapat dibangun oleh himpunan $A = \{2, 4\}$ karena subgrup terkecil yang memuat A adalah $\{0, 2, 4\} \neq \mathbb{Z}_6$.

2.2. Grup Berhingga

2.2.1. Order

Suatu grup G dikatakan grup berhingga jika memiliki order yang berhingga. Order dari grup G adalah banyaknya elemen di G dan dinotasikan $|G|$. Misalkan $a \in G$, order dari elemen a dinotasikan $|a|$ adalah suatu bilangan positif terkecil n sedemikian sehingga $a^n = e$ dimana e merupakan elemen identitas pada grup G dan a^n adalah perkalian a sebanyak n kali (Fraleigh, 2003). Grup quaternion dan grup simetri merupakan contoh dari grup berhingga.

Contoh 2.2.1 Diberikan suatu himpunan $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ yang merepresentasikan delapan matriks dengan $i = \sqrt{-1}$.

Hasil dari operasi perkalian pada Q_8 ditunjukkan seperti pada Tabel Cayley di bawah ini:

Tabel 2.2 Tabel Cayley Q_8 terhadap operasi perkalian

$\times$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	j	$-j$
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Himpunan Q_8 terhadap operasi perkalian dinotasikan $(Q_8, \times)$ merupakan grup karena memenuhi aksioma grup sebagai berikut:

i). Himpunan Q_8 bersifat tertutup terhadap operasi perkalian, karena untuk setiap $a, b \in Q_8$, berlaku $ab \in Q_8$.

ii). Himpunan Q_8 bersifat asosiatif, karena untuk setiap $a, b, c \in Q_8$ berlaku $a(bc) = (ab)c$.

iii). Akan ditunjukkan bahwa Q_8 memiliki elemen identitas, yaitu terdapat $e = 1 \in Q_8$ untuk setiap $a \in Q_8$ sedemikian sehingga berlaku $a(1) = (1)a = a$.

iv). Akan ditunjukkan bahwa Q_8 memiliki elemen invers, yaitu untuk setiap elemen $a \in Q_8$ terdapat elemen invers $a^{-1} \in Q_8$ sehingga belaku $1 = (a)^{-1}a = a(a)^{-1}$. Pada Tabel 2.2, untuk setiap $a \in Q_8$ memiliki invers yaitu:

$$(1)^{-1} = 1$$
$$(-1)^{-1} = -1$$
$$(i)^{-1} = -i$$
$$(-i)^{-1} = i$$
$$(j)^{-1} = -j$$
$$(-j)^{-1} = j$$
$$(k)^{-1} = -k$$
$$(-k)^{-1} = k$$

Himpunan Q_8 bukan merupakan grup Abelian order 8, karena tidak memenuhi sifat komutatif $ab = ba$ untuk $a, b \in Q_8$. Misalkan $a = i$ dan $b = j, ab = ij \neq ji = ba$.

Contoh 2.2.2 Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3\}$. Sebuah permutasi dari A merupakan fungsi bijektif dari A ke A.

$$\circ : A \rightarrow A$$

Grup Simetri S_3 adalah himpunan semua permutasi dari A terhadap operasi komposisi fungsi. Grup simetri S_3 mempunyai elemen sebanyak n!= 3!= 6.

Untuk menuliskan elemen σ dari S_3 dapat digunakan notasi *cycle*, yaitu serangkaian bilangan bulat yang merepresentasikan hasil permutasi dari elemen S_3. *Cycle* dari $\sigma = (a_1a_2a_3)$ adalah permutasi dari a_1 ke $a_{i+1}, 1 \leqslant i \leqslant n-1$ dan dari a_n ke a_1. Misalkan $\sigma = (123)$ didefinisikan sebagai pemetaan 1 ke 2 atau $\sigma(1) = 2$, pemetaan 2 ke 3 atau $\sigma(2) = 3$ dan pemetaan 3 ke 1 atau $\sigma(3) = 1$. Dengan demikian didapatkan elemen-elemen dari S_3 yaitu:

$f_1 = (1)$

$f_2 = (1\ 2\ 3)$

$f_3 = (1)(2\ 3)$

$f_4 = (1\ 2)(3)$

$f_5 = (1\ 3)(2)$

$f_6 = (1\ 3\ 2)$

Hasil operasi komposisi fungsi dari masing-masing elemen di S_3 sebagaimana ditunjukkan pada tabel Cayley berikut:

Tabel 2.3 Tabel Cayley dari S_3 terhadap operasi komposisi fungsi

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_6	f_4	f_5	f_3	f_1
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1	f_6	f_5
f_5	f_5	f_4	f_6	f_2	f_1	f_3
f_6	f_6	f_1	f_5	f_3	f_4	f_2

Berdasarkan perhitungan di atas $(S_3, \circ)$ merupakan grup karena memenuhi aksioma grup, yaitu:

i). Tertutup, karena setiap elemen $a, b \in S_3$, memenuhi $a \circ b \in S_3$

ii). Asosiatif, karena untuk setiap elemen $a, b, c \in S_3$, berlaku $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

iii). Eksistensi elemen identitas, yaitu terdapat $f_1 = (1)$ sebagai elemen identitas sedemikian sehingga untuk setiap elemen $a \in S_3$ berlaku $a \circ f_1 = a \circ (1) = (1) \circ a = f_1 \circ a = a$

iv). Eksistensi elemen invers, yaitu setiap elemen $a \in S_3$ terdapat elemen invers $a^{-1} \in S_3$ sehingga berlaku $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e = (1) = f_1$. Pada Tabel 2.3 di atas untuk setiap $a \in S_3$ memiliki invers yaitu:

$$(f_1)^{-1} = f_1$$

$$(f_2)^{-1} = f_6$$

$$(f_3)^{-1} = f_3$$

$$(f_4)^{-1} = f_4$$

$$(f_5)^{-1} = f_5$$

$$(f_6)^{-1} = f_2$$

2.2.2. Teorema Lagrange

Teorema 2.2.3 *(Fraleigh, 2003) Misalkan G adalah grup berhingga dan H adalah subgrup dari G. Order dari subgrup H membagi order dari grup G, atau dinotasikan* $|H| \mid |G|$

Bukti. Misalkan $n = |G|$ dan $m = |H|$. H adalah subgrup, maka jumlah elemen pada setiap koset di H sama dengan jumlah elemen di H sedemikian sehingga $|aH| = |Ha| = m$. Himpunan koset kiri di H membentuk suatu partisi dari G yaitu:

$$|a_1h| + |a_2h| + \ldots + |a_rh| = n$$

$$\underbrace{m + m + \ldots + m}_{r} = n$$

$$rm = n$$

Maka terbukti bahwa m membagi n. ■

2.2.3. $p-$Grup

Definisi 2.2.4 *(Fraleigh, 2003) Suatu grup G adalah* $p-$*grup jika G mempunyai order sebesar* p^n *untuk* p *adalah bilangan prima dan* $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 2.2.5 Berdasarkan Contoh 2.2.1 diketahui bahwa Q_8 terhadap operasi perkalian adalah grup. Order dari Q_8 adalah $|Q_8| = 8 = 2^3$. Karena order dari Q_8 berbentuk p^n dengan p= 2 adalah bilangan prima maka Q_8 dapat dikatakan 2-grup. Adapun setiap elemen dari Q_8 juga mempunyai order yang berbentuk p^n dengan bilangan prima p yang sama yaitu 2.

$$|1| = 1 = 2^0$$

$$|-1| = 1 = 2^0$$

$$|i| = 4 = 2^2$$

$$|-i| = 4 = 2^2$$

$$|j| = 4 = 2^2$$

$$|-j| = 4 = 2^2$$

$$|k| = 4 = 2^2$$

$$|-k| = 4 = 2^2$$

Definisi 2.2.6 *(Fraleigh, 2003) Suatu subgrup dari grup G merupakan $p-$subgrup dari G jika subgrup tersebut merupakan $p-$grup.*

Contoh 2.2.7 Diberikan grup Q_8 dan $H = \{1, -1, i, -i\}$ adalah subgrup dari Q_8. H mempunyai order p^n yaitu $|H|$ = 4 = 2^2 dengan p = 2 adalah bilangan prima, sehingga H dapat dikatakan $2-$subgrup dari G karena H merupakan $2-$grup. Dapat dilihat pada Contoh 2.2.5 bahwa order dari setiap elemen di H juga mempunyai pangkat bilangan prima yang sama yaitu p = 2.

2.2.4. Aksi Grup

Definisi 2.2.8 *(Dummit et.al., 2004) Misalkan G adalah grup dan A adalah himpunan tak kosong subset dari G. Grup G beraksi terhadap A adalah suatu* *pemetaan $G \times A$ ke A yang ditulis dengan $g.a$ untuk setiap $g \in G, a \in A$ dan memenuhi*

1. $g_1(g_2a) = (g_1g_2)a$ *untuk setiap* $g_1, g_2 \in G, a \in A$

2. $1a = a$

Adapun G beraksi terhadap A secara konjugasi yaitu pemetaan $G \times A \longrightarrow A$ dengan $ga = gag^{-1}$ untuk setiap $g \in G, a \in A$ yang memenuhi kedua aksioma pada Definisi 2.2.8 di atas. Diperhatikan

$$\begin{aligned} g_1(g_2a) &= g_1(g_2ag_2^{-1}) \\ &= g_1(g_2ag_2^{-1})g_1^{-1} \\ &= (g_1g_2)a(g_2^{-1}g_1^{-1}) \\ &= (g_1g_2)a(g_1g_2)^{-1} \\ &= (g_1g_2)a \end{aligned}$$

dan $1a = 1a1^{-1} = a$.

Definisi 2.2.9 *(Dummit et.al., 2004) Misalkan G adalah grup dan A adalah himpunan tak kosong subset dari G. Grup G beraksi terhadap A. Untuk setiap $a \in A$, stabilizer dari a di G didefinisikan dengan $G_a = \{g \in G \mid ga = a, \forall a \in A\}$*

Adapun jika G beraksi terhadap A secara konjugasi maka *stabilizer* dari a adalah $G_a = \{g \in G \mid gag^{-1} = a, \forall a \in A\}$. Elemen $a \in A$ disebut *fixed point* dan aksi grup G terhadap A disebut *fixed point free* ketika *stabilizer* dari a adalah trivial.

2.3. Grup Nilpoten

Sebelum membahas tentang grup nilpoten, terlebih dahulu akan diberikan definisi tentang komutator suatu grup dan *center* grup.

2.3.1. Komutator

Definisi 2.3.1 *(Dummit et.al., 2004) Misalkan G adalah grup dan* $x, y \in G$. *Komutator dari pasangan terurut (x,y) adalah* $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. *Didefinisikan* $G' = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle$ *adalah subgrup G yang dibangun oleh elemen komutator dari G, dan disebut dengan komutator subgrup G.*

Adapun notasi x^y adalah konjugasi dari x oleh y, dan didefinisikan sebagai $y^{-1}xy$. Berikut akan diberikan beberapa sifat-sifat yang disebut dengan identitas komutator.

1. $[x, y]^{-1} = [y, x]$
2. $[x, y]^c = [x^c, y^c]$
3. $[xz, y] = [x, y]^z[z, y]$
4. $[x, zy] = [x, y][x, z]^y$
5. $[x^{-1}, y] = [y, x]^{x^{-1}}$
6. $[x, y^{-1}] = [y, x]^{y^{-1}}$
7. $[x, y, z] = [[x, y], z]$
8. $[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1$. Hal ini disebut *Hall-Witt Identity*

Teorema 2.3.2 *(Fraleigh, 2003) Komutator dari (x,y) adalah elemen identitas jika dan hanya jika xy= yx.*

Bukti.

$\Rightarrow$ Jika komutator dari (x, y) adalah elemen identitas maka $xy = yx$. Dipunyai

$$\begin{aligned}
[x, y] &= e \\
xyx^{-1}y^{-1} &= e \\
(xyx^{-1}y^{-1})yx &= e(yx) && \text{(Kedua ruas dikalikan dengan } (yx)) \\
xy(x^{-1}y^{-1}yx) &= e(yx) && \text{(Berlaku sifat asosiatif)} \\
xy(x^{-1}xy^{-1}y) &= e(yx) && \text{(Berlaku sifat komutatif)} \\
xy(e) &= e(yx) \\
xy &= yx
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Jika $xy = yx$ maka komutator dari (x, y) adalah elemen identitas. Dipunyai

$$\begin{aligned}
xy &= yx \\
xy(x^{-1}) &= yx(x^{-1}) && \text{(Kedua ruas dikalikan dengan } (x^{-1})) \\
xy(x^{-1}) &= y(xx^{-1}) && \text{(Berlaku sifat asosiatif)} \\
xyx^{-1} &= y(e) \\
xyx^{-1}(y^{-1}) &= y(y^{-1}) && \text{(Kedua ruas dikalikan dengan } (y^{-1})) \\
xyx^{-1}y^{-1} &= e \\
[x, y] &= e
\end{aligned}$$

■

Contoh 2.3.3 Misalkan $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ terhadap operasi penjumlahan modulo adalah grup Abelian. Ambil $x = \overline{2}$ dan $y = \overline{5}$, komutator dari

$[\overline{2}, \overline{5}] = \overline{2} + \overline{5} + \overline{4} + \overline{1} = 0$

Contoh 2.3.4 Diberikan grup Quaternion Q_8. Komutator subgrup dari Q_8 adalah $\{1, -1\}$ karena untuk setiap $x, y \in Q_8$ komutator dari x, y adalah 1 dan -1.

2.3.2. *Center* Grup

Definisi 2.3.5 *(Dummit et.al., 2004) Misalkan G adalah grup dan A adalah subset tak kosong dari G. Didefinisikan $C_G(A) = \{g \in G \mid gag^{-1} = a, \forall a \in A\}$ adalah centralizer dari A di G. Karena $gag^{-1} = a$ jika dan hanya jika $ga = ag$, maka $C_G(A)$ adalah himpunan dari setiap elemen G yang komutatif dengan setiap elemen di A*

$C_G(A)$ adalah subgrup dari G, karena memenuhi aksioma subgrup berikut

1. $C_G(A) \neq \emptyset$ yaitu terdapat $1 \in C_G(A)$ dimana 1 adalah identitas di G yang memenuhi $1a = a1$ untuk setiap $a \in G$ dan $a \in A$.

2. $C_G(A) \subseteq G$ karena $g \in C_G(A), g \in G$.

3. $C_G(A)$ bersifat tertutup, karena untuk setiap $x, y \in C_G(A)$, dengan $xax^{-1} = a$ dan $yay^{-1} = a$ untuk setiap $a \in A$. Diperhatikan

$$\begin{aligned}(xy)a(xy)^{-1} &= (xy)a(y^{-1}x^{-1}) \\ &= x(yay^{-1})x^{-1} \\ &= xax^{-1} \\ &= a\end{aligned}$$

4. Terdapat tepat satu elemen invers, yaitu untuk setiap $x \in C_G(A)$ dan $a \in$

$A, xax^{-1} = a = x^{-1}ax$, terdapat $x^{-1} \in C_G(A)$ sedeikian sehingga berlaku

$$\begin{aligned}(xx^{-1})a(xx^{-1})^{-1} &= (xx^{-1})a(xx^{-1}) \\ &= x(x^{-1}ax)x^{-1} \\ &= xax^{-1} \\ &= a\end{aligned}$$

Definisi 2.3.6 *(Dummit et.al., 2004) Diberikan suatu grup $(G, *)$. Center dari grup G didefinisikan dengan $Z(G) = \{x \in G \mid gx = xg, \forall g \in G\}$.*

Misalkan $Z(G)$ adalah *center* dari grup G maka $Z(G) \subseteq G$. Misalkan $Z^2(G) = \{g \in G \mid [g, x] \in Z(G), \forall x \in G\}$ adalah subset dari G. Lebih lanjut, akan didapatkan suatu barisan atas *center* dari grup G *(upper central series)* yaitu

$$\{e\} = Z_0(G) \subseteq Z_1(G) \subseteq Z_2(G) \subseteq \dots$$

Contoh 2.3.7 Berikut beberapa contoh dari *center* grup:

1. Misalkan $G = (Q_8, \times)$ adalah grup. *Center* grup dari Q_8 atau $Z(Q_8)$ adalah $\{1, -1\}$.

   Pada Tabel 2.2 dapat dilihat bahwa untuk setiap $g \in \mathbb{Q}_8, (g)1 = 1(g)$ dan $(g)(-1) = (-1)(g)$.

2. Misalkan $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}$ terhadap operasi perkalian matriks adalah grup, maka *center* grupnya adalah $Z(G) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Teorema 2.3.8 *(Fraleigh, 2003) Jika G adalah grup maka center grup G merupakan subgrup dari grup G.*

Bukti. Misalkan $Z(G) = \{x \in G \mid gx = xg; \forall g \in G\}$. Akan dibuktikankan bahwa $Z(G) \leqslant G$.

i). Akan ditunjukkan $Z(G) \neq \emptyset$. Pilih $x = e \in G$, karena G adalah grup maka berlaku $ge = eg$, sehingga $e \in Z(G)$. Jadi $Z(G) \neq \emptyset$.

ii). Akan ditunjukkan $Z(G) \subseteq G$. Ambil sebarang $x \in Z(G)$, berdasarkan definisi *center* grup jelas bahwa x juga merupakan elemen di G, maka terbukti $Z(G) \subseteq G$.

iii). Akan ditunjukkan $Z(G)$ tertutup terhadap operasi di G. Ambil sebarang $x, y \in Z(G)$ sehingga berlaku $xy \in Z(G)$. Berdasarkan definisi *center* grup, untuk $x \in Z(G)$ artinya $x \in G$ dengan $gx = xg$, untuk setiap $g \in G$, dan untuk $y \in Z(G)$ artinya $y \in G$ dengan $yg = gy$, untuk setiap $g \in G$. Karena $x, y \in G$ dan G adalah grup maka berlaku sifat tertutup terhadap operasi biner di G sehingga $xy \in G$.

Diperhatikan, untuk setiap $g \in G$

$$\begin{aligned} g(xy) &= (gx)y \\ &= (xg)y && \text{(Berlaku sifat komutatif)} \\ &= x(gy) && \text{(Berlaku sifat asosiatif)} \\ &= x(yg) && \text{(Berlaku sifat komutatif)} \\ &= (xy)g && \text{(Berlaku sifat asosiatif)} \end{aligned}$$

Karena $xy \in G$ dengan $g(xy) = (xy)g$, untuk setiap $g \in G$, maka $xy \in Z(G)$. Dengan demikian $Z(G)$ tertutup terhadap operasi di G.

iv). Akan ditunjukkan $Z(G)$ mempunyai elemen invers. Ambil sebarang

$x \in Z(G)$ maka $x \in G$ dengan $gx = xg$, untuk setiap $g \in G$. Karena $x \in G$ dan G adalah grup maka terdapat $x^{-1} \in G$. Diperhatikan:

$$
\begin{aligned}
gx &= xg \\
(x^{-1})gx &= (x^{-1})xg \quad \text{(Kedua ruas dikalikan dengan) } (x^{-1}) \\
(x^{-1})gx &= (x^{-1}x)g \quad \text{(Berlaku sifat asosiatif)} \\
(x^{-1})gx &= eg \\
(x^{-1})gx &= g \\
x^{-1}gx(x^{-1}) &= g(x^{-1}) \quad \text{(Kedua ruas dikalikan dengan) } (x^{-1}) \\
x^{-1}g(xx^{-1}) &= g(x^{-1}) \quad \text{(Berlaku sifat asosiatif)} \\
x^{-1}ge &= g(x^{-1}) \\
x^{-1}g &= gx^{-1} \quad \text{(Berlaku sifat komutatif)} \\
gx^{-1} &= x^{-1}g
\end{aligned}
$$

Karena $x^{-1} \in G$ dengan $gx^{-1} = x^{-1}g, \forall g \in G$, maka $x^{-1} \in Z(G)$, sehingga $Z(G)$ mempunyai elemen invers.

Dengan demikian terbukti bahwa $Z(G) \leqslant G$. ■

2.3.3. Grup Nilpoten

Definisi 2.3.9 *(Dummit et.al., 2004) Diberikan suatu grup berhingga G. Didefinisikan lower central series dari G adalah suatu barisan turun dari subgrup*

$$G^0 \geqslant G^1 \geqslant G^2 \geqslant G^3 \geqslant \dots$$

dengan $G^0 = G, G^1 = [G, G], G^{c+1} = [G, G^c]$ untuk $c \geqslant 0$.

Grup G disebut nilpoten jika dan hanya jika $G^c = 1$. Lebih lanjut suatu bilangan bulat non-negatif c terkecil adalah kelas nilpoten dari G.

Definisi 2.3.10 *(Dummit et.al., 2004) Diberikan suatu himpunan $Z^i(G) = \{g \in G \mid [g,x] \in Z^{i-1}(G), \forall x \in G\}$. Suatu grup disebut nilpoten jika $Z^i(G) = G$ untuk suatu i bilangan bulat positif. Suatu bilangan i terkecil disebut dengan kelas nilpoten dari G.*

Contoh 2.3.11 Berdasarkan Contoh 2.2.1 diketahui bahwa $(Q_8, \times)$ adalah grup. Diberikan *center* grup $Z(Q_8) = \{-1, 1\}$. Himpunan $(Q_8, \times)$ adalah grup nilpoten karena $Z^2(Q_8) = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\} = Q_8$.

Dengan menggunakan Tabel Cayley pada 2.2, didapatkan anggota-anggota dari himpunan $Z^2(Q_8)$ sebagai berikut:

Pilih $g = 1 \in Q_8$, untuk setiap $x \in Q_8$ berlaku $[1, x] = 1 \cdot x \cdot 1^{-1} \cdot x^{-1} \in Z(Q_8)$:

$$\begin{aligned}
[1,1] &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1\\
[1,-1] &= 1 \cdot -1 \cdot 1 \cdot -1 = 1\\
[1,i] &= 1 \cdot i \cdot 1 \cdot -i = 1\\
[1,-i] &= 1 \cdot -i \cdot 1 \cdot i = 1\\
[1,j] &= 1 \cdot j \cdot 1 \cdot -j = 1\\
[1,-j] &= 1 \cdot -j \cdot 1 \cdot j = 1\\
[1,k] &= 1 \cdot k \cdot 1 \cdot -k = 1\\
[1,-k] &= 1 \cdot -k \cdot 1 \cdot k = 1
\end{aligned}$$

Pilih $g = -1 \in Q_8$, untuk setiap $x \in Q_8$ berlaku $[-1, x] = -1 \cdot x \cdot -1^{-1} \cdot x^{-1} \in Z(Q_8)$:

$$[-1, 1] = -1 \cdot 1 \cdot -1 \cdot 1 = 1$$

$$[-1, -1] = -1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot -1 = 1$$

$$[-1, i] = -1 \cdot i \cdot -1 \cdot -i = 1$$

$$[-1, -i] = -1 \cdot -i \cdot -1 \cdot i = 1$$

$$[-1, j] = -1 \cdot j \cdot -1 \cdot -j = 1$$

$$[-1, -j] = -1 \cdot -j \cdot -1 \cdot j = 1$$

$$[-1, k] = -1 \cdot k \cdot -1 \cdot -k = 1$$

$$[-1, -k] = -1 \cdot -k \cdot -1 \cdot k = 1$$

Pilih $g = i \in Q_8$, untuk setiap $x \in Q_8$ berlaku $[i, x] = i \cdot x \cdot i^{-1} \cdot x^{-1} \in Z(Q_8)$:

$$[i, 1] = i \cdot 1 \cdot -i \cdot 1 = 1$$

$$[i, -1] = i \cdot -1 \cdot -i \cdot -1 = 1$$

$$[i, i] = i \cdot i \cdot -i \cdot -i = 1$$

$$[i, -i] = i \cdot -i \cdot -i \cdot i = 1$$

$$[i, j] = i \cdot j \cdot -i \cdot -j = -1$$

$$[i, -j] = i \cdot -j \cdot -i \cdot j = -1$$

$$[i, k] = i \cdot k \cdot -i \cdot -k = 1$$

$$[i, -k] = i \cdot -k \cdot -i \cdot k = 1$$

Pilih $g = -i \in Q_8$, untuk setiap $x \in Q_8$ berlaku $[-i,x] = -i \cdot x \cdot -i^{-1} \cdot x^{-1} \in Z(Q_8)$:

$$[-i,1] = -i \cdot 1 \cdot i \cdot 1 = 1$$

$$[-i,-1] = -i \cdot -1 \cdot i \cdot -1 = 1$$

$$[-i,i] = -i \cdot i \cdot i \cdot -i = 1$$

$$[-i,-i] = -i \cdot -i \cdot i \cdot i = 1$$

$$[-i,j] = -i \cdot j \cdot i \cdot -j = -1$$

$$[-i,-j] = -i \cdot -j \cdot i \cdot j = -1$$

$$[-i,k] = -i \cdot k \cdot i \cdot -k = -1$$

$$[-i,-k] = -i \cdot -k \cdot i \cdot k = -1$$

Pilih $g = j \in Q_8$, untuk setiap $x \in Q_8$ berlaku $[j,x] = j \cdot x \cdot j^{-1} \cdot x^{-1} \in Z(Q_8)$:

$$[j,1] = j \cdot 1 \cdot -j \cdot 1 = 1$$

$$[j,-1] = j \cdot -1 \cdot -j \cdot -1 = 1$$

$$[j,i] = j \cdot i \cdot -j \cdot -i = -1$$

$$[j,-i] = j \cdot -i \cdot -j \cdot i = -1$$

$$[j,j] = j \cdot j \cdot -j \cdot -j = 1$$

$$[j,-j] = j \cdot -j \cdot -j \cdot j = 1$$

$$[j,k] = j \cdot k \cdot -j \cdot -k = -1$$

$$[j,-k] = j \cdot -k \cdot -j \cdot k = -1$$

Pilih $g = -j \in Q_8$, untuk setiap $x \in Q_8$ berlaku $[-j, x] = -j \cdot x \cdot -j^{-1} \cdot x^{-1} \in Z(Q_8)$:

$$[-j, 1] = -j \cdot 1 \cdot j \cdot 1 = 1$$

$$[-j, -1] = -j \cdot -1 \cdot j \cdot -1 = 1$$

$$[-j, i] = -j \cdot i \cdot j \cdot -i = -1$$

$$[-j, -i] = -j \cdot -i \cdot j \cdot i = -1$$

$$[-j, j] = -j \cdot j \cdot j \cdot -j = 1$$

$$[-j, -j] = -j \cdot -j \cdot j \cdot j = 1$$

$$[-j, k] = -j \cdot k \cdot j \cdot -k = -1$$

$$[-j, -k] = -j \cdot -k \cdot j \cdot k = -1$$

Pilih $g = k \in Q_8$, untuk setiap $x \in Q_8$ berlaku $[k, x] = k \cdot x \cdot k^{-1} \cdot x^{-1} \in Z(Q_8)$:

$$[k, 1] = k \cdot 1 \cdot -k \cdot 1 = 1$$

$$[k, -1] = k \cdot -1 \cdot -k \cdot -1 = 1$$

$$[k, i] = k \cdot i \cdot -k \cdot -i = -1$$

$$[k, -i] = k \cdot -i \cdot -k \cdot i = -1$$

$$[k, j] = k \cdot j \cdot -k \cdot -j = -1$$

$$[k, -j] = k \cdot -j \cdot -k \cdot j = 1$$

$$[k, k] = k \cdot k \cdot -k \cdot -k = 1$$

$$[k, -k] = k \cdot -k \cdot -k \cdot k = 1$$

Pilih $g = -k \in Q_8$, untuk setiap $x \in Q_8$ berlaku $[-k, x] = -k \cdot x \cdot -k^{-1} \cdot x^{-1} \in Z(Q_8)$:

$$[-k, 1] = -k \cdot 1 \cdot k \cdot 1 = 1$$

$$[-k, -1] = -k \cdot -1 \cdot k \cdot -1 = 1$$

$$[-k, i] = -k \cdot i \cdot k \cdot -i = -1$$

$$[-k, -i] = -k \cdot -i \cdot k \cdot i = -1$$

$$[-k, j] = -k \cdot j \cdot k \cdot -j = 1$$

$$[-k, -j] = -k \cdot -j \cdot k \cdot j = -1$$

$$[-k, k] = -k \cdot k \cdot k \cdot -k = 1$$

$$[-k, -k] = -k \cdot -k \cdot k \cdot k = 1$$

Dengan demikian $Z^2(Q_8) = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\} = Q_8$, maka $(Q_8, \times)$ adalah grup nilpoten.

2.4. Kajian Aljabar dalam Al-Qur'an

Setiap objek yang ada di alam semesta ini dapat digolongkan kedalam berbagai macam kelompok atau himpunan. Setiap cabang ilmu matematika berdasar pada teori himpunan dan konsep dasar. Dalam Al-Qur'an banyak ditemukan ayat yang menjelaskan tentang ilmu-ilmu pengetahuan, termasuk matematika. Teori himpunan dalam matematika telah dijelaskan di dalam Al-Qur'an Surat An-Nur ayat 45 yang berbunyi:

وَاللَّهُ خَلَقَ كُلَّ دَابَّةٍ مِنْ مَاءٍ ۖ فَمِنْهُمْ مَنْ يَمْشِي عَلَىٰ بَطْنِهِ وَمِنْهُمْ مَنْ يَمْشِي عَلَىٰ رِجْلَيْنِ
وَمِنْهُمْ مَنْ يَمْشِي عَلَىٰ أَرْبَعٍ ۚ يَخْلُقُ اللَّهُ مَا يَشَاءُ ۚ إِنَّ اللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَيْءٍ قَدِيرٌ

Kutipan ayat di atas menggambarkan tentang himpunan hewan-hewan yang dikelompokkan berdasarkan cara geraknya, diantaranya yaitu himpunan hewan yang bergerak dengan perutnya, himpunan hewan yang bergerak dengan dua kaki, himpunan hewan yang bergerak dengan empat kaki, dan himpunan lainnya yaitu hewan yang bergerak dengan lebih dari 4 kaki.

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan tentang definisi Engel Set, sifat-sifat dari Engel Set, dan sifat dari grup Abelian yang dibangun oleh *Engel Set* berhingga menjadi grup nilpoten.

3.1. *Engel Set*

Berikut ini diberikan definisi tentang *Engel Set* dan sifat-sifat dari *Engel Set*.

Definisi 3.1.1 *Misalkan S subset dari grup G. Himpunan S disebut Engel Set jika* $\forall x, y \in S$ *terdapat bilangan bulat non-negatif n= n(x,y) sedemikian sehingga* $[x,_n y] = 1$. *Untuk suatu* $x \in G$ *disebut dengan elemen Engel kiri jika untuk setiap* $g \in G$ *terdapat bilangan bulat non-negatif n= n(g,x) sedemikian sehingga* $[g,_n x] = 1$. *Sama halnya untuk* $x \in G$ *disebut elemen Engel kanan jika* $g \in G$ *terletak disebelah kanan atau* $[x,_n g] = 1$.

Secara induktif, komutator $[x,_n y]$ dari pasangan (x, y) yang diberikan oleh bilangan bulat non-negatif n adalah sebagai berikut (Abdollahi A. , 2010):

$$[x,_0 y] := x$$

$$[x,_1 y] := [x, y] := x^{-1}y^{-1}xy := x^{-1}x^y$$

Diberikan $n = 2$, maka:

$$\begin{aligned}[x,_2 y] &= [[x,y],y] \\ &= [(xyx^{-1}y^{-1}),y] \\ &= (xyx^{-1}y^{-1})y(xyx^{-1}y^{-1})^{-1}y^{-1}\end{aligned}$$

dan untuk $n > 2$ adalah:$[x,_n y] = [[x,_{n-1} y],y] = [[x,y],_{n-1} y]$

Himpunan elemen Engel kanan dan elemen Engel kiri masing-masing dinotasikan $R(G)$ dan $L(G)$ yang masing-masing didefinisikan sebagai berikut.

$$R(G) = \{x \in G \mid [x,g] = 1, \forall g \in G\}$$
$$L(G) = \{x \in G \mid [g,x] = 1, \forall g \in G\}$$
$$R_n(G) = \{x \in G \mid [x,_n g] = 1, \forall g \in G\}$$
$$L_n(G) = \{x \in G \mid [g,_n x] = 1, \forall g \in G\}$$
$$R_{n+1}(G) = \{x \in G \mid [x,_{n+1} g] = 1, \forall g \in G\}$$
$$L_{n+1}(G) = \{x \in G \mid [g,_{n+1} x] = 1, \forall g \in G\}$$

Adapun himpunan invers dari elemen Engel kanan dan elemen Engel kiri masing-masing dinotasikan $R^{-1}(G)$ dan $L^{-1}(G)$ yang masing-masing didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}R(G)^{-1} &= \{x \in G \mid [x,g]^{x^{-1}} = 1, \forall g \in G\} \\ &= \{x^{-1} \in G \mid [g,x^{-1}] = 1, \forall g \in G\} \\ L(G)^{-1} &= \{x \in G \mid [g,x]^{x^{-1}} = 1, \forall g \in G\} \\ &= \{x^{-1} \in G \mid [x^{-1},g] = 1, \forall g \in G\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_n(G)^{-1} &= \{x \in G \mid [x,_n g]^{x^{-1}} = 1, \forall g \in G\} \\
&= \{x^{-1} \in G \mid [g,_n x^{-1}] = 1, \forall g \in G\} \\
L_n(G)^{-1} &= \{x \in G \mid [g,_n x]^{x^{-1}} = 1, \forall g \in G\} \\
&= \{x^{-1} \in G \mid [x^{-1},_n g] = 1, \forall g \in G\} \\
R_{n+1}(G)^{-1} &= \{x \in G \mid [x,_{n+1} g]^{x^{-1}} = 1, \forall g \in G\} \\
&= \{x^{-1} \in G \mid [g,_{n+1} x^{-1}] = 1, \forall g \in G\} \\
L_{n+1}(G)^{-1} &= \{x \in G \mid [g,_{n+1} x]^{x^{-1}} = 1, \forall g \in G\} \\
&= \{x^{-1} \in G \mid [x^{-1},_{n+1} g] = 1, \forall g \in G\}
\end{aligned}$$

Teorema berikut menjelaskan tentang sifat-sifat dari *Engel Set*:

Teorema 3.1.2 *Jika diberikan suatu grup G, maka berlaku:*

1. *Untuk sebarang 2 elemen* $x, g \in G$ *dan semua bilangan bulat* $n \geqslant 1, [x,_{n+1} g] = [g^{-x},_n g]^g$
2. $R(G)^{-1} \subseteq L(G)$
3. $R_n(G)^{-1} \subseteq L_{n+1}(G)$

Bukti.

1. Ambil sebarang $x, g \in G$ dan bilangan bulat $n \geqslant 1$. Diperhatikan,

$$
\begin{aligned}
[x,_{n+1} g] &= [[x,_n g], g] \\
&= [x^{-1}g^{-1}xg,_n g] && \text{(definisi komutator)} \\
&= [(g^{-1})^x g,_n g] && \text{(sifat konjugasi } g^{-1} \text{ terhadap } x) \\
&= [(g^{-x})g,_n g] \\
&= [[(g^{-x})g, g],_{n-1} g] \\
&= [(g^{-x}g)^{-1}g^{-1}(g^{-x}g)g,_{n-1} g] && \text{(definisi komutator)} \\
&= [g^{-1}(g^{-x})^{-1}g^{-1}, (g^{-x}g)g,_{n-1} g] \\
&= [g^{-1}((g^{-x})^{-1}g^{-1}, (g^{-x}g))g,_{n-1} g] && \text{(berlaku sifat asosiatif)} \\
&= [((g^{-x})^{-1}g^{-1}, (g^{-x}g))^g,_{n-1} g] && \text{(berlaku sifat konjugasi)} \\
&= [[g^{-x}, g]^g,_{n-1} g] \\
&= [g^{-x},_n g]^g
\end{aligned}
$$

2. Ambil sebarang $g^{-1} \in R(G)^{-1}$, maka untuk suatu $x \in G, (g^{-1})^x \in R(G)^{-1}$.

   Akan ditunjukkan bahwa $g \in L(G)$. Diketahui bahwa:

   $g^{-1} \in R(G)^{-1}$, artinya $[g^{-1}, g]^g = 1$

   $(g^{-1})^x \in R(G)^{-1}$, artinya $[(g^{-1})^x, g]^g = [g^{-x}, g]^g = 1$.

   Dengan menggunakan sifat pada identitas komutator, maka $[g^{-x}, g]^g = [g, g^x]$. Akibatnya $g \in R(G)^{-1}$. Diperhatikan:

$$
\begin{aligned}
1 = [g, g^x] &= [g, x^{-1}gx] \\
&= g^{-1}(x^{-1}gx)^{-1}g(x^{-1}gx) && \text{(definisi komutator)} \\
&= g^{-1}x^{-1}g^{-1}xgx^{-1}gx && \text{(sifat dari } R(G)^{-1}) \\
&= g^{-1}x^{-1}xg^{-1}gx^{-1}xg && \text{(sifat dari } R(G)^{-1}) \\
&= x^{-1}g^{-1}xg && \text{(definisi komutator)} \\
&= [x, g]
\end{aligned}
$$

Dengan demikian $g \in L(G)$, dan $R(G)^{-1} \subseteq L(G)$.

3. Ambil sebarang $g^{-1} \in R_n(G)^{-1}$, maka untuk suatu $x \in G, (g^{-1})^x = g^{-x} \in R_n(G)^{-1}$. Akan ditunjukkan bahwa $g \in L_{n+1}(G)$. Berdasarkan Poin 3.1 didapatkan $[g^{-x},_n g]^g = [x,_{n+1} g]$. Dengan demikian terbukti bahwa $R_n(G)^{-1} \subseteq L_{n+1}(G)$.

■

3.2. Grup Abelian yang Dibangun oleh *Engel Set*

Misalkan G adalah grup Abelian dan S himpunan tak kosong subset dari G merupakan *Engel Set*. Grup G dibangun oleh suatu *Engel Set* berhingga yaitu $G = \langle S \rangle = \langle x, y \rangle$ dengan $x, y \in S$ dapat menjadi grup nilpoten. Berikut akan dijelaskan sifat-sifat suatu grup Abelian yang dibangun oleh *Engel Set* berhingga menjadi nilpoten.

Lemma 3.2.1 *Jika G adalah grup metabelian yang dibangun oleh suatu Engel Set S, maka sebarang $x \in S$ adalah elemen Engel kiri, lebih lanjut G adalah locally* *nilpotent.*

Bukti. Diketahui bahwa G adalah grup metabelian maka subgrup komutatornya bersifat komutatif, dengan kata lain

$$G = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle = \langle [y, x] \mid x, y \in G \rangle$$

Grup G dibangun oleh suatu *Engel Set* S dengan kata lain

$$G = \langle S \rangle = \langle [x,_n y] = 1 \mid x, y \in S \rangle = \langle [y,_n x] = 1 \mid x, y \in S \rangle$$

Akan ditunjukkan $x \in S$ adalah elemen Engel kiri. Lebih lanjut akan ditunjukkan G adalah *locally nilpotent*, yaitu jika setiap subgrup yang dibangun secara berhingga adalah nilpoten.

Ambil sebarang $T \subseteq S$ dengan $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ dan misalkan $[x_i,_n x_j] = 1$ untuk $1 \leqslant i, j \leqslant r$. Karena G adalah grup metabelian maka setiap $g \in G$ menginduksi G' suatu endomorfisma $(-1 + g)$ yang memetakan u ke $u^{-1}u^g$ dan kedua endomorfisma ini komutatif. Diperhatikan

$$1 = [x_i,_n x_j] = [x_j, x_i]^{-1} = ([x_j, x_i]^{-1})^{(-1+x_i)^n}$$

Akibatnya $(-1 + x_i)^n = 0$ dan x_i adalah elemen Engel kiri. Lebih lanjut suatu produk di endomorfisma $(-1 + x_i)$ dengan pangkat $(n - 1)r + 1$ adalah trivial. Dengan demikian $\langle T \rangle$ adalah nilpoten dengan kelas paling banyak $(n - 1)r + 2$. Jadi terbukti bahwa G adalah *locally nilpotent*. Lebih lanjut suatu grup *locally nilpotent* adalah nilpoten ■

Lemma 3.2.2 *Setiap elemen tidak trivial dari* $Z(H) = \{z \in H \mid zh = hz, \forall h \in H\}$ *dengan* H *adalah subgrup maksimal tak normal di* G *beraksi fixed point free terhadap subgrup normal minimal* A *di* G *secara konjugasi.*

Bukti. Diketahui $Z(H) = \{z \in H \mid zh = hz, \forall h \in H\}$ adalah *center* dari subgrup H.

$C_A(z) = \{a \in A \mid aza^{-1} = z\} = \{a \in A \mid az = za\}$ adalah centralizer dari z di A.

Misalkan A adalah subgrup normal minimal di G, dan H adalah subgrup maksimal tak normal di G. $Z(H)$ beraksi terhadap A merupakan suatu pemetaan:

$$Z(H) \times A \to A$$
$$(z, a) \mapsto za$$

yang memenuhi:

i. $z_1(z_2a) = (z_1z_2)a$.

ii. $1a = a$.

Akan ditunjukkan $Z(H)$ beraksi *fixed point free* terhadap A secara konjugasi.

$Z(H)$ beraksi terhadap A secara konjugasi, maka pemetaan:

$$Z(H) \times A \to A$$
$$(z, a) \mapsto zaz^{-1}$$

memenuhi:

i. $z_1(z_2a) = (z_1z_2)a$.

Diperhatikan,

$$
\begin{aligned}
z_1(z_2a) &= z_1(z_2az_2^{-1}) \\
&= z_1(z_2az_2^{-1})z_1^{-1} && \text{(definisi aksi secara konjugasi)} \\
&= (z_1z_2)a(z_2^{-1}z_1^{-1}) && \text{(sifat asosiatif)} \\
&= (z_1z_2)a(z_1z_2)^{-1} && \text{(definsi aksi secara konjugasi)} \\
&= (z_1z_2)a
\end{aligned}
$$

ii. $1a = a$. Diperhatikan,

$$
\begin{aligned}
1a &= 1a1^{-1} \\
&= a
\end{aligned}
$$

Karena $Z(H)$ beraksi terhadap A secara konjugasi, sehingga untuk setiap $a \in A$ dapat ditentukan suatu stabilizer dari A, yaitu stab$(a) = \{z \in Z(H) \mid zaz^{-1} = a\} = \{z \in Z(H) \mid za = az\}$. $Z(H)$ dikatakan beraksi *fixed point free* terhadap A jika stab$(a) = Z(H)$ atau stab$(a) = 1$. Diperhatikan bahwa stab(a) adalah elemen $z \in Z(H)$ yang komutatif dengan setiap elemen $a \in A$. Berdasarkan definisi *centralizer* z di A, setiap elemen $a \in A$ komutatif dengan elemen $z \in Z(H)$. Dengan demikian stab$(a) = C_A(z)$. *Centralizer* $C_A(z)$ adalah subgrup normal di G. Karena H bukan merupakan subgrup normal dari G maka $Z(H)$ juga bukan merupakan subgrup normal, akibatnya stab$(a) = C_A(z) \neq Z(H)$. Dengan demikian dengan keminimalan dari A, stab$(a) = C_A(z) = 1$. ■

Lemma 3.2.3 *Misalkan $G = AH = \langle x, y \rangle$ adalah minimal counterexample yang Abelian oleh nilpoten kelas 2, maka $A = \gamma_3(G)$, $[x, y, y, y] = 1$ dan $[y, x, x, x] = 1$.*

Bukti. Misalkan G adalah grup Abelian oleh nilpoten kelas 2, H adalah subgrup normal maksimal di G, A adalah subgrup normal minimal di G. $G = AH$ dan G/A adalah nilpoten.

Diketahui *lower central series* dari G adalah $\gamma_i(G)$, untuk $i \geqslant 0$, sehingga didapat $\gamma_1(G) = G, \gamma_2(G) = [G, G] = G', \gamma_3(G) = [[G, G], G]$, sehingga dapat dituliskan $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$. Dengan demikian didapatkan barisan turun dari subgrup G:

$$G = \gamma_1(G) \geqslant \gamma_2(G) \geqslant \gamma_3(G) \geqslant \dots$$

Suatu G disebut nilpoten jika $\gamma_i(G) = 1$ untuk $i \geqslant 0$. Untuk suatu bilangan bulat non-negatif terkecil $i, \gamma_i(G) = 1$ maka grup G disebut nilpoten kelas i.

i). Akan ditunjukkan $A = \gamma_3(G)$. Karena A subgrup normal minimal, maka $A \subseteq \gamma_3(G)$. Misalkan $q \neq p$ adalah suatu bilangan prima, sebarang $q-$subgrup dari $\gamma_3(G)$ adalah trivial, yaitu $1 = \gamma_{i+1}(G) \leqslant \gamma_3(G)$.
G/A adalah $p-$grup dan nilpoten, maka $\gamma_{i+1}(G/A) = 1$. Karena $G \cong G/A$, maka $\gamma_{i+1}(G) = 1 = q-$subgrup, sehingga $\gamma_3(G) \subseteq A$. Karena $A \subseteq \gamma_3(G)$ dan $\gamma_3(G) \subseteq A$, maka $A = \gamma_3(G)$.

ii). Akan ditunjukkan $[x, y, y, y] = [x,_3 y] = 1$.
Andaikan $[x,_{n-1} y] \neq 1$ untuk $n > 3$.
Diketahui $G = AH$ maka $y = ah,$ untuk $y \in G, a \in A, h \in H.$
$[x, y, y] \in [[G, G], G] = \gamma_3(G) = A,$ maka $[x, y, y] \in A.$
Misal untuk $n > 3, n - 2 \geqslant 2$. Sehingga didapat
$[x,_{n-2} y] = [x,_2 y] \geqslant [x,_3 y] \geqslant [x,_4 y] \geqslant \dots$
$[x,_{n-2} y, y] = [x,_{n-1} y] \leqslant [x,_{n-2} y]$

Sedemikian sehingga $[x,_{n-2}\, y]$ dan $[x,_{n-2}\, y, y]$ juga terdapat di A.

Akibatnya $[x,_{n-2}\, y, y^p] = [x,_{n-2}\, y, y]^p = 1$

Diperhatikan bahwa $y = ah$ maka $y^p = ah^p$ dan $h = h^{\alpha p}$ untuk α suatu bilangan bulat.

Untuk $y^p = ah^p$ dipunyai:

$$1 = [x,_{n-2}\, y, y^p] = [x,_{n-2}\, y, ah^p] = [x,_{n-2}\, y, h^p]$$

Dan untuk $h = h^{\alpha p}$ dipunyai:

$$1 = [x,_{n-2}\, y, h^{\alpha p}] = [x,_{n-2}\, y, h]$$

Diperhatikan, $1 = [x,_{n-2}\, y, h]$. Karena $a \in A$ dan $h \in H$ maka $[x,_{n-2}\, y, ah] = [x,_{n-2}\, y, h]$. Diketahui bahwa $y = ah$ sehingga didapat $[x,_{n-2}\, y, ah] = [x,_{n-2}\, y, y] = [x,_{n-1}\, y]$. Hal ini adalah kontradiksi dari pemisalan awal yaitu $1 \neq [x,_{n-1}\, y]$. Jadi terbukti bahwa $[x,_{n-1}\, y] = 1$ untuk $n > 3$ atau $[x,_3\, y] = [x, y, y, y] = 1$.

iii). Akan ditunjukkan $[y, x, x, x] = [y,_3\, x] = 1$.

Andaikan $[y,_{n-1}\, x] = 1$ untuk $n > 3$. Dengan menggunakan pemisalan yang sama seperti poin ii) dengan $x = ah, x^p = ah^p$, dan $h = h^{\alpha p}$ untuk suatu bilangan bulat α, didapatkan:

$$[y,_{n-2}\, x, x^p] = [y,_{n-2}\, x, x]^p = 1$$

Diperhatikan untuk $x^p = ah^p$:

$$1 = [y,_{n-2}\, x, x^p] = [y,_{n-2}\, x, ah^p] = [y,_{n-2}\, x, h^p]$$

Dan untuk $h = h^{\alpha p}$ didapat $1 = [y,_{n-2}\, x, h^{\alpha p}] = [y,_{n-2}\, x, h]$. Karena $a \in A$ dan $h \in H$ maka $[y,_{n-2}\, x, h] = [y,_{n-2}\, x, ah]$. Diketahui bahwa $x = ah$ sehingga didapat $= [y,_{n-2}\, x, x] = [y,_{n-1}\, x]$. Hal ini adalah kontradiksi sehingga terbukti $[y, x, x, x] = [y,_3\, x] = 1$.

■

Lemma 3.2.4 *Misalkan G adalah grup Abelian, A adalah subgrup normal minimal dari G, dan H adalah subgrup normal maksimal dari G. Misalkan $x = ah,\ y = bk$ dimana $x, y \in G,\ a, b \in A$ dan $h, k \in H$. Jika $[x, y] = [h, k]$ maka $[a, k^{-1}] = [b, h^{-1}],\ [a, h] = 1$ dan $[b, k] = 1$ dengan $a \neq 1$ dan $b \neq 1$.*

Bukti. Diketahui $x = ah$ dan $y = bk, x, y \in G\ a, b \in A\ h, k \in H$.

$$\begin{aligned}
[h, k] = [x, y] &= [ah, bk] \\
&= (ah)^{-1}(bk)^{-1}(ah)(bk) && \text{(definisi komutator)} \\
&= h^{-1}a^{-1}k^{-1}b^{-1}ahbk \\
&= h^{-1}a^{-1}k^{-1}ab^{-1}hbk && \text{(sifat komutatif)} \\
&= h^{-1}a^{-1}k^{-1}a(kk^{-1})(hh^{-1})b^{-1}hbk \\
&= h^{-1}(a^{-1}k^{-1}ak)k^{-1}hh^{-1}b^{-1}hbk && \text{(sifat asosiatif)} \\
&= h^{-1}(a^{-1}k^{-1}ak)(hh^{-1})k^{-1}h(kk^{-1})h^{-1}b^{-1}hbk \\
&= h^{-1}(a^{-1}k^{-1}ak)h(h^{-1}k^{-1}hk)k^{-1}(h^{-1}b^{-1}hb)k && \text{(sifat asosiatif)} \\
&= [a, k]^h[h, k][h, b]^k
\end{aligned}$$

Karena $1 = [x, y] = [h, k]$ maka didapat $1 = [a, k]^h[h, k][h, b]^k = [a, k]^h[h, b]^{h^{-1}kh}$

i). Akan ditunjukkan $[a, k^{-1}] = [b, h^{-1}]$. Diperhatikan $1 = [a, k]^h[h, b]^{h^{-1}kh}$, invers dari $[h, b]^{h^{-1}kh}$ adalah $[a, k]^h$, oleh karenanya didapatkan

$$
\begin{aligned}
[a,k]^h &= ([h,b]^{h^{-1}kh})^{-1} \\
&= ([h,b]^{h^{-1}hk})^{-1} \\
&= ([h,b]^{k})^{-1} && \text{(sifat identitas komutator)} \\
&= [b,h]^{k} && \text{(kedua ruas dikalikan } h\text{)} \\
h([a,k]^h) &= h([b,k]^k) && \text{(kedua ruas dikalikan } h^{-1}\text{)} \\
h([a,k]^h)h^{-1} &= h([b,k]^k)h^{-1} && \text{(sifat konjugasi)} \\
([a,k]^h)^{h^{-1}} &= ([b,h]^k)^{h^{-1}} \\
[a,k] &= [b,h]^{kh^{-1}} && \text{(kedua ruas dikalikan } k\text{)} \\
k([a,k]) &= k([b,h]^{kh^{-1}}) && \text{(kedua ruas dikalikan } k^{-1}\text{)} \\
k([a,k])k^{-1} &= k([b,h]^{kh^{-1}})k^{-1} && \text{(sifat konjugasi)} \\
([a,k])^{k^{-1}} &= ([b,h]^{kh^{-1}})^{k^{-1}} \\
&= [b,h]^{h^{-1}kk^{-1}} \\
&= [b,h]^{h^{-1}}
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan identitas komumator, $[a,k]^{k^{-1}} = [a,k^{-1}]$ dan $[b,h]^{h^{-1}} = [b,h^{-1}]$. Jadi terbukti bahwa $[a,k^{-1}] = [b,h^{-1}]$.

ii). Akan ditunjukkan $[a,h] = 1$ dan $[b,k] = 1$. Misalkan $[y,x],[x,y] \in Z(H)$, dan berdasarkan lemma 3.2.3 didapatkan $[y,x,x],[x,y,y] \in A$ dan $1 = [y,x,x,x] = [x,y,y,y]$.

Diperhatikan $1 = [y,x,x,x] = [y,x,x,ah]$. Karena $a \in A$ dan $h \in H$ maka $ah \in H$ akibatnya $[y,x,x,ah] = [y,x,x,h] = [[y,x],[x,h]]$. Diketahui bahwa $x = ah$ sehingga $[[x,h],[y,x]] = [[ah,h],[y,x]]$ dan dengan memanfaatkan sifat identitas komutator maka didapatkan $[[a,h]^h,[y,x]] = [[a,h],[y,x]]^h$. Berdasarkan Lemma 3.2.2 $[a,h]$ adalah *fixed* oleh $[y,x]$, sehingga $[a,h]=1$.

Diperhatikan juga untuk $1=[x,y,y,y]=[x,y,y,bk]$. Karena $b\in A$ dan $k\in H$ maka $bk\in H$ akibatnya $[x,y,y,bk]=[x,y,y,k]=[[x,y],[y,k]]$. Diketahui bahwa $y=bk$ sehingga $[[y,k],[x,y]]=[[bk,k],[x,y]]$ dan dengan memanfaatkan sifat identitas komutator maka didapatkan $[[b,k]^k,[x,y]]=[[b,k],[x,y]]^k$. Berdasarkan Lemma 3.2.2 $[b,k]$ adalah *fixed* oleh $[x,y]$, sehingga $[b,k]=1$.

Dengan demikian terbukti bahwa $[a,h]=1$ dan $[b,k]=1$.

■

Teorema 3.2.5 *Misalkan G adalah grup Abelian oleh nilpoten kelas 2 yang dibangun oleh dua mutual elemen Engel x dan y maka G adalah nilpoten.*

Bukti. Misalkan A adalah subgrup normal minimal dari G, dan H adalah subgrup normal maksimal dari G. Misalkan $x=ah,\ y=bk$ dimana $x,y\in G,\ a,b\in A$ dan $h,k\in H$ dan $[x,y]=[h,k]c$ dengan $[h,k]\in Z(H), c\in A$. Berdasarkan Lemma 3.2.3 diketahui bahwa

1. $[x,y,y]$ dan $[y,x,x]\in A$
2. $[x,y,y,y]=[y,x,x,x]=1$
3. $[x,y,y^p]=1$ dan $[y,x,x^p]=1$

Diketahui bahwa G dibangun oleh elemen x dan y, artinya $G=\langle x,y\rangle=\langle x^p,y^p\rangle$. Jika $\langle x^p,y^p\rangle\cap A\neq 1$, maka $[x,y]$ komutatif dengan elemen non-trivial dari A. Berdasarkan Lemma 3.2.2 $[h,k]\in Z(H)$, stab$(a)=\{[h,k]\in Z(H)\mid [h,k]c=c[h,k]\}=1$ sehingga $[h,k]=1$. Diketahui bahwa $G'\leqslant A$ dan berdasarkan Lemma 3.2.1 G adalah nilpoten.

Andaikan $\langle x^p, y^p \rangle \cap A = 1$, maka dapat diasumsikan $H = \langle x^p, y^p \rangle$. Karena $\langle h, k \rangle \simeq \langle h, k \rangle A/A = \langle x^p, y^p \rangle A/A \simeq \langle x^p, y^p \rangle$. Akibatnya c pasti trivial sehingga $[x, y] = [h, k] \neq 1$, dan berdasarkan Lemma 3.2.4 dipunyai $[a, k^{-1}] = [b, h^{-1}]$ dan $[a, h] = 1,$ dengan $a \neq 1$.

Sekarang Berdasarkan *Hall-Witt Identity*:

$$[a, k^{-1}, h]^k [k, h^{-1}, a]^h [h, a^{-1}, k]^a = 1$$

Akibatnya $[a, k^{-1}, h] = [k, h^{-1}, a]^{-h} = ([k, h^{-1}, a]^h)^{-1}$.

$[k, h^{-1}, a]$ komutatif dengan h, artinya $h[k, h^{-1}, a] = [k, h^{-1}, a]h$. Dengan mengalikan kedua ruas di sebelah kiri dengan (h^{-1}) maka didapat $[k, h^{-1}, a] = h^{-1}[k, h^{-1}, a]h$, dengan memanfaatkan sifat konjugasi sehingga didapat $[k, h^{-1}, a]^h$. Selanjutnya $[a, k^{-1}, h]$ komutatif dengan $h^{k^{-1}}$, artinya $h^{k^{-1}}[a, k^{-1}, h] = [a, k^{-1}, h]h^{k^{-1}}$. Dengan mengalikan kedua ruas di sebelah kiri dengan $(h^{k^{-1}})^{-1}$ serta memanfaatkan sifat konjugasi maka didapat $[a, k^{-1}, h]^{h^{k^{-1}}}$.

Sekarang diperhatikan

$$\begin{aligned}
[a, k^{-1}, h] &= [[a, k^{-1}], h] \\
&= [[b, h^{-1}], h] && \text{(sifat identitas komutator)} \\
&= [[b, h]^{h^{-1}}, h] && \text{(sifat identitas komutator)} \\
&= [[b, h], h]^{h^{-1}} && \text{(sifat identitas komutator)} \\
&= [b, h, h]^{h^{-1}} && \text{(sifat identitas komutator)} \\
&= [b, h^{-1}, h]^{-1}
\end{aligned}$$

Karena $[a, k^{-1}, h] = [b, h^{-1}, h]^{-1}$ maka $[b, h^{-1}, h]^{-1}$ komutatif dengan $h^{k^{-1}}$. Lebih lanjut $[b, h, h]$ komutatif dengan $h^{k^{-1}}$. Dengan demikian $[b, h, h] \in C_A(h^{k^{-1}})$, dengan kata lain $[b, h, h] \in A$ dan $(h^{k^{-1}}) \in Z(H)$.

Misalkan $B = C_A(h^{k^{-1}})$ dan $K = \langle h, h^{k^{-1}} \rangle A = HA$. Jika q adalah bilangan prima dan merupakan order dari h, maka dipunyai $B = [b, h^q]B = [b, h]^q B$. Dengan demikian order dari $[b, h]$ adalah koprima dengan q, sehingga $[b, h] \in B$ dan $[b, h^{-1}] \in B$. Karena $[a, k^{-1}] = [b, h^{-1}]$ maka $[a, k^{-1}] \in B$. Jadi, $[a, k^{-1}, h^{-1}] = 1$ dan $[k, a, h] = [k, h, a] = 1$. Hal ini kontradiksi dengan Lemma 3.2.2, sehingga pengandaian salah dan harus diingkar. Jadi terbukti bahwa grup G yang dibangun oleh elemen Engel x dan y adalah nilpoten. ■

BAB IV

PENUTUP

Pada bab ini akan diberikan simpulan dan saran-saran yang dapat diambil berdasarkan materi-materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

4.1. Simpulan

Simpulan yang dapat diambil dari pembahasan tentang grup Abelian yang dibangun oleh *Engel Set* berhingga adalah :

1. Jika diberikan suatu grup G, maka berlaku:

   i). Untuk sebarang 2 elemen $x, g \in G$ dan semua bilangan bulat $n \geqslant 1, [x,_{n+1} g] = [g^{-x},_n g]^g$

   ii). $R(G)^{-1} \subseteq L(G)$

   iii). $R_n(G)^{-1} \subseteq L_{n+1}(G)$

2. Sifat-sifat grup Abelian yang dibangun oleh *Engel Set* berhingga menjadi grup nilpoten adalah sebagai berikut:

   i). Jika G adalah grup metabelian yang dibangun oleh suatu *Engel Set* S, maka sebarang $x \in S$ adalah elemen *Engel* kiri, lebih lanjut G adalah *locally nilpotent*.

   ii). Setiap elemen tidak trivial dari $Z(H)$ beraksi *fixed point free* terhadap A secara konjugasi.

iii). Misalkan $G = AH = \langle x, y\rangle$ adalah *minimal counterexample* yang Abelian oleh nilpoten kelas 2, maka $A = \gamma_3(G),\ [x, y, y, y] = 1$ dan $[y, x, x, x] = 1$.

iv). Misalkan $x = ah,\ y = bk$ dmana $a, b \in A$ dan $h, k \in H$. Jika $[x, y] = [h, k]$ maka $[a, k^{-1}] = [b, h^{-1}],\ [a, h] = 1$ dan $[b, k] = 1$ dengan $a \neq 1$ dan $b \neq 1$.

v). Misalkan G adalah grup Abelian oleh nilpoten kelas 2 yang dibangun oleh dua mutual elemen Engel x dan y, maka G adalah nilpoten.

4.2. Saran

Berdasarkan pembahasan tentang grup Abelian yang dibangun oleh *Engel Set* berhingga, penulis hanya memfokuskan pada grup Abelian yang dibangun oleh 2 elemen *Engel Set*, sehingga untuk penelitian selanjutnya disarankan untuk membahas tentang grup Abelian yang dibangun oleh lebih dari dua elemen *Engel Set* sehingga menjadi grup nilpoten.

DAFTAR PUSTAKA

Abdollahi, A., 2007, Engel Graph Associated with a Groups, *Journal of Algebra*, 318:680-691.

Abdollahi, A., 2010, Engel Elements in Groups, *Groups St. Andrews*, 1:94-117.

Abdollahi, A., Brandl, R., and Tortora, A., 2011, Groups Generated by a Finite Engel Set, *Journal of Algebra*, 347:53-59.

Aisah, I., 2017, *Modul Struktur Aljabar I*, Universitas Padjajaran, Bandung.

Dummit, David S., and Foote, Richard M., 2004, *Abstract Algebra*, Third Edition, John Wiley and Son, Inc., USA.

Fraleigh, John B., 2003, *A First Course in Abstract Algebra Third Edition*,Addison-Wesley Publishing Company, New York.

Grillet, Pierre A., 2000, *Abstract Algebra*, Second Edition, Springer-Science and Business Media, LLC., USA.

Hutadjulu, A. M., 2017, *Aplikasi Teori Grup dalam Mengklasifikasikan Mini-Sudoku*, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Khoberlin, Arnawa I.M., Bakar, Nova N., 2019, Teorema Sylow, *Jurnal Matematika UNAND*, 8:150-156.

Malik, D.S., Mordeson, John M., and Sen, M.K., 1976, *Fundamental of Abstract Algebra*, The McGrow-Hill Companies, Inc., USA.

Muhsin, M., 2014, *Grup Faktor dan Komutator dari Grup Dihedal-2n*, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang.

Newman M.F., Nickel W., 1993, Engel Elements in Groups, *Journal of Pure and Applied Mathematics*, 96:39-45.

Patma, dan Susanto, H., (n.d), *Grup Hingga Nilpotent*, Universitas Negeri Malang, Malang.

Purwagani, M., 2012, *Grup Non-Abelian yang Abelian Secara Grafis*, Universitas Airlangga, Surabaya.

Robinson, D.J.S., 1995, *A Course in the Theory of Groups*, Second Edition, Springer Science and Bussiness Media, USA.

Sedghi, S., 1991, *Relation between Engel Groups and Nilpotent*, The Islamic Azad University, Iran.

Setiawan, A., 2011, *Aljabar Abstrak*,(Teori Grup dan Teori Ring), Universitas Kristen Satya Wacana, Salatiga.

Subiono, 2015, *Aljabar: Sebagai Suatu Pondasi Matematika*, Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya.

Trybulec, Wojciech A., 2000, Commutator and Center of a Groups, *Journal of Formalized Mathematics*, vol 3.

Wehrfritz, B.A.F., 1999, *Finite Groups, A Second Course on Group Theory*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., Singapore.