PEMODELAN SEIV PENYEBARAN PENYAKIT HEPATITIS B

SKRIPSI

Disusun Oleh
RIF'A ATUL HASANAH
H02216014

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL
SURABAYA

2019

PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini,

Nama	:	RIF'A ATUL HASANAH
NIM	:	H02216014
Program Studi	:	Matematika
Angkatan	:	2016

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul " PEMODELAN SEIV PENYEBARAN PENYAKIT HEPATITIS B ". Apabila suatu saat nanti terbukti saya melakukan tindakan plagiat, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian pernyataan keaslian ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, Desember 2019

Yang menyatakan,

RIF'A ATUL HASANAH

NIM. H02216014

LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

Skripsi oleh

Nama	:	RIF'A ATUL HASANAH
NIM	:	H02216014
Judul Skripsi	:	PEMODELAN SEIV PENYEBARAN PENYAKIT HEPATITIS B

telah diperiksa dan disetujui untuk diujikan.

Surabaya, Desember 2019

Pembimbing

Putroue Keumala Intan, M.Si

NIP. 198805282018012001

PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI

Skripsi oleh

Nama	:	RIF'A ATUL HASANAH
NIM	:	H02216014
Judul Skripsi	:	PEMODELAN SEIV PENYEBARAN PENYAKIT HEPATITIS B

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji
pada tanggal Desember 2019

Mengesahkan,
Tim Penguji

Penguji I	Penguji II
Putroue Keumala Intan, M.Si	Dr. Moh. Hafiyusholeh, M.Si
NIP. 198805282018012001	NIP. 198002042014031001

Penguji III	Penguji IV
Yuniar Farida, MT	Dian C Rini Novitasari, M.Kom
NIP. 197905272014032002	NIP. 198511242014032001

Mengetahui,
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Ampel Surabaya

Dr. Eni Purwati, M.Ag
NIP. 196512211990022001

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL SURABAYA
PERPUSTAKAAN
Jl. Jend. A. Yani 117 Surabaya 60237 Telp. 031-8431972 Fax.031-8413300
E-Mail: perpus@uinsby.ac.id

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika UIN Sunan Ampel Surabaya, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : RIF'A ATUL HASANAH
NIM : H02216019
Fakultas/Jurusan : SAINTEK / MATEMATIKA
E-mail address : rifa.hasanah15@gmail.com

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah :
☑ Sekripsi ☐ Tesis ☐ Desertasi ☐ Lain-lain (.....)
yang berjudul :
PEMODELAN SEIV PENYEBARAN PENYAKIT HEPATITIS B

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan Hak Bebas Royalti Non-Ekslusif ini Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (database), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di Internet atau media lain secara ***fulltext*** untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Surabaya, 03 Januari 2020

Penulis

(RIF'A ATUL HASANAH)
nama terang dan tanda tangan

ABSTRAK

PEMODELAN SEIV PENYEBARAN PENYAKIT HEPATITIS B

Pemodelan penyakit merupakan suatu hal yang membantu dalam memahami penyebaran penyakit. Pada penelitian ini, pemodelan penyakit dilakukan terhadap penyakit hepatitis B. Hepatitis B menjadi salah satu penyakit yang akan mempengaruhi angka kesakitan, kematian, harapan hidup, status kesehatan dan dampak sosial ekonomi yang lain. Pemodelan penyakit hepatitis B ini menggunakan model SEIV, yaitu *Susceptible*, *Exposed*, *Infected* dan *Vaccinated*. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui kestabilan titik kesetimbangan dan keberadaan bifurkasi pada model. Hasil analisis kestabilan yang telah dilakukan, menghasilkan titik kesetimbangan endemik $\xi_1 = (285715, 13787, 3256488, 395351)$ dengan $R_0 = 3,9630 > 1$ yang berarti seiring berjalannya waktu penyakit hepatitis B pada Kabupaten Jember akan terus ada yang diiringi dengan populasi *Infected* yang terus ada meskpiun jumlah populasi yang telah tervaksin lebih banyak daripada jumlah populasi yang terinfeksi, kemudian hasil analisis keberadaan bifurkasi yang dilakukan dapat disimpulkan tidak ada bifurkasi dalam model SEIV ini, karena bifurkasi terjadi pada fungsi non linier, sedangkan fungsi yang didapatkan yaitu fungsi linier.

Kata kunci: Model SEIV, Hepatitis B, Runge Kutta Orde Empat, Kestabilan, Bifurkasi

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

ABSTRACT

SEIV MODEL OF TRANSMISSION HEPATITIS B

Modelling of disease is something that can help in the transmissions of the disease. In this study, disease modelling was carried out on hepatitis B. Hepatitis B is a hepatitis disease that will affect morbidity, ortality, life expectancy, health status and other socio-economic impacts. Modelling hepatitis B uses the SEIV model in which he paopulation will be divided into 4 populations *Susceptible*, *Exposed*, *Infected* and *Vaccinated*. This study aims to determine the stability of the equilibrium point and the presence of bifurcation in the model. The results of this study obtained a value of endemic equilibrium points $xi_1 = (285715, 13787, 3256488, 395351)$ with $R_0 = 3.9630 > 1$, it can be concluded that hepatitis B will be endemic in Jember Regency, which means that over time the hepatitis B disease in Jember will continue to exist accompanied by a population of textit Infected which continues to exist even though the number of populations that have been vaccinated is more than the number of infected populations, then the results of the analysis of the existence of bifurcation conducted can be concluded that there is no bifurcation in this SEIV model, because bifurcation occurs in non-linear functions, while the function obtained is linear function.

Keywords: SEIV Model, Hepatitis B, Fourth Order Runge Kutta, Stability, Bifurcation

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL . . . . . **i**
LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING . . . . . **ii**
PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI . . . . . **iii**
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN . . . . . **iv**
MOTTO . . . . . **v**
HALAMAN PERSEMBAHAN . . . . . **vi**
KATA PENGANTAR . . . . . **vii**
DAFTAR ISI . . . . . **ix**
DAFTAR TABEL . . . . . **xii**
DAFTAR TABEL . . . . . **xiii**
DAFTAR LAMBANG . . . . . **xiv**
ABSTRAK . . . . . **xv**
ABSTRACT . . . . . **xvi**
I PENDAHULUAN **1**
1.1. Latar Belakang Masalah 1
1.2. Rumusan Masalah 6
1.3. Tujuan Penelitian 6
1.4. Manfaat Penelitian 7
1.5. Batasan Masalah 7
1.6. Sistematika Penulisan 7
II TINJAUAN PUSTAKA **9**
2.1. Hepatitis B 9
2.2. Persamaan Diferensial 11
2.2.1. Persamaan Diferensial Biasa 11
2.2.2. Persamaan Diferensial Parsial 11
2.3. Nilai Eigen 12
2.4. Titik Kesetimbangan (Ekuilibirum) 13

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

2.5. Kestabilan 14
2.6. Linearisasi 16
2.7. Kriteria Kestabilan *Routh Hurwitz* 18
2.8. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) 19
2.9. Model Epidemi 20
2.9.1. Model Epidemi SIR 20
2.9.2. Model SIR dengan Vaksinasi 21
2.9.3. Model Epidemi SEIR 22
2.10. Model SEIV 23
2.11. Bifurkasi 26
2.12. Runge Kutta Orde Empat 31
III METODE PENELITIAN 33
3.1. Jenis Penelitian 33
3.2. Data dan Sumber Data Penelitian 33
3.3. Parameter 34
3.4. Rancangan Penelitian 36
IV HASIL DAN PEMBAHASAN 39
4.1. Titik Kesetimbangan 39
4.1.1. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit 41
4.1.2. Titik Kesetimbangan Endemik 43
4.2. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) 45
4.3. Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan 47
4.3.1. Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit . . . 49
4.3.2. Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik 52
4.4. Analisis Keberadaan Bifurkasi 55
4.5. Solusi Numerik dan Simulasi 56
V PENUTUP 65
5.1. Kesimpulan 65
5.2. Saran 65
DAFTAR PUSTAKA 67

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

A SOURCE CODE 72

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

DAFTAR TABEL

2.1 Tabel Routh-Hurwitz 18

4.1 Tabel *Routh Hurwitz* Bebas Penyakit 51

4.2 Tabel *Routh Hurwitz* Endemik 54

4.3 Nilai Parameter 59

4.4 Nilai Awal Tiap Populasi 59

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

DAFTAR GAMBAR

2.1 Diagram Model SIR 20
2.2 Diagram Model SIR dengan Vaksinasi 22
2.3 Diagram Model SEIR 22
2.4 Diagram Model SEIV 24
2.5 Phase Potrait Fungsi Linear 27
2.6 Phase Potrait Bifurkasi *Saddle Node* 27
2.7 Phase Potrait Bifurkasi *Transcritical* 28
2.8 Phase Potrait Bifurkasi *Hysteresis* 28
2.9 Phase Potrait Bifurkasi *Subcritical Pitchfork* 28
2.10 Phase Potrait Bifurkasi *Supercritical Pitchfork* 29
2.11 Phase Potrait Bifurkasi *Imperfect* 29
2.12 Phase Potrait Bifurkasi *Saddle Node* Dimensi Dua 30
2.13 Phase Potrait Bifurkasi *Transcritical* Dimensi Dua 30
2.14 Phase Potrait Bifurkasi *Subcritical Pitchfork* Dimensi Dua 30
2.15 Phase Potrait Bifurkasi *Supercritical Pitchfork* Dimensi Dua 31
2.16 Phase Potrait Bifurkasi *Degenerate Hopf* Dimensi Dua 31

3.1 Diagram Alur Penelitian 36

4.1 Diagram Kestabilan Laju Populasi ketika $0 \leq t \leq 1000$ bulan 62
4.2 Diagram Kestabilan Laju Populasi ketika $0 \leq t \leq 60000$ bulan . . . 63

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Hepatitis ialah jenis peradangan sel-sel hati, yang biasa disebabkan oleh infeksi (virus, bakteri, parasit), obat-obatan (termasuk obat tradisional), konsumsi alkohol, lemak yang berlebihan dan penyakit autoimun (InfoDATIN, 2014). Berdasarkan waktunya hepatitis virus dapat dibagi menjadi hepatitis akut dan hepatitis kronis. Ketika seseorang baru pertama kali terinfeksi virus hepatitis, maka kondisi itu disebut infeksi akut. Seseorang yang mengalami infeksi akut dapat merasakan gejala-gejala seperti demam, lemas, mual-mual, kuningnya bagian putih mata, kulit dan air seni. Jika setelah enam bulan gejala-gejala tersebut tidak berangsur membaik selama proses penyembuhan maka dapat didiagnosis memiliki infeksi kronis. Pada infeksi kronis ini virus terus berkembang dalam hati dan menimbulkan kerusakan. Hingga saat ini, terdapat kurang lebih tujuh jenis hepatitis yang sudah ditemukan, yaitu Hepatitis A, Hepatitis B, Hepatitis C, Hepatitis D, Hepatitis E, Hepatitis G dan Hepatitis TTV (*Transmition Transfution Virus*).

Hepatitis B sendiri merupakan penyakit infeksi yang disebabkan oleh Virus Hepatitis B (VHB) yang dapat mengakibatkan pengerasan hati (*liver cirrhosis*) dan dapat berkembang menjadi kanker hati (*carcinoma hepatocelluler*) (Depkes RI, 2002). HBsAg (*Hepatitis B Surface Antigen*) merupakan antigen permukaan yang ditemukan pada virus hepatitis B yang memberikan arti adanya infeksi hepatitis

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

B (InfoDATIN, 2018). Penyakit hepatitis B ini tergolong jenis penyakit hepatitis yang paling banyak ditemukan di seluruh dunia dan paling berbahaya dibandingkan dengan jenis hepatitis yang lain, karena hepatitis B dapat membunuh penderitanya secara perlahan-lahan. Hal ini terjadi karena virus hepatitis B dapat bertahan lama dan menetap dalam tubuh penderita (Robbi, 2018) dan dapat menyerang siapa saja tanpa mengenal jenis kelamin maupun usia. Penyakit hepatitis B ini lebih banyak menyerang anak-anak daripada orang dewasa karena daya tahan tubuh anak-anak relatif lebih lemah dibandingkan orang dewasa. Hepatitis B biasanya ditularkan dari orang ke orang melalui transfusi darah yang terkontaminasi virus hepatitis B, cairan tubuh, hubungan seksual, transmisi perintal dan peralatan yang telah mengandung cairan tubuh penderita yang terkontaminasi hepatitis B (Notoatmojo, 2004).

Hepatitis menjadi salah satu penyakit menular yang akan mempengaruhi angka kesakitan, angka kematian, status kesehatan masyarakat, angka harapan hidup, dan dampak sosial ekonomi yang lain (InfoDATIN, 2018). Menurut data *World Health Organization* (WHO) lebih dari 2 miliar orang terinfeksi virus hepatitis B, diantaranya sekitar 350 juta terinfeksi kronis dan menjadi pembawa (*carrier*) virus hepatitis B (Zainal, Winarko & Hanafi, 2015), sekitar 780 juta orang meninggal per tahun karena terinfeksi virus hepatitis B, sekitar 650 juta orang meninggal karena sirosis dan kanker hati yang disebabkan oleh hepatitis B kronis dan 130 juta karena hepatitis B akut (Sair, 2018). Setiap tahun ada lebih dari 4 juta kasus infeksi akut virus hepatitis B dan sekitar 25 % disebabkan oleh individu pembawa virus. Hepatitis B menyebabkan sekitar 1 juta orang meninggal akibat hepatitis kronis, sirosis atau kanker hati primer (Pang, Cui & Zhou, 2010). Infeksi hepatitis B berkembang menjadi kronis pada bayi saat lahir sebesar 90 % dan pada anak usia 1-5 tahun sebesar 30-60 % serta usia dewasa 2-6 % (CDC,

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

2005). Penularan virus hepatitis B sebesar 21 % terjadi secara perinatal, 48 % pada awal masa kanak-kanak dan 31 % remaja atau orang dewasa (Hollinger, dkk., 2007).

Pengendalian penyakit hepatitis B lebih dimungkinkan melalui upaya pencegahan dibandingkan dengan pengobatan yang masih dalam penelitian. Upaya pencegahan dengan imunisasi diberikan dengan cara memberikan vaksin, yaitu suatu bahan antigenik yang dapat menghasilkan kekebalan aktif terhadap suatu penyakit agar dapat mencegah pengaruh infeksi oleh suatu organisme, kedalam tubuh seseorang (Nugroho, 2009). Vaksin hepatitis B dapat mencegah hepatitis B dan penyakit yang disebabkan oleh hepatitis B, seperti kanker hati dan sirosis hati (The Immunization Action Coalition, 2018). Penderita penyakit hepatitis B telah memiliki kekebalan tubuh alami tetapi masih rentan terhadap penyakit itu kembali lagi atau menjadi parah. Namun dengan pemberian vaksin, pada individu yang rentan akan memperoleh tambahan imunitas untuk kekebalan tubuh sehingga jika nantinya individu tersebut terjangkit penyakit hepatitis B tidak akan parah. WHO menyatakan bahwa pemberian vaksin hepatitis B tidak akan menyembuhkan pembawa virus (*carrier*) yang kronis, tetapi pemberian vaksin diyakini 95 % efektif untuk mencegah berkembangnya penyakit menjadi carrier (Siregar, 2003).

Segala macam penyakit didunia ini pasti ada obat untuk mengobati penyakit tersebut, seperti pada sebuah Hadist yang diriwayatkan oleh Imam Bukhari dalam shahihnya, dari Sahabat Abu Hurairah bahwasanya Nabi bersabda, ”*Tidaklah Allah turunkan penyakit kecuali Allah turunkan pula obatnya*”, Dari riwayat Imam Muslim dari Jabir bin Abdillah dia berkata bahwa Nabi bersabda, ”*Setiap Penyakit pasti memiliki obat. Bila sebuah obat sesuai dengan penyakitnya maka dia akan sembuh dengan seizin Allah Subhanahu wa Ta’ala*”**(HR. Muslim)**.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Perkembangan ilmu pengetahuan dalam bidang kedokteran dalam pencegahan penyakit agar tidak meluas yaitu melalui vaksinasi, selain itu dalam bidang matematika juga dapat memberikan pengaruh penting untuk mencegah penyebaran suatu penyakit, yaitu melalui model matematika. Model matematika merupakan representasi dari bidang ilmu tertentu ke dalam bentuk pernyataan matematika yang diperoleh dari salah satu bidang ilmu matematika, yaitu pemodelan matematika.

Proses pemodelan matematika penyebaran suatu penyakit, dilakukan dengan cara mencari titik kesetimbangan (ekuilibrium). Titik kesetimbangan dibagi menjadi dua yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit, yang merupakan suatu kondisi dimana sudah tidak ada lagi penyakit yang menyerang seseorang atau tidak ada individu yang terserang penyakit dan titik kesetimbangan endemik, yang merupakan suatu kondisi dimana penyakit selalu ada dan mewabah dalam populasi tersebut (selalu ada individu yang terserang penyakit). Kemudian mencari bilangan reproduksi dasar(R_0) sebagai penentu apakah suatu penyakit akan menetap atau tidak dalam suatu populasi. Setelah itu perlu dilakukan analisis kestabilan dari titik kesetimbangan tersebut karena dari analisis tersebut dapat menunjukkan apakah penyakit tersebut akan endemik pada populasi atau tidak, kemudian dilanjutkan dengan menyelidiki kemungkinan terjadinya bifurkasi. Analisis bifurkasi yaitu analisis perubahan kestabilan pada suatu sistem terhadap titik ekuilibrium yang dipengaruhi oleh perubahan suatu parameter tertentu (Robbi, 2018). Pada kenyataannya ada beberapa faktor yang mempengaruhi berubahnya sebuah kestabilan sistem, perubahan tersebut mengakibatkan sebuah permasalahan baru yang menjadikan sistem yang telah dibentuk tidak bekerja dengan maksimal. Analisis bifurkasi ini bertujuan untuk meminimalkan terjadinya

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

perubahan kestabilan sistem yang dipengaruhi oleh beberapa faktor agar sistem yang dibentuk dapat bekerja secara maksimal (Kurniawan, 2017). Desy Kusuma Ningsih, dkk pada tahun 2016 juga telah melakukan analisis bifurkasi pada model epidemiologi SEIR demam berdarah di Surabaya (Ningsih, 2016).

Penularan penyakit hepatitis B dapat ditafsirkan ke dalam persamaan matematika. Pemodelan matematika pada penularan hepatitis B telah dikaji oleh Syafruddin Side pada tahun 2015 dengan menggunakan model epidemik SEIR, yaitu membagi kelompok populasi menjadi empat bagian yaitu *Suspectible*, *Exposed*, *Infected* dan *Recovered* (SEIR). Infeksi virus hepatitis B juga dapat dimodelkan dengan menggunakan model *Suspected*, *Infected* dan *Recovered* (SIR) (Larasati & Tjahjana, 2012). Seorang penderita hepatitis B jika diberikan vaksin akan menambah kekebalan pada tubuhnya. Salah satu bentuk pemodelan matematika dalam mereprsentasikan penyakit dengan pengaruh vaksinasi adalah model epidemi SEIV, yang mana populasi akan terbagi menjadi 4 populasi, yaitu populasi rentan (*Susceptible*), populasi terinkubasi (*Exposed*), populasi terinfeksi (*Infected*) dan populasi tervaksin (*Vaccinated*) (Sulisdiana, 2016). Model SEIV juga pernah digunakan untuk mengetahui penyebaran penyakt polio (Umam, 2014). Pemodelan penyakit hepatitis B ini bertujuan untuk mengetahui perkembangan dan mengetahui cara meminimalisirnya. Pada penelitian yang dilakukan oleh Kurnia Nur Pratama pada Tahun 2014 yang berjudul Analisis Stabilitas Model Epidemik SEIV (*Susceptible-Exposed-Infected-Vaccinated*) pada Penyebaran Penyakit Hepatitis B di Kabupaten Jember, mengkaji tentang model SEIV hepatitis B untuk mendapatkan bilangan reproduksi dasar agar dapat diketahui perilaku penyebaran penyakit hepatits B (Pratama, 2014). Pada penelitian tersebut pada laju pertumbuhan populasi rentan (*Susceptible*) yang mana

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

seharusnya jika dilihat pada diagram model SEIV, dapat berkurang karena adanya populasi rentan (*Susceptible*) yang sudah tervaksin akhirnya masuk ke populasi tervaksin *Vaccinated* atau dapat disimbolkan dengan $\rho\pi$, tetapi pada penelitian ini $\rho\pi$ tidak dimasukkan ke dalam perhitungan, sehingga perlu dilakukan perbaikan pada model SEIV ini dengan menyertakan $\rho\pi$ pada populasi *Susceptible*, dan perlu dilakukan analisis keberadaan bifurkasi pada model SEIV untuk mengetahui gangguan kestabilan yang terjadi pada model.

Berdasarkan latar belakang diatas, maka peneliti akan melakukan analis kestabilan dan analisis bifurkasi pada model epidemik SEIV penyebaran penyakit hepatitis B dengan menggunakan model pada penelitian (Pratama, 2014).

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang diatas, maka dapat diambil beberapa pokok permasalahan, yaitu:

1. Bagaimana hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan pada model epidemik SEIV penyebaran penyakit hepatitis B ?
2. Bagaimana hasil analisis keberadaan bifurkasi pada model epidemik SEIV penyebaran penyakit hepatitis B ?

1.3. Tujuan Penelitian

1. Mengetahui hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan pada model epidemik SEIV penyebaran penyakit hepatitis B
2. Mengetahui hasil analisis keberadaan bifurkasi pada model epidemik SEIV penyebaran penyakit hepatitis B

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

1.4. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penyusunan skripsi ini adalah:

1. Memperdalam dan mengembangkan wawasan dalam bidang pemodelan penyakit.
2. Dapat dijadikan sebagai acuan atau referensi untuk para pembaca, baik dari konsentrasi matematika maupun bidang lain, yang ingin membahas mengenai pemodelan penyakit terutama penyakit Hepatitis B.
3. Dapat dijadikan sebagai referensi secara medis dalam penanganan penyakit Hepatitis B.

1.5. Batasan Masalah

Penyusunan skripsi ini dibatasi oleh beberapa hal sebagai berikut:

1. Penelitian ini hanya memodelkan penyakit Hepatitis B
2. Simulasi model menggunakan data pada penelitian yang diteliti oleh Kurnia Nur Pratama
3. Tahapan dalam penelitian ini hanya sampai pada analisis bifurkasi

1.6. Sistematika Penulisan

Dalam penelitian ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari lima bab dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan Bab ini meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

BAB II Dasar Teori Bab ini menjelaskan beberapa teori yang berhubungan dengan penelitian, meliputi Hepatitis B

BAB III Metode Penelitian Bab ini menjelaskan langkah-langkah dalam penelitian

BAB IV Hasil dan Pembahasan Bab ini penulis akan menjelaskan hasil dari penelitian

BAB V Penutup Bab ini memaparkan kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Hepatitis B

Hepatitis B merupakan penyakit infeksi yang disebabkan oleh Virus Hepatitis B (VHB) yang dapat mengakibatkan pengerasan hati (*liver cirrhosis*) dan dapat berkembang menjadi kanker hati (*carcinoma hepatocelluler*) (Depkes RI, 2002). Virus hepatitis B termasuk *hepadnavirus*, berukuran 42-nm *double straned* DNA virus dengan terdiri dari *neucleocapsid core* (HBc Ag) berukuran 27 mm, yang pada bagian luarnya dikelilingi oleh lapisan *lippoprotein* yang berisi antigen permukaan (HBsAg). HBsAg (*Hepatitis B Surface Antigen*) merupakan antigen permukaan yang ditemukan pada virus hepatitis B yang memberikan arti adanya infeksi hepatitis B (InfoDATIN, 2018). Gejala hepatitis B tidak terlalu terasa karena virus hepatitis B butuh waktu sekitar 1-5 bulan untuk berkembang sejak terpapar virus sampai menimbulkan gejala pertamanya. Secara umum gejala hepatitis B yaitu, nafsu makan menurun, mual dan muntah, perut bagian bawah terasa nyeri, sakit kuning dan gejala yang meyerupai flu seperti lelah, badan terasa nyeri dan sakit kepala. Hepatitis B termasuk jenis penyakit hepatitis yang paling banyak ditemukan di seluruh dunia dan paling berbahaya dibandingkan dengan jenis hepatitis yang lain, karena hepatitis B dapat membunuh penderitanya secara perlahan-lahan. Hal ini terjadi karena virus hepatitis B dapat bertahan lama dan menetap dalam tubuh penderita (Robbi, 2018) dan dapat menyerang siapa saja tanpa mengenal jenis kelamin maupun usia. Penyakit hepatitis B ini lebih banyak

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

menyerang anak-anak daripada orang dewasa karena daya tahan tubuh anak-anak relatif lebih lemah dibandingkan orang dewasa.

Masa inkubasi virus hepatitis B rata-rata 60-90 hari. Durasi masa inkubasi ini bergantung pada banyaknya virus dalam tubuh penderita, cara penularan, faktor umur, jenis kelamin, kebiasaan hidup maupun pekerjaan.Faktor yang paling berpengaruh terhadap parahnya infeksi hepatitis B yaitu jumlah virus dan usia individu (Depkes RI, 2002). Hepatitis B biasanya ditularkan dari orang ke orang melalui transfusi darah yang terkontaminasi virus hepatitis B, cairan tubuh, hubungan seksual, transmisi perintal dan peralatan yang telah mengandung cairan tubuh penderita yang terkontaminasi hepatitis B (Notoatmojo, 2004).

Prosentasi infeksi hepatitis B berkembang menjadi kronis pada bayi saat lahir sebesar 90 % dan pada anak usia 1-5 tahun sebesar 30-60 % serta usia dewasa 2-6 % (CDC, 2005). Penularan virus hepatitis B sebesar 21 % terjadi secara perinatal, 48 % pada awal masa kanak-kanak dan 31 % remaja atau orang dewasa (Brauer, van de Driessche, Wu, 2008). Hasil dari beberapa studi menunjukkan bahwa sebesar 90 % bayi yang lahir dari ibu positif pengidap HBsAg dan tidak diimunisasi Hepatitis B maka akan menjadi pengidap kronis. Pemberian imunisasi Hepatitis B pada bayi umur 0-7 hari dosis pertama maka prosentasenya akan berubah menjadi hanya sekitar 23 % yang akan menjadi pengidap kronis. Jika pemberian imunisasi dilakukan pada bulan pertama kelahiran maka prosentasenya akan berubah menjadi sekitar 40 % yang akan menjadi pengidap kronis (Beasly, 1998). Efektivitas proteksi sebesar 85-95 % dalam mencegah infeksi virus hepatitis B apabila pemberian imunisasi dalam waktu 12 jam setelah lahir (Satgas Imunisasi-Ikatan Dokter Anak Indonesia, 2005). Imunisasi merupakan suatu cara untuk menimbulkan atau meningkatkan kekebalan tubuh seseorang secara aktif

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

terhadap penyakit dengan cara memasukkan vaksin ke dalam tubuh manusia (Depkes RI, 2002). Vaksinasi hepatitis B di Indonesia pada anak-anak dengan 3 dosis dalam 4 kali pemberian, yaitupada saat bayi baru lahir sampai usia kurang dari 7 hari, pada saat berusia 2 bulan, pada saat berusia 3 bulan dan pada saat berusia 6 bulan. Anak remaja ketika bayi belum diberi vaksin hepatitis B dibutuhkan vaksin sebanyak dua atau tiga dosis. Adanya vaksin hepatitis B ini diharapkan dapat memutus transmisi virus hepatitis B (Probandari, Handayani & Laksono, 2013).

2.2. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang meliputi turunan fungsi satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas (Ross, 1989). Berdasarkan banyaknya variabel bebas, persamaan diferensial dibedakan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

2.2.1. Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu variabel bebas. Contoh :

1. $\frac{dx}{dt} + 4tx = sint$
2. $\frac{du}{dt} = e^t$

2.2.2. Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap lebih dari satu variabel bebas. Contoh :

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

1. $\dfrac{\partial^2 p}{\partial r^2} - \dfrac{\partial^2 p}{\partial q^2} = 0$
2. $\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{\partial u}{\partial q} = 0$

2.3. Nilai Eigen

Misalkan A merupakan matriks berukuran $n \times n$, maka vektor tak nol x dalam R^n disebut vektor eigen dari matriks A, dan jika Ax merupakan kelipatan skalar dari x, maka untuk suatu skalar λ, $Ax = x\lambda$,yang mana λ ini merupakan nilai eigen dari matriks A, dan x merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. Untuk mencari nilai eigen dari matriks A, maka $Ax = \lambda x$ dikalikan dengan matriks identitas I, dapat ditulis menjadi $(\lambda I - A)x = 0$, λ akan menjadi nilai eigen jika dan hanya jika persamaan memiliki pemecahan tak nol, dapat ditulis sebagai

$$det(\lambda I - A)x = 0$$

persamaan tersebut merupakan persamaan karakteristik dari matriks A, skalar persamaan tersebut adalah nilai eigen dari matriks A. Determinan $(\lambda I - A)$, merupakan polinom λ yang disebut polinom karakteristik dari matriks A (Anton, 1998) Jika salah satu akar polinom karakteristik bernilai nol dan akar lainnya bernilai positif maka sistem non linear tak stabil. Jika salah satu akar polinom karakteristik bernilai nol dan akar lainnya bernilai negatif maka sistem non linear dapat stabil atau tidak stabil bergantung pada unsur non linear yang diabaikan (Campbell & Haberman, 2008)

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

2.4. Titik Kesetimbangan (Ekuilibirum)

Kestabilan suatu sistem dapat diketahui dengan penyelidikan melalui pemberian suatu nilai awal yang terletak pada persekitaran titik ekuilibirum.

Menurut (Wiggins, 1990) titik $\bar{x} \in R^n$ adalah titik ekuilibirum dari sistem $\dot{x} = f(x)$ jika dipenuhi

$$f(\bar{x}) = 0$$

Contoh :

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2 - 2x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1^2 - x_2$$

Misal $\bar{x} = (x_1, x_2)^T$ merupakan titik ekuilibirum pada persamaan sistem di atas, maka

$$x_1 x_2 - 2x_1 = 0$$

$$x_1^2 - x_2 = 0$$

sehingga diperoleh $\Rightarrow x_1^2 = x_2$

$\Rightarrow$ disubstitusikan

$$x_1 x_2 - 2x_1 = 0$$

$$x_1 x_1^2 - 2x_1 = 0$$

$$x_1^3 - 2x_1 = 0$$

$$x_1(x_1^2 - 2) = 0$$

$$x_1 = 0, atau x_1 = \pm\sqrt{2}$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

kemudian substitusikan nilai x ke dalam persamaan $x_1^2 = x_2$

$\Rightarrow x_1 = 0$

$$x_1^2 = x_2$$

$$0 = x_2$$

$\Rightarrow x_1 = \sqrt{2}$

$$\sqrt{2}^2 = x_2$$

$$2 = x_2$$

s $\Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}$

$$-\sqrt{2}^2 = x_2$$

$$2 = x_2$$

Jadi titik ekuilibirum dari sistem, yaitu $(0,0)^T, (\sqrt{2},2)^T$ dan $(-\sqrt{2},2)^T$

2.5. Kestabilan

Stabilitas merupakan perubahan kecil dalam syarat awal yang hanya menyebabkan pengaruh kecil terhadap penyelesaian. Kestabilan asimtotik berarti bahwa pengaruh dari suatu perubahan kecil cenderung hilang sama sekali, sedangkan ketakstabilan berrarti bahwa suatu perubahan kecil dalam syarat awal mempunyai pengaruh besar pada penyelesaian (Finizio & Ladas, 1982).

Misalkan terdapat suatu sistem

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$
$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$
$$\frac{dx_3}{dt} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

dengan a_{ij} adalah konstanta riil , dan $i, j = 1, .., 3$. Sistem tersebut dapat

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

dinyatakan dalam matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Secara ringkas dapat ditulis $\frac{dx}{dt} = Ax$.

Misalkan akar-akar persamaan karakteristiknya yaitu λ_1, λ_2 dan λ_3 disebut nilai eigen, yang mana nilai eigen didapat dari determinan dari sistem di atas. Nilai eigen ini berfungsi untuk menentukan jenis kestabilan suatu titik kesetimbangan dari sistem. Titik kesetimbangan x_1, x_2 dan x_3 bersifat

a. Stabil asimtotik, jika nilai eigen dari matriks A bernilai riil negatif,

b. Stabil center, jika semua nilai eigen memiliki bagian riil bernilai nol,

c. Tak stabil, jika sedikitnya satu nilai eigen memiliki bagian riil positif.

Teorema 2.5.1 *Titik kesetimbangan ($\bar{x}_0, \bar{y}_0$) stabil asimtotik jika dan hanya jika nilai karakteristik dari*

$$Matriks\ J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.

Analisis kestabilan dilakukan agar mengetahui laju penyebaran dari suatu penyakit, yang dilakukan pada titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik (Edward dkk, 2008).

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

2.6. Linearisasi

Linearisasi digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan diferensial non linear dengan menggunakan persamaan linear (Campbell & Haberman, 2008), seperti:

$$\frac{dx}{dt} = g(x, y) \tag{2.1}$$

$$\frac{dy}{dt} = h(x, y) \tag{2.2}$$

dimana $g(x, y)$ dan $h(x, y)$ merupakan suatu sistem non linear, jika (x_0, y_0) merupakan titik ekuilibirum, maka $g(x_0, y_0) = 0$ dan $h(x_0, y_0) = 0$ dengan menggunakan aproksimasi taylor, maka Persamaan (2.1) dan Persamaan (2.2) dapat dilinearkan, diperoleh

$$g(x, y) \approx g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$h(x, y) \approx h(x_0, y_0) + h_x(x_0, y_0)(x - x_0) + h_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

atau dapat ditulis seperti sistem linear dari persamaan diferensial sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{2.3}$$

$$\frac{dx}{dt} = h_x(x_0, y_0)(x - x_0) + h_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{2.4}$$

pergantian dari titik ekuilibirum yang dilakukan untuk persamaan orde pertama, yaitu $z = x - x_0$ dan $w = y - y_0$. Karena x_0 dan y_0 konstan, maka persamaan Persamaan (2.3) dan Persamaan (2.4) menjadi

$$\frac{dz}{dt} = az + bw$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$$\frac{dw}{dt} = cz + dw$$

Persamaan tersebut merupakan sistem linear homogen, dimana a, b, c, d konstan, sehingga $a = g_x(x_0, y_0), b = g_y(x_0, y_0), c = h_x(x_0, y_0), d = h_y(x_0, y_0)$. Persamaan diatas dituliskan:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \\ h_x(x_0, y_0) & h_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$$

Matriks yang elemen-elemennya berupa turunan pertama disebut matriks jacobian.

$$MatriksJacobian = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Sebuah matriks harus dievaluasi pada titik kesetimbangan $x = x_0, y = y_0$. Matriks pergantian dari titik ekuilibirum adalah

$$r = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

sehingga dapat ditulis menjadi $\frac{dr}{dt} = Ar$ yang mana A merupakan matriks konstan yang diperoleh dari mengevaluasi matriks jacobian pada titik ekuilibrium, yaitu

$$A = \begin{bmatrix} g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \\ h_x(x_0, y_0) & h_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

2.7. Kriteria Kestabilan *Routh Hurwitz*

Persamaan karakteristik suatu sistem persamaan diferensial biasa berdimensi n adalah persamaan polinomial berderajat n yang mungkin sulit untuk menemukan semua akar secara eksplisit. Kriteria kestabilan *Routh Hurwitz* adalah suatu kriteria yang menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik, yang mana semua akar persamaan karakteristik memiliki bagian real negatif tanpa menghitung akar-akar karakteristik secara langsung (Ikhtisholiyah, 2011). Hal ini memberikan kondisi pada koefisien dari persamaan karakteristik:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{2.5}$$

dengan semua akar memiliki bagian real negatif.

Kemudian susun koefisien persamaan karakteristik menjadi:

Tabel 2.1 Tabel Routh-Hurwitz

λ^n	a_0	a_2	a_4
λ^{n-1}	a_1	a_3	a_5
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
λ^0	q		

dengan,

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$$
$$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$$
$$b_3 = \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1}$$
$$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$c_2 = \dfrac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$

Untuk $n = 2$, kondisi *Routh-Hurwitz* adalah

$$a_1 > 0, a_2 > 0 \tag{2.6}$$

Untuk $n = 3$, kondisi *Routh-Hurwitz* adalah

$$a_3 > 0, a_1 > 0, a_1 a_2 > a_3 \tag{2.7}$$

Untuk $n = 4$, kondisi *Routh-Hurwitz* adalah

$$a_4 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0, a_3(a_1 a_2 - a_3) > a_1^2 a_4 \tag{2.8}$$

Untuk polinomial bererajat n, maka terdapat n kondisi *Routh-Hurwitz* (Brauer, van de Driessche, Wu, 2008).

2.8. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar merupakan rata-rata banyaknya individu rentan yang terinfeksi secara langsung oleh individu lain yang sudah terinfeksi bila individu yang terinfeksi tersebut masuk ke dalam populasi yang seluruhnya masih rentan, digunakan sebagai parameter untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit

Bilangan reproduksi dasar ini diperoleh dengan menentukan nilai eigen matriks jacobian pada titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik (Rost & Wu, 2008).

a. Teorema kesetimbangan bebas penyakit (*disease free equilibrium*) adalah stabil

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$. Jika $R_0 < 1$ maka semua solusi konvergen ke titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease free equilibrium*),

b. Titik kesetimbangan endemik (*endemic equilibrium*) ada jika dan hanya jika $R_0 > 1$, dan juga jika titik kesetimbangan tersebut ada, maka titik kesetimbangan tersebut tunggal dan stabil asimtotik lokal.

2.9. Model Epidemi

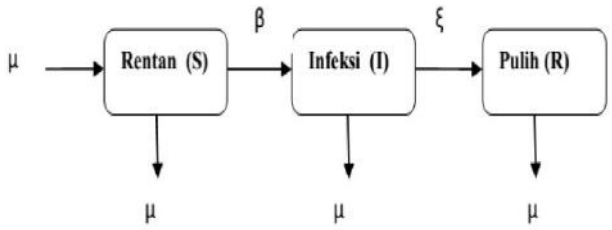
2.9.1. Model Epidemi SIR

Susceptible (S) merupakan kelas individu yang tidak terinfeksi oleh sebuah penyakit tetapi memiliki peluang untuk tertular penyakit sehingga menyebabkan kelompok ini menjadi terinfeksi dan berpindah ke dalam kelas *Infected*.

Infected (I) merupakan kelas individu yang terinfeksi oleh suatu penyakit dan dapat menularkan penyakit tersebut kepada individu *Susceptible*. Waktu yang dibutuhkan oleh penderita terinfeksi penyakit disebut dengan periode penyakit. Setelah melewati periode penyakt, maka individu tersebut akan sembuh dari penyakitnya dan berpindah ke dalam kelas *Recovered* (R).

Recovered (R) merupakan kelas individu yang telah sembuh dari penyakit (Resmawan, 2017).

Adapun diagram kompartemen, yaitu:



Gambar 2.1 Diagram Model SIR

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Dengan asumsi tingkat penularan penyakit sebanding dengan jumlah pertemuan antara indvidu rentan dan individu terinfeksi, maka model SIR sesuai Gambar (2.1) dapat dituliskan ke dalam bentuk matematika seperti yang ditunjukkan pada persamaan berikut (Resmawan, 2017):

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \beta S \frac{I}{N} - \mu S$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} - \varepsilon I - \mu I$$
$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon I - \mu R$$

dengan:

N = Total populasi

S = Individu rentan terinfeksi penyakit

I = Individu terinfeksi penyakit dan dapat sembuh

R = Individu yang telah sembuh dan kebal dari penyakit

μ = Laju kelahiran dan kematian

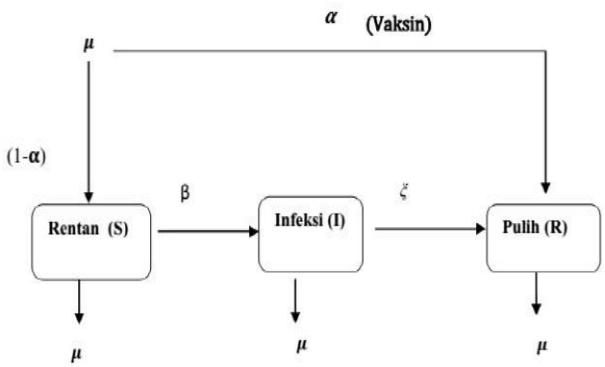
β = Laju penularan penyakit

ε = Laju sembuh dari penyakit

2.9.2. Model SIR dengan Vaksinasi

Model endemik SIR dengan vaksinasi merupakan pengembangan dari model endemik SIR klasik (Resmawan, 2017). Adapun diagram kompartemen pada model SIR dengan vaksinasi, yaitu:

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id



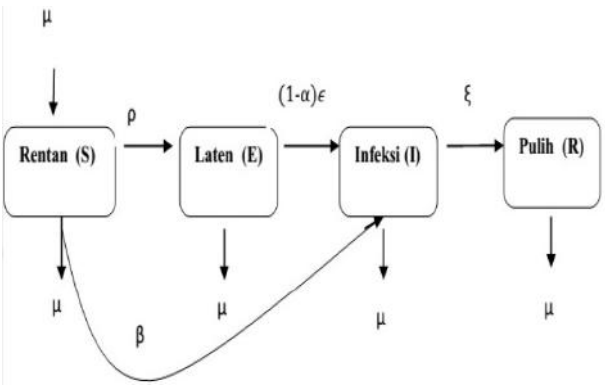
Gambar 2.2 Diagram Model SIR dengan Vaksinasi

Diagram kompartemen pada Gambar (2.2) secara matematis dapat dituliskan seperti yang ditunjukkan pada persamaan berikut:

$$\frac{dS}{dt} = (1-\alpha)\mu N - \beta S\frac{I}{N} - \mu S$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta S\frac{I}{N} - \varepsilon I - \mu I$$
$$\frac{dR}{dt} = \alpha\mu N + \varepsilon I - \mu R$$

2.9.3. Model Epidemi SEIR

Model SEIR merupakan pengembangan dari model SIR. Model ini terdiri dari 4 kelas, diantaranya *Susceptible* (S), *Exposed* (E), *Infected* (I) dan *Recovered* (R) dengan total populasi $N = S+E+I+R$ (Resmawan, 2017). Adapun diagram kompartemen pada model SEIR, yaitu:



Gambar 2.3 Diagram Model SEIR

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Berdasarkam diagram kompartemen pada Gambar (2.3) secara matematis dapat dituliskan sebagaimana yang ditunjukkan pada persamaan berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \rho s - \beta S\frac{I}{N} - \mu S$$
$$\frac{dE}{dt} = \rho S - (1-\alpha)\beta E - \mu E\frac{dI}{dt} = \beta S\frac{I}{N} + (1-\alpha)\beta E - \varepsilon I - \mu I$$
$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon I - \mu R$$

dengan:

S = Individu rentan terinfeksi penyakit

E = Individu terekspos

I = Individu terinfeksi penyakit dan dapat sembuh

R = Individu yang telah sembuh dan kebal dari penyakit

μ = Laju kelahiran dan kematian

β = Laju penularan penyakit

α = Laju vaksinasi

ε = Laju sembuh dari penyakit

ρ = Laju kekebalan tubuh

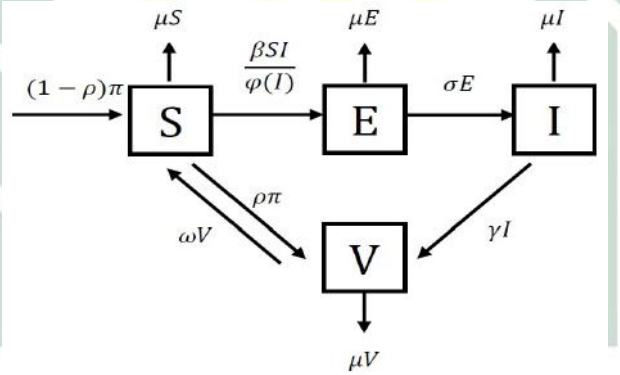
2.10. Model SEIV

Pada model SEIV ini, populasi dibagi menjadi empat subpopulasi, yaitu S (*Susceptible*) adalah populasi individu rentan dan sehat terhadap suatu penyakit, E (*Exposed*) adalah populasi individu yang mengalami masa inkubasi penyakit atau telah terinfeksi tetapi belum bisa menularkan penyakitnya. I (*Infected*) adalah populasi individu yang sudah terinfeksi penyakit dan dapat menularkan penyakitnya, kemudian V (*Vaccinated*) adalah populasi individu yang telah divaksin, tetapi dapat menjadi *Susceptible* kembali karena tidak memiliki kekebalan alami dari tubuhnya (Sulisdiana, 2016). Model matematiika penyakit hepatitis B ini dibuat dengan berbagai asumsi, yaitu Terdapat jumlah kelahiran dan

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

kematian dalam suatu populasi, setiap individu yang lahir akan menjadi rentan, masa inkubasi penyakit hepatitis B yaitu 60-90 hari, hanya terdapat satu macam penyebaran penyakit dan populasi tertutup sehingga faktor migrasi diabaikan, karena dapat memberikan pengaruh terhadap perubahan model.

Penularan penyakit dari *infected* dan *exposed* dapat dikontrol dengan pemberian vaksin (*vaccinated*) agar tidak menular ke individu lain dan dapat sembuh dengan adanya kekebalan. Namun pada populasi rentan juga dapat memiliki kekebalan terhadap penyakit dengan pemberian vaksin saat lahir (*vaccinated*) ((Abdulrazak, Ibrahim, & Usman, 2012). Vaksinasi tersebut dapat efektif memproduksi kekebalan dan perlindungan dari virus maka hal inilah yang menjadi alasan pembentukan model SEIV seperti pada Gambar



Gambar 2.4 Diagram Model SEIV

Model SEIV pada Gambar 2.4 dapat diformulasikan sebagai berikut:

1. Laju pertumbuhan populasi rentan (*Susceptible*) dalam satuan waktu t

$$\frac{dS(t)}{dt} = (1-\rho)\pi - \frac{\beta S(t)I(t)}{\varphi(I(t))} - \mu S(t) + \omega V(t) - \rho\pi \tag{2.9}$$

Populasi ini dapat meningkat karena adanya laju kelahiran π pada populasi, individu yang tidak tervaksin $(1-\rho)\pi$ dan hilangnya kekebalan tubuh pada

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

individu yang telah tervaksin ωV. Populasi ini juga dapat berkurang karena adanya kematian alami μ, individu yang tervaksin $\rho\pi$, tindakan perlindungan pada individu rentan yang terinfeksi $\varphi(I)$ dan laju penyebaran oleh individu yang terinfeksi β.

2. Laju pertumbuhan populasi terekspos (*Exposed*) dalam satuan waktu t

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{\varphi(I(t))} - (\mu + \sigma)E(t) \tag{2.10}$$

Populasi ini dapat meningkat karena kejadian $\frac{\beta SI}{\varphi(I)}$, kemudian dapat berkurang karena adanya kematian alami μ dan laju penyebaran individu terekspose menjadi terinfeksi σE.

3. Laju pertumbuhan populasi terinfeksi (*Infected*) dalam satuan waktu t

$$\frac{dI(t)}{dt} = \sigma E(t) - (\mu + \gamma)I(t) \tag{2.11}$$

Populasi ini dapat meningkat karena adanya laju penyebaran individu terekspose menjadi terinfeksi σE, kemudian dapat berkurang karena adanya kematian alami μ dan laju individu terinfeksi menjadi tervaksin γI.

4. Laju pertumbuhan populasi tervaksin (*Vaccinated*) dalam satuan waktu t

$$\frac{dV(t)}{dt} = \rho\pi + \gamma I(t) - (\mu + \omega)V(t) \tag{2.12}$$

Populasi ini dapat meningkat karena adanya individu rentan yang tervaksin $\rho\pi$, laju individu terinfeksi menjadi tervaksin γI, kemudian dapat berkurang karena adanya kematian alami μ dan hilangnya kekebalan tubuh sehingga kembali

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

menjadi rentan ωV.

Sehingga persamaan total populasi nya adalah sebagai berikut:

$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + V(t), N > 0$

Dengan,

$S(t) =$ Jumlah individu rentan pada saat t, dengan $S \geq 0$

$E(t) =$ Jumlah individu terekspose pada saat t, dengan $E \geq 0$

$I(t) =$ Jumlah individu terinfeksi pada saat t, dengan $I \geq 0$

$V(t) =$ Jumlah individu tervaksinasi pada saat t, dengan $V \geq 0$

$\pi =$ Laju kelahiran dan imigrasi individu

$\rho =$ Tingkat individu yang tervaksin

$\beta =$ Tingkat individu rentan yang terinfeksi

$\mu =$ Laju kematian alami

$\sigma =$ Tingkat individu terekspos menjadi terinfeksi

$\gamma =$ Tingkat individu terinfeksi yang telah sembuh menjadi individu tervaksin

$\omega =$ Tingkat individu kehilangan kekebalan atau penurunan vaksin

$\varphi =$ Tingkat karantina individu yang terinfeksi atau tindakan perlindungan pada individu rentan.

Untuk mempermudah penulisan maka notasi $S(t), E(t), I(t)$ dan $V(t)$ berturut-turut ditulis dengan S, E, I dan V.

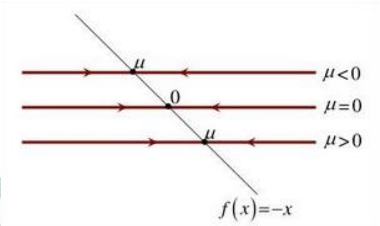
2.11. Bifurkasi

Bifurkasi adalah perubahan kestabilan titik kesetimbangan suatu sistem PD yang mengandung parameter dan variabel akibat berubahnya nilai parameter. Berikut merupakan jenis bifurkasi pada sistem persamaan diferensial, misal diberikan suatu persamaan diferensial $\dot{x} = F(\mu, x)$, dengan μ adalah parameter dan x adalah variabel (Rozi, 2014).

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

a. $F(\mu, x)$ merupakan fungsi linear

Jika fungsi F berupa fungsi linear, misal $\dot{x} = \mu - x$. Untuk setiap nilai parameter μ yang berbeda, solusi dari sistem tersebut selalu menuju titik kesetimbangan, sehingga sistem ini tidak mengalami perubahan atau tidak mengalami bifurkasi.



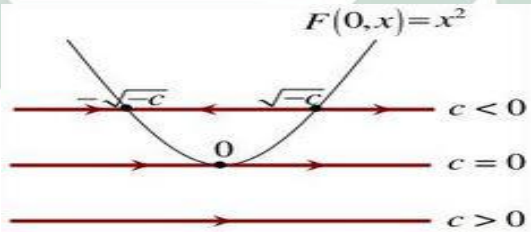
Gambar 2.5 Phase Potrait Fungsi Linear

b. $F(\mu, x)$ merupakan fungsi kuadrat

Jika fungsi F berupa fungsi kuadrat, maka terdapat jenis bifurkasi yaitu *Saddle Node* dan *Transcritical*.

i. *Saddle Node Bifurcation*

Bentuk umum sistem yang mengalami bifurkasi ini yaitu: $\dot{x} = c \pm x^2$

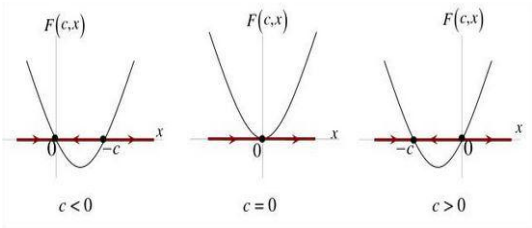


Gambar 2.6 Phase Potrait Bifurkasi *Saddle Node*

ii. *Transcritical Bifurcation*

Bentuk umum sistem yang mengalami bifurkasi ini yaitu: $\dot{x} = cx \pm x^2$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id



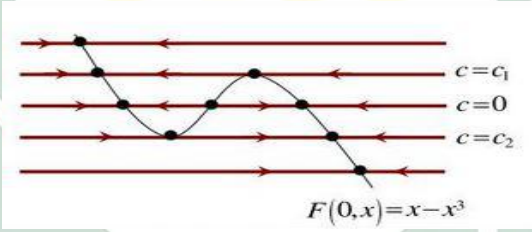
Gambar 2.7 Phase Potrait Bifurkasi *Transcritical*

c. $F(\mu, x)$ merupakan fungsi kubik

Jika fungsi F berupa fungsi kubik, maka terdapat jenis bifurkasi yaitu *Hysteresis*, *Subcritical Pitchfork*, *Supercritical Pitchfork* dan *Imperfect Bifurcation*

i. *Hysteresis Bifurcation*

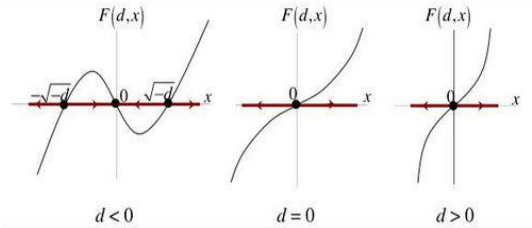
Bentuk umum sistem yang mengalami bifurkasi ini yaitu: $\dot{x} = c + x - x^3$



Gambar 2.8 Phase Potrait Bifurkasi *Hysteresis*

ii. *Subcritical Pitchfork Bifurcation*

Bentuk umum sistem yang mengalami bifurkasi ini yaitu: $\dot{x} = dx + x^3$

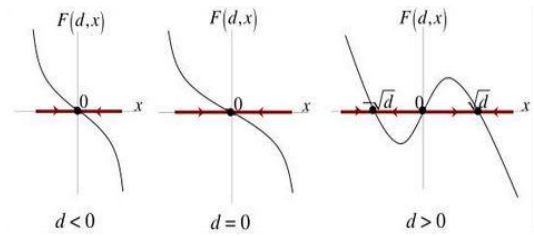


Gambar 2.9 Phase Potrait Bifurkasi *Subcritical Pitchfork*

iii. *Supercritical Pitchfork Bifurcation*

Bentuk umum sistem yang mengalami bifurkasi ini yaitu: $\dot{x} = dx - x^3$

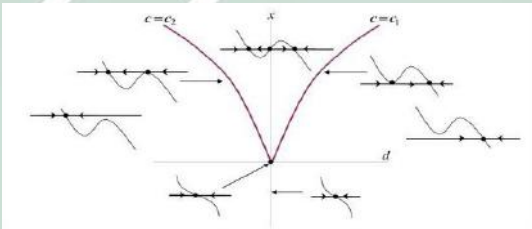
digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id



Gambar 2.10 Phase Potrait Bifurkasi *Supercritical Pitchfork*

iv. *Imperfect Bifurcation*

Bentuk umum sistem yang mengalami bifurkasi ini yaitu: $\dot{x} = c + dx - x^3$



Gambar 2.11 Phase Potrait Bifurkasi *Imperfect*

Berikut merupakan jenis bifurkasi pada sistem persamaan diferensial dimensi dua, misal diberikan suatu persamaan diferensial $\dot{x} = F(\mu, x)$, dengan μ adalah parameter dan x adalah variabel.

a. $F(\mu, x)$ merupakan fungsi kuadrat

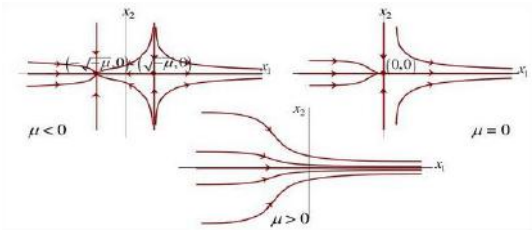
Jika fungsi F berupa fungsi kuadrat, maka terdapat jenis bifurkasi yaitu *Saddle Node* dan *Transcritical*.

i. *Saddle Node Bifurcation*

Bentuk umum sistem yang mengalami bifurkasi ini yaitu: $\dot{x_1} = \mu x_1^2$

$\dot{x_2} = -x_2$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

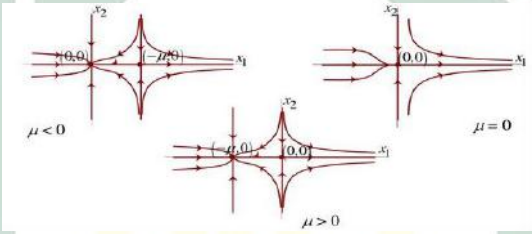


Gambar 2.12 Phase Potrait Bifurkasi *Saddle Node* Dimensi Dua

ii. *Transcritical Bifurcation*

Bentuk umum sistem yang mengalami bifurkasi ini yaitu: $\dot{x_1} = \mu x_1 + x_1^2$

$\dot{x_2} = -x_2$



Gambar 2.13 Phase Potrait Bifurkasi *Transcritical* Dimensi Dua

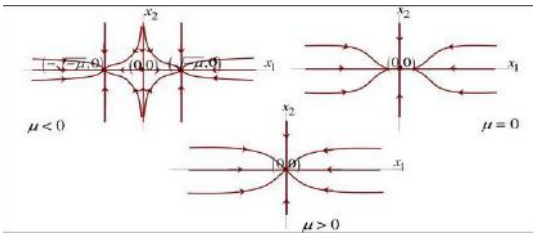
b. $F(\mu, x)$ merupakan fungsi kubik

Jika fungsi F berupa fungsi kubik, maka terdapat jenis bifurkasi yaitu *Subcritical Pitchfork* dan *Supercritical Pitchfork*

i. *Subcritical Pitchfork Bifurcation*

Bentuk umum sistem yang mengalami bifurkasi ini yaitu: $\dot{x_1} = -\mu x_1 + x_1^3$

$\dot{x_2} = -x_2$



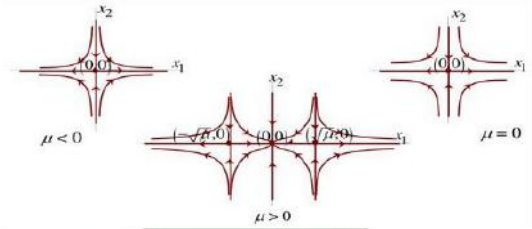
Gambar 2.14 Phase Potrait Bifurkasi *Subcritical Pitchfork* Dimensi Dua

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

ii. *Supercritical Pitchfork Bifurcation*

Bentuk umum sistem yang mengalami bifurkasi ini yaitu: $\dot{x_1} = -\mu x_1 + x_1^3$

$\dot{x_2} = -x_2$



Gambar 2.15 Phase Potrait Bifurkasi *Supercritical Pitchfork* Dimensi Dua

c. *Degenerate Hopf Bifurcation*

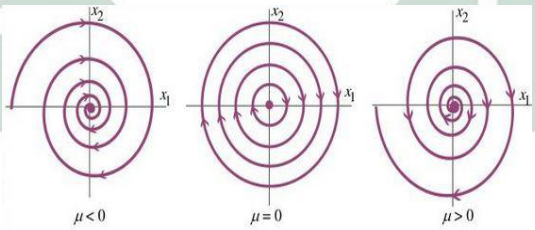
Bentuk umum sistem yang mengalami bifurkasi ini yaitu: $\dot{x_1} = x_2 + \mu x_1$

$\dot{x_2} = -x_1 + \mu x_2$

Dalam koordinat polar, sistem berbentuk

$\dot{r} = \mu r$

$\dot{\theta} = -1$



Gambar 2.16 Phase Potrait Bifurkasi *Degenerate Hopf* Dimensi Dua

2.12. Runge Kutta Orde Empat

Metode Runge Kutta merupakan alternatif lain dari deret Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi (x, y) pada titik terpilih dalam setiap selang langkah. Metode Runge-Kutta adalah metode

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

persamaan diferensial biasa yang paling populer karena banyak dipakai dalam praktek.

Metode Runge Kutta yang umum digunakan untuk mengintegrasikan persamaan diferensial, yaitu berbentuk:

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan

$k_1 = f(xr, yr)$

$k_2 = f(xr + \frac{h}{2}, yr + \frac{h}{2}k_1)$

$k_3 = f(xr + \frac{h}{2}, yr + \frac{h}{2}k_2)$

$k_3 = f(xr + h, yr + hk_3)$

((Aisyah, 2018)

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1. Jenis Penelitian

Penelitian ini termasuk ke dalam jenis penelitian kuantitatif, karena pada penelitian ini unsur perhitungan dan data penelitian berbentuk numerik atau angka.

3.2. Data dan Sumber Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder yang berasal dari penelitian yang dilakukan oleh Kurnia Nur Pratama dalam penelitiannya yang berjudul Analisis Stabilitas Model Epidemik SEIV (*Suspectible-Exposed-Infected-Vaccinated*) Pada Penyebaran Penyakit Hepatitis B Di Kabupaten Jember (Pratama, 2014), dalam penelitian tersebut data diambil dari Badan Pusat Statistika Kabupaten Jember dan Dinas Kesehatan Kabupaten Jember. Data-data tersebut adalah sebagai berikut:

a. Data jumlah populasi di Kabupaten Jember pada tahun 2013, yaitu 2.451.081 jiwa

b. Data jumlah individu yang terinfeksi hepatitis B di Kabupaten Jember pada tahun 2013, diasumsikan bahwa dalam 1 tahun setiap orang mengalami 2 kali kambuh, maka dapat dihitung dengan jumlah kasus hepatitis B dibagi 2, yaitu $\frac{2.191}{2} = 1.095$ jiwa

c. Data jumlah bayi yang telah divaksin hepatitis B di Kabupaten Jember pada tahun 2013, yaitu 226.108 jiwa

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

d. Data jumlah kelahiran di Kabupaten Jember pada tahun 2013, yaitu 36.926 jiwa

e. Data jumlah individu rentan (usia 0-5 tahun) di Kabupaten Jember pada tahun 2013, yaitu 280.447 jiwa diantaranya adalah 36.926 bayi, 109.972 balita dan 133.542 anak pra sekolah

3.3. Parameter

Parameter yang digunakan pada penelitian ini yaitu, laju kelahiran individu (π), tingkat individu yang tervaksin (ρ), tingkat individu rentan yang terinfeksi (β), laju kematian alami (μ), tingkat individu terekspose menjadi terinfeksi (σ), tingkat individu terinfeksi yang telah sembuh menjadi individu tervaksin (γ), tingkat individu kehilangan kekebalan atau penurunan vaksin (ω), tingkat karantina individu yang terinfeksi atau tindakan perlindungan pada individu rentan (φ). Parameter ini dapat dihitung dengan menggunakan rumus berikut:

a. Laju kelahiran individu (π)

Kehadiran individu baru diasumsikan masuk ke dalam populasi rentan

$$\pi = \frac{Jumlah\ individu\ baru}{Bulan} \tag{3.1}$$

b. Tingkat individu yang tervaksin (ρ)

$$\rho = \frac{Jumlah\ bayi\ tervaksin}{Jumlah\ kelahiran} \tag{3.2}$$

Bayi yang lahir tetapi tidak tervaksin disimbolkan dengan $(1 - \rho)$

c. Tingkat individu rentan yang terinfeksi (β)

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$$\beta = \frac{1}{Jumlah\ rentan \times masa\ pemulihan} \tag{3.3}$$

d. Laju kematian alami (μ)

Nilai μ ini diestimasi berdasarkan rata-rata angka harapan hidup.

$$\mu = \frac{1}{63,22\ tahun} \tag{3.4}$$

e. Tingkat individu terekspose menjadi terinfeksi (σ)

$$\sigma = \frac{1}{Masainkubasi} \tag{3.5}$$

f. Tingkat individu terinfeksi yang telah sembuh menjadi individu tervaksin (γ)

$$\gamma = \frac{1}{Masa\ pemulihan} \tag{3.6}$$

g. Tingkat individu kehilangan kekebalan atau penurunan vaksin (ω)

$$\omega = \frac{1}{Masa\ rentan\ kembali} \tag{3.7}$$

h. Tingkat karantina individu yang terinfeksi atau tindakan perlindungan pada individu rentan (φ)

$$\varphi(I) = \varphi(0) = 1 \tag{3.8}$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

3.4. Rancangan Penelitian

Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian

Berdasarkan Gambar 3.1, maka dapat diuraikan sebagai berikut :

1. Studi Literatur

   Langkah pertama yaitu melakukan studi literatur tentang penyakit Hepatitis B, model epidemik SEIV dan bifurkasi yang didapatkan dari buku maupun jurnal penelitian yang telah melakukan penelitian terkait pemodelan penyakit hepatitis

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

B dan analisis bifurkasi dari model penyakit.

2. Membentuk Model Epidemik SEIV Hepatitis B

   Pembentukan model epidemik SEIV yaitu dengan menentukan asumsi-asumsi yang sesuai dengan model epidemik SEIV dan berkaitan dengan karakteristik penyakit hepatitis B, kemudian membuat diagram transfer berdasarkan asumsi tersebut, setalah itu terbentuklah model matematika hepatitis B yang disajikan dalam bentuk sistem persamaan diferensial non linear.

3. Mencari Titik Kesetimbangan (Ekuilibirum)

   Model penyakit memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan endemik yang diperoleh jika $E \neq 0$ dan $I \neq 0$ dan titik kesetimbangan bebas penyakit yang diperoleh jika $E = 0$ dan $I = 0$.

4. Analisis Kesetimbangan

   Titik kesetimbangan yang diperoleh kemudian dilinearisasi melalui matriks jacobian. Analisis kestabilan ini dapat dilihat dari nilai eigen pada matriks jacobian yang telah dilinearisasi pada tahap sebelumnya dengan menggunakan analisis kestabilan kriteria *Routh-Hurwitz*.

5. Menetukan Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

   Bilangan reproduksi dasar ini berfungsi untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit yang dapat diperoleh dari nilai eigen titik kesetimbangan bebas penyakit pada matriks jacobian yang telah dilinearisasi, jika nilai $R_0 < 1$ maka berarti penyakit akan hilang. Jika nilai $R_0 > 1$ maka berarti penyakit akan tetap ada pada daerah penyebaran penyakit tersebut.

6. Analisis Keberadaan Bifurkasi

   Analisis bifurkasi dilakukan untuk mengetahui adanya bifurkasi dalam sistem,

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

bifurkasi merupakan perubahan yang terjadi pada sistem yang disebabkan karena adanya perubahan nilai-nilai pada parameter.

7. Solusi Numerik dan Simulasi

   Tahap simulasi numerik ini menggunakan metode Runge Kutta Orde Empat, dilakukan dengan bantuan *software MATLAB* untuk menggambarkan diagram kestabilan populasi dan penyelesaian numerik dari model SEIV hepatitis B.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Titik Kesetimbangan

Model penyebaran suatu penyakit mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan diperoleh jika memenuhi $\frac{dS(t)}{dt} = 0, \frac{dE(t)}{dt} = 0, \frac{dI(t)}{dt} = 0$ dan $\frac{dV(t)}{dt} = 0$. Didapatkan

a. Dari $\frac{dS(t)}{dt} = 0$ akan diperoleh S
$\frac{dS(t)}{dt} = (1-\rho)\pi - \frac{\beta S(t)I(t)}{\varphi(I)} - \mu S(t) + \omega V(t) - \rho\pi$
dimana $\varphi(I) = \varphi(0) = 1$, sehingga menjadi

$$\frac{dS(t)}{dt} = (1-\rho)\pi - \beta S(t)I(t) - \mu S(t) + \omega V(t) - \rho\pi \tag{4.1}$$

$$0 = (1-\rho)\pi - \beta S(t)I(t) - \mu S(t) + \omega V(t) - \rho\pi$$

$$\beta S(t)I(t) + \mu S(t) = (1-\rho)\pi + \omega V(t) - \rho\pi$$

$$(\beta I(t) + \mu)S(t) = (1-\rho)\pi + \omega V(t) - \rho\pi$$

$$S(t) = \frac{(1-\rho)\pi + \omega V(t) - \rho\pi}{(\beta I(t) + \mu)} \tag{4.2}$$

b. Dari $\frac{dE(t)}{dt} = 0$ ini akan diperoleh $E(t)$
$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{\varphi(I)} - (\mu + \sigma)E(t)$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

dimana $\varphi(I) = \varphi(0) = 1$, sehingga menjadi

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\mu + \sigma)E(t) \tag{4.3}$$

$$0 = \beta S(t)I(t) - (\mu + \sigma)E(t)$$

$$(\mu + \sigma)E(t) = \beta S(t)I(t)$$

$$E(t) = \frac{\beta S(t)I(t)}{(\mu + \sigma)} \tag{4.4}$$

c. Dari $\frac{dI(t)}{dt} = 0$ ini akan diperoleh $I(t)$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \sigma E(t) - (\mu + \gamma)I(t)$$

$$0 = \sigma E(t) - (\mu + \gamma)I(t)$$

$$(\mu + \gamma)I(t) = \sigma E(t)$$

$$I(t) = \frac{\sigma E(t)}{(\mu + \gamma)} \tag{4.5}$$

d. Dari $\frac{dV(t)}{dt} = 0$ ini akan diperoleh $V(t)$

$$\frac{dV(t)}{dt} = \rho\pi + \gamma I(t) - (\mu + \omega)V(t)$$

$$0 = \rho\pi + \gamma I(t) - (\mu + \omega)V(t)$$

$$(\mu + \omega)V(t) = \rho\pi + \gamma I(t)$$

$$V(t) = \frac{\rho\pi + \gamma I(t)}{(\mu + \omega)} \tag{4.6}$$

Setelah didapatkan $S(t), E(t), I(t)$ dan $V(t)$ maka akan mempermudah dalam mencari titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemiknya.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

4.1.1. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit merupakan suatu kondisi dimana tidak terdapat penyebaran virus hepatitis B dalam suatu populasi. Oleh karena itu, untuk memperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit ini, maka diasumsikan tidak ada infeksi virus hepatitis B, jadi $E_0 = 0$ dan $I_0 = 0$, kemudian substitusikan ke Persamaan (4.2),(4.4),(4.5) dan (4.6). Titik kesetimbangan bebas penyakit dapat dinyatakan dalam $\xi_0 = (S_0, E_0, I_0, V_0) = (S_0, 0, 0, V_0)$. Perhitungan mencari titik kesetimbangan bebas penyakit, sebagai berikut:

Substitusikan $I_0 = 0$ ke Persamaan (4.4) untuk memperoleh (E_0)

$$E_0 = \frac{\beta S_0 I_0}{(\mu + \sigma)}$$
$$E_0 = \frac{\beta S_0 (0)}{(\mu + \sigma)}$$

Sehingga didapatkan

$$E_0 = 0 \tag{4.7}$$

Substitusikan $E_0 = 0$ ke Persamaan (4.5) untuk memperoleh (I_0)

$$I_0 = \frac{\sigma E_0}{(\mu + \gamma)}$$
$$I_0 = \frac{\sigma (0)}{(\mu + \gamma)}$$

Sehingga didapatkan

$$I_0 = 0 \tag{4.8}$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Substitusikan $I_0 = 0$ ke Persamaan (4.6) untuk memperoleh (V_0)

$$V_0 = \frac{\rho\pi + \gamma I_0}{(\mu + \omega)}$$
$$V_0 = \frac{\rho\pi + \gamma(0)}{(\mu + \omega)}$$

Sehingga didapatkan

$$V_0 = \frac{\rho\pi}{(\mu + \omega)} \tag{4.9}$$

Substitusikan $I_0 = 0$ dan V_0 ke Persamaan (4.2) untuk memperoleh (S_0)

$$S_0 = \frac{(1-\rho)\pi + \omega V_0 - \rho\pi}{(\beta I_0 + \mu)}$$
$$S_0 = \frac{(1-\rho)\pi + \omega\left(\frac{\rho\pi}{(\mu+\omega)}\right) - \rho\pi}{(\beta(0) + \mu)}$$
$$S_0 = \frac{(1-\rho)\pi + \omega\left(\frac{\rho\pi}{(\mu+\omega)}\right) - \rho\pi}{\mu}$$

Sehingga didapatkan

$$S_0 = \frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \frac{\rho\pi}{\mu} \tag{4.10}$$

Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakitnya yaitu:

$$\xi_0 = (S_0, E_0, I_0, V_0)$$
$$\xi_0 = \left(\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \frac{\rho\pi}{\mu}, 0, 0, \frac{\rho\pi}{(\mu+\omega)}\right)$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

4.1.2. Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik merupakan suatu kondisi dimana terdapat penyebaran virus hepatitis B yang akan terus menetap dalam suatu populasi, sehingga titik kesetimbangan endemik dapat diperoleh ketika $E_1 \neq 0$ dan $I_1 \neq 0$. Titik kesetimbangan endemik dapat dinyatakan dalam $\xi_1 = (S_1, E_1, I_1, V_1)$. Perhitungan mencari titik kesetimbangan endemik, sebagai berikut:

Substitusikan Persamaan (4.4) pada Persamaan (2.11) untuk memperoleh S_1, yaitu:

$$\begin{aligned}
\frac{dI(t)}{dt} &= \sigma E_1 - (\mu+\gamma)I_1 \\
0 &= \sigma\left(\frac{\beta S_1 I_1}{(\mu+\sigma)}\right) - (\mu+\gamma)I_1 \\
\frac{\sigma\beta S_1 I_1}{(\mu+\sigma)} &= (\mu+\gamma)I_1
\end{aligned}$$

$$S_1 = \frac{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}{\sigma\beta} \tag{4.11}$$

Setelah itu substitusikan S_1 dan Persamaan (4.6)ke Persamaan (4.1) untuk memperoleh I_1:

$$\frac{dS(t)}{dt} = (1-\rho)\pi - \beta S_1 I_1 - \mu S_1 + \omega V_1 - \rho\pi = 0$$

$$(1-\rho)\pi - \beta\left(\frac{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}{\sigma\beta}\right)I_1 - \mu\left(\frac{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}{\sigma\beta}\right) + \omega\left(\frac{\rho\pi+\gamma I_1}{(\mu+\omega)}\right) - \rho\pi = 0$$

$$(1-\rho)\pi - \frac{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)I_1}{\sigma} - \frac{\mu(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}{\sigma\beta} + \frac{\omega\rho\pi}{(\mu+\omega)} + \frac{\omega\gamma I}{(\mu+\omega)} - \rho\pi = 0$$

$$\frac{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)I_1}{\sigma} - \frac{\omega\gamma I_1}{(\mu+\omega)} = (1-\rho)\pi - \frac{\mu(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}{\sigma\beta} + \frac{\omega\rho\pi}{(\mu+\omega)} - \rho\pi$$

$$\left(\frac{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}{\sigma} - \frac{\omega\gamma}{(\mu+\omega)}\right)I_1 = (1-\rho)\pi - \frac{\mu(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}{\sigma\beta} + \frac{\omega\rho\pi}{(\mu+\omega)} - \rho\pi$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$$I_1 = \frac{(1-\rho)\pi - \dfrac{\mu(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}{\sigma\beta} + \dfrac{\omega\rho\pi}{(\mu+\omega)} - \rho\pi}{\dfrac{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}{\sigma} - \dfrac{\omega\gamma}{(\mu+\omega)}}$$

$$= \frac{(1-\rho)\pi - \dfrac{\mu(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}{\sigma\beta} + \dfrac{\omega\rho\pi}{(\mu+\omega)} - \rho\pi}{\dfrac{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)(\mu+\omega) - \omega\gamma\sigma}{\sigma(\mu+\omega)}}$$

$$= \left((1-\rho)\pi - \frac{\mu(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}{\sigma\beta} + \frac{\omega\rho\pi}{(\mu+\omega)} - \rho\pi\right) \times \frac{\sigma(\mu+\omega)}{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)(\mu+\omega) - \omega\gamma\sigma}$$

$$= \frac{(1-\rho)\pi\sigma\beta(\mu+\omega) - \mu(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)(\mu+\omega) + \omega\rho\pi\sigma\beta - \rho\pi\sigma\beta(\mu+\omega)}{\sigma\beta(\mu+\omega)}$$

$$\times \frac{\sigma(\mu+\omega)}{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)(\mu+\omega) - \omega\gamma\sigma}$$

$$I_1 = \frac{(1-\rho)\pi\sigma\beta(\mu+\omega) - \mu(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)(\mu+\omega) + \omega\rho\pi\sigma\beta - \rho\pi\sigma\beta(\mu+\omega)}{\beta((\mu+\gamma)(\mu+\sigma)(\mu+\omega) - \omega\gamma\sigma)} \tag{4.12}$$

Untuk memperoleh V_1 substitusikan I_1 ke Persamaan (4.6)

$$V_1 = \frac{\rho\pi + \gamma I_1}{(\mu+\omega)}$$

$$= \frac{\rho\pi + \gamma\left(\dfrac{(1-\rho)\pi\sigma\beta(\mu+\omega) - \mu(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)(\mu+\omega) + \omega\rho\pi\sigma\beta - \rho\pi\sigma\beta(\mu+\omega)}{\beta((\mu+\gamma)(\mu+\sigma)(\mu+\omega) - \omega\gamma\sigma)}\right)}{(\mu+\omega)}$$

$$V_1 = \frac{\rho\pi\beta((\mu+\gamma)(\mu+\sigma)(\mu+\omega) - \omega\gamma\sigma) + \gamma(1-\rho)\pi\sigma\beta(\mu+\omega) - \gamma\mu(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)(\mu+\omega) + \gamma\omega\rho\pi\beta\sigma - \gamma\rho\pi\beta\sigma(\mu+\omega)}{\beta(\mu+\omega)((\mu+\gamma)(\mu+\sigma)(\mu+\omega) - \omega\gamma\sigma)} \tag{4.13}$$

Untuk memperoleh E_1 substitusikan I_1 dan S_1 ke Persamaan (4.4)

$$E_1 = \frac{\beta S_1 I_1}{(\mu+\sigma)}$$

$$= \frac{\beta\left(\dfrac{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}{\sigma\beta}\right)\left(\dfrac{(1-\rho)\pi\sigma\beta(\mu+\omega) - \mu(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)(\mu+\omega) + \omega\rho\pi\sigma\beta - \rho\pi\sigma\beta(\mu+\omega)}{\beta((\mu+\gamma)(\mu+\sigma)(\mu+\omega) - \omega\gamma\sigma)}\right)}{(\mu+\sigma)}$$

$$E_1 = \frac{(1-\rho)\pi\sigma\beta(\mu+\omega)(\mu+\gamma) - \mu(\mu+\gamma)^2(\mu+\sigma)(\mu+\omega) + \omega\rho\pi\sigma\beta(\mu+\gamma) - \rho\pi\sigma\beta(\mu+\omega)(\mu+\gamma)}{\beta\sigma((\mu+\gamma)(\mu+\sigma)(\mu+\omega) - \omega\gamma\sigma)} \tag{4.14}$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Jadi, titik kesetimbangan endemiknya yaitu:

$\xi_1 = (S_1, E_1, I_1, V_1)$

4.2. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar merupakan jumlah rata-rata infeksi baru yang dihasilkan oleh individu terinfeksi ke dalam populasi individu rentan (*Susceptible*). Dalam menentukan R_0 ini digunakan metode *Driessche* dan *Watmough*, yang mana metode ini menggunakan titik kesetimbangan bebas penyakit dan persamaan yang digunakan yaitu persamaan populasi terinfeksi sebagai berikut:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta SI - (\mu + \sigma)E$$
$$\frac{dI(t)}{dt} = \sigma E - (\mu + \gamma)I$$

Pada persamaan di atas didapatkan matriks $\mathcal{F}$ yang merupakan laju kemunculan infeksi baru pada populasi I dan matriks $\mathcal{V}$ merupakan laju dari perpindahan individu keluar dari populasi I dikurangi laju dari perpindahan individu masuk ke dalam populasi I, sebagai berikut:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & \beta SI \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathcal{V} = \begin{bmatrix} (\mu+\sigma)E & 0 \\ -\sigma E & (\mu+\gamma)I \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial \beta SI}{\partial I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } V = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(\mu+\sigma)E}{\partial E} & 0 \\ \dfrac{\partial(-\sigma)E}{\partial E} & \dfrac{\partial(\mu+\gamma)I}{\partial I} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \beta S_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } V = \begin{bmatrix} (\mu+\sigma) & 0 \\ -\sigma & (\mu+\gamma) \end{bmatrix}$$

Substitusikan S_0

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \beta\left[\dfrac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \dfrac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \dfrac{\rho\pi}{\mu}\right] \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; dan \;\; V = \begin{bmatrix} (\mu+\sigma) & 0 \\ -\sigma & (\mu+\gamma) \end{bmatrix}$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Setelah itu dicari matriks *next generation* yaitu $G = FV^{-1}$, dimana $V^{-1} = \dfrac{1}{det(V)} \times adj(V)$

$$V^{-1} = \frac{1}{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} \times \begin{bmatrix} (\mu+\sigma) & 0 \\ -\sigma & (\mu+\gamma) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(\mu+\sigma)} & 0 \\ \dfrac{\sigma}{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} & \dfrac{1}{(\mu+\gamma)} \end{bmatrix}$$

Setelah didapatkan V^{-1} maka akan dicari matriks $G = FV^{-1}$

$$G = F \times V^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \beta\left[\dfrac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \dfrac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \dfrac{\rho\pi}{\mu}\right] \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(\mu+\sigma)} & 0 \\ \dfrac{\sigma}{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} & \dfrac{1}{(\mu+\gamma)} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\beta\sigma\left[\dfrac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \dfrac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \dfrac{\rho\pi}{\mu}\right]}{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} & \dfrac{\beta\left[\dfrac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \dfrac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \dfrac{\rho\pi}{\mu}\right]}{(\mu+\gamma)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah itu dicari persamaan karakteristik dari mariks G untuk memperoleh nilai eigen. Persamaan karakteristik diperoleh dengan menggunakan rumus $|G-\lambda I| = 0$, sehingga

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\beta\sigma\left[\dfrac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \dfrac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \dfrac{\rho\pi}{\mu}\right]}{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} - \lambda & \dfrac{\beta\left[\dfrac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \dfrac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \dfrac{\rho\pi}{\mu}\right]}{(\mu+\gamma)} \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$-\lambda\left(\frac{\beta\sigma\left[\dfrac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \dfrac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \dfrac{\rho\pi}{\mu}\right]}{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} - \lambda\right)$$

Nilai R_0 merupakan nilai eigen dominan dari matriks *next generation* sehingga

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

didapatakan nilai R_0 sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\beta\sigma\left[\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \frac{\rho\pi}{\mu}\right]}{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)}$$

$$R_0 = \beta\sigma\left[\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \frac{\rho\pi}{\mu}\right] \times \frac{1}{(\mu^2+\mu\gamma+\mu\sigma+\sigma\gamma)}$$

Nilai R_0 ini akan menentukan apakah suatu penyakt akan menghilang atau menetap dalam suatu populasi. Jika nilai $R_0 < 1$ berarti bahwa populasi akan bebas dari penyakit hepatitis B, tetapi jika nilai $R_0 > 1$ berarti penyakit hepatitis B ini akan selalu ada dalam populasi.

4.3. Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan

Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui laju perubahan pada model SEIV penyakit hepatitis B. Persamaan (4.1), (4.3), (2.11), (2.12) merupakan persamaan tak linier, oleh karena itu sebelum melakukan analisis kestabilan, perlu dilakukan linierisasi terlebih dahulu dengan menggunakan matriks Jacobian. Persamaan yang akan dilinierisasi sebagai berikut:

$$f_1 = (1-\rho)\pi - \beta SI - \mu S + \omega V - \rho\pi \tag{4.15}$$

$$f_2 = \beta SI - (\mu+\sigma)E \tag{4.16}$$

$$f_3 = \sigma E - (\mu+\gamma)I \tag{4.17}$$

$$f_4 = \rho\pi + \gamma I - (\mu+\omega)V \tag{4.18}$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Matriks Jacobian dari Persamaan (4.15), (4.16), (4.17) dan (4.18), adalah sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial V} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial V} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial V} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial E} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial V} \end{bmatrix}$$

Perhitungan turunan dalam matriks Jacobian di atas adalah sebagai berikut:

Perhitungan baris pertama

$$\frac{\partial f_1}{\partial S} = \frac{\partial((1-\rho)\pi - \beta SI - \mu S + \omega V - \rho\pi)}{\partial S} = -\beta I - \mu$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial E} = \frac{\partial((1-\rho)\pi - \beta SI - \mu S + \omega V - \rho\pi)}{\partial E} = 0$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial I} = \frac{\partial((1-\rho)\pi - \beta SI - \mu S + \omega V - \rho\pi)}{\partial I} = -\beta S$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial V} = \frac{\partial((1-\rho)\pi - \beta SI - \mu S + \omega V - \rho\pi)}{\partial V} = \omega$$

Perhitungan baris kedua

$$\frac{\partial f_2}{\partial S} = \frac{\partial(\beta SI - (\mu+\sigma)E)}{\partial S} = \beta I$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial E} = \frac{\partial(\beta SI - (\mu+\sigma)E)}{\partial E} = -(\mu+\sigma)$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial I} = \frac{\partial(\beta SI - (\mu+\sigma)E)}{\partial I} = \beta S$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial V} = \frac{\partial(\beta SI - (\mu+\sigma)E)}{\partial V} = 0$$

Perhitungan baris ketiga

$$\frac{\partial f_3}{\partial S} = \frac{\partial(\sigma E - (\mu+\gamma)I)}{\partial S} = 0$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial E} = \frac{\partial(\sigma E - (\mu+\gamma)I)}{\partial E} = \sigma$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial I} = \frac{\partial(\sigma E - (\mu+\gamma)I)}{\partial I} = -(\mu+\gamma)$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial V} = \frac{\partial(\sigma E - (\mu+\gamma)I)}{\partial V} = 0$$

Perhitungan baris keempat

$$\frac{\partial f_4}{\partial S} = \frac{\partial(\rho\pi + \gamma I - (\mu+\omega)V)}{\partial S} = 0$$
$$\frac{\partial f_4}{\partial E} = \frac{\partial(\rho\pi + \gamma I - (\mu+\omega)V)}{\partial E} = 0$$
$$\frac{\partial f_4}{\partial I} = \frac{\partial(\rho\pi + \gamma I - (\mu+\omega)V)}{\partial I} = \gamma$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$$\frac{\partial f_4}{\partial V} = \frac{\partial(\rho\pi + \gamma I - (\mu+\omega)V)}{\partial V} = -(\mu+\omega)$$

Sehingga didapatkan hasil:

$$J = \begin{bmatrix} -\beta I - \mu & 0 & -\beta S & \omega \\ \beta I & -(\mu+\sigma) & \beta S & 0 \\ 0 & \sigma & -(\mu+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\mu+\omega) \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Setelah diperoleh matriks Jacobian ini, maka dengan menggunakan nilai eigen dari matriks Jacobian dapat ditentukan kestabilannya. Karena pada model penyebaran suatu penyakit mempunyai dua titik kesetimbangan, oleh karena itu analisis kestabilan perlu dilakukan disetiap titik kesetimbangan, yaitu di titik kesetimbangan bebas penyakit dan di titik kesetimbangan endemik.

4.3.1. Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Analisis kestabilan akan dilakukan disekitar titk kesetimbangan bebas penyakit hepatitis B. Substitusikan ($\xi_0 = (S_0, 0, 0, V_0)$) ke dalam matriks Jacobian (4.19) yang telah diperoleh, sehingga didapatkan matriks Jacobian titik kesetimbangan bebas penyakit ($J(\xi_0)$) sebagai berikut:

$$J(\xi_0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\beta\left[\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \frac{\rho\pi}{\mu}\right] & \omega \\ 0 & -(\mu+\sigma) & \beta\left[\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \frac{\rho\pi}{\mu}\right] & 0 \\ 0 & \sigma & -(\mu+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\mu+\omega) \end{bmatrix}$$

Setelah itu dicari persamaan karakteristik dari matriks $J(\xi_0)$ untuk memperoleh nilai eigen. Persamaan karakteristik diperoleh dengan menggunakan rumus $|J(\xi_0)-$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$\lambda I| = 0$, sehingga

$$\begin{vmatrix} -(\mu+\lambda) & 0 & -\beta\left[\frac{(1-\rho)\pi}{\mu}+\frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)}-\frac{\rho\pi}{\mu}\right] & \omega \\ 0 & -(\mu+\sigma+\lambda) & \beta\left[\frac{(1-\rho)\pi}{\mu}+\frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)}-\frac{\rho\pi}{\mu}\right] & 0 \\ 0 & \sigma & -(\mu+\gamma+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\mu+\omega+\lambda) \end{vmatrix} = 0 \tag{4.20}$$

Hasil determinan dari matriks (4.20) diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$(\mu+\omega+\lambda)(\mu+\lambda)\left((\mu+\sigma+\lambda)(\mu+\gamma+\lambda)-\beta\sigma\left[\frac{(1-\rho)\pi}{\mu}+\frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)}-\frac{\rho\pi}{\mu}\right]\right) \tag{4.21}$$

Berdasarkan **Teorema 2.5.1** titik kesetimbangan bebas penyakit dikatakan stabil jika dan hanya jika akar-akar dari persamaan karakteristik (4.21) mempunyai nilai real negatif. Didapatkan nilai eigen sebagai berikut:

$\Rightarrow (\mu+\omega+\lambda) = 0$

$\lambda_1 = -(\mu+\omega)$

$\Rightarrow (\mu+\lambda) = 0$

$\lambda_2 = -\mu$

Karena laju kematian alami (μ) dan tingkat individu kehilangan kekebalan (ω) bernilai positif, maka terlihat jelas bahwa nilai $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$ atau memiliki nilai real negatif. Untuk nilai eigen yang lain diperoleh dari akar persamaan berikut:

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$$\Rightarrow \left((\mu+\sigma+\lambda)(\mu+\gamma+\lambda)-\beta\sigma\left[\frac{(1-\rho)\pi}{\mu}+\frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)}-\frac{\rho\pi}{\mu}\right]\right)=0$$

$$\lambda^2+\lambda(2\mu+\sigma+\gamma)+(\mu^2+\mu\gamma+\mu\sigma+\mu\gamma)-\beta\sigma\left[\frac{(1-\rho)\pi}{\mu}+\frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)}-\frac{\rho\pi}{\mu}\right]=0 \tag{4.22}$$

Selanjutnya akan ditentukan suatu syarat agar akar-akar dari Persamaan (4.22) memiliki nilai real negatif. Terlihat bahwa tanda dari nilai eigen pada Persamaan (4.22) sulit ditentukan, oleh karena itu digunakan kriteria *Routh Hurwitz*. Persamaan (4.22) dapat dituliskan dalam tabel *Routh Hurwitz* sebagai berikut:

Tabel 4.1 Tabel *Routh Hurwitz* Bebas Penyakit

λ^2	a_0	a_2
λ^1	a_1	
λ^0	b_1	

dengan:

$a_0 = 1,$

$a_2 = (\mu^2+\mu\gamma+\mu\sigma+\mu\gamma)-\beta\sigma\left[\frac{(1-\rho)\pi}{\mu}+\frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)}-\frac{\rho\pi}{\mu}\right],$

$a_1 = (2\mu+\sigma+\gamma),$

$b_1 = \frac{a_1a_2-a_0(0)}{a_1}$

$b_1 = a_2$

$b_1 = (\mu^2+\mu\gamma+\mu\sigma+\mu\gamma)-\beta\sigma\left[\frac{(1-\rho)\pi}{\mu}+\frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)}-\frac{\rho\pi}{\mu}\right]$

Pada kriteria *Routh Hurwitz* sistem dikatakan stabil jika kolom pertama tabel *Routh Hurwitz* bernilai positif. Nilai $a_0 = 1$, maka jelas positif. Nilai $a_1 = (2\mu+\sigma+\gamma)$, jelas positif karena tingkat individu terekspos menjadi terinfeksi (σ) dan tingkat individu terinfeksi yang telah sembuh menjadi individu

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

tervaksin (γ) bernilai positif. Nilai b_1 akan dianalisa sebagai berikut:
$b_1 = (\mu^2 + \mu\gamma + \mu\sigma + \mu\gamma) - \beta\sigma\left[\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \frac{\rho\pi}{\mu}\right]$ akan bernilai positif jika

$$(\mu^2 + \mu\gamma + \mu\sigma + \mu\gamma) - \beta\sigma\left[\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \frac{\rho\pi}{\mu}\right] > 0$$

$$(\mu^2 + \mu\gamma + \mu\sigma + \mu\gamma) > \beta\sigma\left[\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \frac{\rho\pi}{\mu}\right]$$

Kedua ruas kalikan dengan $\frac{1}{(\mu^2 + \mu\gamma + \mu\sigma + \mu\gamma)}$

$$1 > \frac{1}{(\mu^2 + \mu\gamma + \mu\sigma + \mu\gamma)} \times \beta\sigma\left[\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \frac{\rho\pi}{\mu}\right]$$

Bisa ditulis menjadi

$$\frac{1}{(\mu^2 + \mu\gamma + \mu\sigma + \mu\gamma)} \times \beta\sigma\left[\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \frac{\rho\pi}{\mu}\right] < 1$$

$$R_0 < 1$$

R_0 merupakan bilangan reproduksi dasar. Jadi dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit ini akan stabil asimtotis jika memenuhi $R_0 < 1$.

4.3.2. Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik

Analisis kestabilan akan dilakukan di sekitar titik kesetimbangan endemik. Substitusikan titik kesetimbangan endemik ($\xi_1 = (S_1, E_1, I_1, V_1)$) ke dalam matriks Jacobian (4.19) yang telah diperoleh, sehingga didapatkan matriks Jacobian titik kesetimbangan endemik ($J(\xi_1)$) sebagai berikut:

$$J(\xi_1) = \begin{bmatrix} -a & 0 & -b & c \\ d & -e & b & 0 \\ 0 & f & -g & 0 \\ 0 & 0 & j & -i \end{bmatrix}$$

dengan:

$$a = \beta\left(\frac{(1-\rho)\pi\sigma\beta(\mu+\omega) - \mu(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)(\mu+\omega) + \omega\rho\pi\sigma\beta - \rho\pi\sigma\beta(\mu+\omega)}{\beta((\mu+\gamma)(\mu+\sigma)(\mu+\omega) - \omega\gamma\sigma)}\right) + \mu$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$b = \beta\left(\frac{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}{\sigma\beta}\right)$

$c = \omega$

$d = \beta\left(\frac{(1-\rho)\pi\sigma\beta(\mu+\omega) - \mu(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)(\mu+\omega) + \omega\rho\pi\sigma\beta - \rho\pi\sigma\beta(\mu+\omega)}{\beta((\mu+\gamma)(\mu+\sigma)(\mu+\omega) - \omega\gamma\sigma)}\right)$

$e = (\mu+\sigma)$

$f = \sigma$

$g = (\mu+\gamma)$

$j = \gamma$

$i = (\mu+\omega)$

Setelah itu dicari persamaan karakteristik dari matriks $J(\xi_1)$ untuk memperoleh nilai eigen. Persamaan karakteristik diperoleh dengan menggunakan rumus $|J(\xi_1) - \lambda I| = 0$, sehingga

$$\begin{vmatrix} -(a+\lambda) & 0 & -b & c \\ d & -(e+\lambda) & b & 0 \\ 0 & f & -(g+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & j & -(i+\lambda) \end{vmatrix} \tag{4.23}$$

Hasil determinan dari matriks (4.23) diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\lambda^4 + \lambda^3(a+e+g+i) + \lambda^2(ae+ag-bf+ai+eg+ei+gi) \\ &\quad + \lambda(egi - abf - bdf - aeg - aei - agi - bfi) - abfi + bdfi - cdfj + aegi \end{aligned} \tag{4.24}$$

Berdasarkan **Teorema 2.5.1** titik kesetimbangan endemik dikatakan stabil jika dan hanya jika akar-akar dari persamaan karakteristik (4.24) mempunyai nilai real negatif. Untuk menentukan syarat agar akar-akar Persamaan (4.24) memiliki nilai

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

real negatif, digunakan kriteria *Routh Hurwitz*. Persamaan (4.24) dapat dituliskan dalam tabel *Routh Hurwitz* sebagai berikut:

Tabel 4.2 Tabel *Routh Hurwitz* Endemik

λ^4	a_0	a_2	a_4
λ^3	a_1	a_3	
λ^2	b_1	b_2	
λ^1	c_1		
λ^0	d_1		

dengan,

$a_0 = 1,$

$a_2 = (ae + ag - bf + ai + eg + ei + gi),$

$a_4 = -abfi + bdfi - cdfj + aegi,$

$a_1 = (a + e + g + i),$

$a_3 = (egi - abf - bdf - aeg - aei - agi - bfi),$

$b_1 = \dfrac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$

$b_2 = \dfrac{a_1a_4 - a_0(0)}{a_1} = a_4$

$c_1 = \dfrac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$

$d_1 = \dfrac{c_1b_2 - b_1(0)}{c_1} = b_2$

Pada kriteria *Routh Hurwitz* sistem dikatakan stabil jika kolom pertama pada tabel *Routh Hurwitz* bernilai positif, yang berarti bahwa nilai $a_1 > 0, a_1a_2 > a_0a_3, b_1a_3 > a_1b_2, d_1 > 0$, dan dikatakan stabil jika nilai $R_0 > 1$.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

4.4. Analisis Keberadaan Bifurkasi

Pada analisis keberadaan bifurkasi menggunakan titik kesetimbangan endemik agar diperoleh fungsi dari populasi $Infected(I)$ $(f(I))$ untuk mencari persamaan R_0 yang optimum, yang mana akan digunakan untuk membuat kurva bifurkasi sehingga untuk R_0 yan lebih kecil dari nilai optimum tidak terjadi penyebaran penyakit menular. Berikut perhitungan untuk mencari $f(I)$: Substitusikan Persamaan (4.4) ke dalam Persamaan (2.11)

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - (\mu + \gamma)I$$
$$0 = \sigma\left(\frac{\beta SI}{\mu + \sigma}\right) - (\mu + \gamma)I$$

Diperoleh S sebagai berikut

$$S = \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\sigma\beta} \tag{4.25}$$

Setelah itu substitusikan S yang telah diperoleh dan Persamaan (4.6)ke Persamaan (2.9), didapatkan: $\frac{dS}{dt} = (1 - \rho)\pi - \beta SI - \mu S + \omega V - \rho\pi$

$$(1 - \rho)\pi - \beta\left(\frac{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\sigma\beta}\right)I - \mu\left(\frac{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\sigma\beta}\right) + \omega\left(\frac{\rho\pi + \gamma I}{(\mu + \omega)}\right) - \rho\pi = 0$$
$$(1 - \rho)\pi - \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)I}{\sigma} - \frac{\mu(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\sigma\beta} + \frac{\omega\rho\pi}{(\mu + \omega)} + \frac{\omega\gamma I}{(\mu + \omega)} - \rho\pi = 0$$
$$\frac{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)I}{\sigma} - \frac{\omega\gamma I}{(\mu + \omega)} + (1 - \rho)\pi - \frac{\mu(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\sigma\beta} + \frac{\omega\rho\pi}{(\mu + \omega)} - \rho\pi = 0$$
$$\left(\frac{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\sigma} - \frac{\omega\gamma}{(\mu + \omega)}\right)I + (1 - \rho)\pi - \frac{\mu(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\sigma\beta} + \frac{\omega\rho\pi}{(\mu + \omega)} - \rho\pi = 0$$
$$\left(\frac{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\sigma} - \frac{\omega\gamma}{(\mu + \omega)}\right)I - \frac{\mu(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\sigma\beta}(1 - R_0) = 0$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Bifurkasi terjadi pada sistem persamaan non linier, tetapi pada hasil uraian di atas didapatkan persamaan linier $f(I) = aI - b$, dengan $a = \left(\frac{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}{\sigma} - \frac{\omega\gamma}{(\mu+\omega)}\right)$ dan $b = \frac{\mu(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}{\sigma\beta}(1 - R_0)$. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa sistem ini tidak terjadi bifurkasi.

4.5. Solusi Numerik dan Simulasi

Simulasi numerik dilakukan untuk menganalisa model SEIV penyakit hepatitis B dan untuk mengetahui *error* antara nilai eksak dengan nilai numerik. Penyelesaian numerik yang digunakan adalah metode Runge Kutta Orde Empat. Metode ini merupakan salah satu dari metode yang banyak digunakan dalam menyelesaikan suatu persamaan differensial, dengan suatu galat pemotongan h^4. h merupakan langkah waktu (*step size*), pada penelitian ini digunakan $h = 0.1$ karena dari berbagai sumber yang didapat menggunakan $h = 0.1$.

Data yang digunakan dalam simulasi ini yaitu data pada Kabupaten Jember, yaitu data jumlah populasi, jumlah individu yang terinfeksi, jumlah bayi yang telah divaksin, jumlah kelahiran dan jumlah individu rentan. Langkah awal yang dilakukan untuk mendapatkan solusi numerik model SEIV adalah dengan menentukan nilai parameter yang digunakan yaitu π, ρ, β, μ, σ, γ, ω dan φ. Dengan menggunakan Persamaan (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) dan (4.26), berikut perhitungan mencari nilai parameter:

a. Laju kelahiran individu (π)

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{Jumlah\ individu\ baru}{Bulan}\\ &= \frac{36926}{12}\\ &= 3077,4\ jiwa/bulan\end{aligned}$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

b. Tingkat individu yang tervaksin (ρ)

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{Jumlah\ bayi\ tervaksin}{Jumlah\ kelahiran}\\ &= \frac{226108}{36926} \div 12\\ &= 0,5103/bulan\end{aligned}$$

c. Tingkat individu rentan yang terinfeksi (β)

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{Jumlah\ rentan \times masa\ pemulihan}\\ &= \frac{1}{280447 \times 6\ bulan}\\ &= 0,00000059/bulan\end{aligned}$$

d. Laju kematian alami (μ)

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{63,22\ tahun}\\ &= \frac{1}{758,64\ bulan}\\ &= 0,001318/bulan\end{aligned}$$

e. Tingkat individu terekspose menjadi terinfeksi (σ)

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{Masainkubasi}\\ &= \frac{1}{75\ hari}\\ &= \frac{1}{2,5\ bulan}\\ &= 0,4/bulan\end{aligned}$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

f. Tingkat individu terinfeksi yang telah sembuh menjadi individu tervaksin (γ)

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{Masa\ pemulihan}\\ &= \frac{1}{6\ bulan}\\ &= 0,1667/bulan\end{aligned}$$

g. Tingkat individu kehilangan kekebalan atau penurunan vaksin (ω)

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{Masa\ rentan\ kembali}\\ &= \frac{1}{209\ hari}\\ &= \frac{1}{6,96\ bulan}\end{aligned}$$

h. Tingkat karantina individu yang terinfeksi atau tindakan perlindungan pada individu rentan (φ) Karena pada Kabupaten Jember belum ada karantina yang disebabkan oleh hepatitis B, maka:

$$\varphi(I) = \varphi(0) = 1 \tag{4.26}$$

Pada penelitian ini jumlah populasi *Susceptible* yaitu individu berusia 0-5 tahun karena kasus hepatitis B yang terjadi pada Kabupaten Jember kebanyakan merupakan anak-anak sebanyak 280.447 jiwa diantaranya adalah 36.929 bayi, 109.972 balita dan 133.542 anak pra sekolah. Jumlah populasi *Exposed* sebanyak 0 jiwa, karena belum diketahui secara pasti berapa individu yang masuk dalam masa inkubasi. Jumlah populasi *Infected* sebanyak 1.095 jiwa dan jumlah populasi *Vaccinated* yaitu jumlah populasi bayi yang tervaksin sebanyak 226.108 jiwa. Nilai-nilai ini dapat dilihat pada Tabel (4.3) dan (4.4) berikut:

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Tabel 4.3 Nilai Parameter

No	Parameter	Nilai Parameter
1	π	$3077,4$
2	ρ	$0,5103$
3	β	$0,00000059$
4	μ	$0,001318$
5	σ	$0,4$
6	γ	$0,1667$
7	ω	$0,14$
8	φ	$\varphi(I) = \varphi(0) = 1$

Nilai awal yang digunakan pada simulasi ini terdapat pada Tabel (4.4) berikut

Tabel 4.4 Nilai Awal Tiap Populasi

No	Populasi ketika $t = 0$	Nilai Awal
1	$S(0)$	280447
2	$E(0)$	0
3	$I(0)$	1095
4	$V(0)$	226108

dengan memasukkan nilai-nilai parameter pada Tabel (4.3) diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $\xi_0 = (1132289, 0, 0, 11112)$ dan titik kesetimbangan endemik $\xi_1 = (285715, 13787, 3256488, 395351)$. Berdasarkan **Teorema 2.5.1** titik kesetimbangan bebas penyakit dikatakan stabil jika dan hanya jika akar-akar dari

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

persamaan karakteristik (4.21) mempunyai nilai real negatif. Berikut hasil analisis masing-masing titik kesetimbangan berdasarkan nilai eigen:

1. Nilai Eigen Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

   Dengan memasukkan nilai-nilai parameter pada Tabel (4.3) diperoleh nilai eigen persamaan karakteristik dari matriks (4.20), yaitu:

   $\lambda_1 = -0.001318$

   $\lambda_2 = -0.141318$

   $\lambda_3 = 0.245263461$

   $\lambda_4 = -0.814599461$

   Dari nilai eigen ini dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit ini tidak stabil, karena ada nilai eigen yang bernilai positif.

2. Nilai Eigen Titik Kesetimbangan Endemik

   Dengan memasukkan nilai-nilai parameter pada Tabel (4.3) diperoleh nilai eigen persamaan karakteristik dari matriks (4.23), yaitu:

   $\lambda_1 = -325648.740632969 + 0.00000000000000i$

   $\lambda_2 = -0.354667896470075 + 0.145471132334494i$

   $\lambda_3 = -0.354667896470075 - 0.145471132334494i$

   $\lambda_4 = -0.00131799999995039 + 0.00000000000000i$

   Dari nilai eigen ini dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan endemik ini stabil asimtotik, karena semua nilai eigen pada bagian realnya sudah bernilai negatif.

Selain itu, diperoleh juga nilai bilangan reproduksi dasar yaitu $R_0 = 3,9630 > 1$ yang berarti bahwa penyakit hepatitis B akan endemik pada Kabupaten Jember. Selanjutnya untuk melihat diagram kestabilan laju populasi dengan menggunakan metode runge kutta orde empat dengan bantuan *software MATLAB*, dimisalkan nilai

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

awalnya yaitu:

$S(t_0) = S(0) = 280.447$

$E(t_0) = E(0) = 0$

$I(t_0) = I(0) = 1.095$

$V(t_0) = V(0) = 226.108$

Integrasi numerik metode runge kutta orde empat dinyatakan sebagai berikut:

$S_{n+1} = S_n + \frac{h}{6}(k_{1S} + 2k_{2S} + 2k_{3S} + k_{4S})$

$E_{n+1} = E_n + \frac{h}{6}(k_{1E} + 2k_{2E} + 2k_{3E} + k_{4E})$

$I_{n+1} = I_n + \frac{h}{6}(k_{1I} + 2k_{2I} + 2k_{3I} + k_{4I})$

$V_{n+1} = V_n + \frac{h}{6}(k_{1V} + 2k_{2V} + 2k_{3V} + k_{4V})$

dengan,

$k_{1S} = (1-\rho)\pi - \beta S_n I_n - \mu S_n + \omega V_n - \rho\pi$

$k_{1E} = \beta S_n I_n - (\mu + \sigma)E_n$

$k_{1I} = \sigma E_n - (\mu + \gamma)I_n$

$k_{1V} = \rho\pi + \gamma I_n - (\mu + \omega)V_n$

$k_{2S} = (1-\rho)\pi - \beta(S_n + \frac{h}{2}k_{1S})(I_n + \frac{h}{2}k_{1I}) - \mu(S_n + \frac{h}{2}k_{1S}) + \omega(V_n + \frac{h}{2}k_{1V}) - \rho\pi$

$k_{2E} = \beta(S_n + \frac{h}{2}k_{1S})(I_n + \frac{h}{2}k_{1I}) - (\mu + \sigma)(E_n + \frac{h}{2}k_{1E})$

$k_{2I} = \sigma(E_n + \frac{h}{2}k_{1E}) - (\mu + \gamma)(I_n + \frac{h}{2}k_{1I})$

$k_{2V} = \rho\pi + \gamma(I_n + \frac{h}{2}k_{1I}) - (\mu + \omega)(V_n + \frac{h}{2}k_{1V})$

$k_{3S} = (1-\rho)\pi - \beta(S_n + \frac{h}{2}k_{2S})(I_n + \frac{h}{2}k_{2I}) - \mu(S_n + \frac{h}{2}k_{2S}) + \omega(V_n + \frac{h}{2}k_{2V}) - \rho\pi$

$k_{3E} = \beta(S_n + \frac{h}{2}k_{2S})(I_n + \frac{h}{2}k_{2I}) - (\mu + \sigma)(E_n + \frac{h}{2}k_{2E})$

$k_{3I} = \sigma(E_n + \frac{h}{2}k_{3E}) - (\mu + \gamma)(I_n + \frac{h}{2}k_{3I})$

$k_{3V} = \rho\pi + \gamma(I_n + \frac{h}{2}k_{2I}) - (\mu + \omega)(V_n + \frac{h}{2}k_{2V})$

$k_{4S} = (1-\rho)\pi - \beta(S_n + hk_{3S})(I_n + hk_{3I}) - \mu(S_n + hk_{3S}) + \omega(V_n + hk_{3V}) - \rho\pi$

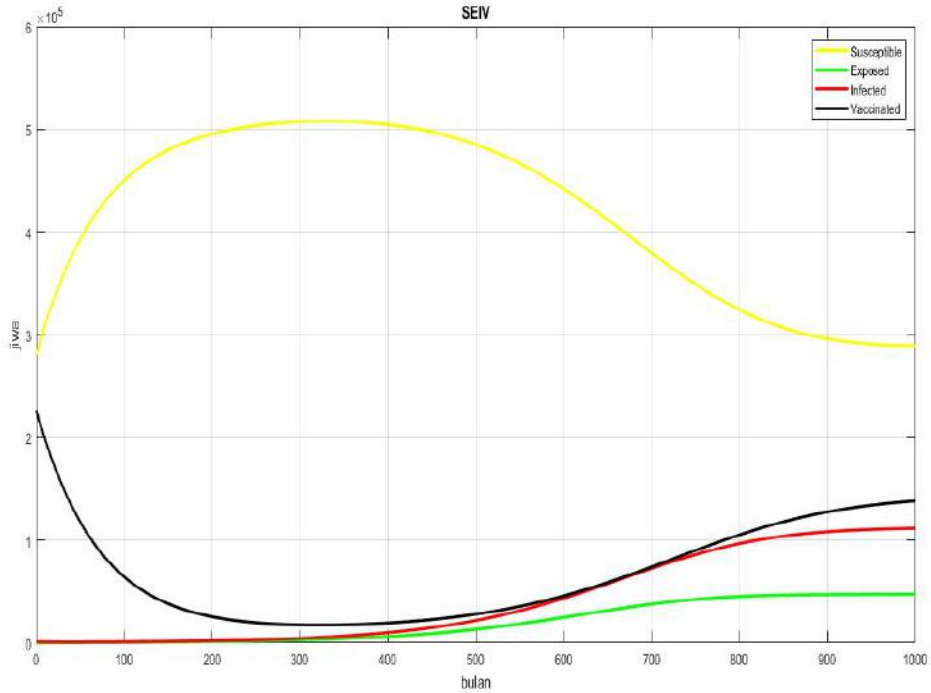
$k_{4E} = \beta(S_n + hk_{3S})(I_n + hk_{3I}) - (\mu + \sigma)(E_n + hk_{3E})$

$k_{4I} = \sigma(E_n + hk_{3E}) - (\mu + \gamma)(I_n + hk_{3I})$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$k_{4V} = \rho\pi + \gamma(I_n + hk_{3I}) - (\mu + \omega)(V_n + hk_{3V})$

Hasil simulasi diagram kestabilan laju populasi dapat dilihat pada Gambar (4.1):

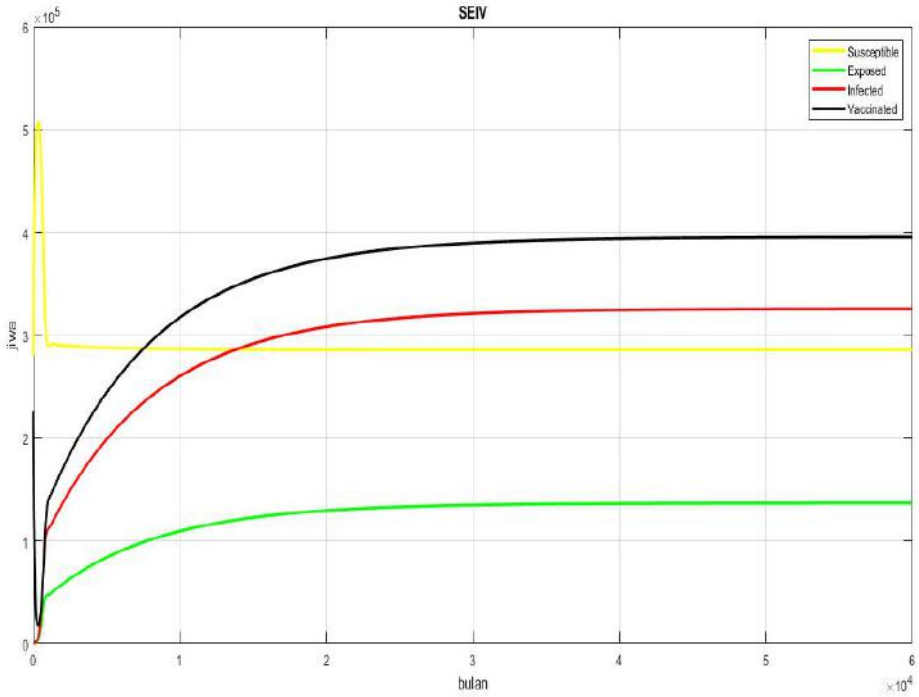


Gambar 4.1 Diagram Kestabilan Laju Populasi ketika $0 \leq t \leq 1000$ **bulan**

Pada Gambar (4.1) terlihat bahwa ketika $0 \leq t \leq 1000$ (bulan) grafik populasi *Susceptible*, *Exposed*, *Infected* dan *Vaccinated* belum menuju ke arah titik kesetimbangan. Laju pertumbuhan populasi *Susceptible* mengalami kenaikan diiringi dengan penurunan pada populasi *Vaccinated*, hal ini terjadi karena adanya populasi *Vaccinated* yang kehilangan kekebalan tubuh akibatnya populasi *Vaccinated* menjadi populasi *Susceptible* kembali, setelah mencapai titik puncaknya yaitu sekitar bulan ke 300 sampai bulan ke 400 populasi *Susceptible* mengalami penurunan karena terkena infeksi virus hepatitis B yang mengakibatkan populasi *Exposed* dan *Infected* naik dan karena adanya individu yang telah tervaksin. Laju pertumbuhan populasi *Exposed* mengalami kenaikan akibat adanya populasi *Susceptible* yang terkena infeksi virus hepatitis B. Laju

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

pertumbuhan populasi *Infected* mengalami kenaikan akibat adanya perpindahan dari populasi *Exposed* yang terinfeksi. populasi *Exposed* dan populasi *Infected* ini saling berkaitan. Laju pertumbuhan populasi *Vaccinated* mengalami penurunan karena hilangnya kekebalan tubuh akibatnya kembali menjadi populasi *Susceptible*, setelah mencapai titik terendahnya yaitu sekitar bulan ke 300 sampai bulan ke 400 populasi *Vaccinated* mengalami kenaikan akibat adanya populasi populasi *Susceptible* yang telah divaksin dan populasi *Infected* yang telah tervaksin.



Gambar 4.2 Diagram Kestabilan Laju Populasi ketika $0 \leq t \leq 60000$ **bulan**

Pada Gambar (4.2) terlihat bahwa setelah bulan ke 1000 populasi *Exposed*, *Infected* dan *Vaccinated* bergerak naik hingga stabil pada bulan ke 60000 kemudian terlihat populasi *Susceptible* bergerak naik kemudian turun dan stabil pada titik kesetimbangan endemiknya yaitu 285715, pada laju pertumbuhan populasi *Exposed* bergerak naik kemudian stabil pada titik kesetimbangan

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

endemiknya yaitu 136707, pada laju pertumbuhan populasi *Infected* bergerak naik kemudian stabil pada titik kesetimbangan endemiknya yaitu 325649, dan pada laju pertumbuhan populasi *Vaccinated* bergerak turun kemudian naik dan stabil pada titik kesetimbangan endemiknya yaitu 395251.

Berdasarkan hasil pembahasan, jika dilihat dari nilai R_0, yaitu $R_0 = 3.9630$ yang berarti nilai $R_0 > 1$, kemudian dari titik kesetimbangan yang stabil pada titik kesetimbangan endemik dan hasil simulasi yang menunjukkan seiring berjalannya waktu populasi *Infected* konstan pada titik endemik, maka dapat disimpulkan bahwa penyakit hepatitis B akan endemik di Kabupaten Jember, setiap penderita hepatitis B yang ada pada Kabupaten Jember dapat menularkan penyakitnya kepada individu rentan maupun individu yang sehat, sehingga seiring berjalannya waktu penyakit hepatitis B ini akan menyebar luas dan jumlah penderita yang semakin banyak.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

BAB V

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dipaparka sebelumnya, maka dapat disimpulkan:

1. Hasil analisis kestabilan yang telah dilakukan, menghasilkan titik kesetimbangan endemik $\xi_1 = (285715, 13787, 3256488, 395351)$ dengan $R_0 = 3,9630 > 1$ yang berarti seiring berjalannya waktu penyakit hepatitis B pada Kabupaten Jember akan terus ada yang diiringi dengan populasi *Infected* yang terus ada meskpiun jumlah populasi yang telah tervaksin lebih banyak daripada jumlah populasi yang terinfeksi.

2. Bifurkasi terjadi pada sistem tak linier, pada hasil analisis keberadaan bifurkasi ini didapatkan persamaan linier $f(I) = aI - b$, dengan $a = \left(\frac{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}{\sigma} - \frac{\omega\gamma}{(\mu+\omega)}\right)$ dan $b = \frac{\mu(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)}{\sigma\beta}(1 - R_0)$. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa sistem ini tidak terjadi bifurkasi.

5.2. Saran

1. Pada penelitian ini tidak dibahas mengenai analisis kestabilan global dari model SEIV penyakit hepatitis B.

2. Model SEIV hepatitis B ini dapat menggunakan data studi kasus di daerah yang lain.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

3. Perlunya kajian mendalam tentang bifurkasi untuk model SEIV ini.

Berdasarkan poin-poin diatas ini, penulis menyarankan kepada pembaca yang tertarik dengan penelitian ini agar melakukan analisis kestabilan global dan juga menggunakan data yang berbeda dengan yang ada pada penelitian ini.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

DAFTAR PUSTAKA

Abdulrazak, A. ., Ibrahim, M. ., Usman, I. . (2012). *A SEIV Vaccination Model with General Non-Linear Incidence Rate and Waning Preventive Vaccine*. Journal of Mathematics, 4(2).

Aisyah, F. N. (2018). *Pemodelan Matematika dan Studi Kesetimbangan Pada Penyebaran Pengaruh Perilaku Merokok Menggunakan Tipe SEIR*. Universitas Lampung.

Anton, H. (1998). *Aljabar Linier Elementer*. Terjemahan oleh Pantur Silaban. Jakarta: Erlangga.

Beasly, R. (1988). *Hepatitis B Immunization Strategies Expanded Programme on Immunization*. WHO.

Brauer, F., van de Driessche, P., Wu, J. (2008). *Mathematical Epidemiology*. Berlin: Springer- Verlag.

Campbell, S. ., Haberman, R. (2008). *Introduction to Differential Equations with Dynamical System*. New Jersey: Princeton University Press.

Centers for Disease Control and Prevention. (2005). *Guidelines for Viral Hepatitis Survellance and Case Management*. Atlanta, GA.

Depkes RI. (2002). *Pedoman Penggunaan Uniject Hepatitis B*. Jakarta: Ditjen PPM & PLP.

Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2008). *Differential Equations and Linear Algebra*, 6th edition, Prentice-Hall, New Jersey.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Finizio, J., Ladas, T. (1982). *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Alih Bahasa oleh Widiarto Santoso. Jakarta: Erlangga.

Hollinger FB, Bell B, Bruhl DL, Shouval D, Wiersma S, Damme PV. (2007). *Hepatitis A and B Vaccination and Public Health*. Journal of Viral Hepatitis, 14(s1).

Ikhtisholiyah. (2011). *Analisis Stabilitas dan Optimal Kontrol Pada Model Epidemik SIR Dengan Vaksinasi*. ITS.

InfoDATIN. (2014). *Situasi dan Analisis Hepatitis*. Pusat Data dan Informasi Kementerian Kesehatan RI.

InfoDATIN. (2018). *Situasi Penyakit Hepatitis B di Indonesia Tahun 2017*. Pusat Data dan Informasi Kementerian Kesehatan RI.

Hethcote, H. W. (2000). *The Mathematics of Infection Disease*. SIAM Review, 42(4).

KEMENKES. (2015). *Penanggulangan Hepatitis Virus*.

Kurniawan, A. (2017). *Analisis Bifurkasi Transmisi Virus Dengue Dalam Tubuh Manusia*. Yogyakarta.

Larasati, Devi, Tjahjana, Redemtus Heru. (2012). *Analisis Model Matematika Untuk Penyebaran Virus Hepatitis B (HBV)*. Jurnal Ilmiah S1 Matematika FSM Universitas Diponegoro, 1(1), 5663.

Lynch, S. (2007). *Dynamical Systems with Applications using Mathematica*. Boston: Birkhauser.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Ningsih, D. K., Hariyanto, & Winarko, S. (2016). *Analisis Bifurkasi Pada Model Epidemiologi SEIR Demam Berdarah Di Surabaya*. JURNAL SAINS DAN SENI ITS, 5(1), 713.

Notoatmojo, H. (2004). *Peran Imunitas Tubuh Dalam Pencegahan Penyakit Hepatitis Virus Pada Anak*. Semarang.

Nugroho, S. (2009). *Pengaruh Vaksinasi Terhadap Penyebaran Penyakit dengan Model Epidemi SIR*. Surakarta.

Pagalay, U. (2009). *Mathematical Modelling: Aplikasi pada Kedokteran, Imunologi, Biologi, Ekonomi, dan Perikanan*. Malang: UIN-MALANG PRESS.

Pang, Jianhua, Cui, Jing-an, Zhou, Xueyong. (2010). *Dynamical Behavior of a Hepatitis B Virus Transmission Model with Vaccination*. Journal of Theoretical Biology, 265(4), 572578.

Pratama, K. N. (2014). *Analisis Stabilitas Model Epidemik SEIV (Susceptible-Exposed-Infected-Vaccinated) Pada Penyebaran Penyakit Hepatitis B di Kabupaten Jember*. Universitas Jember.

Probandari, A., Handayani, S., Laksono, N. (2013).*Ketrampilan Imunisasi*. Surakarta: FK Universitas Sebelas Maret Surakarta.

Resmawan. 2017. *Pemodelan Matematika Epidemi*. Universitas Negeri Gorontalo. Gorontalo

Robbi, R. K. (2018). *Analisis Stabilitas Model Epidemik SEIVR Pada Penyebaran Penyakit Hepatitis B Dengan Saturated Incidence Rate*. Yogyakarta.

Ross, S. L. (1989). *Differential Equation (Fourth Edition)*. New York: John Wiley and Sons.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Rost, G., Wu, J. (2008). *SEIR Epidemiological Model with Varying Infectivity and Infinite Delay*. Mathematical Biosciences Ad Engineering: MBE, 5(2).

Rozi, S. (2014). *Dinamik dan Bifurkasi Dari Persamaan Diferensial Dan Sistem Persamaan Diferenial Dimensi Dua*.

Sair, I. S. (2018). *Solusi Numerik Model Penyebaran Pada Penyakit Hepatitis B Di Provinsi Sulawesi Selatan Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat*. Makassar.

Satgas Imunisasi-Ikatan Dokter Anak Indonesia. (2005). *Pedoman Imunisasi di Indonesia*.Edisi Kedua.

Selvaraju, R. (2012). *Hubungan Tingkat Pengetahuan dan Status Imunisasi Hepatitis B Pada Mahasiswa Setambuk 2007 Dan 2010 Fakultas Kedokteran Universitas Sumatera Utara Tahun 2011*.

Siregar, F. (2003). *Hepatitis B Ditinjau Dari Kesehatan Masyarakat Dan Upaya Pencegahan*. Medan.

Sulisdiana. (2016). *Pemodelan Matematika SEIV (Susceptible-Exposed-Vaccinated) Pada Penyebaran Penyakit Hepatitis B di Propinsi Sulawesi Selatan*. UNM.

The Immunization Action Coalition. (2018). *Vaccine Information Statement*.

Umam, Y. C. (2014). *Model Epidemi SEIV Penyebaran Penyakit Polio Pada Populasi Tak Konstan*. Universitas Negeri Semarang.

Wiggins, S. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer- Verlag.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Zainal, Firdha Dwishafarina, Winarko, Setijo, Hanafi, Lukman. (2015). *Analisis Kestabilan Pada Model Transmisi Virus Hepatitis B yang Dipengaruhi Oleh Migrasi*. Undergraduate Theses of Mathematics.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id