D-IDEAL FUZZY PADA D-ALJABAR

SKRIPSI

UIN SUNAN AMPEL
S U R A B A Y A

Disusun Oleh

DINIYAH MUAFFIROH

H02216004

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL

SURABAYA

2020

D-IDEAL FUZZY PADA D-ALJABAR

SKRIPSI

Diajukan guna memenuhi salah satu persyaratan untuk memperoleh
gelar Sarjana Matematika (S.Mat) pada Program Studi Matematika

Disusun oleh

DINIYAH MUAFFIROH
H02216004

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL
SURABAYA

2020

PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini,

Nama	:	DINIYAH MUAFFIROH
NIM	:	H02216004
Program Studi	:	Matematika
Angkatan	:	2016

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul " d-IDEAL FUZZY PADA d-ALJABAR ". Apabila suatu saat nanti terbukti saya melakukan tindakan plagiat, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian pernyataan keaslian ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 12 Juni 2020

Yang menyatakan,

DINIYAH MUAFFIROH

NIM. H02216004

LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

Skripsi oleh

Nama	:	DINIYAH MUAFFIROH
NIM	:	H02216004
Judul Skripsi	:	d-IDEAL FUZZY PADA d-ALJABAR

telah diperiksa dan disetujui untuk diujikan.

Surabaya, 12 Juni 2020

Pembimbing

Wika Dianita Utami, M.Sc

NIP. 199206102018012003

PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI

Skripsi oleh

Nama	:	DINIYAH MUAFFIROH
NIM	:	H02216004
Judul Skripsi	:	d-IDEAL FUZZY PADA d-ALJABAR

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji
pada tanggal 29 Juni 2020

Mengesahkan,
Tim Penguji

Penguji I

Wika Dianita Utami, M.Sc
NIP. 199206102018012003

Penguji II

Dr. Moh Hafiyusholeh, M.Si, M.PMat
NIP. 198002042014031001

Penguji III

Aris Fanani, M.Kom
NIP. 198701272014031002

Penguji IV

Putroue Keumala Intan, M.Si
NIP. 198805282018012001

Mengetahui,
Plt. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Ampel Surabaya

Dr. Hj. Evi Fatimatur Rusydiyah, M.Ag
NIP. 197312272005012003

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL SURABAYA
PERPUSTAKAAN
Jl. Jend. A. Yani 117 Surabaya 60237 Telp. 031-8431972 Fax.031-8413300
E-Mail: perpus@uinsby.ac.id

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika UIN Sunan Ampel Surabaya, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama	: DINIYAH MUAFFIROH
NIM	: H02216004
Fakultas/Jurusan	: SAINTEK/MATEMATIKA
E-mail address	: dinimuaffiroh@gmail.com

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah :
■ Sekripsi ☐ Tesis ☐ Desertasi ☐ Lain-lain (……………………………)
yang berjudul :
d-IDEAL FUZZY PADA *d*-ALJABAR

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan Hak Bebas Royalti Non-Ekslusif ini Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (database), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di Internet atau media lain secara ***fulltext*** untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Surabaya, 29 Juni 2020

Penulis

(Diniyah Muaffiroh)

ABSTRAK

d-IDEAL FUZZY PADA d-ALJABAR

Himpunan fuzzy merupakan suatu himpunan dengan fungsi keanggotaan μ yang memiliki derajat keanggotaan berkisar 0 sampai 1. Himpunan tak kosong X dikenakan operasi $*$ dilengkapi dengan konstanta 0, dikatakan d-aljabar apabila memenuhi beberapa aksioma yaitu $c * c = 0$, $0 * c = 0$, dan $c * r = 0$, $r * c = 0$ menyebabkan $c = r$, $\forall c, r \in X$. Himpunan fuzzy jika dikaitkan dengan d-aljabar membentuk struktur baru, yakni d-subaljabar fuzzy dan d-ideal fuzzy. Suatu himpunan fuzzy μ dikatakan d-subaljabar fuzzy atas X apabila memenuhi $\mu(c * r) \geq min\{\mu(c), \mu(r)\}$, $\forall c, r \in X$. Suatu himpunan fuzzy μ dikatakan d-ideal fuzzy atas X apabila memenuhi $\mu(0) \geq \mu(c)$, $\mu(c) \geq min\{\mu(c * r),\ \mu(r)\}$, dan $\mu(c * r) \geq min\{\mu(c), \mu(r)\}$, $\forall c, r \in X$. Keterkaitan sifat pada d-subaljabar fuzzy dan d-ideal fuzzy memunculkan teorema baru yaitu: Misalkan himpunan S adalah d-subaljabar fuzzy. Jika untuk setiap $c, r \in S$ berlaku $c \leq r$, maka S merupakan d-ideal fuzzy. Sifat-sifat d-ideal fuzzy atas d-aljabar X juga dibahas pada penelitian ini, yaitu: Jika λ dan μ adalah d-ideal fuzzy atas d-aljabar, maka $\lambda \times \mu$ adalah d-ideal fuzzy atas $X \times X$. Sifat yang kedua yaitu: Jika $\lambda \times \mu$ adalah d-ideal fuzzy atas $X \times X$, maka λ atau μ merupakan d-ideal fuzzy atas X. Sifat yang ketiga adalah Diberikan himpunan fuzzy A atas d-aljabar X dan μ_A merupakan hubungan fuzzy terkuat atas X. Himpunan A merupakan d-ideal fuzzy atas X jika dan hanya jika μ_A merupakan d-ideal fuzzy atas $X \times X$.

Kata kunci: himpunan fuzzy, d-aljabar, d-subaljabar fuzzy, d-ideal fuzzy

ABSTRACT

d-IDEAL FUZZY ON d-ALGEBRA

A fuzzy set is a set with μ as a membership function which has a membership level of 0 to 1. The non-empty set of X required operations $*$ with constant 0, called d-algebra if satisfies: $c * c = 0,\ 0 * c = 0$, and $c * r = 0$, $r * c = 0$ imply $c = r$, $\forall c, r \in X$. Fuzzy set and d-algebra raises a new structure. That's fuzzy d-subalgebra and fuzzy d-ideal. Fuzzy set μ called fuzzy d-subalgebra of X if satisfy $\mu(c * r) \geq min\{\mu(c), \mu(r)\}$, $\forall c, r \in X$. A fuzzy set μ called fuzzy d-ideal of X if satisfy $\mu(0) \geq \mu(c)$, $\mu(c) \geq min\{\mu(c*r),\ \mu(r)\}$, and $\mu(c*r) \geq min\{\mu(c), \mu(r)\}$, $\forall c, r \in X$. The interrelated characteristic of fuzzy d-subalgebra and fuzzy d-ideal rise a new theorem, that's: Suppose the S is set of fuzzy d-subalgebra. If for every $c, r \in S$ applies $c \leq r$, then S is fuzzy d -ideal of d-algebra S. Theorem of fuzzy d-ideal of d-algebra X are also discussed in this paper,that is : If λ and μ are fuzzy d-ideal of d - algebra X, then $\lambda \times \mu$ is fuzzy d - ideal of $X \times X$. The second theorem is: If $\lambda \times \mu$ is fuzzy d-ideal of $X \times X$, then λ or μ is fuzzy d-ideal of X . The third theorem is: let A be a fuzzy set of d-algebra X and μ_A is the strongest fuzzy relation of X. A is fuzzy d-ideal of X if and only if μ_A is a d-ideal fuzzy of $X \times X$.
Keywords: fuzzy set, d-algebra, fuzzy d-subalgebra, fuzzy d-ideal

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL . . . . **i**

LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING . . . . **ii**

PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI . . . . **iii**

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN . . . . **iv**

HALAMAN PERSEMBAHAN . . . . **v**

KATA PENGANTAR . . . . **vi**

DAFTAR ISI . . . . **vii**

DAFTAR TABEL . . . . **ix**

DAFTAR GAMBAR . . . . **x**

DAFTAR LAMBANG . . . . **xi**

ABSTRAK . . . . **xii**

ABSTRACT . . . . **xiii**

I PENDAHULUAN **1**

1.1. Latar Belakang Masalah 1

1.2. Rumusan Masalah 3

1.3. Tujuan Penelitian 4

1.4. Manfaat Penelitian 4

1.5. Sistematika Penulisan 4

II TINJAUAN PUSTAKA **5**

2.1. Himpunan fuzzy 5

2.2. BCK-Aljabar 22

2.2.1. Subaljabar 24

2.2.2. Ideal dari BCK-Aljabar 25

2.3. d-Aljabar 27

2.3.1. d-Subaljabar 30

2.3.2. d-ideal 31

2.4. Integrasi Keilmuan 32

III HASIL DAN PEMBAHASAN 34
3.1. *d*-Subaljabar fuzzy 34
3.2. *d*-Ideal fuzzy 35
IV PENUTUP 48
4.1. Simpulan 48
4.2. Saran 49
DAFTAR PUSTAKA 50

DAFTAR TABEL

2.12 Tabel Cayley Operasi $*$ pada X 23
2.14 Tabel Cayley Operasi $*$ pada X 28
2.15 Tabel Cayley Operasi $*$ pada X 29
2.16 Tabel Cayley Operasi $*$ pada X 29
2.17 Tabel Cayley Operasi $*$ pada X 32

DAFTAR GAMBAR

2.1 Representasi Linear Naik 7
2.2 Representasi Linear Turun 8
2.3 Kurva Segitiga 9
2.4 Kurva Trapesium 10
2.5 Daerah Bahu pada Variabel Temperatur 10
2.6 Karakteristik Fungsi Kurva S 11
2.7 Karakteristik Fungsi Kurva S 12
2.8 Karakteristik Fungsional Kurva PI 13
2.9 Karakteristik Fungsional Kurva beta 14
2.10 Karakteristik Fungsional Kurva gauss 15
2.11 Fungsi Keanggotaan Variabel Permintaan 17
2.12 Fungsi Keanggotaan Variabel Persediaan 18
2.13 Fungsi Keanggotaan Variabel Produksi 19

DAFTAR LAMBANG

$c, r, n \in X$	: x anggota X
$A \subseteq X$	: A himpunan bagian (*subset*) atau sama dengan X
$\mathbb{N}$	: himpunan semua asli
$>$	: lebih dari
$<$	: kurang dari
$\forall$	: untuk setiap
$\in$	: elemen
$\geq$	: lebih dari samadengan
$\leq$	: kurang dari samadengan
$\mu(x), \lambda(x)$	: himpunan fuzzy di X
$\blacksquare$	: akhir suatu bukti
$*$	: operasi biner pada d-aljabar dan BCK-aljabar

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Matematika memiliki beberapa subkeilmuan, yaitu terapan, komputasi, aljabar dan statistika. Aljabar merupakan subkeilmuan dalam matematika yang membahas tentang pembuktian, dalam aljabar terdapat subkeilmuan struktur aljabar atau aljabar abstrak. Suatu himpunan tak kosong dikenakan operasi biner memenuhi aksioma tertentu disebut struktur aljabar. Dalam struktur aljabar terdapat teori mengenai grup, field, ring dan K-aljabar. K-aljabar merupakan salah satu struktur aljabar yang dibangun dari definisi grup G yang memiliki elemen e sebagai elemen identitas, untuk setiap $c, r \in G$. Sifat pada grup juga terdapat dalam K-aljabar karena K-aljabar dibangun dari definisi grup. Operasi biner dalam K-aljabar adalah $\odot$, yang didefinisikan dengan $c \odot r = c * r^{-1} = cr^{-1}$ (Fanny , 2018). Dalam K-aljabar terbagi menjadi dua kelas berdasarkan grup pembangunnya, yakni Q-aljabar dan B-aljabar. Q-aljabar dibangun oleh grup komutatif, sedangkan B-aljabar dibangun oleh grup tak komutatif. Q-aljabar memiliki beberapa kelas yakni BCI-aljabar, BCH-aljabar, dan BCK-aljabar (Afifah , 2013).

BCK-aljabar merupakan salah satu kelas yang diperkenalkan oleh R. Imai dan K. Iseki. Suatu himpunan tak kosong X dikenakan operasi $*$ dengan dilengkapi konstanta 0 dikatakan BCK-aljabar apabila memenuhi lima aksioma yang telah ditentukan. Pada tahun 1999, Neggers dan Kim memperumum konsep dari BCK-aljabar. Perumuman dari BCK-aljabar disebut d-aljabar. Suatu himpunan tak kosong X dikenakan operasi $*$ yang dilengkapi dengan konstanta 0 dikatakan d-aljabar apabila memenuhi tiga aksioma yang telah ditetapkan. Akibatnya, untuk setiap himpunan X dikatakan BCK-aljabar pasti merupakan d-aljabar namun tidak berlaku sebaliknya (Joseph and Hee , 1999).

Dalam subkeilmuan aljabar selain membahas tentang struktur aljabar, juga membahas tentang teori himpunan. Himpunan adalah kumpulan objek yang didefinisikan dengan jelas. Objek dapat didefinisikan dengan suatu hal yang konkrit seperti manusia, tumbuhan, benda dan hewan. Objek dalam matematika juga dapat didefinisikan oleh sesuatu yang abstrak seperti fungsi, bilangan dan matriks (Rohatul , 2014). Suatu himpunan yang dicirikan dengan nilai keanggotaan fungsi(μ) yang memberikan masing-masing objek tingkat keanggotaan yang berkisar antara 0 dan 1 dikatakan himpunan fuzzy (Zadeh , 1965). Suatu himpunan fuzzy memiliki definisi baru jika dikaitkan pada kelas aljabar yakni BCK - aljabar dan d-aljabar yakni subaljabar fuzzy dan ideal fuzzy.

Himpunan fuzzy μ pada d-aljabar X dikatakan d-subaljabar fuzzy jika $\mu(c*r) \geq \min\{\mu(c), \mu(r)\}$ untuk setiap $c, r \in X$. Himpunan fuzzy μ pada d-aljabar X dikatakan d - ideal fuzzy jika memenuhi tiga aksioma yaitu $\mu(0) \geq \mu(c)$, $\mu(c) \geq min\{\mu(c*r), \mu(r)\}$ dan $\mu(c*r) \geq min\{\mu(c), \mu(r)\}$ (Joseph and Hee , 1999). Sedangkan himpunan fuzzy μ pada BCK-aljabar X dikatakan subaljabar fuzzy jika $\mu(c*r) \geq min\{\mu(c), \mu(r)\}$ untuk setiap $c, r \in X$. Himpunan fuzzy μ pada BCK-aljabar X dikatakan BCK-ideal fuzzy jika memenuhi dua aksioma yaitu $\mu(0) \geq \mu(c)$, dan $\mu(c) \geq min\{\mu(c*r), \mu(r)\}$. Himpunan fuzzy pada BCK-aljabar X memiliki beberapa sifat, salah satu sifat tersebut adalah setiap ideal fuzzy μ atas BCK-aljabar X pasti merupakan subaljabar fuzzy (Jie et al , 1997).

Jie meng et al telah melakukan penelitian mengenai ideal implikatif fuzzy pada BCK-aljabar. Pada penelitian tersebut didefinisikan himpunan fuzzy μ pada BCK-aljabar X dikatakan ideal implikatif fuzzy apabila memenuhi dua aksioma yaitu $\mu(0) \geq \mu(c), \forall c \in X$ dan $\mu(c) \geq min\{\mu((c*(r*c))*n), \mu(n)\}, \forall c, r, n \in X$. Untuk setiap ideal implikatif fuzzy pasti merupakan ideal fuzzy, namun belum tentu berlaku sebaliknya. Karena setiap ideal fuzzy dari BCK-aljabar merupakan subaljabar fuzzy maka setiap ideal implikatif fuzzy pasti merupakan subaljabar fuzzy (Jie et al , 1997).

Sun Shin Ahn dan Keum Sook So telah melakukan penelitian mengenai normal komplit pada d-ideal di d-aljabar fuzzy. Pada penelitian tersebut memperkenalkan gagasan mengenai normal d-ideal fuzzy di d-transitif atas d-aljabar. Hal yang menarik pada penelitian ini adalah suatu normal maksimal d-ideal dan normal komplit d-ideal. Setiap non-konstan normal d-ideal fuzzy merupakan elemen maksimal $(N(c), \subseteq)$ dengan X adalah d-transitif atas d-aljabar, yang mengambil nilai 0 dan 1, dan setiap maksimal d-ideal fuzzy di d-transitif atas d-aljabar merupakan normal komplit (Sun and Keum , 2008).

Mengingat bahwa d-aljabar merupakan perumuman dari BCK-aljabar, maka pada penelitian ini tertarik untuk mengkaji pengertian dan sifat d-subaljabar fuzzy dan d-ideal fuzzy. Pada d-subaljabar fuzzy dan d-ideal fuzzy juga dikaji sifat yang saling berkaitan antar keduanya.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasakan latar belakang yang telah diuraikan, maka didapatkan rumusan masalah yaitu, bagaimana sifat-sifat d-ideal fuzzy atas d-aljabar?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah, didapat tujuan penelitian yaitu untuk mengetahui sifat-sifat d-ideal fuzzy atas d-aljabar.

1.4. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini yaitu untuk menambah pengetahuan mengenai sifat d-ideal fuzzy atas d-aljabar X.

1.5. Sistematika Penulisan

Berikut merupakan sistem penyusunan yang digunakan dalam menyusun skripsi ini

BAB I : PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan latar belakang penulisan skripsi, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penyusunan skripsi.

BAB II : KAJIAN PUSTAKA

Bab ini berisi penjelasan teori yang digunakan dalam mendukung penyelesaian penelitian d-ideal fuzzy pada d-aljabar. Teori tersebut menyebutkan tentang teori himpunan fuzzy dan d-aljabar

BAB III : HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi tentang sifat-sifat yang berkaitan dengan d-ideal fuzzy pada d–aljabar.

BAB IV : KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini berisi tentang kesimpulan tentang d-ideal fuzzy pada d-aljabar dan saran dari penelitian ini.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini membahas teori terkait fuzzy pada d-aljabar yakni himpunan fuzzy, d-aljabar, BCK-aljabar, subaljabar dari BCK-aljabar, ideal dari BCK-aljabar, d-subaljabar, dan d-ideal dari d-aljabar.

2.1. Himpunan fuzzy

Berikut merupakan penjelasan mengenai teori himpunan fuzzy.

Definisi 2.1.1 *(Zadeh , 1965) Diberikan himpunan tak kosong X dan A. Himpunan fuzzy A dari X dinotasikan dengan fungsi keanggotaan $\mu_A(c)$ yang mengaitkan setiap titik-titik di X ke bilangan real dengan interval [0,1].*

$\mu_A(c)$ merupakan nilai yang mewakili tingkat derajat keanggotaan dengan $c \in X$, sehingga semakin dekat nilai $\mu_A(c)$ ke satu semakin tinggi derajat keanggotaannya (Zadeh , 1965). Derajat keanggotaan yang memiliki interval antara 0 sampai 1 memiliki arti bahwa suatu nilai kebenaran bukan hanya pada angka 1 dan 0, 1 berarti benar dan 0 berarti salah, melainkan terdapat nilai-nilai yang berada antara 0 sampai 1. Linguistik dan numerik menjadi atribut dalam himpunan fuzzy. Linguistik adalah penamaan suatu grup yang mewakili kodisi tertentu dengan menggunakan bahasa yang mudah difahami, sedangkan numeris merupakan nilai yang berupa angka yang menunjukkan nilai variabel fuzzy (Sri et al, 2005).

Himpunan fuzzy memiliki beberapa hal yang perlu diketahui, sebagai berikut : (Sri et al , 2005)

i. Variabel Fuzzy

Suatu variabel yang akan dibahas dalam sistem fuzzy dikenal dengan variabel fuzzy.

ii. Himpunan Fuzzy

Suatu grup yang merepresentasikan tentang keadaan dalam variabel dikenal dengan himpunan fuzzy.

iii. Semesta Pembicaraan

Semesta pembicaraan merupakan seluruh nilai yang dapat dioperasikan pada variabel fuzzy. Nilai tersebut merupakan bilangan real yang terus bertambah monoton dari kiri ke kanan, nilai ini bisa berupa bilangan negatif maupun positif. Nilai semesta terkadang tidak ditentukan batas atasnya.

Contoh :

1. Semesta pembicaraan untuk variabel tinggi badan adalah $[0, \infty]$
2. Semesta pembicaraan untuk variabel berat badan $[0, \infty]$
3. Semesta pembicaraan untuk variabel minus pada mata $[-\infty, 0]$

iv. Domain

Seluruh nilai yang diperbolehkan oleh semesta pembicaraan dan dapat dioperasikan pada variabel fuzzy. Sama halnya dengan semesta pembicaraan, domain juga merupakan bilangan real yang memiliki nilai terus bertambah secara monoton dari kiri ke kanan.

Logika fuzzy memiliki Pendekatan fungsi yang dilakukan untuk mendapatkan derajat keanggotaan. Terdapat beberapa fungsi yaitu : (Sri et al, 2005)

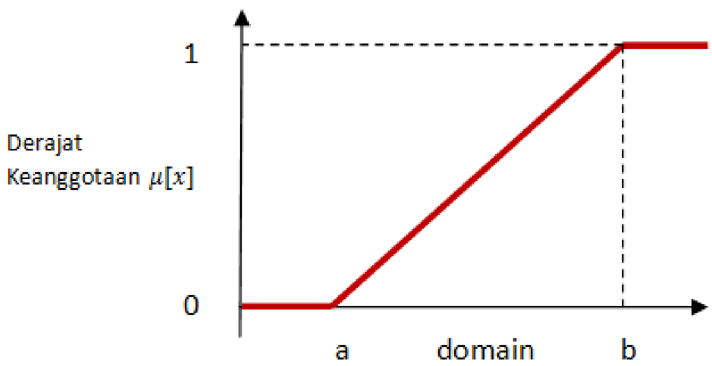
a. Representasi Linear

Representasi Linear memetakan input ke derajat keanggotaan digambarkan dengan garis lurus. Himpunan fuzzy yang linear memiliki dua kondisi, yakni

1. Himpunan terus naik menuju nilai derajat keanggotaan lebih tinggi ke sisi kanan yang dimulai dari derajat keanggotaan bernilai 0. Fungsi keanggotaan dari linear naik untuk mendapatkan nilai derajat keanggotaannya dengan cara berikut:(Ridwan et al , 2016)

$$\mu[x] = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

Berikut merupakan gambar yang menunjukkan skema kurva linear naik.



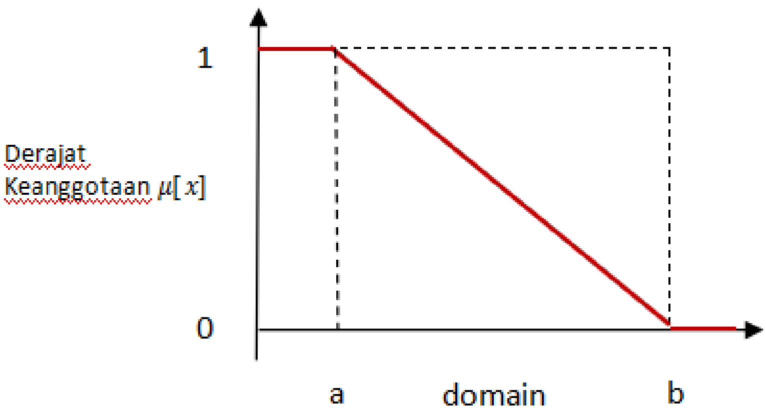
Gambar 2.1 Representasi Linear Naik

2. Garis lurus dimulai dari sisi kiri yang memiliki nilai derajat keanggotaan tertinggi menuju nilai derajat keanggotaan lebih rendah. Berikut merupakan fungsi keanggotaan dari linear turun untuk mendapatkan nilai derajat keang-

gotaannya.

$$\mu[x] = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ \dfrac{b-x}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & x \geq b \end{cases}$$

Berikut merupakan gambar yang menunjukkan skema kurva linear turun.



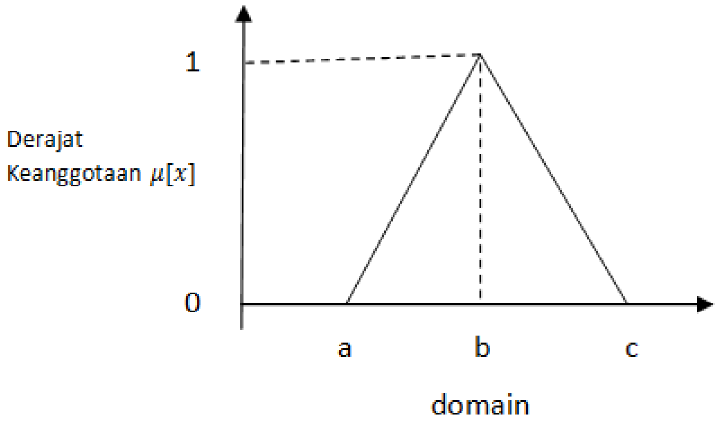
Gambar 2.2 Representasi Linear Turun

b. Representasi Kurva Segitiga

Gabungan dari dua buah garis linear merupakan wujud kurva segitiga. Untuk mendapatkan nilai derajat keanggotaan dari kurva segitiga, menggunakan fungsi keanggotaan berikut :

$$\mu[x] = \begin{cases} 0, & x \leq a \; atau \; x \geq c \\ \dfrac{b-a}{x-a}, & a < x < b \\ \dfrac{b-x}{c-b}, & b < x < c \\ 1, & x = b \end{cases}$$

Berikut merupakan gambar yang menunjukkan skema kurva segitiga.



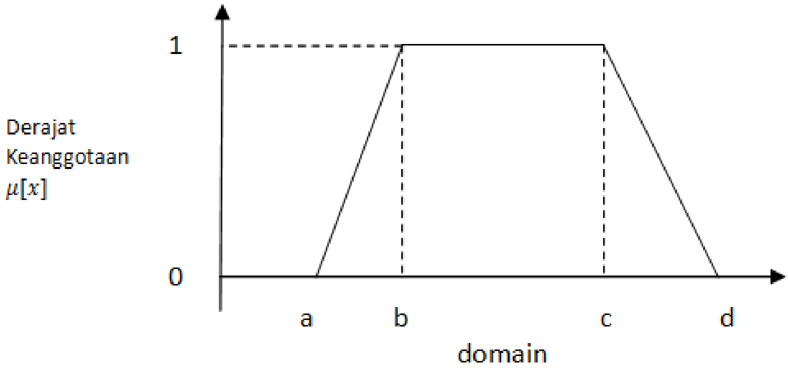
Gambar 2.3 Kurva Segitiga

c. Representasi Kurva Trapesium

Kurva trapesium merupakan kurva segitiga yang memiliki beberapa titik dengan nilai derajat keanggotaan satu. Berikut merupakan fungsi keanggotaan dari kurva trapesium untuk mendapatkan nilai derajat keanggotaannya (Solikin et al , 2017).

$$\mu[x] = \begin{cases} 0, & x \leq a \; atau \; x \geq d \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c < x < d \end{cases}$$

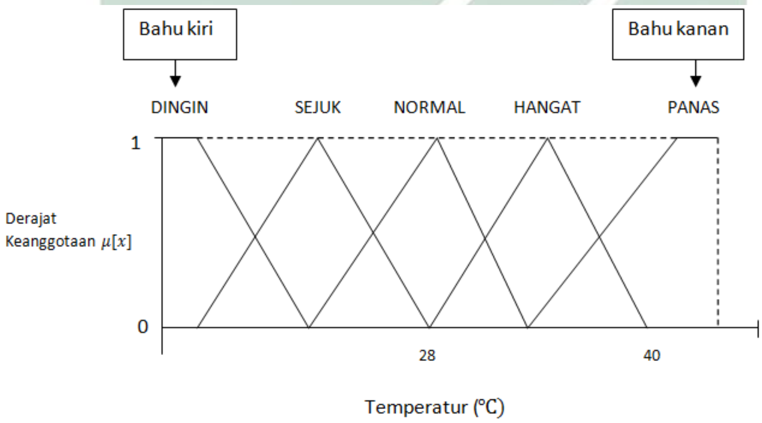
Berikut merupakan gambar yang menunjukkan skema kurva trapesium.



Gambar 2.4 Kurva Trapesium

d. Representasi Kurva Bentuk Bahu

Kurva bentuk bahu memiliki 2 bahu, yakni bahu kanan dan kiri dan memiliki beberapa variabel, seperti pada Gambar 2.5 terdapat variabel DINGIN, SEJUK, NORMAL, HANGAT, dan PANAS. Daerah dari suatu variabel bagian tengah direpresentasikan ke dalam bentuk segitiga. Pada sisi kanan dan kiri akan naik dan turun. Untuk mengakhiri variabel daerah fuzzy digunakan himpunan fuzzy bahu, bukan segitiga. Bahu kanan bergerak dari salah ke benar, sedangkan bahu kiri bergerak dari benar ke salah.



Gambar 2.5 Daerah Bahu pada Variabel Temperatur

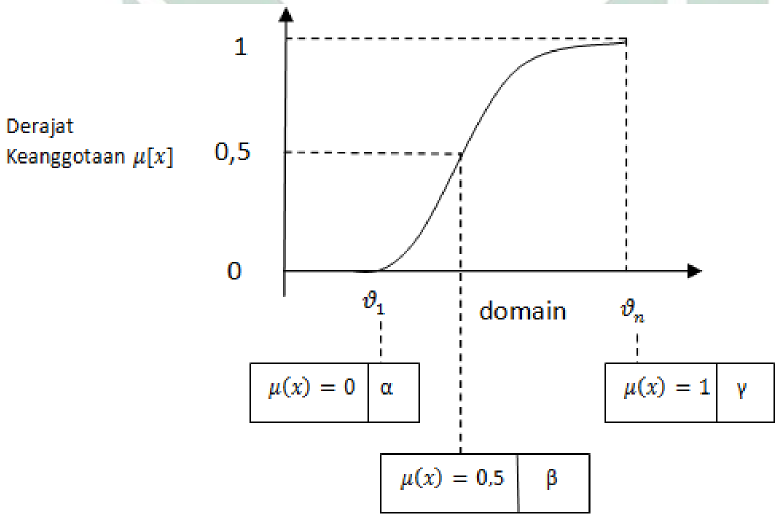
e. Representasi Kurva-S

Kurva S atau *sigmoid* merupakan kurva pertumbuhan dan penyusutan yang berkaitan dengan kenaikan dan penurunan secara non linear.

Kurva-S untuk pertumbuhan bergerak dari sisi kiri menuju kanan dengan fungsi keanggotaan 0 ke fungsi keanggotaan yang bernilai 1. Terdapat 3 definisi parameter pada kurva S, yakni parameter α dengan nilai keanggotaan nol, parameter γ dengan nilai keanggotaan lengkap yakni satu, dan parameter β yaitu titik infleksi yang memiliki domain 0,05 bernilai benar. Untuk mendapatkan nilai derajat keanggotaan dengan cara fungsi keanggotaan kurva sebagai berikut:

$$S[x,\alpha,\beta,\gamma] = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 2(\dfrac{x-a}{\gamma-a})^2, & a < x < \beta \\ 1-2(\dfrac{\gamma-x}{\gamma-a})^2, & \beta < x < \gamma \\ 1, & x \geq \gamma \end{cases}$$

Berikut merupakan gambar yang menunjukkan skema kurva S pertumbuhan.

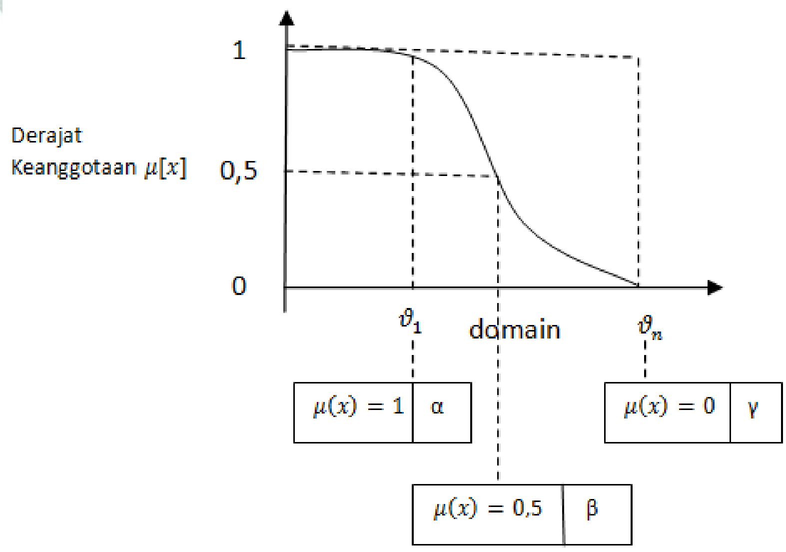


Gambar 2.6 Karakteristik Fungsi Kurva S

Kurva-S untuk penyusutan bergerak dari sisi kanan menuju kiri dengan fungsi keanggotaan 1 ke fungsi keanggotaan yang bernilai 0. Terdapat 3 definisi parameter pada kurva S, yakni parameter α dengan nilai keanggotaan lengkap yakni satu, parameter γ dengan nilai keanggotaan nol, dan parameter β yaitu titik infleksi yang memiliki domain 0,05 bernilai benar. Berikut merupakan fungsi keanggotaan kurva penyusutan untuk mendapatkan nilai derajat keanggotaan

$$S[x,\alpha,\beta,\gamma] = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ 1 - 2(\dfrac{x-a}{\gamma - a})^2, & a < x < \beta \\ 2(\dfrac{\gamma - x}{\gamma - a})^2, & \beta < x < \gamma \\ 0, & x \geq \gamma \end{cases}$$

Berikut merupakan gambar yang menunjukkan skema kurva S penyusutan.



Gambar 2.7 Karakteristik Fungsi Kurva S

f. Representasi Kurva Bentuk Lonceng *(Bell Curve)*

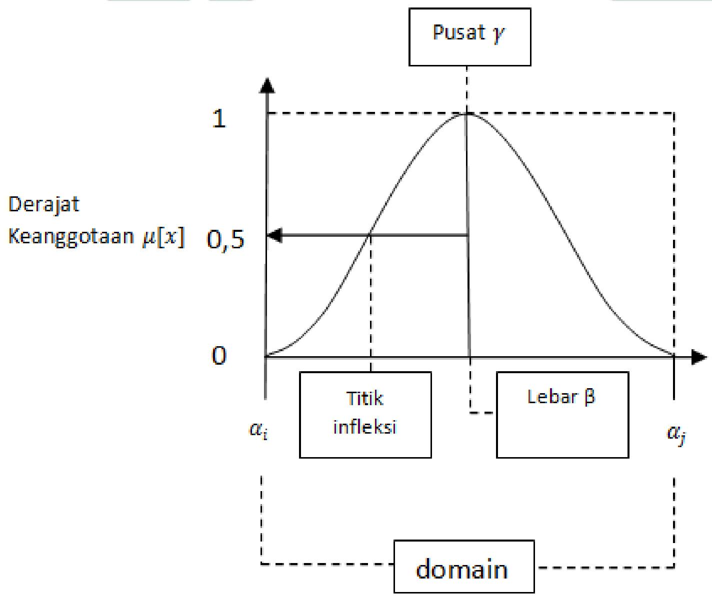
Kurva berbentuk lonceng memiliki tiga tipe yakni: kurva PI, beta dan gauss. Kurva berbentuk lonceng merepresentasikan bilangan fuzzy dengan tiga kelas berikut:

1. Kurva PI

   Kurva lonceng kelas PI memiliki lebar yang disimbolkan dengan β dan pusat dengan domain γ memiliki nilai derajat keanggotaan satu. Berikut merupakan fungsi keanggotaan kurva lonceng PI untuk mendapatkan nilai derajat keanggotaan.

$$\Pi(x,\beta,\gamma) = \begin{cases} S\left(x;\gamma-\beta,\gamma-\frac{\beta}{2},\gamma\right) & \rightarrow x \leq \gamma \\ 1-S\left(x;\gamma;\gamma+\frac{\beta}{2},\gamma+\beta\right) & \rightarrow x > \gamma \end{cases}$$

   Berikut merupakan gambar kurva lonceng PI.



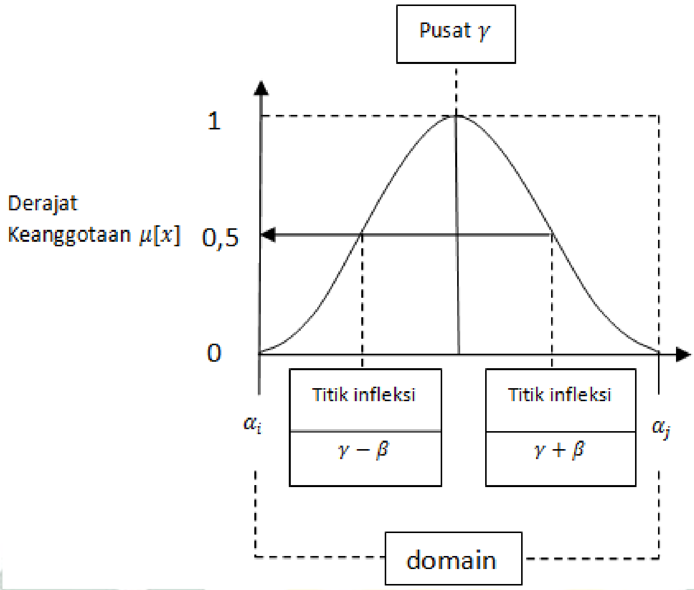
Gambar 2.8 Karakteristik Fungsional Kurva PI

2. Kurva BETA

   Kurva BETA merupakan kurva berbentuk lonceng yang memiliki dua parameter, yakni parameter γ dan β. Parameter γ yaitu nilai domain yang berpusat pada kurva, sedangkan parameter β merupakan setengah lebar kurva. Berikut merupakan fungsi keanggotaan kurva lonceng BETA untuk mendapatkan nilai derajat keanggotaan

$$B(x;\gamma;\beta) = \frac{1}{1+(\dfrac{x-\gamma}{\beta})^2}$$

Berikut merupakan gambar kurva BETA:



Gambar 2.9 Karakteristik Fungsional Kurva beta

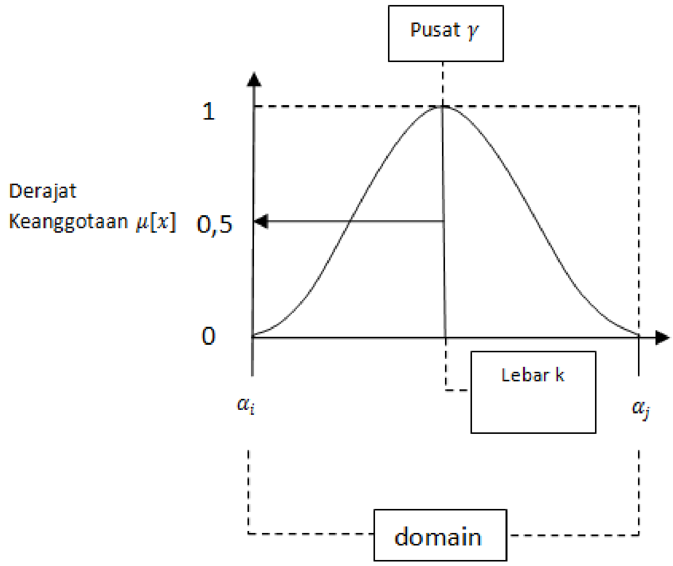
Perbedaan antara kurva beta dan PI adalah jika pada kurva beta nilai β semakin besar maka nilai keanggotaan akan mendekati nol.

3. Kurva Gauss

Pada kurva Beta dan PI menggunakan dua parameter yakni β dan γ. Dua parameter juga digunakan pada kurva gauss, yakni parameter (γ) untuk menunjukkan nilai domain pada pusat kurva dan parameter (k) menunjukkan lebar kurva. Berikut merupakan fungsi keanggotaan kurva lonceng gauss untuk mendapatkan nilai derajat keanggotaan

$$G(x;k;\gamma) = \epsilon^{-k(\gamma-x)^2}$$

Berikut merupakan gambar dari kurva gauss



Gambar 2.10 Karakteristik Fungsional Kurva gauss

Operator dalam himpunan fuzzy didefinisikan sebagai berikut: (Zadeh , 1965)

a. Operator And

Operasi interseksi pada himpunan diaplikasikan pada operator and. Hasil operasi operator and didapat dengan cara mengambil nilai terkecil antar elemen pada suatu himpunan.

$$\mu_{A \cap B} = min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

b. Operator Or

Operasi union pada himpunan diaplikasikan pada operator or. Hasil operasi operator or didapat dengan cara mengambil nilai terbesar antar elemen pada suatu himpunan.

$$\mu_{A \cup B} = max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

c. Operator Not

Operasi komplemen pada himpunan diaplikasikan pada operator not. Hasil operasi operator not didapat dengan cara pengurangan nilai 1 dengan fungsi keanggotaannya.

$$\mu_{A'} = 1 - \mu_A(x)$$

Berikut merupakan contoh kasus operasi AND

Contoh 2.1.2 Tahun 2020 merupakan tahun yang berbeda dari tahun-tahun sebelumnya, pada tahun 2020 terdapat wabah COVID-19 yang disebabkan oleh virus corona. Seluruh negara sedang berjuang menghadapi wabah yang meresahkan masyarakat. Untuk melindungi diri dari COVID-19 terdapat beberapa cara, salah satunya selalu memakai masker agar mencegah adanya penularan COVID-19. Suatu perusahaan yang memproduksi masker semakin hari memiliki permintaan yang signifikan naik, menurut data satu bulan terakhir permintaan terbesar 6000 keemasan/hari, dan permintaan terkecil 4000 keemasan/hari. Persediaan barang digudang terbanyak 900 keemasan/hari, sedangkan persediaan paling sedikit pernah mencapai 300 keemasan/hari. Perusahaan hanya dapat memproduksi masker maksimal 7000 keemasan/hari. Untuk efisiensi SDM dan mesin yang digunakan, perusahaan diharap dapat memproduksi setidaknya 3000 keemasan/hari. Berapa keemasan masker yang harus diproduksi jika permintaan sebanyak 5000 dan persediaan di gudang masih 700 keemasan, apabila sistem produksi perusahaan 4 aturan fuzzy sebagai berikut:

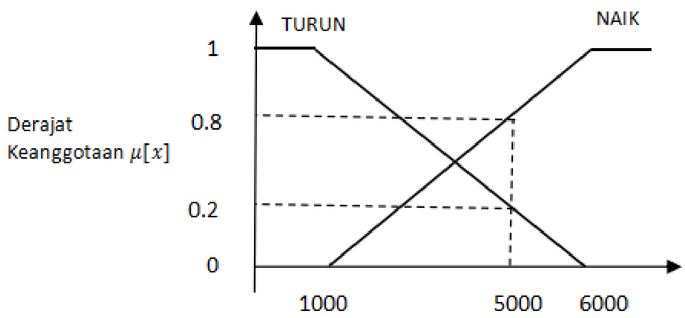
R1. IF permintaan TURUN And persediaan BANYAK THEN produksi masker BERKURANG

R2. IF permintaan TURUN And persediaan SEDIKIT THEN produksi masker BERKURANG

R3. IF permintaan NAIK And persediaan BANYAK THEN produksi masker BERTAMBAH

R4. IF permintaan NAIK And persediaan SEDIKIT THEN produksi masker BERTAMBAH

Berikut merupakan gambar fungsi keangotaan variabel fuzzy NAIK dan TURUN:



Gambar 2.11 Fungsi Keanggotaan Variabel Permintaan

Berikut cara untuk mencari nilai keanggotaan variabel permintaan

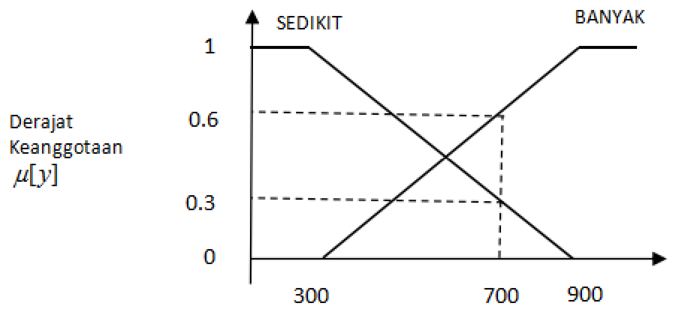
$$\mu_{PmtTURUN}[x] = \begin{cases} 1, & x \leq 1000 \\ \dfrac{6000 - x}{5000}, & 1000 < x < 6000 \\ 0, & x \geq 6000 \end{cases}$$

$$\mu_{PmtNAIK}[x] = \begin{cases} 0, & x \leq 1000 \\ \dfrac{x - 1000}{5000}, & 1000 < x < 6000 \\ 1, & x \geq 6000 \end{cases}$$

Maka, nilai keanggotaan untuk permintaan 5000 keemasan adalah:

$$\mu_{PmtTURUN}(5000) = \frac{(6000-5000)}{5000}$$
$$= 0.2$$
$$\mu_{PmtNAIK}(5000) = \frac{(5000-1000)}{5000}$$
$$= 0.8$$

Variabel Persediaan juga memiliki dua himpunan fuzzy, yaitu SEDIKIT dan BANYAK, berikut merupakan gambar fungsi keanggotaannya:



Gambar 2.12 Fungsi Keanggotaan Variabel Persediaan

Berikut cara untuk mencari nilai keanggotaan variabel persediaan

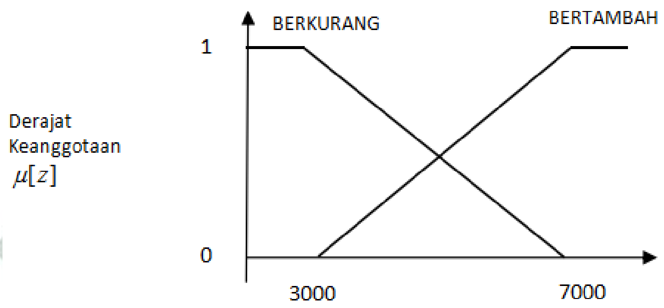
$$\mu_{PsdSEDIKIT}[y] = \begin{cases} 1, & y \leq 300 \\ \dfrac{900-y}{600}, & 300 < y < 900 \\ 0, & y \geq 900 \end{cases}$$

$$\mu_{PsdBANYAK}[y] = \begin{cases} 0, & y \leq 300 \\ \dfrac{y-300}{600}, & 300 < y < 900 \\ 1, & y \geq 900 \end{cases}$$

Maka, nilai keanggotaan untuk persediaan 700 keemasan adalah:

$$\begin{aligned}\mu_{PsdSEDIKIT}(700) &= \frac{(900-700)}{600}\\ &= 0.3\\ \mu_{PsdBANYAK}(700) &= \frac{(700-300)}{600}\\ &= 0.6\end{aligned}$$

Variabel Produksi juga memiliki dua himpunan fuzzy, yaitu BERKURANG dan BERTAMBAH, berikut merupakan gambar fungsi keanggotaannya:



Gambar 2.13 Fungsi Keanggotaan Variabel Produksi

Berikut cara untuk mencari nilai keanggotaan variabel produksi

$$\mu_{ProBERKURANG}[z] = \begin{cases} 1, & z \leq 3000 \\ \dfrac{7000-z}{4000}, & 3000 < z < 7000 \\ 0, & z \geq 7000 \end{cases}$$

$$\mu_{ProBERTAMBAH}[z] = \begin{cases} 0, & z \leq 3000 \\ \dfrac{z-3000}{4000}, & 3000 < z < 7000 \\ 1, & z \geq 7000 \end{cases}$$

Kemudian akan dicari nilai z dengan menggunakan aturan operasi AND sesuai *rules* yang berlaku.

R1. IF permintaan TURUN And persediaan BANYAK THEN produksi masker BERKURANG

$$\begin{aligned}\alpha - predikat_1 &= \mu_{PmtTURUN} \cap \mu_{PsdBANYAK} \\ &= min(\mu_{PmtTURUN}(5000), \mu_{PsdBANYAK}(700)) \\ &= min(0.2; 0.6) \\ &= 0.2\end{aligned}$$

Pada himpunan produksi masker BERKURANG, didapat

$$\begin{aligned}\frac{7000 - z_1}{4000} &= 0.2 \\ 7000 - z_1 &= 800 \\ z_1 &= 6200\end{aligned}$$

R2. IF permintaan TURUN And persediaan SEDIKIT THEN produksi masker BERKURANG

$$\begin{aligned}\alpha - predikat_2 &= \mu_{PmtTURUN} \cap \mu_{PsdSEDIKIT} \\ &= min(\mu_{PmtTURUN}(5000), \mu_{PsdSEDIKIT}(700)) \\ &= min(0.2; 0.3) \\ &= 0.2\end{aligned}$$

Pada himpunan produksi masker BERKURANG, didapat

$$\begin{aligned}\frac{7000 - z_2}{4000} &= 0.2\\ 7000 - z_2 &= 800\\ z_2 &= 6200\end{aligned}$$

R3. IF permintaan NAIK And persediaan BANYAK THEN produksi masker BERTAMBAH

$$\begin{aligned}\alpha - predikat_3 &= \mu_{PmtNAIK} \cap \mu_{PsdBANYAK}\\ &= min(\mu_{PmtNAIK}(5000), \mu_{PsdBANYAK}(700))\\ &= min(0.8; 0.6)\\ &= 0.6\end{aligned}$$

Pada himpunan produksi masker BERTAMBAH, didapat

$$\begin{aligned}\frac{z_3 - 3000}{4000} &= 0.6\\ z_3 - 3000 &= 2400\\ z_3 &= 600\end{aligned}$$

R4. IF permintaan NAIK And persediaan SEDIKIT THEN produksi masker BERTAMBAH

$$\begin{aligned}\alpha - predikat_4 &= \mu_{PmtNAIK} \cap \mu_{PsdSEDIKIT}\\ &= min(\mu_{PmtNAIK}(5000), \mu_{PsdSEDIKIT}(700))\\ &= min(0.8; 0.3)\\ &= 0.3\end{aligned}$$

Pada himpunan produksi masker BERTAMBAH, didapat

$$\begin{aligned} \frac{z_4 - 3000}{4000} &= 0.3 \\ z_4 - 3000 &= 1200 \\ z_4 &= 1800 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{\alpha pred_1 * z_1 + \alpha pred_2 * z_2 + \alpha pred_3 * z_3 + \alpha pred_4 * z_4}{\alpha pred_1 + \alpha pred_2 + \alpha pred_3 + \alpha pred_4} \\ &= \frac{0.2 * 6200 + 0.2 * 6200 + 0.6 * 600 + 0.3 * 1800}{0.2 + 0.2 + 0.6 + 0.3} \\ &= \frac{3380}{1.3} \\ &= 2600 \end{aligned}$$

Jadi jumlah masker yang harus diproduksi adalah 2600 keemasan/hari.

2.2. BCK-Aljabar

Suatu himpunan X dikenakan operasi $*$ dengan konstanta 0 merupakan BCK-aljabar apabila memenuhi aksioma yang telah ditentukan. Berikut merupakan penjelasan teori mengenai BCK-aljabar.

Definisi 2.2.1 *(Joseph and Hee , 1999) Suatu himpunan tak kosong* $(c, *, 0)$ *dikatakan BCK-aljabar apabila memenuhi aksioma berikut:*

i. $c * c = 0$,

ii. $0 * c = 0$,

iii. $c * r = 0$ *dan* $r * c = 0$ *menyebabkan* $c = r$,

iv. $((c * r) * (c * n)) * (n * r) = 0$,

v. $(c * (c * r)) * r = 0$.

Untuk setiap $c, r, n \in X$

Suatu relasi biner $\leq$ pada BCK-aljabar X dengan $c \leq r$ jika dan hanya jika $c * r = 0$, oleh karena itu, dengan dilengkapi relasi biner $\leq$ himpunan BCK-aljabar X memenuhi (Jie et al , 1997) :

i. $(c * r) * n = (c * n) * r$,

ii. $c * r \leq c$,

iii. $c * 0 = c$,

iv. $(c * n) * (r * n) \leq c * r$,

v. $c * (c * (c * r)) = c * r$,

vi. $c \leq r$ sehingga $c * n \leq r * n$ dan $n * r \leq n * c$

Untuk setiap $c, r, n \in X$ (Jie et al , 1997).

Contoh 2.2.2 Diberikan himpunan $X = \{0, 1, 2, 3\}$. Didefinisikan operasi $*$ pada X sebagai berikut:

Tabel 2.12 Tabel Cayley Operasi $*$ pada X

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	2	2	0	0
3	3	2	1	0

Himpunan X merupakan BCK-aljabar karena memenuhi aksioma BCK-aljabar yakni, untuk setiap $c, r, n \in X$ berlaku :

i. $c * c = 0$. Misal diambil $c = 1$ maka $1 * 1 = 0$.

ii. $0 * c = 0$. Misal diambil $c = 2$ berlaku $0 * 2 = 0$.

iii. $c * r = 0$ dan $r * c = 0$ berakibat $c = r$. Misal $c = 1$ dan $r = 1$ maka $c * r = 0$ terbukti bahwa $c = r$.

iv. $((c * r) * (c * n)) * (n * r) = 0$. Misal $c = 1$, $r = 2$ dan $n = 3$ maka $((1 * 2) * (1 * 3)) * (3 * 2) = 0$.

v. $(c * (c * r)) * r = 0$. Misal $c = 1$, dan $r = 2$ maka $(1 * (1 * 2)) * 2 = 0$.

2.2.1. Subaljabar

Diberikan himpunan S merupakan subaljabar dari himpunan BCK-aljabar X. Berikut merupakan teori mengenai subaljabar atas BCK-aljabar.

Definisi 2.2.3 *(Young , 2001) Suatu Himpunan tak kosong S merupakan subset dari BCK-aljabar X dikatakan subaljabar apabila memenuhi $c*r \in S$ dengan $c, r \in S$.*

Contoh 2.2.4 Berikut merupakan contoh dari subaljabar dan bukan subaljabar:

1. Diberikan BCK-aljabar yaitu $X = \{0, 1, 2, 3\}$ yang didefinisikan operasi $*$ seperti pada Tabel Cayley 2.12. Himpunan $S = \{0, 1, 2\}$ merupakan subaljabar dari BCK-aljabar X karena memenuhi aksioma $c*r \in S$, untuk setiap $c, r \in S$.

2. Diberikan BCK-aljabar yaitu $X = \{0, 1, 2, 3\}$ yang didefinisikan operasi $*$ seperti pada Tabel Cayley 2.12 memiliki himpunan $P = \{1, 2\}$ bukan merupakan subaljabar dari BCK-aljabar X karena $1 * 1 = 0 \notin P$.

2.2.2. Ideal dari BCK-Aljabar

Diberikan himpunan I yang dikenakan operasi $*$ merupakan ideal dari BCK-aljabar X. Berikut merupakan teori mengenai ideal atas BCK-aljabar.

Definisi 2.2.5 *(Young , 2001) Suatu Himpunan tak kosong I merupakan subset dari BCK-aljabar X dikatakan ideal apabila memenuhi aksioma sebagai berikut:*

i. $0 \in I$,

ii. $c * r \in I$ *dan* $r \in I$ *maka* $c \in I$.

Contoh 2.2.6 Himpunan $S = \{0, 1, 2\}$ atas BCK-aljabar X merupakan ideal atas BCK-aljabar X, karena memenuhi aksioma ideal, yaitu terdapat $0 \in S$ dan memenuhi aksioma yang kedua yaitu $c * r \in S$ dan $r \in S$ maka $c \in S$.

Berdasarkan Contoh 2.2.4 dan Contoh 2.2.6 dapat diambil kesimpulan bahwa setiap himpunan S atas BCK-aljabar X merupakan subaljabar pasti ideal atas BCK-aljabar X, begitu pula sebaliknya.

Pada himpunan BCK-aljabar X jika dikaitkan dengan himpunan fuzzy memiliki definisi baru yaitu subaljabar fuzzy dan ideal fuzzy.

Definisi 2.2.7 *(Jie et al , 1997) Suatu himpunan fuzzy μ dikatakan subaljabar fuzzy atas BCK-aljabar X apabila memenuhi $\mu(c * r) \geq min\{\mu(c), \mu(r)\}$, $\forall c, r \in X$.*

Contoh 2.2.8 Diberikan himpunan $X = \{0, 1, 2, 3\}$ yang dikenakan operasi bintang dengan Tabel Cayley 2.12. Suatu himpunan fuzzy $\mu : X \rightarrow [0, 1]$ dengan $\mu(0) = 0.9$ dan $\mu(c) = 0.2$, untuk $c \neq 0$.

Himpunan fuzzy μ dari BCK-aljabar X sebagai domain yang dipetakan ke derajat keanggotaannya yang bernilai 0 sampai 1. Pada Contoh 2.2.8 $\mu(0)$ dengan $0 \in X$

memiliki derajat keanggotaan 0.9 dan $\mu(c)$ dengan $c \in X$ kecuali 0 memiliki derajat keanggotaan bernilai 0.2. Sehingga, Himpunan fuzzy μ merupakan subaljabar fuzzy atas BCK-aljabar X karena memenuhi $\mu(c*r) \geq min\{\mu(c), \mu(r)\}$, $\forall c, r \in X$.

Selain definisi subaljabar fuzzy atas BCK-aljabar X, himpunan fuzzy jika dikaitkan dengan BCK-aljabar X memunculkan definisi baru yang kedua yakni ideal fuzzy atas BCK-aljabar X, berikut merupakan definisi ideal fuzzy atas BCK-aljabar X

Definisi 2.2.9 *(Jie et al , 1997) Misalkan X adalah suatu himpunan BCK-aljabar. Suatu himpunan fuzzy μ dikatakan ideal fuzzy atas X apabila memenuhi :*

i. $\mu(0) \geq \mu(c)$, $\forall c \in X$,

ii. $\mu(c) \geq min\{\mu(c*r), \mu(r)\}\ \forall\, c, r \in X$.

Contoh 2.2.10 Diberikan himpunan $X = \{0, 1, 2, 3\}$ yang dikenakan operasi bintang dengan Tabel Cayley 2.12. Berdasarkan Contoh 2.2.8, himpunan fuzzy μ merupakan ideal fuzzy atas BCK-aljabar X karena memenuhi $\mu(0) \geq \mu(c)$ dan $\mu(c) \geq min\{\mu(c*r), \mu(r)\}\ \forall\, c, r \in X$.

Berikut merupakan proposisi mengenai ideal fuzzy atas BCK-aljabar X

Proposisi 2.2.11 *(Jie et al , 1997) Setiap ideal fuzzy atas BCK-aljabar berlaku order reversing.*

Diberikan BCK-aljabar X. fuzzy BCK-aljabar $\mu : X \rightarrow [0, 1]$ disebut *order reversing* jika $c_1 \leq c_2$ maka $\mu(c_1) \geq \mu(c_2)$, untuk setiap $c_1, c_2 \in X$(Davey et al , 2013).

Berdasarkan definisi subaljabar fuzzy dan ideal fuzzy atas BCK-aljabar X

memunculkan sifat yang berkaitan dengan keduanya yakni :

Teorema 2.2.12 *(Jie et al , 1997) Himpunan ideal fuzzy μ atas BCK-aljabar X pasti merupakan subaljabar fuzzy atas BCK-aljabar X.*

Bukti. Untuk setiap $c, r \in X$ berlaku $c * r \leq c$, berdasarkan Proposisi 2.2.11 sehingga diperoleh

$\mu(c * r) \quad \geq \mu(c)$ dengan aksioma (ii) ideal fuzzy atas BCK-aljabar maka,

$$\mu(c * r) \geq \mu(c) \geq min\{\mu(c * r), \mu(r)\}$$

$$\mu(c * r) \geq min\{\mu(c), \mu(r)\}$$

■

Pada tahun 1999, Neggers dan Kim memperumum konsep dari BCK-aljabar. Perumuman dari BCK-aljabar disebut d - aljabar. Himpunan tak kosong X dikenakan operasi $*$ dilengkapi dengan konstanta 0 dikatakan d - aljabar apabila memenuhi tiga aksioma yang telah ditetapkan. Akibatnya, untuk setiap himpunan X dikatakan BCK-aljabar pasti merupakan d-aljabar namun tidak berlaku sebaliknya (Joseph and Hee , 1999).

2.3. *d*-Aljabar

Suatu Himpunan X dikenakan operasi $*$ dengan konstanta 0 dikatakan d-aljabar apabila memenuhi aksioma yang telah ditentukan. Berikut merupakan penjelasan teori mengenai d-aljabar.

Definisi 2.3.1 *(Joseph and Hee , 1999) Suatu himpunan $(c, *, 0)$ dikatakan d-aljabar bila memenuhi aksioma sebagai berikut:*

i. $c * c = 0$,

ii. $0 * c = 0$,

iii. $c * r = 0$ *dan* $r * c = 0$ *menyebabkan* $c = r$.

Untuk setiap $c, r \in X$

Contoh 2.3.2 Berikut merupakan beberapa contoh d-aljabar.

1. Diberikan $X = \{0, 1, 2\}$. Berikut definisi operasi $*$ pada X.

   Tabel 2.14 Tabel Cayley Operasi $*$ pada X

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	2	0	2
2	1	1	0

   Himpunan X merupakan d - aljabar karena memenuhi aksioma d - aljabar, yaitu untuk setiap $c, r \in X$ berlaku :

   i. $c * c = 0$. Misal $c = 1$ maka $1 * 1 = 0$.

   ii. $0 * c = 0$. Misal $c = 1$ maka $0 * 1 = 0$.

   iii. $c * r = 0$ dan $r * c = 0$ yang mengakibatkan $c = r$. Misal $c = 1$ dan $r = 1$ maka $1 * 1 = 0$, sehingga $c = r$.

2. Diberikan himpunan $X = \{0, d, e, f\}$. Berikut definisi operasi $*$ pada X.

Tabel 2.15 Tabel Cayley Operasi $*$ pada X

*	0	d	e	f
0	0	0	0	0
d	d	0	0	d
e	e	f	0	0
f	f	f	f	0

Himpunan X merupakan d - aljabar karena memenuhi aksioma d - aljabar, yaitu untuk setiap $c, r \in X$ berlaku :

i. $c * c = 0$. Misal $c = d$ maka $d * d = 0$.

ii. $0 * c = 0$. Misal $c = e$ maka $0 * e = 0$.

iii. $c * r = 0$ dan $r * c = 0$ yang mengakibatkan $c = r$. Misal $c = e$ dan $r = e$ maka $e * e = 0$, sehingga $c = r$.

3. Diberikan himpunan $X = \{0, d, e, f, g\}$. Berikut definisi operasi $*$ pada X.

Tabel 2.16 Tabel Cayley Operasi $*$ pada X

*	0	d	e	f	g
0	0	0	0	0	0
d	d	0	d	0	d
e	e	e	0	f	0
f	f	f	e	0	0
g	f	f	d	d	0

Himpunan X merupakan d - aljabar karena memenuhi aksioma d - aljabar, yaitu untuk setiap $c, r \in X$ berlaku :

i. $c * c = 0$. Misal $c = g$ maka $g * g = 0$.

ii. $0 * c = 0$. Misal $c = e$ maka $0 * e = 0$.

iii. $c * r = 0$ dan $r * c = 0$ yang mengakibatkan $c = r$. Misal $c = f$ dan $r = f$ maka $f * f = 0$, sehingga $c = r$.

2.3.1. *d*-Subaljabar

Himpunan tak kosong S subset dari himpunan d-aljabar X merupakan d-subaljabar jika memenuhi aksioma yang telah ditetapkan. Berikut penjelasan mengenai d-subaljabar.

Definisi 2.3.3 *(Akram , 2005) Diberikan himpunan tak kosong S subset dari d-aljabar X. Himpunan S disebut subaljabar dari X jika* $c * r \in S$, $\forall c, r \in S$

Contoh 2.3.4 Berikut merupakan contoh dari d-subaljabar dan bukan d-subaljabar:

1. Diberikan himpunan $X = \{0, d, e, f\}$ dengan Tabel Cayley 2.15 merupakan d-aljabar berdasarkan Contoh 2.3.2 nomor 2.
   Himpunan $Q = \{0, d\}$ merupakan d-subaljabar karena untuk setiap $c * r \in S$ dengan $c \in S, r \in S$. Elemen dalam himpunan d-subaljabar Q merupakan subset dari himpunan d-aljabar X,sehingga elemen d pada himpunan Q dapat diganti dengan sebarang elemen pada himpunan d-aljabar X.

2. Diberikan himpunan $X = \{0, a, b, c\}$ dengan Tabel Cayley 2.15 merupakan d-aljabar berdasarkan Contoh 2.3.2 nomor 2.
   Himpunan $P = \{0, a, b\}$ bukan d-subaljabar karena terdapat $c = b$ dan $r = a$, dengan $c, r \in P$ sedemikian sehingga $c * r = b * a = c \notin P$.

2.3.2. *d*-ideal

Himpunan tak kosong I merupakan subset dari d-aljabar X dikatakan d-ideal atas himpunan X apabila memenuhi aksioma yang telah ditentukan. Berikut penjelasan mengenai teori d-ideal

Definisi 2.3.5 *(Joseph et al , 1999) Diberikan himpunan X merupakan d-aljabar dan I subset dari X, kemudian I disebut d-ideal pada X jika memenuhi aksioma berikut:*

i. $c * r \in I$ *dan* $r \in I$ *maka* $c \in I$,

ii. $c \in I$ *dan* $r \in X$ *maka* $c * r \in I$ *sehingga* $I * c \subseteq I$.

Contoh 2.3.6 Berdasarkan Contoh 2.3.2 nomor 3, himpunan $X = \{0, d, e, f, g\}$ merupakan d-aljabar dengan Tabel Cayley 2.16.

Himpunan $Q = \{0, d\}$ merupakan d-ideal dari X karena,

$c * r \in Q$ dan $r \in Q \Rightarrow c \in Q$

$d * 0 \in Q$ dan $0 \in Q \Rightarrow d \in Q$

$0 * d \in Q$ dan $d \in Q \Rightarrow 0 \in Q$

Aksioma (i) terpenuhi, selanjutnya akan dibuktikan aksioma (ii).

$c \in Q$ dan $r \in X$ maka $c * r \in Q$ sehingga $Q * X \subseteq Q$

$d \in Q$ dan $0 \in X$ maka $d * 0 \in Q$

$0 \in Q$ dan $d \in X$ maka $0 * d \in Q$.

Berikut merupakan Tabel Cayley dengan operasi $*$ untuk menunjukkan $Q * X \subseteq Q$.

Tabel 2.17 Tabel Cayley Operasi $*$ pada X

*	0	d	e	f	g
0	0	0	0	0	0
d	d	0	d	0	d

Aksioma (ii) telah terpenuhi, maka himpunan Q merupakan d-ideal atas d-aljabar X

Contoh 2.3.7 Diberikan himpunan $X = \{0, d, e, f\}$ dengan Tabel Cayley 2.15 merupakan d-aljabar.

$J = \{0, d, f\}$ bukan d-ideal atas X, karena tidak memenuhi aksioma (i) dari definisi d-ideal. Karena terdapat $c = e, r = f$ berlaku $c * r = e * f = 0$ dan $r \in J$ tetapi $c \notin J$.

2.4. Integrasi Keilmuan

Dalam keilmuan matematika terdapat konsep mengenai himpunan. Himpunan merupakan kumpulan objek yang dapat didefinisikan dengan jelas, makna definisi secara jelas adalah dari syarat, ciri dan sifat yang telah ditentukan (Ahdinia , 2018). Teori himpunan selain dibahas di ilmu matematika, himpunan juga tertera dalam QS. Al-An'am ayat 128 yang berbunyi :

وَيَوْمَ يَحْشُرُهُمْ جَمِيعًا يَا مَعْشَرَ الْجِنِّ قَدِ اسْتَكْثَرْتُمْ مِنَ الْإِنْسِ ۖ وَقَالَ أَوْلِيَاؤُهُمْ
مِنَ الْإِنْسِ رَبَّنَا اسْتَمْتَعَ بَعْضُنَا بِبَعْضٍ وَبَلَغْنَا أَجَلَنَا الَّذِي أَجَّلْتَ لَنَا ۚ قَالَ النَّارُ
مَثْوَاكُمْ خَالِدِينَ فِيهَا إِلَّا مَا شَاءَ اللَّهُ ۗ إِنَّ رَبَّكَ حَكِيمٌ عَلِيمٌ

Artinya :"Dan (ingatlah) hari diwaktu Allah menghimpunkan mereka semuanya (dan Allah berfirman): Hai golongan jin, sesungguhnya kamu telah banyak menyesatkan manusia. Lalu berkatalah kawan-kawan mereka dari golongan manusia: Ya Tuhan kami, sesungguhnya sebagian daripada kami telah dapat kesenangan dari sebagian (yang lain) dan kami telah sampai kepada waktu yang telah engkau tentukan bagi kami. Allah berfirman: Neraka itulah tempat diam kamu, sedang kamu kekal di dalamnya, kecuali kalau Allah menghendaki (yang lain). Sesungguhnya Tuhanmu maha Bijaksana lagi Maha Mengetahui"(QS. Al-An'am : 128).

Dalam ayat tersebut telah disebutkan beberapa golongan makhluk ciptaan Allah SWT yang dapat disimbolkan dengan :

$A = \{golongan\ manusia\}$

$B = \{golongan\ jin\}$

$S = \{makhluk\ Allah\}$

A merupakan himpunan yang berisi kumpulan golongan manusia, sedangkan himpunan B berisi kumpulan golongan jin. Manusia merupakan makhluk Allah yang diciptakan dari tanah dan jin diciptakan Allah dari api. Semesta pada ayat ini adalah makhluk Allah karena manusia dan jin diciptakan oleh Allah. Pada penelitian ini juga membahas teori mengenai himpunan, yakni himpunan fuzzy. Himpunan fuzzy merupakan suatu himpunan yang dinotasikan dengan fungsi keanggotaan $\mu_A(x)$ yang mengaitkan tiap titik-titik di himpunan X pada derajat keanggotaannya yang bernilai [0,1]. Himpunan fuzzy jika dikaitkan dengan kelas aljabar yakni BCK-aljabar dan d-aljabar memunculkan definisi baru yaitu subaljabar fuzzy dan ideal fuzzy.

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, akan dikaji tentang d-subaljabar fuzzy dan d-ideal fuzzy atas d-aljabar. Khususnya sifat-sifat dari d-subaljabar fuzzy dan d-ideal fuzzy.

3.1. *d*-Subaljabar fuzzy

Suatu himpunan fuzzy μ dikatakan d-subaljabar fuzzy apabila memenuhi aksioma yang telah ditentukan. Berikut merupakan teori mengenai d-subaljabar fuzzy dari himpunan X.

Definisi 3.1.1 *(Akram , 2005) Suatu himpunan fuzzy μ pada d - aljabar disebut d-subaljabar fuzzy dari X apabila memenuhi $\mu(c * r) \geq min\{\mu(c), \mu(r)\} \forall c, r \in X$.*

Contoh 3.1.2 Diberikan himpunan $X = \{0, 1, 2\}$ dikenakan operasi $*$ dengan Tabel Cayley 2.2. Suatu himpunan fuzzy $\mu : X \to [0, 1]$ dengan $\mu(0) = 0.7$, $\mu(c) = 0.02$ dengan $c \neq 0$ merupakan d-subaljabar fuzzy atas himpunan X karena memenuhi :

Misal $c = 1$ dan $r = 0$

$$\begin{aligned} \mu(1 * 0) &\geq min\{\mu(1), \mu(0)\} \\ 0.02 &\geq 0.02 \end{aligned}$$

Misal $c = 2$ dan $r = 0$

$$\begin{aligned} \mu(2 * 0) &\geq min\{\mu(2), \mu(0)\} \\ 0.02 &\geq 0.02 \end{aligned}$$

Misal $c = 1$ dan $r = 1$

$$\begin{aligned} \mu(1 * 1) &\geq min\{\mu(1), \mu(1)\} \\ 0.7 &\geq 0.02 \end{aligned}$$

Misal $c = 2$ dan $r = 1$

$$\begin{aligned} \mu(2 * 1) &\geq min\{\mu(2), \mu(1)\} \\ 0.02 &\geq 0.02 \end{aligned}$$

Misal $c = 1$ dan $r = 2$

$$\begin{aligned} \mu(1 * 2) &\geq min\{\mu(1), \mu(2)\} \\ 0.02 &\geq 0.02 \end{aligned}$$

Misal $c = 2$ dan $r = 2$

$$\begin{aligned} \mu(2 * 2) &\geq min\{\mu(2), \mu(2)\} \\ 0.7 &\geq 0.02 \end{aligned}$$

Himpunan fuzzy μ atas d-aljabar X merupakan d-subaljabar fuzzy.

3.2. *d*-Ideal fuzzy

Selain d-subaljabar fuzzy terdapat definisi d-ideal fuzzy. Berikut merupakan definisi d-ideal fuzzy.

Definisi 3.2.1 *(Akram , 2005) Suatu himpunan fuzzy μ pada X disebut d - ideal fuzzy dari X atas d - aljabar memenuhi aksioma berikut :*

i. $\mu(0) \geq \mu(c)$

ii. $\mu(c) \geq min\{\mu(c * r), \mu(r)\}$

iii. $\mu(c * r) \geq min\{\mu(c), \mu(r)\}$, $\forall c, r \in X$

Contoh 3.2.2 Berdasarkan Contoh 3.1.2 himpunan fuzzy $\mu : X \to [0, 1]$ dengan $\mu(0) = 0.7$, $\mu(c) = 0.02$ untuk $c \neq 0$ merupakan d-ideal fuzzy atas himpunan d-aljabar X, karena memenuhi:

i. Untuk setiap $c \in X$, jelas bahwa aksioma pertama telah dipenuhi, karena diketahui $\mu(0) = 0.7$ dan $\mu(c) = 0.02$, sehingga $\mu(0) \geq \mu(c)$.

ii. Untuk setiap $c, r \in X$ memenuhi $\mu(c) \geq min\{\mu(c * r), \mu(r)\}$, yaitu:

Misal $c = 1$ dan $r = 0$

$\mu(1) \geq min\{\mu(1 * 0), \mu(0)\}$

$0.02 \geq 0.02$.

Misal $c = 2$ dan $r = 0$

$\mu(2) \geq min\{\mu(2 * 0), \mu(0)\}$

$0.02 \geq 0.02$

Misal $c = 1$ dan $r = 1$

$\mu(1) \geq min\{\mu(1 * 1), \mu(1)\}$

$0.02 \geq 0.02$

Misal $c = 2$ dan $r = 1$

$\mu(2) \geq min\{\mu(2 * 1), \mu(1)\}$

$0.02 \geq 0.02$

Misal $c = 1$ dan $r = 2$

$\mu(1) \geq min\{\mu(1 * 2), \mu(2)\}$

$0.02 \geq 0.02$

Misal $c = 2$ dan $r = 2$

$\mu(2) \geq min\{\mu(2 * 2), \mu(2)\}$

$0.02 \geq 0.02$.

iii. Untuk setiap $c, r \in X$ berlaku $\mu(c * r) \geq min\{\mu(c), \mu(r)\}$. Pada aksioma ketiga telah dibuktikan pada pembuktian Contoh 3.1.2. Karena ketiga aksioma d-ideal fuzzy atas d-aljabar X maka himpunan fuzzy μ terbukti d-ideal fuzzy atas d-aljabar X.

Definisi 3.2.3 *(Davey et al , 2013) Diberikan himpunan d-aljabar X, fuzzy d-aljabar $\mu : X \to [0, 1]$ disebut order reversing jika $c_1 \leq c_2$ maka $\mu(c_1) \geq \mu(c_2)$, untuk setiap $c_1, c_2 \in X$.*

Berdasarkan Definisi 3.1.1 dan 3.2.1, d-ideal fuzzy pasti d-subaljabar fuzzy, tetapi belum tentu berlaku sebaliknya. Syarat agar d-subaljabar fuzzy menjadi d-ideal fuzzy terdapat pada teorema berikut:

Teorema 3.2.4 *Diberikan S adalah d-subaljabar fuzzy. Jika untuk setiap $c, r \in S$ berlaku $c \leq r$, maka S merupakan d-ideal fuzzy.*

Bukti. Diketahui: S merupakan d-subaljabar fuzzy, maka S memenuhi $\mu(c * r) \geq min\{\mu(c), \mu(r)\}$.
Ingat, apabila suatu relasi biner pada BCK-aljabar X dengan $c \leq r$ jika dan hanya jika $c * r = 0$, karena d-aljabar merupakan perumuman dari BCK-aljabar maka aturan relasi biner tersebut juga berlaku pada himpunan d-aljabar.
Akan ditunjukkan: S adalah d-ideal fuzzy.

i. Ambil sebarang $c, r \in S$ berlaku $\mu(0) \geq \mu(c)$.

   Dipunyai,

$c * r \leq c$	(definisi BCK-aljabar)
$\mu(c * r) \geq \mu(c)$	(definisi *order reversing*)
$\mu(0) \geq \mu(c)$	(karena $c \leq r$)

ii. Ambil sebarang $c, r \in S$, berlaku $\mu(c) \geq min\{\mu(c * r), \mu(r)\}$.

Ingat bahwa $c \leq r$, dengan menggunakan definisi *order reversing* diperoleh $\mu(c) \geq \mu(r)$, sehingga

$$\begin{aligned} \mu(c) &\geq min\{\mu(c * r), \mu(r)\} && \text{(definisi } d\text{-ideal fuzzy)} \\ &= min\{\mu(0), \mu(r)\} && \text{(karena } c \leq r) \\ &= \mu(r) && (\textit{order reversing} \text{ dari } c \leq r) \end{aligned}$$

iii. Ambil sebarang $c, r \in S$. Karena S adalah d-subaljabar fuzzy, maka berlaku $\mu(c * r) \geq min\{\mu(c), \mu(r)\}$.

■

Pada dua himpunan fuzzy atas d-aljabar dapat didefinisikan produk kartesian sebagai berikut:

Definisi 3.2.5 *Produk kartesian $\lambda \times \mu : X \times X \to [0,1]$ pada himpunan fuzzy didefinisikan dengan $(\lambda \times \mu)(c, r) = min\{\lambda(c), \mu(r)\}$, $\forall\ c, r \in X$, dengan λ dan μ merupakan himpunan fuzzy atas himpunan d-aljabar X.*

Teorema 3.2.6 *Jika λ dan μ adalah d-ideal fuzzy atas d-aljabar, maka $\lambda \times \mu$ adalah d-ideal fuzzy atas $X \times X$.*

Bukti. Diketahui : λ dan μ merupakan d-ideal fuzzy atas d-aljabar, untuk setiap $c, r \in X$ memenuhi:

i. $\mu(0) \geq \mu(c)$ dan $\lambda(0) \geq \lambda(c)$

ii. $\mu(c) \geq min\{\mu(c * r), \mu(r)\}$ dan $\lambda(c) \geq min\{\lambda(c * r), \lambda(r)\}$

iii. $\mu(c * r) \geq min\{\mu(c), \mu(r)\}$ dan $\lambda(c * r) \geq min\{\lambda(c), \lambda(r)\}$

Akan ditunjukkan : $\lambda \times \mu$ merupakan d-ideal fuzzy atas $X \times X$, yaitu:

i. Ambil sebarang $(c, r) \in X \times X$ akan ditunjukkan $(\lambda \times \mu)(0, 0) \geq (\lambda \times \mu)(c, r)$.

   Diperhatikan,

$$\begin{aligned} (\lambda \times \mu)(0,0) &= min\{\lambda(0), \mu(0)\} && \text{(Definisi 3.2.5)} \\ &\geq min\{\lambda(c), \mu(r)\} && \text{(definisi } d\text{-ideal fuzzy)} \\ &= (\lambda \times \mu)(c, r) && \text{(Definisi 3.2.5)} \end{aligned}$$

ii. Ambil sebarang (c_1, c_2) dan $(r_1, r_2) \in X \times X$ akan ditunjukkan $(\lambda \times \mu)(c_1, c_2) \geq min\{(\lambda \times \mu)((c_1, c_2) * (r_1, r_2)), (\lambda \times \mu)(r_1, r_2)\}$

   Diperhatikan,

$$\begin{aligned} &(\lambda \times \mu)(c_1, c_2) \\ &= min\{\lambda(c_1), \mu(c_2)\} && \text{(Definisi 3.2.5)} \\ &\geq min\{min\{\lambda(c_1 * r_1), \lambda(r_1)\}, min\{\mu(c_2 * r_2), \mu(r_2)\} && \text{(definisi } d\text{-ideal fuzzy)} \\ &= min\{min\{\lambda(c_1 * r_1), \mu(c_2 * r_2)\}, min\{\lambda(r_1), \mu(r_2)) \\ &= min\{(\lambda \times \mu)((c_1 * r_1), (c_2 * r_2)), (\lambda \times \mu)(r_1, r_2)\} && \text{(Definisi 3.2.5)} \\ &= min\{(\lambda \times \mu)((c_1, c_2) * (r_1, r_2)), (\lambda \times \mu)(r_1, r_2)\} \end{aligned}$$

iii. Ambil sebarang (c_1, c_2) dan $(r_1, r_2) \in X \times X$.

   Akan ditunjukkan $(\lambda \times \mu)((c_1, c_2) * (r_1, r_2)) \geq min\{(\lambda \times \mu)(c_1, c_2), (\lambda \times \mu)(r_1, r_2)\}$

   Diperhatikan,

$$\begin{aligned} &(\lambda \times \mu)((c_1, c_2) * (r_1, r_2)) \\ &= (\lambda \times \mu)((c_1 * r_1), (c_2 * r_2)\} \\ &= min\{\lambda(c_1 * r_1), \mu(c_2 * r_2)) && \text{(Definisi 3.2.5)} \\ &\geq min\{min\{\lambda(c_1), \lambda(r_1)\}, min\{\mu(c_2), \mu(r_2)\} && \text{(definisi } d\text{-ideal fuzzy)} \end{aligned}$$

$= min\{min\{\lambda(c_1), \mu(c_2)\}, min\{\lambda(r_1), \mu(r_2)\}$

$= min\{(\lambda \times \mu)(c_1, c_2), (\lambda \times \mu)(r_1, r_2)\}$ (Definisi 3.2.5)

■

Berikut diberikan sifat d-ideal fuzzy terkait produk kartesian.

Teorema 3.2.7 *Diberikan λ dan μ merupakan himpunan fuzzy atas d-aljabar X. Jika $\lambda \times \mu$ merupakan d-ideal fuzzy atas $X \times X$, maka :*

i. $\lambda(0) \geq \lambda(c)$ atau $\mu(0) \geq \mu(c)$,

ii. Jika $\lambda(0) \geq \lambda(c)$ maka $\mu(0) \geq \lambda(c)$ atau $\mu(0) \geq \mu(c)$

iii. Jika $\mu(0) \geq \mu(c)$, maka $\lambda(0) \geq \lambda(c)$ atau $\lambda(0) \geq \mu(c)$,

untuk setiap $c \in X$

Bukti.

i. Diketahui: $\lambda \times \mu$ merupakan d-ideal fuzzy atas $X \times X$, sehingga memenuhi $(\lambda \times \mu)(0, 0) \geq (\lambda \times \mu)(c, r)$, untuk setiap $c, r \in X$.

   Akan ditunjukkan bahwa $\lambda(0) \geq \lambda(c)$ atau $\mu(0) \geq \mu(c)$.

   Andaikan $\lambda(0) < \lambda(c)$ atau dengan kata lain $\lambda(c) > \lambda(0)$ dan $\mu(0) < \mu(c)$ atau dengan kata lain $\mu(c) > \mu(0)$ dengan $c, r \in X$.

   Diperhatikan,

$$\begin{aligned}
(\lambda \times \mu)(c, r) &= min\{\lambda(c), \mu(r)\} && \text{(Definisi 3.2.5)} \\
&> min\{\lambda(0), \mu(0)\} && \text{(aksioma } d\text{-ideal fuzzy)} \\
&= (\lambda \times \mu)(0, 0) && \text{(Definisi 3.2.5)}
\end{aligned}$$

Sehingga $(\lambda \times \mu)(c, r) > (\lambda \times \mu)(0, 0)$. Kontradiksi dengan aksioma d-ideal fuzzy, maka pernrataan salah dan harus diingkar. Jadi, $\lambda(0) \geq \lambda(c)$ atau $\mu(0) \geq \mu(c)$.

ii. Diketahui $\lambda(0) \geq \lambda(c),\ \forall c \in X.$

Akan ditunjukkan $\mu(0) \geq \lambda(c)$ atau $\mu(0) \geq \mu(c)$.

Andaikan bahwa $\mu(0) < \lambda(c)$ dan $\mu(0) < \mu(c)$.

Diperhatikan

$(\lambda \times \mu)(0, 0) = min(\lambda(0), \mu(0)) = \mu(0)$.

dan

$$\begin{aligned}(\lambda \times \mu)(c, r) &= min\{\lambda(c), \mu(r)\} \quad \text{(Definisi 3.2.5)}\\ &> min\{\mu(0), \mu(0)\}\\ &= \mu(0)\end{aligned}$$

Sehingga $(\lambda \times \mu)(c, r) > (\lambda \times \mu)(0, 0)$.

Kontradiksi dengan aksioma d-ideal fuzzy, maka pernrataan salah dan harus diingkar. Jadi $\mu(0) \geq \lambda(c)$ atau $\mu(0) \geq \mu(c)$

iii. Diketahui $\mu(0) \geq \mu(c)$.

Akan ditunjukkan $\lambda(0) \geq \lambda(c)$ atau $\lambda(0) \geq \mu(c)$.

Andaikan bahwa $\lambda(0) < \lambda(c)$ dan $\lambda(0) < \mu(c)$. Diperhatikan,

$(\lambda \times \mu)(0, 0) = min\{\lambda(0), \mu(0)\} = \lambda(0)$

dan

$$\begin{aligned}(\lambda \times \mu)(c, r) &= min\{\lambda(c), \mu(r)\} \quad \text{(Definisi 3.2.5)}\\ &> \{\lambda(0), \mu(0)\}\\ &= \lambda(0)\end{aligned}$$

$$= \quad (\lambda \times \mu)(0,0) \qquad \text{(Definisi 3.2.5)}$$

Sehingga, $(\lambda \times \mu)(c,r) > (\lambda \times \mu)(0,0)$.

Kontradiksi dengan aksioma d-ideal fuzzy sehingga pernrataan salah dan harus diingkar. Jadi, $\lambda(0) \geq \lambda(c)$ atau $\lambda(0) \geq \mu(c)$

■

Teorema 3.2.8 *jika $\lambda \times \mu$ adalah d-ideal fuzzy atas $X \times X$, maka λ atau μ merupakan d-ideal fuzzy atas X.*

Bukti. Diketahui : $\lambda \times \mu$ adalah d-ideal fuzzy atas $X \times X$, maka memenuhi :

i. $(\lambda \times \mu)(0,0) \geq (\lambda \times \mu)(c,r)$

ii. $(\lambda \times \mu)(c_1,c_2) \geq min\{(\lambda \times \mu)((c_1,c_2) * (r_1,r_2))\},(\lambda \times \mu)(r_1,r_2)\}$

iii. $(\lambda \times \mu)((c_1,c_2) * (r_1,r_2)) \geq min\{(\lambda \times \mu)(c_1,c_2),(\lambda \times \mu)(r_1,r_2)\}$

Akan ditunjukkan:

i. $\mu(0) \geq \mu(c)$ atau $\lambda(0) \geq \lambda(c)$

ii. $\mu(c) \geq min\{\mu(c * r), \mu(r)\}$ atau $\lambda(c) \geq min\{\lambda(c * r), \lambda(r)\}$

iii. $\mu(c * r) \geq min\{\mu(c), \mu(r)\}$ atau $\lambda(c * r) \geq min\{\lambda(c), \lambda(r)\}$

Kasus 1

Misalkan λ bukan d-ideal fuzzy atas d-aljabar X, sehingga akan ditunjukkan μ merupakan d-ideal fuzzy atas d-aljabar X.

i. Berdasarkan Teorema 3.2.7 point (i) jelas bahwa $\mu(0) \geq \mu(c)$.

ii. Berdasarkan Teorema 3.2.7 point (iii) diperoleh $\lambda(0) \geq \lambda(c)$ atau $\lambda(0) \geq \mu(c)$, $\forall c, r \in X$. selanjutnya,

$$(\lambda \times \mu)(0, c) = min\{\lambda(0), \mu(c)\} = \mu(c) \tag{3.1}$$

Diperhatikan $\lambda \times \mu$ merupakan d-ideal fuzzy atas $X \times X$ maka,

$(\lambda \times \mu)(c_1, c_2)$

$\geq min\{(\lambda \times \mu)((c_1, c_2) * (r_1, r_2)), (\lambda \times \mu)(r_1, r_2)\}$ (aksioma d-ideal fuzzy)

$= min\{(\lambda \times \mu)((c_1 * r_1), (c_2 * r_2)), (\lambda \times \mu)(r_1, r_2)\}$

Ambil $c_1 = r_1 = 0$, sehingga

$(\lambda \times \mu)(0, c_2) \geq min\{(\lambda \times \mu)(0, (c_2 * r_2)), (\lambda \times \mu)(0, r_2)\}$

Dengan menggunakan Persamaan 3.1 diperoleh:

$\mu(c_2) \geq min\{\mu(c_2 * r_2), \mu(r_2)\}$.

iii. Karena $(\lambda \times \mu)$ merupakan d-ideal fuzzy atas $X \times X$ maka memenuhi:

$(\lambda \times \mu)((c_1, c_2) * (r_1, r_2)) \geq min\{(\lambda \times \mu)(c_1, c_2), (\lambda \times \mu)(r_1, r_2)\}$ (Definisi 3.2.5)

$(\lambda \times \mu)((c_1 * r_1), (c_2 * r_2)) \geq min\{(\lambda \times \mu)(c_1, c_2), (\lambda \times \mu)(r_1, r_2)\}$

Ambil $c_1 = r_1 = 0$, sehingga

$(\lambda \times \mu)(0, (c_2 * r_2)) \geq min\{(\lambda \times \mu)(0, c_2), (\lambda \times \mu)(0, r_2)\}$

Dengan menggunakan Persamaan 3.1, sehingga:

$\mu(c_2 * r_2) \geq min\{\mu(c_2), \mu(r_2)\}$

Kasus 2

Misalkan μ bukan merupakan d-ideal fuzzy atas d-aljabar X, akan ditunjukkan λ merupakan d-ideal fuzzy atas X.

i. Berdasarkan Teorema 3.2.7 point (i) jelas bahwa $\lambda(0) \geq \lambda(c)$

ii. Berdasarkan Teorema 3.2.7 point (ii) diperoleh $\mu(0) \geq \lambda(c)$ atau $\mu(0) \geq \mu(c)\ \forall c, r \in X$, selanjutnya

$$(\lambda \times \mu)(c, 0) = min\{\lambda(c), \mu(0)\} = \lambda(c) \tag{3.2}$$

Diperhatikan $\lambda \times \mu$ merupakan d-ideal fuzzy atas $X \times X$, maka:

$(\lambda \times \mu)(c_1, c_2)$

$\geq min\{(\lambda \times \mu)((c_1, c_2) * (r_1, r_2)), (\lambda \times \mu)(r_1, r_2)\}$ (Definisi 3.2.1)

$= min\{(\lambda \times \mu)((c_1 * r_1), (c_2 * r_2)), (\lambda \times \mu)(r_1, r_2)\}$

Ambil $c_2 = r_2 = 0$

$(\lambda \times \mu)(c_1, 0) \geq min\{(\lambda \times \mu)((c_1 * r_1), 0), (\lambda \times \mu)(r_1, 0)\}$

Berdasarkan Persamaan 3.2 diperoleh:

$\lambda(c_1) \geq min\{\lambda(c_1 * r_1), \lambda(r_1)\}$

iii. Diperhatikan $\lambda \times \mu$ merupakan d-ideal fuzzy atas $X \times X$, maka:

$(\lambda \times \mu)((c_1, c_2) * (r_1, r_2)) \geq min\{(\lambda \times \mu)(c_1, c_2), (\lambda \times \mu)(r_1, r_2)\}$

$(\lambda \times \mu)((c_1 * r_1), (c_2 * r_2)) \geq min\{(\lambda \times \mu)(c_1, c_2), (\lambda \times \mu)(r_1, r_2)\}$

Ambil $c_2 = r_2 = 0$

$(\lambda \times \mu)((c_1 * r_1), 0) \geq min\{(\lambda \times \mu)(c_1, 0), (\lambda \times \mu)(r_1, 0)\}$

Berdasarkan Persamaan 3.2 diperoleh:

$\lambda(c_1 * r_1) \geq min\{\lambda(c_1), \lambda(r_1)\}$

■

Berikut akan dijelaskan definisi hubungan fuzzy terkuat atas S.

Definisi 3.2.9 *Diberikan himpunan fuzzy A dari himpunan d-aljabar X, suatu hubungan fuzzy terkuat atas X yaitu hubungan fuzzy atas A adalah μ_A dengan $\mu_A(c,r) = min\{A(c), A(r)\},\ \forall c, r \in X$.*

Berikut diberikan sifat yang berkaitan dengan hubungan fuzzy terkuat X.

Teorema 3.2.10 *Diberikan himpunan fuzzy A atas d-aljabar X dan μ_A merupakan hubungan fuzzy terkuat atas X. Himpunan A merupakan d-ideal fuzzy atas X jika dan hanya jika μ_A merupakan d-ideal fuzzy atas $X \times X$.*

Bukti. $(\Rightarrow)$ Diketahui : Himpunan A merupakan d-ideal fuzzy atas X, maka himpunan A memenuhi :

i. $A(0) \geq A(c)$

ii. $A(c) \geq min\{A(c * r), A(r)\}$

iii. $A(c * r) \geq min\{A(c), A(r)\}$

Akan ditunjukkan : $\mu_A(c_1, c_2)$ merupakan d-ideal fuzzy atas $X \times X$

i. Untuk setiap $(c, r) \in X \times X$, berlaku

$$\begin{aligned} \mu_A(0,0) &= min\{A(0), A(0)\} && \text{(Definisi 3.2.9)} \\ &\geq min\{A(c), A(r)\} && \text{(definisi } d\text{-ideal fuzzy)} \\ &= \mu_A(c,r) && \text{(Definisi 3.2.9)} \end{aligned}$$

ii. Untuk setiap $c = (c_1, c_2)$ dan $r = (r_1, r_2)\ \in X \times X$

$\mu_A(c) = \mu_A(c_1, c_2)$

$= min\{A(c_1), A(c_2)\}$ (Definisi 3.2.9)

$\geq min\{min\{A(c_1 * r_1), A(r_1)\}, min\{A(c_2 * r_2), A(r_2)\}$ (definisi d-ideal fuzzy)

$= min\{min\{A(c_1 * r_1), A(c_2 * r_2)\}, min\{A(r_1), A(r_2)\}$

$= min\{\mu_A((c_1 * r_1), (c_2 * r_2)), \mu_A(r_1, r_2)\}$ (Definisi 3.2.9)

$= min\{\mu_A((c_1, c_2) * (r_1, r_2)), \mu_A(r_1, r_2)\}$

$= min\{\mu_A(c * r), \mu_A(r)\}$

iii. Untuk setiap $c = (c_1, c_2)$ dan $r = (r_1, r_2) \in X \times X$, berlaku

$\mu_A(c * r) = \mu_A((c_1, c_2) * (r_1, r_2))$

$= \mu_A((c_1 * r_1), (c_2 * r_2))$

$= min\{A(c_1 * r_1), A(c_2 * r_2)\}$ (Definisi 3.2.9)

$\geq min\{min\{A(c_1), A(r_1)\}, min\{A(c_2), A(r_2)\}\}$ (definisi d-ideal fuzzy)

$= min\{min\{A(c_1), A(c_2)\}, min\{A(r_1), A(r_2)\}\}$ (definisi pasangan berurutan)

$= min\{\mu_A(c_1, c_2), \mu_A(r_1, r_2)\}$ (Definisi 3.2.9)

$= min\{\mu_A(c), \mu_A(r)\}$

($\Leftarrow$) Diketahui : μ_A merupakan d-ideal fuzzy atas $X \times X$ maka μ_A memenuhi:

i. $\mu_A(0, 0) \geq \mu_A(c, r)$ dengan $(c, r) \in X \times X$

ii. $\mu_A(c_1, c_2) \geq min\{\mu_A((c_1, c_2) * (r_1, r_2)), \mu_A(r_1, r_2)\}$ dengan (c_1, c_2) dan $(r_1, r_2) \in X \times X$

iii. $\mu_A((c_1, c_2) * (r_1, r_2)) \geq min\{\mu_A(c_1, c_2), \mu_A(r_1, r_2)\}$ dengan (c_1, c_2) dan $(r_1, r_2) \in X \times X$

Akan ditunjukkan : A merupakan d-ideal fuzzy atas X, yaitu:

i. Diperhatikan $\mu_A(0,0) = min\{A(0), A(0)\}$, dan $\mu_A(c,r) = min\{A(c), A(r)\}$

Berdasarkan yang diketahui bahwa $\mu_A(0,0) \geq \mu_A(c,r)$ maka diperoleh $A(0) \geq A(c)$

ii. Untuk setiap $c = (c_1, c_2)$ dan $r = (r_1, r_2) \in X \times X$, berlaku

$min\{A(c_1), A(c_2)\}$ = $\mu_A(c_1, c_2)$ (Definisi 3.2.9)

$\geq min\{\mu_A((c_1, c_2) * (r_1, r_2)), \mu_A(r_1, r_2)\}$ (definisi d-ideal fuzzy)

$= min\{\mu_A((c * r), \mu_A(r)\}$

$= min\{min\{A(c * r)\}, min\{A(r)\}\}$ (Definisi 3.2.9)

$= min\{A(c * r), A(r)\}$

Dilain pihak, untuk sebarang $(c_1, c_2) \in X \times X$, diperoleh

$min\{A(c_1), A(c_2)\} = \mu_A(c_1, c_2) = \mu_A(c) = min\{A(c)\} = A(c)$

Jadi terbukti benar bahwa

$min\{A(c_1), A(c_2)\} \geq min\{A(c * r), A(r)\}$

$A(c)\} \geq min\{A(c * r), A(r)\}$

iii. Diketahui bahwa: $\mu_A((c_1, c_2) * (r_1, r_2)) \geq min\{\mu_A(c_1, c_2), \mu_A(r_1, r_2)\}$

Akan ditunjukkan : $A(c * r) \geq min\{A(c), A(r)\}$

$\mu_A((c_1, c_2) * (r_1, r_2)) \geq min\{\mu_A(c_1, c_2), \mu_A(r_1, r_2)\}$ (definisi d-ideal fuzzy)

$= \mu_A(c * r) \geq min\{\mu_A(c), \mu_A(r)\}$

$= min\{A(c * r)\} \geq min\{min\{A(c)\}, min\{A(r)\}\}$ (Definisi 3.2.9)

$A(c * r) \geq min\{A(c), A(r)\}$

■

BAB IV

PENUTUP

Kesimpulan dan saran berdasarkan bab-bab yang telah diuraikan sebelumnya akan diahas pada bab ini.

4.1. Simpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, berikut merupakan sifat-sifat d-ideal fuzzy atas d-aljabar:

1. Diberikan S adalah d-subaljabar fuzzy. Jika untuk setiap $c, r \in S$ berlaku $c \leq r$, maka S merupakan d-ideal fuzzy.

2. Jika λ dan μ adalah d-ideal fuzzy atas d-aljabar, maka $\lambda \times \mu$ adalah d-ideal fuzzy atas $X \times X$.

3. Diberikan λ dan μ merupakan d-aljabar fuzzy atas d-aljabar $X \times X$, maka:

   i. $\lambda(0) \geq \lambda(c)$ atau $\mu(0) \geq \mu(c)$,

   ii. Jika $\lambda(0) \geq \lambda(c)$ maka $\mu(0) \geq \lambda(c)$ atau $\mu(0) \geq \mu(c)$

   iii. Jika $\mu(0) \geq \mu(c)$, maka $\lambda(0) \geq \lambda(c)$ atau $\lambda(0) \geq \mu(c)$,

   untuk setiap $c \in X$

4. Jika $\lambda \times \mu$ adalah d-ideal fuzzy atas $X \times X$, maka λ atau μ merupakan d-ideal fuzzy atas X.

5. Diberikan himpunan fuzzy A atas d-aljabar X dan μ_A merupakan hubungan fuzzy terkuat atas X. Himpunan A merupakan d-ideal fuzzy atas X jika dan hanya jika μ_A merupakan d-ideal fuzzy atas $X \times X$.

4.2. Saran

Pada penelitian d-ideal fuzzy atas d-aljabar, homomorfisma pada d-ideal fuzzy atas d-aljabar X belum dijelaskan. Sehingga diharapkan penelitian selanjutnya membahas dengan jelas mengenai homomorfisma pada d-ideal fuzzy atas d-aljabar X.

DAFTAR PUSTAKA

Iswati, and Suryoto, 2009, *K-Aljabar"*, Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang.

Fanny, D. L., 2018, *K Isomorfisme dalam K aljabar"*, Sains dan Teknologi, UIN Sunan Ampel, Surabaya.

Joseph, N., and Hee S. K, 1999, *On d-Algebras*, one Edition, math slovaca, Slovakia, vol 49.

Rohatul, W., 2014, *Sifat- Sifat Fantastik-Ideal pada Aljabar-BCI*,Matematika , UIN Maulana Malik Ibrahim, Malang.

Jie, M, Young, B.J, and Hee S.K, 1997, *Fuzzy Implicative Ideals Of BCK-Algebras*, fuzzy sets and system, Elsevier.

L, A. Zadeh., 1965, *Fuzzy Sets**, Department of Electrical Engineering and Electronics research Laboratory, University of California, California.

Akram, M., 2005, *On Fuzzy d-Algebra*, Journal of Mathematics, Punjab University., Pakistan, vol 37, PP. 61-76.

Sun S.A, and Keum S.S, 2008, *On (Complete) Normality of Fuzzy d-Ideals in d-Algebra*, Scientiae Mathematicae japonicae Online

Sri K., Idham G., 2005, *Fuzzy Multi-Criteria Decision Making*, Journal of Mathematics, Universitas Islam Indonesia, Yogyakarta, Media Informatika, vol 3, No. 1.

Sri K., Hari P., 2005, *Aplikasi Fuzzy untuk Pendukung Keputusan*, Graha Ilmu, Edisi 2.

Joseph, N., Hee S. K, young B. J, 1999, *On d-Ideals in d-Algebras*, math slovaca, Slovakia, vol 49, No 3.

Young, B.J, 2001, *Some Results On Ideals Of BCK-Algebras*, Department of mathematics education , Korea, vol 4, Page 411-414.

Afifah Ani, 2013, *K-Homomorfisme pada Q-Aljabar*, Matematika, Sains dan Teknologi, Uin Maulana Malik Ibrahim, Malang.

Davey, B. A., Priestley, H. A, 2002, *Introduction to Lattices and Order*, 2nd ed, Cambridge University Press, ISBN 0-521-78451-4.

Sri K., Idham G., 2005, *Fuzzy Multi-Criteria Decision Making*, Teknik Informatika, Universitas islam indonesia, Yogyakarta, Vol 3, No.1.

Ridwan B., Statiswaty., subardin., 2016, *Sistem Pendukung Keputusan Penengtuan Calon Guru Berprestasi menggunakan Metode Fuzzy Tsukamoto "Studi Kasus: SMP Negeri 5 Kendari"*, Teknik Informatika, Universitas Halu Olep, Kendari, vol 2, No.2, page 103-106.

Solikin A., Juliansyah., Heryansyah., Anto., 2005, *Terapan Logika Fuzzy untuk Kendali Suhu Inkubator Fuzzy menggunakan Fungsi Trapesium*, Journal of applied mitrocontrollers and autonomous system, STMIK PPKIA Tarakanita Rahmawati, Vol. 3, No.1.

Ahdinia F.N.L., 2016, *Teori Himpunan dalam Ayat-Ayat Al-Qur'an*, Tadris Matematika, Institut Agama Islam Negeri (IAIN), Tulungagung.