IDEAL IMPLIKATIF PADA ALJABAR BCI

SKRIPSI

Disusun Oleh

SHAFIRA NABILA AZZAHRA

H02217013

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL

SURABAYA

2021

PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini,

Nama	:	SHAFIRA NABILA AZZAHRA
NIM	:	H02217013
Program Studi	:	Matematika
Angkatan	:	2017

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul "IDEAL IMPLIKATIF PADA ALJABAR BCI". Apabila suatu saat nanti terbukti saya melakukan tindakan plagiat, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian pernyataan keaslian ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 29 Juni 2021

Yang menyatakan,

SHAFIRA NABILA AZZAHRA

NIM. H02217013

LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

Skripsi oleh

Nama	:	SHAFIRA NABILA AZZAHRA
NIM	:	H02217013
Judul Skripsi	:	IDEAL IMPLIKATIF PADA ALJABAR BCI

telah diperiksa dan disetujui untuk diujikan.

Pembimbing I

Wika Dianita Utami, M.Sc
NIP. 199206102018012003

Pembimbing II

Dr. Abdulloh Hamid, M.Pd
NIP. 198508282014031003

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika
UIN Sunan Ampel Surabaya

Aris Fanani, M.Kom
NIP. 198701272014031002

PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI

Skripsi oleh

Nama	:	SHAFIRA NABILA AZZAHRA
NIM	:	H02217013
Judul Skripsi	:	IDEAL IMPLIKATIF PADA ALJABAR BCI

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji
pada tanggal 29 Juni 2021

Mengesahkan,
Tim Penguji

Penguji I

Wika Dianita Utami, M.Sc
NIP. 199206102018012003

Penguji II

Dr. Abdulloh Hamid, M.Pd
NIP. 198508282014031003

Penguji III

Dr. Moh. Hafiyusholeh, M.Si
NIP. 198002042014031001

Penguji IV

Putroe Keumala Intan, M.Si
NIP. 198805282018012001

Mengetahui,
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Ampel Surabaya

Dr. Hj. Evi Fatimatur Rusydiyah, M.Ag
NIP. 197312272005012003

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL SURABAYA
PERPUSTAKAAN
Jl. Jend. A. Yani 117 Surabaya 60237 Telp. 031-8431972 Fax.031-8413300
E-Mail: perpus@uinsby.ac.id

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika UIN Sunan Ampel Surabaya, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : SHAFIRA NABILA AZZAHRA
NIM : H02217013
Fakultas/Jurusan : SAINTEK /MATEMATIKA
E-mail address : snazzahra 18 @ gmail.com

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah :
☑ Sekripsi ☐ Tesis ☐ Desertasi ☐ Lain-lain (……………………………)
yang berjudul :
IDEAL IMPLIKATIF PADA ALJABAR BCI

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan Hak Bebas Royalti Non-Ekslusif ini Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (database), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di Internet atau media lain secara ***fulltext*** untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Surabaya, 22 Juli 2021

Penulis

(SHAFIRA NABILA AZZAHRA)

ABSTRAK

IDEAL IMPLIKATIF PADA ALJABAR BCI

Struktur aljabar merupakan ilmu yang mempelajari tentang konsep himpunan tak kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma. Salah satu bentuk struktur aljabar adalah aljabar BCI. Aljabar BCI merupakan bentuk perumuman dari aljabar BCK. Aljabar BCI merupakan aljabar dengan struktur $(X, *, 0)$ dengan X adalah suatu himpunan tak kosong dengan $*$ merupakan operasi biner dan 0 merupakan elemen konstanta. Dalam aljabar BCI dapat didefinisikan suatu Ideal. Berdasarkan tiga kelas dari aljabar BCI maka ideal pada aljabar BCI juga mempunyai definisi setiap idealnya yaitu ideal komutatif pada aljabar BCI, ideal positif implikatif pada aljabar BCI dan ideal implikatif pada BCI. Pada aljabar BCK telah diteliti mengenai ideal komutatif, ideal positif implikatif dan ideal implikatif. Sehingga muncullah sifat fundamental bahwa dikatakan ideal implikatif jika memenuhi ideal komutatif dan ideal positif implikatif. Karena aljabar BCI merupakan bentuk perumuman dari aljabar BCK sehingga perlu dikaji apakah sifat-sifat yang berlaku pada aljabar BCK masih berlaku pada aljabar BCI. Oleh karena itu, tujuan dari penelitian ini adalah untuk menguraikan dan menjelaskan mengenai sifat-sifat ideal implikasi pada aljabar BCI. Metode yang dilakukan yaitu dengan melakukan studi pustaka yang berkaitan dengan aljabar BCI dan ideal implikatif kemudian dari berbagai literatur yang telah dikumpulkan kemudian diambillah satu jurnal yang berjudul *BCI-Implicative ideals of BCI-Algebras* oleh Yong Lin Liu, Yang Xu, dan Jie Meng sebagai acuan utama. Dari jurnal tersebut, dilakukan analisis mengenai konsep Ideal Implikatif pada aljabar BCI serta sifat dan teorema yang terkait. Hasil dari penelitian ini adalah (1) Setiap ideal implikatif BCI merupakan ideal. (2) Setiap ideal implikatif BCI merupakan ideal positif implikatif BCI. (3) Setiap ideal implikatif BCI merupakan ideal komutatif BCI. (4) Ideal I merupakn ideal Implikatif jika dan hanya jika memenuhi ideal komutatif dan ideal positif implikatif. (5) Setiap ideal implikatif BCI merupakan p-ideal.

Kata kunci: BCI-Aljabar, Ideal, Ideal Implikatif

ABSTRACT

IMPLICATIVE IDEALS OF BCI-ALGEBRAS

Algebraic structure is a science that studies the concept of a non-empty set with one or more binary operations and fulfills several axioms. One form of algebraic structure is BCI algebra. BCI algebra is a generalized form of BCK algebra. BCI algebra is an algebra with the structure $(X, *, 0)$ where X is a non-empty set where $*$ is a binary operation and 0 is a constant element. In BCI algebra can be defined an Ideal. Based on the three classes of BCI algebra, the ideal in BCI algebra also has a definition of each ideal, namely the commutative ideal in BCI algebra, the positive ideal implicative to BCI algebra and the implicative ideal to BCI. In BCK algebra, we have studied the commutative ideal, the implicative positive ideal and the implicative ideal. Thus, the fundamental property emerges that it is said to be an implicative ideal if it fulfills the commutative ideal and the implicative positive ideal. Because BCI algebra is a generalized form of BCK algebra, it is necessary to study whether the properties that apply to BCK algebra still apply to BCI algebra. Therefore, the purpose of this study is to describe and explain the ideal properties of the implications of BCI algebra. The method used is by conducting a literature study related to BCI algebra and implicative ideals then from the various literatures that have been collected then a journal entitled *BCI-Implicative ideals of BCI-Algebras* by Yong Lin Liu, Yang Xu, and Jie Meng as the main reference. From this journal, an analysis of the concept of Implicative Ideals in BCI algebra was carried out and related properties and theorems. The results of this study are (1) Every BCI implicative ideal is an ideal. (2) Every BCI implicative ideal is a positive BCI implicative ideal. (3) Every BCI implicative ideal is a BCI commutative ideal. (4) The I ideal is an implicative ideal if and only if it satisfies the commutative ideal and the positive implicative ideal. (5) Every BCI implicative ideal is a p-ideal.

Keywords: *BCI-Algebras*, Ideal, and *Implicative Ideal*

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMBANG

$\in$	: Elemen atau anggota
$\notin$	: Bukan elemen atau anggota
$\emptyset$	: Himpunan kosong
$\neq$	: Tidak sama dengan
$\leq$	: Kurang dari sama dengan
$\subseteq$	: Subset atau himpunan bagian
$\mathbb{Q}$	: Himpunan semua bilangan rasional
$\blacksquare$	: Akhir suatu bukti
$(X, *, 0)$	: Operasi biner pada aljabar BCI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Perkembangan ilmu pengetahuan dan kemajuan teknologi menyebabkan semakin kecilnya ruang kehidupan saat ini. Persaingan saat ini sangat ketat yang terjadi di mana-mana seperti lapangan ekonomi, politik maupun kebudayaan. Di era ini hanya negara-negara yang telah menguasai IPTEK yang dapat mengambil peran dalam bidang politik dan ekonomi. Peran yang dapat dilakukan oleh manusia yaitu bersungguh-sungguh dalam upaya pemanfaatan, penguasaan, dan pengembangan ilmu pengetahuan dan tekonologi. Manusia yang ingin mengusai ilmu pengetahuan dan tekonologi diharuskan menguasai ilmu-ilmu dasar yang dapat menunjang ilmu-ilmu yang lainnya. Salah satunya yaitu Matematika (Nada , 2008).

Penjelasan mengenai ilmu pengetahuan atau matematika banyak dijumpai dalam dasar hukum utama umat islam yaitu al-Qur'an. Hal ini dijelaskan dalam firman Allah pada QS. Yunus ayat 5 yaitu:

هُوَ الَّذِي جَعَلَ الشَّمْسَ ضِيَاءً وَالْقَمَرَ نُورًا وَقَدَّرَهُ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا عَدَدَ
السِّنِينَ وَالْحِسَابَ ۚ مَا خَلَقَ اللَّهُ ذَٰلِكَ إِلَّا بِالْحَقِّ ۚ يُفَصِّلُ الْآيَاتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ

Artinya : "Dialah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya, dan Dia tentukan perjalanannya, supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan hisab (perhitungan). Allah menjadikan tidak lain kecuali dengan benar. Dia menerangkan tanda-tanda (kebesaran)-Nya bagi kaum yang mengetahui".

Matematika adalah ilmu dasar pengetahuan tentang bilangan, bentuk maupun lambang yang digunakan sebagai simbolik yang dimanfaatkan sebagai komunikasi. Pada saat ini, ilmu pengetahuan ini banyak diterapkan dalam berbagai bidang kehidupan yang didukung ilmu pengetahuan yang lain seperti fisika, biologi, kimia atau yang lainnya. Matematika saat ini juga dapat diterapkan dalam ilmu pengetahuan sosial seperti ilmu ekonomi, akutansi atau yang lainnya. Karena semakin banyaknya matematika digunakan, sehingga menunjukkan bahwa peran matematika sangan penting untuk kehidupan manusia (Handayani , 2009). Hal ini dijelaskan dalam firman Allah pada QS. As-Sajadah Ayat 5 yaitu:

يُدَبِّرُ الْاَمْرَ مِنَ السَّمَاۤءِ اِلَى الْاَرْضِ ثُمَّ يَعْرُجُ اِلَيْهِ فِيْ يَوْمٍ كَانَ مِقْدَارُهٗٓ اَلْفَ سَنَةٍ
مِّمَّا تَعُدُّوْنَ

Artinya: "Dia mengatur urusan dari langit ke bumi, kemudian naik (kembali) kepada-Nya dalam satu hari yang kadarnya seribu tahun menurut hitungan kamu".

Pada ayat tersebut dijelaskan Allah itu maha mengetahui dan menghitung semua hal yang ada di bumi dan di langit. Untuk mengatur makhluk-makhluknya, Allah menurunkan pedoman kitab kepada rasulnya. Untuk membuktikan bahwa rasul merupakan makhluk pilihan, maka perlu dilakukannya suatu pembuktian untuk menjawab semua keraguan yang terjadi untuk mecapai suatu kebenaran tersebut dan hal tersebut berlaku pada teorema dan proposisi yang akan dibuktikan dan harus selalu mengalami perkembangkan, seperti pada Q.S Yusuf ayat 111 yaitu:

لَقَدْ كَانَ فِي قَصَصِهِمْ عِبْرَةٌ لِّأُولِي الْأَلْبَابِ ۗ مَا كَانَ حَدِيثًا يُفْتَرَىٰ وَلَٰكِنْ
تَصْدِيقَ الَّذِي بَيْنَ يَدَيْهِ وَتَفْصِيلَ كُلِّ شَيْءٍ وَهُدًى وَرَحْمَةً لِّقَوْمٍ يُؤْمِنُونَ

Artinya: “Sungguh pada kisah-kisah mereka adalah pengajaran bagi orang-orang yang mempunyai akal. (Al-Qur’an) itu bukanlah cerita yang diada-adakan tetapi membenarkan segala sesuatu, dan sebagai petunjuk dan rahmat bagi kaum yang beriman”.

Matematika dengan perkembangannya merupakan hasil dari proses berfikir. Salah satu bentuk berfikir yaitu dengan penalaran. Penalaran inilah yang menjadi dasar dari teknik ketepatan dalam meneliti yaitu logika. Seperti halnya yang dijelaskan pada firman Allah pada Q.S al-Baqarah ayat 164 yaitu:

اِنَّ فِى خَلْقِ السَّمٰوٰتِ وَالاَرْضِ وَاخْتِلَافِ الَّيْلِ وَالنَّهَارِ وَالْفُلْكِ الَّتِىْ تَجْرِى
فِى الْبَحْرِ بِمَا يَنْفَعُ النَّاسَ وَمَآ اَنْزَلَ اللّٰهُ مِنَ السَّمَآءِ مِنْ مَّآءٍ فَاَحْيَابِهِ الاَرْضَ
بَعْدَ مَوْتِهَا وَبَثَّ فِيْهَا مِنْ كُلِّ دَآبَّةٍ وَّتَصْرِيْفِ الرِّيٰحِ وَالسَّحَابِ الْمُسَخَّرِ بَيْنَ
السَّمَآءِ وَالاَرْضِ لَاٰيٰتٍ لِّقَوْمٍ يَّعْقِلُوْنَ

Artinya : “Sesungguhnya pada penciptaan langit dan bumi, pergantian malam dan siang, kapal yang berlayar di laut dengan (muatan) yang berguna bagi manusia, dan apa-apa yang diturunkan Allah dari langit berupa air (hujan), maka Dia menghidupkan dengan air itu bumi yang tadinya mati (kering), dan Dia sebarkan di bumi itu semua hewan, dan dari peralihan (pertukaran) angin, dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi, sesungguhnya itu adalah tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi kaum yang mau memikirkannya".

Seiring berjalannya waktu, seluruh bidang matematika mengalami perkembangan termasuk bidang aljabar. Aljabar adalah ilmu matematika yang membahas mengenai sifat dari struktur dan himpunan. (Andika , 2017). Dalam ilmu matematika, struktur aljabar adalah merupakan salah satu pengetahuan dasar yang sangat menarik dan penting untuk dipelajari. Struktur aljabar merupakan himpunan tak kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma. Contoh dari struktur aljabar yaitu grup dan ring. Terdapat beberapa ilmu yang mengembangkan mengenai struktur aljabar. Salah satunya adalah Aljabar BCI dan Aljabar BCK (Yusrina , 2018).

Ilmuan yang bernama Arai, Y. Imai dan K. Iseki. Pada tahun 1966 menjelaskan mengenai struktur aljabar yang dikenal dengan BCK. Aljabar BCK merupakan suatu himpunan tak kosong X dengan operasi biner $*$ dan konstanta 0. Struktur aljabar disebut aljabar BCK jika memenuhi aksioma : (1) $k * k = 0$; (2) $0 * k = 0$; (3) $k * n = 0$ dan $n * k = 0$ maka $k = n$; (4) $((k * n) * (k * r)) * (r * n) = 0$; (5) $(k * (k * n)) * n = 0$, untuk semua $k, n, p \in X$. Pada tahun 2005, Y. Huang menjelaskan bahwa Aljabar BCK mempunyai tiga kelas penting yaitu Aljabar BCK Komutatif, Aljabar BCK Implikatif, Aljabar BCK Positif Implikatif. Dari ketiga kelas penting tersebut Aljabar BCK mempunyai sifat yaitu Aljabar BCK dikatakan ideal implikatif jika dan hanya jika memenuhi ideal implikatif positif dan ideal komutatif(Anwar , 2002).

Pada tahun 1966, K. Iseki melakukan penelitian kembali mengenai kembangan dari penelitian sebelumnya. Hasil dari penelitiannya yaitu perumuman dari aljabar BCK yaitu aljabar BCI. Aljabar BCI merupakan himpunan tak kosong X dengan operasi biner $*$ dan konstanta 0. Struktur aljabar $(X, *, 0)$ disebut

Aljabar BCI jika memenuhi kondisi (1) $((k * n) * (k * r)) * (r * n) = 0$; (2) $(k * (k * n)) * n = 0$; (3) $k * k = 0$; (4) $k * n = 0$ dan $n * k = 0$ yang berarti $k = n$, untuk semua $k, n, r \in X$. Berdasarkan aksioma pada definisi aljabar BCK dan aljabar BCI, maka setiap aljabar BCK pasti aljabar BCI. Jadi aljabar BCI merupakan perumuman aljabar BCK. Selanjutnya, aljabar BCI memiliki tiga kelas penting yaitu aljabar BCI komutatif, aljabar BCI implikatif, aljabar BCI positif implikatif. Pada tahun 1992, Jie Meng dan Xiao Long Xin menulis penelitian yang membahas aljabar BCI komutatif, sebuah aljabar BCI X dikatakan Komutatif jika untuk semua $k, n \in X$ berlaku $k * n = 0$ berakibat $k = n * (k * n)$. Pada tahun yang sama, mereka menulis penelitian kembali mengenai aljabar BCI implikatif, sebuah aljabar BCI X dikatakan implikatif jika $(k * (k * n)) = (k * (k * n)) * (k * n)$. Pada tahun berikutnya, mereka menulis penelitian kembali mengenai aljabar BCI positif implikatif, sebuah aljabar BCI X dikatakan positif implikatif jika memenuhi aksioma $(k * (k * n)) * (n * k) = k * (k * (n * (n * k)))$ untuk semua $k, n \in X$.

Dalam aljabar BCI juga didefinisikan suatu ideal yaitu himpunan tak kosong I bagian dari suatu aljabar BCI X disebut ideal jika memenuhi beberapa aksioma yaitu : (1) $0 \in I$ (2) untuk setiap $k \in X$, $k * n \in I$ dan $n \in I$ mengakibatkan $k \in I$. Dalam ideal juga dapat didefinisian menjadi tiga yaitu ideal komutatif pada aljabar BCI, ideal positif implikatif pada aljabar BCI dan ideal implikatif pada aljabar BCI. Dari ketiga ideal tersebut, Khususnya pada ideal implikatif pada aljabar BCI saling berhubungan dengan kedua ideal tersebut, sehingga perlu ditalaah lagi mengenai ideal implikatif khususnya mengenai sifat-sifat ideal implikatif pada aljabar BCI.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan paparan dari latar belakang, sehingga rumusan masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah bagaimana sifat-sifat ideal implikatif dari aljabar BCI?.

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan paparan dari rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini yaitu menjelaskan secara detail mengenai sifat-sifat ideal implikatif pada aljabar BCI.

1.4. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagi penulis menambah wawasan dan ilmu pengetahuan mengenai sifat-sifat ideal implikatif pada aljabar BCI.
2. Bagi pembaca sebagai sarana informasi tentang ideal implikatif pada aljabar BCI dan sebagai bahan informasi dalam menentukan kajian lebih lanjut mengenai ideal implikatif pada aljabar BCI.

1.5. Sistematika Penulisan

Pada penelitian ini akan dibagi menjadi lima bagian yang masing-masing akan diuraikan sebagai berikut:

1. **BAB I PENDAHULUAN**

   Pada bab ini penulis akan menjelaskan secara singkat mengenai latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, serta sistematika penyusunan.

2. **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

   Pada bab ini akan dijelaskan mengenai dasar teori yang digunakan dalam mengerjakan penelitian seperti aljabar BCI, Ideal pada aljabar BCI, Ideal Komutatif pada aljabar BCI, Ideal Positif Implikatif pada aljabar BCI dan menjelaskan mengenai hubungan aljabar dengan integrasi keilmuan.

3. **BAB III METODE PENELITIAN**

   Pada bab ini akan dijelaskan mengenai metode penelitian, maka penelitian ini dapat tertuju secara baik dari segi materi dan waktu pengerjaannya.

4. **BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN**

   Pada bab ini akan dijelaskan mengenai hasil dan pembahasan mengenai sifat-sifat ideal implikatif dari aljabar BCI, serta menjelaskan mengenai integrasi keilmuan mengenai pumbuktian kebenaran.

5. **BAB V PENUTUP**

   Pada bab ini akan dijelaskan mengenai simpulan dan saran yang berasar dari hasil penelitian ini.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai dasar teori yang digunakan dalam mengerjakan penelitian seperti aljabar BCI, Ideal pada aljabar BCI, Ideal Komutatif pada aljabar BCI, Ideal Positif Implikatif pada aljabar BCI dan menjelaskan mengenai hubungan aljabar dengan integrasi keilmuan.

2.1. Aljabar BCI

Berikut ini diberikan definisi dari aljabar BCI.

Definisi 2.1.1 *(Saeid , 2010) Misalkan X sebuah himpunan tak kosong dengan operasi biner $*$ dan konstanta 0 . Struktur aljabar $(X, *, 0)$ disebut aljabar BCI jika memenuhi beberapa aksioma yaitu untuk semua $k, n, r \in X$*

1. $((k * n) * (k * r)) * (r * n) = 0$;
2. $(k * (k * n)) * n = 0$;
3. $k * k = 0$;
4. $k * n = 0$ *dan* $n * k = 0$ *yang berarti* $k = n$;

Contoh 2.1.2 Misal X adalah himpunan tak kosong, di mana $X = \{0, 1, 2\}$. Dengan operasi $*$ pada X didefinisikan sebagai berikut.

Tabel 2.1 Tabel Cayley Himpunan *X* Terhadap Operasi $*$

$*$	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

$(X, *, 0)$ merupakan aljabar BCI sebab

1. Akan ditunjukkan untuk setiap $k, n, r \in X$,

   berlaku $((k * n) * (k * r)) * (r * n) = 0$.

   - Misalkan $k = 0$, $n = 0$, $r = 0$. Sehingga didapat

     $((0 * 0) * (0 * 0)) * (0 * 0) = 0 * 0 * 0 = 0$

   - Misalkan $k = 0$, $n = 0$, $r = 1$. Sehingga didapat

     $((0 * 0) * (0 * 1)) * (1 * 0) = 0 * 1 * 1 = 0$

   - Misalkan $k = 0$, $n = 0$, $r = 2$. Sehingga didapat

     $((0 * 0) * (0 * 2)) * (2 * 0) = 0 * 2 * 2 = 0$

   - Misalkan $k = 0$, $n = 1$, $r = 0$. Sehingga didapat

     $((0 * 1) * (0 * 0)) * (0 * 1) = 1 * 0 * 1 = 0$

   - Misalkan $k = 0$, $n = 1$, $r = 1$. Sehingga didapat

     $((0 * 1) * (0 * 1)) * (1 * 1) = 1 * 1 * 0 = 0$

   - Misalkan $k = 0$, $n = 2$, $r = 0$. Sehingga didapat

     $((0 * 2) * (0 * 0)) * (0 * 2) = 2 * 0 * 2 = 0$

   - Misalkan $k = 0$, $n = 2$, $r = 2$. Sehingga didapat

     $((0 * 2) * (0 * 2)) * (2 * 2) = 2 * 2 * 0 = 0$

   - Misalkan $k = 1$, $n = 0$, $r = 0$. Sehingga didapat

     $((1 * 0) * (1 * 0)) * (0 * 0) = 1 * 1 * 0 = 0$

- Misalkan $k = 1$, $n = 0$, $r = 1$. Sehingga didapat

  $((1 * 0) * (1 * 1)) * (1 * 0) = 1 * 0 * 1 = 0$

- Misalkan $k = 1$, $n = 0$, $r = 2$. Sehingga didapat

  $((1 * 0) * (1 * 2)) * (2 * 0) = 1 * 2 * 2 = 0$

- Misalkan $k = 1$, $n = 1$, $r = 0$. Sehingga didapat

  $((1 * 1) * (1 * 0)) * (0 * 1) = 0 * 1 * 1 = 0$

- Misalkan $k = 1$, $n = 1$, $r = 1$. Sehingga didapat

  $((1 * 1) * (1 * 1)) * (1 * 1) = 0 * 0 * 0 = 0$

- Misalkan $k = 1$, $n = 2$, $r = 1$. Sehingga didapat

  $((1 * 2) * (1 * 1)) * (1 * 2) = 2 * 0 * 2 = 0$

- Misalkan $k = 1$, $n = 2$, $r = 2$. Sehingga didapat

  $((1 * 2) * (1 * 2)) * (2 * 2) = 2 * 2 * 0 = 0$

- Misalkan $k = 2$, $n = 0$, $r = 0$. Sehingga didapat

  $((2 * 0) * (2 * 0)) * (0 * 0) = 2 * 2 * 0 = 0$

- Misalkan $k = 2$, $n = 0$, $r = 1$. Sehingga didapat

  $((2 * 0) * (2 * 1)) * (1 * 0) = 2 * 1 * 0 = 0$

- Misalkan $k = 2$, $n = 0$, $r = 2$. Sehingga didapat

  $((2 * 0) * (2 * 2)) * (2 * 0) = 2 * 0 * 2 = 0$

- Misalkan $k = 2$, $n = 1$, $r = 0$. Sehingga didapat

  $((2 * 1) * (2 * 0)) * (0 * 1) = 1 * 2 * 1 = 0$

- Misalkan $k = 2$, $n = 1$, $r = 1$. Sehingga didapat

  $((2 * 1) * (2 * 1)) * (1 * 1) = 1 * 1 * 0 = 0$

- Misalkan $k = 2$, $n = 1$, $r = 2$. Sehingga didapat

  $((2 * 1) * (2 * 2)) * (2 * 1) = 1 * 0 * 1 = 0$

- Misalkan $k = 2$, $n = 2$, $r = 0$. Sehingga didapat

  $((2 * 2) * (2 * 0)) * (0 * 2) = 0 * 2 * 2 = 0$

- Misalkan $k = 2$, $n = 2$, $r = 2$. Sehingga didapat

  $((2 * 2) * (2 * 2)) * (2 * 2) = 0 * 0 * 0 = 0$

Jadi terbukti bahwa setiap $k, n, r \in X$, berlaku $((k * n) * (k * r)) * (r * n) = 0$.

2. Akan ditunjukkan untuk setiap $k, n \in X$, berlaku $(k * (k * n)) * n = 0$.

- Misalkan $k = 0$, $n = 0$. Sehingga didapat $(0 * (0 * 0)) * 0 = 0$
- Misalkan $k = 0$, $n = 1$. Sehingga didapat $(0 * (0 * 1)) * 1 = 0$
- Misalkan $k = 0$, $n = 2$. Sehingga didapat $(0 * (0 * 2)) * 2 = 0$
- Misalkan $k = 1$, $n = 0$. Sehingga didapat $(1 * (1 * 0)) * 0 = 0$
- Misalkan $k = 1$, $n = 1$. Sehingga didapat $(1 * (1 * 1)) * 1 = 0$
- Misalkan $k = 1$, $n = 2$. Sehingga didapat $(1 * (1 * 2)) * 2 = 0$
- Misalkan $k = 2$, $n = 0$. Sehingga didapat $(2 * (2 * 0)) * 0 = 0$
- Misalkan $k = 2$, $n = 1$. Sehingga didapat $(2 * (2 * 1)) * 1 = 0$
- Misalkan $k = 2$, $n = 2$. sehingga didapat $(2 * (2 * 2)) * 2 = 0$

Jadi terbukti bahwa untuk setiap $k, n \in X$ berlaku $(k * (k * n)) * n = 0$.

3. Akan ditunjukkan untuk setiap $k \in X$, berlaku $k * k = 0$.

- Misalkan $k = 0$. Sehingga didapat $0 * 0 = 0$
- Misalkan $k = 1$. Sehingga didapat $1 * 1 = 0$
- Misalkan $k = 2$. Sehingga didapat $2 * 2 = 0$

Jadi terbukti bahwa setiap$k \in X$ berlaku $k * k = 0$.

4. Akan ditunjukkan untuk setiap $k \in X$, jika $k * n = 0$ dan $n * k = 0$ maka $k = n$.

   - Misalkan $k = 0$, jika $0 * 0 = 0$ dan $0 * 0 = 0$. Sehingga didapat $0 = 0$
   - Misalkan $k = 1$, jika $1 * 1 = 0$ dan $1 * 1 = 0$. Sehingga didapat $1 = 1$
   - Misalkan $k = 2$, jika $2 * 2 = 0$ dan $2 * 2 = 0$. Sehingga didapat $2 = 2$

   Jadi terbukti bahwa setiap $k \in X$, jika $k * n = 0$ dan $n * k = 0$ maka $k = n$.

Dengan demikian terbukti bahwa $(X, *, 0)$ adalah aljabar BCI X.

Contoh 2.1.3 Diberikan himpunan tak kosong Q yaitu himpunan semua bilangan rasional dengan konstanta 0 dan oprasi biner $*$. Himpunan Q merupakan aljabar BCI dengan definisi $k * n = k - n$ untuk semua $k, n, r \in Q$. Untuk sebarang $k, n, r \in Q$

1. Berlaku $((k * n) * (k * r)) * (r * n) = 0$ yaitu:

$$\begin{aligned}((k * n) * (k * r)) * (r * n) &= ((k - n) - (k - r)) - (r - n) \\ &= k - n - k + r - r + n \\ &= k - k + n - n + r - r \\ &= 0\end{aligned}$$

2. Berlaku $(k * (k * n)) * n = 0$ yaitu:

$$\begin{aligned}(k * (k * n)) * n &= (k - (k - n)) - n \\ &= k - k + n - n \\ &= 0\end{aligned}$$

3. Berlaku $k * k = 0$ yaitu $k - k = 0$.

4. Dipunyai $k * n = k - n = 0$ dan $n * k = n - k = 0$. Sehingga didapat

   $k - n = n - k$, maka terbukti $k = n$.

Jadi $(n, *, 0)$, dengan $k * n = k - n$ adalah aljabar BCI X.

Contoh 2.1.4 Diberikan grup$(M^3, +_3)$ dengan $M^3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ adalah himpunan bilangan bulat modulo 3. Didefinisikan operasi $*$ dengan $k * n = k + (-n)$, untuk setiap $k, n \in M^3$, di mana $(-n)$ adalah elemen invers dari n terhadap operasi $+_3$. Dari operasi $*$ pada modulo 3, diperoleh tabel sebagai berikut.

Tabel 2.2 Tabel Cayley Himpunan Bilangan Modulo 3 Terhadap Operasi $*$

$*$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

$(M^3, *, 0)$ adalah aljabar BCI sebab

1. Akan ditunjukkan untuk setiap $k, n, r \in M^3$,

   berlaku $((k * n) * (k * r)) * (r * n) = 0$

   - Misalkan $k = \overline{0}$, $n = \overline{0}$, $r = \overline{0}$. Sehingga didapat

     $((\overline{0} - \overline{0}) - (\overline{0} - \overline{0})) - (\overline{0} - \overline{0}) = \overline{0} - \overline{0} - \overline{0} = \overline{0}$

   - Misalkan $k = \overline{0}$, $n = \overline{0}$, $r = \overline{1}$. Sehingga didapat

     $((\overline{0} - \overline{0}) - (\overline{0} - \overline{1})) - (\overline{1} - \overline{0}) = \overline{0} - \overline{1} - \overline{1} = \overline{0}$

   - Misalkan $k = \overline{0}$, $n = \overline{0}$, $r = \overline{2}$. sehingga didapat

     $((\overline{0} - \overline{0}) - (\overline{0} - \overline{2})) - (\overline{2} - \overline{0}) = \overline{0} - \overline{2} - \overline{2} = \overline{0}$

   - Misalkan $k = \overline{0}$, $n = \overline{1}$, $r = \overline{0}$. sehingga didapat

     $((\overline{0} - \overline{1}) - (\overline{0} - \overline{0})) - (\overline{0} - \overline{1}) = \overline{1} - \overline{0} - \overline{1} = \overline{0}$

- Misalkan $k = \overline{0}$, $n = \overline{1}$, $r = \overline{1}$. sehingga didapat

  $((\overline{0} - \overline{1}) - (\overline{0} - \overline{1})) - (\overline{1} - \overline{1}) = \overline{1} - \overline{1} - \overline{0} = \overline{0}$

- Misalkan $k = \overline{0}$, $n = \overline{2}$, $r = \overline{0}$. sehingga didapat

  $((\overline{0} - \overline{2}) - (\overline{0} - \overline{0})) - (\overline{0} - \overline{2}) = \overline{2} - \overline{0} - \overline{2} = \overline{0}$

- Misalkan $k = \overline{0}$, $n = \overline{2}$, $r = \overline{2}$. sehingga didapat

  $((\overline{0} - \overline{2}) - (\overline{0} - \overline{2})) - (\overline{2} - \overline{2}) = \overline{2} - \overline{2} - \overline{0} = \overline{0}$

- Misalkan $k = \overline{1}$, $n = \overline{0}$, $r = \overline{0}$. sehingga didapat

  $((\overline{1} - \overline{0}) - (\overline{1} - \overline{0})) - (\overline{0} - \overline{0}) = \overline{0} - \overline{1} - \overline{0} = \overline{0}$

- Misalkan $k = \overline{1}$, $n = \overline{0}$, $r = \overline{1}$. sehingga didapat

  $((\overline{1} - \overline{0}) - (\overline{1} - \overline{1})) - (\overline{1} - \overline{0}) = \overline{1} - \overline{0} - \overline{1} = \overline{0}$

- Misalkan $k = \overline{1}$, $n = \overline{1}$, $r = \overline{0}$. sehingga didapat

  $((\overline{1} - \overline{1}) - (\overline{1} - \overline{0})) - (\overline{0} - \overline{1}) = \overline{0} - \overline{1} - \overline{1} = \overline{0}$

- Misalkan $k = \overline{1}$, $n = \overline{1}$, $r = \overline{1}$. sehingga didapat

  $((\overline{1} - \overline{1}) - (\overline{1} - \overline{1})) - (\overline{1} - \overline{1}) = \overline{0} - \overline{0} - \overline{0} = \overline{0}$

- Misalkan $k = \overline{1}$, $n = \overline{1}$, $r = \overline{2}$. sehingga didapat

  $((\overline{1} - \overline{1}) - (\overline{1} - \overline{2})) - (\overline{2} - \overline{1}) = \overline{0} - \overline{1} - \overline{1} = \overline{0}$

- Misalkan $k = \overline{1}$, $n = \overline{2}$, $r = \overline{1}$. sehingga didapat

  $((\overline{1} - \overline{2}) - (\overline{1} - \overline{1})) - (\overline{1} - \overline{2}) = \overline{1} - \overline{0} - \overline{1} = \overline{0}$

- Misalkan $k = \overline{1}$, $n = \overline{2}$, $r = \overline{2}$. sehingga didapat

  $((\overline{1} - \overline{2}) - (\overline{1} - \overline{2})) - (\overline{2} - \overline{2}) = \overline{1} - \overline{1} - \overline{0} = \overline{0}$

- Misalkan $k = \overline{2}$, $n = \overline{0}$, $r = \overline{0}$. sehingga didapat

  $((\overline{2} - \overline{0}) - (\overline{2} - \overline{0})) - (\overline{0} - \overline{0}) = \overline{2} - \overline{2} - \overline{0} = \overline{0}$

- Misalkan $k = \overline{2}$, $n = \overline{0}$, $r = \overline{2}$. sehingga didapat

  $((\overline{2} - \overline{0}) - (\overline{2} - \overline{2})) - (\overline{22} - \overline{0}) = \overline{2} - \overline{0} - \overline{2} = \overline{0}$

- Misalkan $k = \overline{2}$, $n = \overline{1}$, $r = \overline{1}$. sehingga didapat

  $((\overline{2} - \overline{1}) - (\overline{2} - \overline{1})) - (\overline{1} - \overline{1}) = \overline{1} - \overline{1} - \overline{0} = \overline{0}$

- Misalkan $k = \overline{2}$, $n = \overline{1}$, $r = \overline{2}$. sehingga didapat

  $((\overline{2} - \overline{1}) - (\overline{2} - \overline{2})) - (\overline{2} - \overline{1}) = \overline{1} - \overline{0} - \overline{1} = \overline{0}$

- Misalkan $k = \overline{2}$, $n = \overline{2}$, $r = \overline{0}$. sehingga didapat

  $((\overline{2} - \overline{2}) - (\overline{2} - \overline{0})) - (\overline{0} - \overline{2}) = \overline{0} - \overline{2} - \overline{2} = \overline{0}$

- Misalkan $k = 2$, $n = \overline{2}$, $r = \overline{1}$. sehingga didapat

  $((\overline{2} - \overline{2}) - (\overline{2} - \overline{1})) - (\overline{1} - \overline{2}) = \overline{0} - \overline{1} - \overline{1} = \overline{0}$

- Misalkan $k = \overline{2}$, $n = \overline{2}$, $r = \overline{2}$. sehingga didapat

  $((\overline{2} - \overline{2}) - (\overline{2} - \overline{2})) - (\overline{2} - \overline{2}) = \overline{0} - \overline{0} - \overline{0} = \overline{0}$

Jadi terbukti bahwa setiap $k, n, r \in M^3$, berlaku $((k*n)*(k*r))*(r*n) = 0$.

2. Akan ditunjukkan untuk setiap $k, n \in M^3$, berlaku $(k * (k * n)) * n = 0$.

- Misalkan $k = \overline{0}$, $n = \overline{0}$. Sehingga didapat $(\overline{0} - (\overline{0} - \overline{0})) - \overline{0} = \overline{0}$
- Misalkan $k = \overline{0}$, $n = \overline{1}$. sehingga didapat $(\overline{0} - (\overline{0} - \overline{1})) - \overline{1} = \overline{0}$
- Misalkan $k = \overline{0}$, $n = \overline{2}$. sehingga didapat $(\overline{0} - (\overline{0} - \overline{2})) - \overline{2} = \overline{0}$
- Misalkan $k = \overline{1}$, $n = \overline{0}$. sehingga didapat $(\overline{1} - (\overline{1} - \overline{0})) - \overline{0} = \overline{0}$
- Misalkan $k = \overline{1}$, $n = \overline{1}$. sehingga didapat $(\overline{1} - (\overline{1} - \overline{1})) - \overline{1} = \overline{0}$
- Misalkan $k = \overline{1}$, $n = \overline{2}$. sehingga didapat $(\overline{1} - (\overline{1} - \overline{2})) - \overline{2} = \overline{0}$
- Misalkan $k = \overline{2}$, $n = \overline{0}$. sehingga didapat $(\overline{2} - (\overline{2} - \overline{0})) - \overline{0} = \overline{0}$
- Misalkan $k = \overline{2}$, $n = \overline{1}$. sehingga didapat $(\overline{2} - (\overline{2} - \overline{1})) - \overline{1} = \overline{0}$
- Misalkan $k = \overline{2}$, $n = \overline{2}$. sehingga didapat $(\overline{2} - (\overline{2} - \overline{2})) - \overline{2} = \overline{0}$

Jadi terbukti bahwa untuk setiap $k, n \in M^3$ berlaku $(k * (k * n)) * n = 0$.

3. Akan ditunjukkan untuk setiap $k \in M^3$, berlaku $k * k = 0$.

   - Misalkan $k = \overline{0}$. Sehingga didapat $\overline{0} - \overline{0} = \overline{0}$
   - Misalkan $k = \overline{1}$. Sehingga didapat $\overline{1} - \overline{1} = \overline{0}$
   - Misalkan $k = \overline{2}$. Sehingga didapat $\overline{2} - \overline{2} = \overline{0}$

   Jadi terbukti bahwa setiap $k \in M^3$, berlaku $k * k = 0$.

4. Akan ditunjukkan untuk setiap $k \in M^3$, jika $k * n = 0$ dan $n * k = 0$ maka $k = n$.

   - Misalkan $k = \overline{0}$, jika $\overline{0} - \overline{0} = \overline{0}$ dan $\overline{0} - \overline{0} = \overline{0}$. Sehingga didapat $\overline{0} = \overline{0}$
   - Misalkan $k = \overline{1}$, jika $1 - \overline{1} = \overline{0}$ dan $\overline{1} - \overline{1} = \overline{0}$. Sehingga didapat $\overline{1} = \overline{1}$
   - Misalkan $k = \overline{2}$, jika $\overline{2} - \overline{2} = \overline{0}$ dan $\overline{2} - 2 = \overline{0}$. Sehingga didapat $\overline{2} = \overline{2}$

   Jadi terbukti bahwa setiap $k, n \in M^3$j, jika $k * n = 0$ dan $n * k = 0$ maka $k = n$.

Contoh 2.1.5 Misal X adalah himpunan tak kosong, di mana $X = \{0, v, w, x, y, z\}$. Dengan operasi $*$ pada X didefinisikan sebagai berikut.

Tabel 2.3 Tabel Cayley Himpunan *X* Terhadap Operasi $*$

$*$	0	v	w	x	y	z
0	0	v	x	w	z	y
v	v	0	z	y	x	w
w	w	y	0	z	v	x
x	x	z	y	0	w	v
y	y	w	v	x	0	z
z	z	x	w	v	y	0

Himpunan X merupakan aljabar BCI sebab

1. berlaku $((k * n) * (k * r)) * (r * n) = 0$

   - Misalkan $k = 0$, $n = 0$, $r = 0$. Sehingga didapat
     $((0 * 0) * (0 * 0)) * (0 * 0) = 0 * 0 * 0 = 0$
   - Misalkan $k = v$, $n = w$, $r = w$. sehingga didapat
     $((v * w) * (v * w)) * (w * w) = r * r * 0 = 0$
   - Misalkan $k = w$, $n = v$, $r = w$. sehingga didapat
     $((w * v) * (w * w)) * (w * v) = n * 0 * n = 0$
   - Misalkan $k = v$, $n = r$, $r = v$. sehingga didapat
     $((v * r) * (v * v)) * (v * r) = w * 0 * w = 0$

   Hal ini juga berlaku untuk setiap $k, n, r \in X$.

   Jadi terbukti bahwa setiap $k, n, r \in X$, berlaku $((k * n) * (k * r)) * (r * n) = 0$.

2. Akan ditunjukkan untuk setiap $k, n \in X$, berlaku $(k * (k * n)) * n = 0$

   - Misalkan $k = 0$, $n = 0$. Sehingga didapat $(0 * (0 * 0)) * 0 = 0$
   - Misalkan $k = 0$, $n = v$. Sehingga didapat $(0 * (0 * v)) * v = 0 * v * v = 0$

   Hal ini juga berlaku untuk setiap $k, n \in X$.

   Jadi terbukti bahwa setiap $k, n \in X$, berlaku $(k * (k * n)) * n = 0$.

3. Akan ditunjukkan untuk setiap $k \in X$, berlaku $k * k = 0$.

   - Misalkan $k = 0$. Sehingga didapat $0 * 0 = 0$
   - Misalkan $k = v$. Sehingga didapat $v * v = 0$
   - Misalkan $k = w$. Sehingga didapat $w * w = 0$

- Misalkan $k = x$. Sehingga didapat $x * x = 0$
- Misalkan $k = y$. Sehingga didapat $y * y = 0$
- Misalkan $k = z$. Sehingga didapat $z * z = 0$

Jadi terbukti bahwa setiap $k \in X$, berlaku $k * k = 0$.

4. Akan ditunjukkan untuk setiap $k \in X$, jika $k * n = 0$ dan $n * k = 0$ maka $k = n$.

- Misalkan $k = 0$, jika $0 * 0 = 0$ dan $0 * 0 = 0$. Maka diperoleh $0 = 0$
- Misalkan $k = v$, jika $v * v = 0$ dan $v * v = 0$. Maka diperoleh $v = v$
- Misalkan $k = w$, jika $w * w = 0$ dan $w * w = 0$. Maka diperoleh $w = w$
- Misalkan $k = x$, jika $x * x = 0$ dan $x * x = 0$. Maka diperoleh $x = x$
- Misalkan $k = y$, jika $y * y = 0$ dan $y * y = 0$. Maka diperoleh $y = y$
- Misalkan $k = z$, jika $z * z = 0$ dan $z * z = 0$. Maka diperoleh $z = z$

Jadi terbukti bahwa setiap $k, n \in X$, jika $k * n = 0$ dan $n * k = 0$ maka $k = n$.

Dengan demikian terbukti bahwa $(X, *, 0)$ adalah aljabar BCI X.

Contoh 2.1.6 Misal Y adalah himpunan tak kosong, di mana $Y = \{0, v, w\}$. Dengan operasi$*$ pada Y didefinisikan sebagai berikut.

Tabel 2.4 Tabel Cayley Himpunan *Y* Terhadap Operasi $*$

$*$	0	v	w
0	0	w	v
v	v	0	w
w	w	v	0

Himpunan Y merupakan aljabar BCI sebab

1. Akan ditunjukkan untuk setiap $k, n, r \in Y$, berlaku $((k*n)*(k*r))*(r*n) = 0$.

    - Misalkan $k = 0$, $n = 0$, $r = 0$. sehingga didapat
    $((0*0)*(0*0))*(0*0) = 0*0*0 = 0$
    - Misalkan $k = 0$, $n = 0$, $r = v$. sehingga didapat
    $((0*0)*(0*v))*(v*0) = 0*v*v = 0$
    - Misalkan $k = 0$, $n = 0$, $r = w$. sehingga didapat
    $((0*0)*(0*w))*(w*0) = 0*w*w = 0$
    - Misalkan $k = 0$, $n = v$, $r = 0$. sehingga didapat
    $((0*v)*(0*0))*(0*v) = v*0*v = 0$
    - Misalkan $k = 0$, $n = v$, $r = v$. sehingga didapat
    $((0*v)*(0*v))*(v*v) = v*v*0 = 0$
    - Misalkan $k = 0$, $n = w$, $r = 0$. sehingga didapat
    $((0*w)*(0*0))*(0*w) = w*0*w = 0$
    - Misalkan $k = 0$, $n = w$, $r = w$. sehingga didapat
    $((0*w)*(0*w))*(w*w) = w*w*0 = 0$
    - Misalkan $k = v$, $n = 0$, $r = 0$. sehingga didapat
    $((v*0)*(v*0))*(0*0) = v*v*0 = 0$
    - Misalkan $k = v$, $n = 0$, $r = v$. sehingga didapat
    $((v*0)*(v*v))*(v*0) = v*0*v = 0$
    - Misalkan $k = v$, $n = 0$, $r = w$. sehingga didapat
    $((v*0)*(v*w))*(w*0) = v*w*w = 0$

- Misalkan $k = v$, $n = v$, $r = 0$. sehingga didapat
  $((v * v) * (v * 0)) * (0 * v) = 0 * v * v = 0$
- Misalkan $k = v$, $n = v$, $r = v$. sehingga didapat
  $((v * v) * (v * v)) * (v * v) = 0 * 0 * 0 = 0$
- Misalkan $k = v$, $n = w$, $r = v$. sehingga didapat
  $((v * w) * (v * v)) * (v * w) = w * 0 * w = 0$
- Misalkan $k = v$, $n = w$, $r = w$. sehingga didapat
  $((v * w) * (v * w)) * (w * w) = w * w * 0 = 0$
- Misalkan $k = w$, $n = 0$, $r = 0$. sehingga didapat
  $((w * 0) * (w * 0)) * (0 * 0) = w * w * 0 = 0$
- Misalkan $k = w$, $n = 0$, $r = w$. sehingga didapat
  $((w * 0) * (w * w)) * (w * 0) = w * 0 * w = 0$
- Misalkan $k = w$, $n = v$, $r = v$. sehingga didapat
  $((w * v) * (w * v)) * (v * v) = v * v * 0 = 0$
- Misalkan $k = w$, $n = v$, $r = w$. sehingga didapat
  $((w * v) * (w * w)) * (w * v) = v * 0 * v = 0$
- Misalkan $k = w$, $n = w$, $r = 0$. sehingga didapat
  $((w * w) * (w * 0)) * (0 * w) = 0 * w * w = 0$
- Misalkan $k = w$, $n = w$, $r = w$. sehingga didapat
  $((w * w) * (w * w)) * (w * w) = 0 * 0 * 0 = 0$

Jadi terbukti bahwa setiap $k, n, r \in Y$, berlaku $((k * n) * (k * r)) * (r * n) = 0$.

2. Akan ditunjukkan untuk setiap $k, n \in Y$, berlaku $(k * (k * n)) * n = 0$.

   - Misalkan $k = 0$, $n = 0$. Diperoleh $(0 * (0 * 0)) * 0 = 0$

- Misalkan $k = 0, n = v$. Diperoleh $(0 * (0 * v)) * v = 0$
- Misalkan $k = 0, n = w$. Diperoleh $(0 * (0 * w)) * w = 0$
- Misalkan $k = v, n = 0$. Diperoleh $(v * (v * 0)) * 0 = 0$
- Misalkan $k = v, n = v$. Diperoleh $(v * (v * v)) * v = 0$
- Misalkan $k = v, n = w$. Diperoleh $(v * (v * w)) * w = 0$
- Misalkan $k = w, n = 0$. Diperoleh $(w * (w * 0)) * 0 = 0$
- Misalkan $k = w, n = v$. Diperoleh $(w * (w * v)) * v = 0$
- Misalkan $k = w, n = w$. Diperoleh $(w * (w * w)) * w = 0$

Jadi terbukti bahwa untuk setiap $k, n \in Y$ berlaku $(k * (k * n)) * n = 0$.

3. Akan ditunjukkan untuk setiap $k \in X$, berlaku $k * k = 0$.

- Misalkan $k = 0$. Diperoleh $0 * 0 = 0$
- Misalkan $k = v$. Diperoleh $v * v = 0$
- Misalkan $k = w$. Diperoleh $w * w = 0$

Jadi terbukti bahwa untuk setiap $k, n \in Y$ berlaku $(k * (k * n)) * n = 0$.

4. Akan ditunjukkan untuk setiap $k \in Y$, jika $k * n = 0$ maka $k = n$.

- Misalkan $k = 0$. jika $0 * 0 = 0$ dan $0 * 0 = 0$. Maka diperoleh $0 = 0$
- Misalkan $k = v$. jika $v * v = 0$ dan $v * v = 0$. Maka diperoleh $v = v$
- Misalkan $k = w$. jika $w * w = 0$ dan $w * w = 0$. Maka diperoleh $w = w$

Jadi terbukti bahwa setiap $k, n \in Y$, jika $k * n = 0$ dan $n * k = 0$ maka $k = n$.

Dengan demikian terbukti bahwa $(Y, *, 0)$ adalah aljabar BCI X.

Definisi 2.1.7 *(Bae Jun dan Hwan , 1998) Pada aljabar BCI X didefinisikan relasi terurut parsial, yaitu $\leq$. Di mana untuk setiap $k \leq n$ jika dan hanya jika $k * n = 0$, untuk sebarang $k, n \in X$.*

Teorema 2.1.8 *(Saeid , 2010) Diberikan aljabar BCI $(X, *, 0)$. Himpunan $(X, \leq)$ merupakan partially ordered set.*

Bukti. Diketahui $(X, *, 0)$ merupakan aljabar BCI. Akan ditunjukkan bahwa $(X, \leq)$ merupakan *partially ordered set*. Artinya himpunan X terhadap relasi $(\leq)$ memenuhi aksioma *reflektif*, *antisimetris*, *transitif*.

1. Ambil sebarang $k \in X$. Akan ditunjukkan $k \leq k$. Atau dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa $k * k = 0$.

   Diperhatikan, berdasarkan Definisi aljabar BCI 2.1.1 poin (3) yang menyatakan $k * k = 0$, maka diperoleh

   $$k * k = 0 \qquad \text{Definisi terurut parsial 2.1.7}$$
   $$k * n = 0 \rightarrow k \leq n$$
   $$k \leq k$$

   Terbukti bahwa $(X, \leq)$ memenuhi aksioma *reflektif*.

2. Diketahui $k \leq n$ dan $n \leq k$. Ambil sebarang $k, n \in X$. Akan ditunjukkan bahwa $k = n$.

   Diperhatikan, berdasarkan Definisi 2.1.7 mengenai relasi terurut parsial pada aljabar BCI, diperoleh

$k \leq n$ maka

$$k * n = 0 \tag{2.1}$$

dan $n \leq k$ maka

$$n * k = 0 \tag{2.2}$$

Sehingga berdasarkan Definisi 2.1.1 poin (4) yang menyatakan $k * n = 0$ dan $n * k = 0$ berakibat $k = n$, maka Persamaan 2.1 dan Persamaan 2.2 menjadi $k = n$

Terbukti bahwa $(X, \leq)$ memenuhi aksioma *antisimetris*.

3. Diketahui $k \leq n$ dan $n \leq r.$ Ambil sebarang $k, n, r \in X.$ Akan ditunjukkan bahwa $k \leq r$. Atau dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa $k * r = 0$

   Diperhatikan, berdasarkan Definisi 2.1.7 mengenai relasi terurut parsial pada aljabar BCI, diperoleh

   $k \leq n$ maka

$$k * n = 0 \tag{2.3}$$

dan $n \leq r$ maka

$$n * r = 0 \tag{2.4}$$

Dengan menggunakan Definisi 2.1.1 poin (3), diperoleh

$$k * r = ((k * r) * 0) * 0 \tag{2.5}$$

Selanjutnya, substitusikan Persamaan 2.3 dan Persamaan 2.4 ke Persamaan 2.5. Sehingga diperoleh

$$k * r = ((k * r) * (k * n)) * (n * r) \quad \text{Definisi Aljabar BCI 2.1.1 poin } (1)$$
$$= 0$$

Berdasarkan Definisi 2.1.7 mengenai relasi terurut parsial pada aljabar BCI, diperoleh

$$k * r = 0$$
$$k \leq r$$

Terbukti bahwa $(X, \leq)$ memenuhi aksioma *transitif*.

Karena $(X, \leq)$ memenuhi aksioma *reflektif*, *antisimetris*, *transitif*, maka $(X, \leq)$ merupakan *partially ordered set*. ■

Dari definisi aljabar BCI X, kemudian diturunkan beberapa sifat dari aljabar BCI X, yang digunakan untuk membantu membuktikan dari beberapa teorema terkait dengan konsep aljabar BCI X.

Teorema 2.1.9 *(Yang dan Ahn , 2014) Jika X adalah aljabar BCI, maka: untuk semua $k, n, r \in X$*

1. $k * 0 = k$;
2. $k * 0 = 0 \rightarrow k = 0$;
3. $k \leq n \rightarrow (r * n) \leq (r * k)$ *dan* $(k * r) \leq (n * r)$;

4. $(k * n) * r = (k * r) * n$*;*

5. $k * n = 0 \rightarrow (r * n) * (r * k) = 0$*;*

6. $(k * r) * (n * r) \leq k * n$*;*

7. $(0 * (k * n)) = 0 \rightarrow (0 * k) * (0 * n) = 0$*;*

8. $0 * (0 * (0 * k)) = 0 * k$

9. $(k * (k * (k * n))) = k * n$*;*

10. $0 * (0 * (n * k)) = (0 * n) * (0 * k)$*;*

Bukti.

1. Akan ditunjukkan $k * 0 = k$. Dengan menganalogkan $k = k * 0$ dan $n = k$ Dengan kata lain, menggunakan Definisi aljabar BCI 2.1.1 poin (4) menyatakan $k * n = 0$ dan $n * k = 0$ berakibat $k = n$, akan ditunjukkan

   (a) $(k * 0) * k = 0$; dan

   (b) $k * (k * 0) = 0$;

   Ambil sebarang $k \in X$. Diperhatikan,

   (a) Berdasarkan Definisi Aljabar BCI 2.1.1 poin (3) yang menyatakan $k * k = 0$, diperoleh

   $(k * 0) * k = (k * (k * k)) * k$ Definisi Aljabar BCI 2.1.1 poin (2), $(k * (k * n)) * n$

   $= 0$

(b) Untuk menunjukkan $k * (k * 0) = 0$, dengan menganalogkan $k = k * (k * 0)$ dan $n = 0$ atau dengan kata lain menggunakan Definisi Aljabar BCI 2.1.1 poin (4), akan ditunjukkan $(k * (k * 0)) * 0 = 0$ dan $0 * (k * (k * 0)) = 0$.

i. Berdasarkan Definisi Aljabar BCI 2.1.1 poin (2) yang menyatakan $(k * (k * n)) * n = 0$, jelas bahwa $(k * (k * 0)) * 0 = 0$.

ii. Berdasarkan Definisi 2.1.1 poin (2), diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 * (k * (k * 0)) &= (k * (k * 0)) * 0 * (k * (k * 0)) && \text{Definisi 2.1.1poin(3)}\ k * k = 0 \\
&= ((k * (k * 0)) * (k * k)) * (k * (k * 0)) && \text{Definisi 2.1.1poin(1)}\ ((k * n) * (k * r)) * (r * n) = 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Karena $(k * 0) * k = 0$ dan $k * (k * 0) = 0$. Jadi $k * 0 = k$.

2. Diketahui $k * 0 = 0$.

Akan ditunjukkan $k = 0$.

Ambil sebarang $k \in X$. Diperhatikan, berdasarkan diketahui

$$
\begin{aligned}
0 * k &= (k * 0) * k && \text{Definisi Aljabar BCI 2.1.1 poin } (3) \\
& && k * k = 0 \\
&= (k * (k * k)) * k && \text{Definisi Aljabar BCI 2.1.1 poin } (2) \\
& && (k * (k * n)) * n = 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Karena $k * 0 = 0$ dan $0 * k = 0$. Berdasarkan Definisi 2.1.1 poin (4). Jadi $k = 0$.

3. Diketahui: $k \leq n$ artinya $k * n = 0$

   Akan ditunjukkan:

   (a) $(r * n) \leq (r * k)$ atau dengan kata lain $(r * n) * (r * k) = 0$;

   (b) $(k * r) \leq (n * r)$ atau dengan kata lain $(k * r) * (n * r)$ = 0;

   Ambil sebarang $k, n, r \in X$.

   (a) Diperhatikan, berdasarkan DefinisiAljabar BCI 2.1.1 poin (1) diperoleh

$$
\begin{aligned}
((r * n) * (r * k)) * (k * n) = 0 &&& , \text{ karena } k * n = 0 \\
((r * n) * (r * k)) * 0 = 0 &&& \text{Teorema 2.1.9 poin } (1) \\
&&& k * 0 = k \\
((r * n) * (r * k)) = 0 &&&
\end{aligned}
$$

   Jadi $((r * n) \leq (r * k))$.

(b) Diperhatikan, berdasarkan Definisi Aljabar BCI 2.1.1 poin (1) diperoleh

$$
\begin{aligned}
((k * r) * (k * n)) * (r * n) &= 0 && \text{, karena } k * n = 0 \\
((k * r) * 0) * (r * n) &= 0 && \text{Teorema 2.1.9 poin } (1) \\
& && k * 0 = k \\
((k * r) * (r * n)) &= 0
\end{aligned}
$$

Jadi $((k * r) \leq (r * n))$.

4. Akan ditunjukkan $(k * n) * r = (k * r) * n$.

   Ambil sebarang $k, n, r \in X$. Berdasarkan Definisi aljabar BCI 2.1.1 poin (2) yang menyatakan $(k * (k * n)) * n = 0$, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
(k * (k * r)) * r &= 0 && \text{Definisi 2.1.7, } k \leq n \Rightarrow k * n = 0 \\
(k * (k * r)) &\leq r && \text{Teorema 2.1.9 poin } (3) \\
& && k \leq n \rightarrow (r * n) \leq (r * k) \text{ dan } (k * r) \leq (n * r)
\end{aligned}
$$

$$(k * n) * r \leq (k * n) * k * (k * r) \tag{2.6}$$

   Di lain pihak, berdasarkan Definisi aljabar BCI 2.1.1 poin (1) yang menyatakan $((k * n) * (k * r)) * (r * n) = 0$, sehingga dipunyai

$$((k * n) * (k * (k * r))) * ((k * r) * n) = 0 \quad \text{Definisi 2.1.7, } k \leq n \Rightarrow k * n = 0$$

$$((k * n) * (k * (k * r))) \leq ((k * r) * n) \tag{2.7}$$

Karena $\leq$ merupakan relasi terurut parsial, di mana $\leq$ berlaku sifat transitif, maka berdasarkan Persamaan 2.6 dan Persamaan 2.7 diperoleh

$$((k * n) * r) \leq ((k * r) * n) \tag{2.8}$$

Selain itu, jika pada Persamaan 2.8, untuk n diganti r dan r diganti n maka diperoleh

$$((k * r) * n) \leq ((k * n) * r) \tag{2.9}$$

Karena $\leq$ merupakan relasi terurut parsial, di mana $\leq$ berlaku sifat antisimetris, maka berdasakan Persamaan 2.8 dan Persamaan 2.9 diperoleh $(k * n) * r = (k * r) * n$

5. Diketahui: $k * n = 0$.

   Akan ditunjukkan $(r * n) * (r * k) = 0$.

   Ambil sebarang $k, n, r \in X$. Diperhatikan dengan menggunakan Definisi Aljabar BCI 2.1.1 poin (1) yang menyatakan $((k * n) * (k * r)) * (r * n) = 0$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} ((r * n) * (r * k)) * (k * n) &= 0 && \text{, karena } k * n = 0 \\ ((r * n) * (r * k)) * 0 &= 0 && \text{Teorema 2.1.9 poin } (1) \\ & && k * 0 = k \\ ((r * n) * (r * k)) &= 0 \end{aligned}$$

6. Akan ditunjukkan $(k * r) * (n * r) \leq k * n$.

   Atau dengan kata lain akan ditunjukkan $((k * r) * (n * r)) * (k * n) = 0$.

Diperhatikan, berdasarkan Teorema 2.1.9 poin (4) yang menyatakan $(k*n)*r=(k*r)*n$, maka diperoleh

$((k*r)*(n*r))*(k*n)=((k*r)*(k*n))*(n*r)$	Definisi Aljabar BCI 2.1.1 poin (1)
$=0$	

7. Diketahui: $0*(k*n)=0$.

   Akan ditunjukkan $(0*k)*(0*n)=0$.

   Dengan menggunakan Definisi Aljabar BCI 2.1.1 poin (3) yang menyatakan $k*k=0$, maka diperoleh

$(0*k)*(0*n)=(((k*n)*(k*n))*k)*(0*n)$	Teorema 2.1.9 poin (4), $(k*n)*r=(k*r)*n$
$=(((k*k)*(k*n))*n)*(0*n)$	Teorema 2.1.9 poin (4), $(k*n)*r=(k*r)*n$
$=(((k*k)*n)*(k*n))*(0*n)$	Teorema 2.1.9 poin (4), $(k*n)*r=(k*r)*n$
$=(((k*]k)*n)*(0*n))*(k*n)$	Teorema 2.1.9 poin (4), $(k*n)*r=(k*r)*n$
$=((0*n)*(0*n))*(k*n)$	Definisi Ajabar BCI 2.1.1 poin $(3), k*k=0$
$=0*(k*n)$	Yang diketahui
$=0$	

8. Akan ditunjukkan $0 * (0 * (0 * k)) = 0 * k$. Dengan menganalogkan $k = 0 * (0 * (0 * k))$ dan $n = 0 * k$

   Dengan kata lain, berdasarkan Definisi Aljabar BCI 2.1.1 poin (4) analog dengan menunjukkan

   (a) $(0 * (0 * (0 * k))) * (0 * k) = 0$; dan

   (b) $(0 * k) * (0 * (0 * (0 * k))) = 0$;

   Ambil sebarang $k \in X$. Diperhatikan,

   (a) Berdasarkan Definisi Aljabar BCI 2.1.1 poin (2) yang menyatakan $(k * (k * n)) * n = 0$, jelas bahwa $(0 * (0 * (0 * k))) * (0 * k) = 0$.

   (b) Berdasarkan Definisi Aljabar BCI 2.1.1 poin (1) yang menyatakan $((k * n) * (k * r)) * (r * n) = 0$, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
((0 * k) * (0 * (0 * (0 * k)))) * ((0 * (0 * k)) * k) &= 0 && \text{Definisi 2.1.1 poin } (2) \\
((0 * k) * (0 * (0 * (0 * k)))) * 0 &= 0 && \text{Teorema 2.1.9 poin } (1) \\
& && k * 0 = k \\
((0 * k) * (0 * (0 * (0 * k)))) &= 0
\end{aligned}
$$

   Karena $(0 * (0 * (0 * k))) * (0 * k) = 0$ dan $(0 * k) * (0 * (0 * (0 * k))) = 0$.

   Jadi $0 * (0 * (0 * k)) = 0 * k$.

9. Akan ditunjukkan $(k * (k * (k * n))) = k * n$.

   Ambil sebarang $k, n, r \in X$.

   Berdasarkan Teorema 2.1.9 poin (8) yang menyatakan $0 * (0 * (0 * k)) = 0 * k$.

   Jelas bahwa $(k * (k * (k * n))) = k * n$.

10. Akan ditunjukkan $0 * (0 * (n * k)) = (0 * n) * (0 * k)$. Dengan menggunakan Teorema 2.1.9 poin (7) yang menyatakan $(0 * (k * n)) = 0 \rightarrow (0 * k) * (0 * n) = 0$, maka diperoleh

$(0 * n) * (0 * k)$	$= ((n * k) * (n * k) * n) * ((k * n) * (k * n) * k)$	Teorema 2.1.9 poin (4) $(k * n) * r = (k * r) * n$
	$= ((n * n) * (n * k) * k) * ((k * k) * (k * n) * n)$	Definisi2.1.1 poin (3) $k * k = 0$
	$= (0 * (n * k) * k) * (0 * (k * n) * n)$	Teorema 2.1.9 poin (7) $(0 * (k * n)) = 0 \rightarrow$ $(0 * k) * (0 * n) = 0$
	$= (0 * (n * k) * 0) * (k * (k * n) * n)$	Teorema 2.1.9 poin (7) $(0 * (k * n)) = 0 \rightarrow$ $(0 * k) * (0 * n) = 0$
	$= (0 * 0) * (n * k) * (k * n) * (k * n)$	Teorema 2.1.9 poin (7) $(0 * (k * n)) = 0 \rightarrow$ $(0 * k) * (0 * n) = 0$
	$= (0 * 0) * (k * n) * (k * n) * (n * k)$	Definisi2.1.1 poin (3) $k * k = 0$
	$= 0 * 0 * (n * k)$	

Terbukti bahwa $0 * (0 * (n * k)) = (0 * n) * (0 * k)$.

■

Jika dipunyai suatu aljabar BCI X maka dapat ditentukan kelas pada aljabar BCI. Berdasarkan kelas aljabar BCI tersebut dapat didefinisikan suatu aljabar BCI komutatif, aljabar BCI positif implikatif dan aljabar BCI implikatif sebagai berikut:

2.1.1. Aljabar BCI Komutatif

Definisi 2.1.10 *.(J.Meng , 1993) Sebuah aljabar BCI X dikatakan komutatif jika untuk semua $k, n \in X$, $k * n = 0$ berakibat $k = n * (n * k)$.*

Contoh 2.1.11 Berdasarkan Contoh 2.1.6 dikatakan aljabar BCI komutatif sebab

Untuk semua $k, n \in X$ berlaku

- Misalkan $k = 0$ dan $n = 0$. Diperoleh $0 * 0$ berakibat $0 = 0 * (0 * 0)$
- Misalkan $k = v$ dan $n = v$. Diperoleh $v * v$ berakibat $v = v * (v * v)$
- Misalkan $k = w$ dan $n = w$. Diperoleh $w * w$ berakibat $w = w * (w * w)$

Dengan demikian terbukti bahwa $(X, *, 0)$ adalah aljabar BCI komutatif.

2.1.2. Aljabar BCI Positif Implikatif

Definisi 2.1.12 *(Huang , 2003) Sebuah aljabar BCI X dikatakan positif implikatif jika memenuhi aksioma untuk semua $k, n \in X$, $(k * (k * n)) * (n * k) = k * (k * (n * (n * k)))$.*

Contoh 2.1.13 Berdasarkan Contoh 2.1.6 dikatakan aljabar BCI positif implikatif sebab

Untuk semua $k, n \in X$ berlaku

- Misalkan $k = 0, n = 0$. Diperoleh $(0*(0*0))*(0*0) = 0*(0*(0*(0*0))) = 0$

- Misalkan $k = 0, n = v$. Diperoleh $(0*(0*v))*(v*0) = 0*(0*(v*(v*0))) = 0$

- Misalkan $k = 0, n = w$. Diperoleh $(0*(0*w))*(w*0) = 0*(0*(w*(w*0))) = 0$

- Misalkan $k = v, n = 0$. Diperoleh $(v*(v*0))*(0*v) = v*(v*(0*(0*v))) = 0$

- Misalkan $k = v, n = v$. Diperoleh $(v*(v*v))*(v*v) = v*(v*(v*(v*v))) = 0$

- Misalkan $k = v, n = w$. Diperoleh $(v*(v*w))*(w*v) = v*(v*(w*(w*v))) = 0$

- Misalkan $k = w, n = 0$. Diperoleh $(w*(w*0))*(0*w) = w*(w*(0*(0*w))) = 0$

- Misalkan $k = w, n = v$. Diperoleh $(w*(w*v))*(v*w) = w*(w*(v*(v*w))) = 0$

- Misalkan $k = w, n = w$. Diperoleh $(w*(w*w))*(w*w) = w*(w*(w*(w*w))) = 0$

Dengan demikian terbukti bahwa $(X, *, 0)$ adalah aljabar BCI positif implikatif.

2.1.3. Aljabar BCI Implikatif

Definisi 2.1.14 *(Kurniawati , 2017) Sebuah aljabar BCI X dikatakan implikatif jika untuk semua $k, n \in X$, $(k*(k*n))$ = $(n*(n*k))$ $*(k*n)$.*

Contoh 2.1.15 Berdasarkan Contoh 2.1.6 dikatakan aljabar BCI implikatif sebab:

Untuk semua $k, n \in X$ berlaku

- Misalkan $k = 0, n = 0$. Diperoleh $(0*(0*0))$ = $(0*(0*0))$ $*(0*0) = 0$

- Misalkan $k = 0, n = v$. Diperoleh $(0 * (0 * v))$ = $(v * (v * 0)) * (0 * v) = v$
- Misalkan $k = 0, n = w$. Diperoleh $(0 * (0 * w))$ = $(w * (w * 0)) * (0 * w) = w$
- Misalkan $k = v, n = 0$. Diperoleh $(v * (v * 0))$ = $(0 * (0 * v)) * (v * 0) = 0$
- Misalkan $k = v, n = v$. Diperoleh $(v * (v * v))$ = $(v * (v * v)) * (v * v) = v$
- Misalkan $k = v, n = w$. Diperoleh $(v * (v * w))$ = $(w * (w * v)) * (v * w) = w$
- Misalkan $k = w, n = 0$. Diperoleh $(w * (w * 0))$ = $(0 * (0 * w)) * (w * 0) = 0$
- Misalkan $k = w, n = v$. Diperoleh $(w * (w * v))$ = $(v * (v * w)) * (w * v) = v$
- Misalkan $k = w, n = w$. Diperoleh $(w * (w * w))$ = $(w * (w * w)) * (w * w) = w$

Dengan demikian terbukti bahwa $(X, *, 0)$ adalah aljabar BCI implikatif.

Teorema 2.1.16 *(Kurniawati , 2017) Sebuah aljabar $(X, *, 0)$ adalah sebuah aljabar BCI Implikatif jika dan hanya jika memenuhi beberapa aksioma yaitu:*

1. $((k * n) * (k * r)) * (n * r) = 0$
2. $(k * (k * n) * n) = 0$
3. $k * k = 0$
4. $k * (k * n) = (n * (n * k)) * (k * n)$

Bukti. $(\Rightarrow)$ Diketahui $(X, *, 0)$ adalah aljabar BCI implikatif.

Diperhatikan,

1. Berdasarkan Teorema 2.1.9 poin (1), jelas bahwa $k * 0 = k$.
2. Berdasarkan Definisi 2.1.1 poin (3), jelas bahwa $k * k = 0$

3. Berdasarkan Teorema 2.1.9 poin (4), jelas bahwa untuk sebarang $k, n, r \in X$ berlaku $(k * n) * r = (k * r) * n$.

4. Berdasarkan Definisi aljabar BCI positif implikatif 2.1.12, diperoleh

$$
\begin{aligned}
(k * (k * n)) &= (n * (n * k)) * (k * n) & \\
(k * (k * n)) * r &= ((n * (n * k)) * (k * n)) * r & \text{Teorema 2.1.9 poin } (4) \\
& & (k * n) * r = (k * r) * n \\
(k * r) * (k * n) &= ((n * (n * k)) * r) * (k * n) & \text{Teorema 2.1.9 poin } (4) \\
& & (k * n) * r = (k * r) * n \\
(k * r) * (k * n) &= ((n * r) * (n * k)) * (k * n) & \text{Teorema 2.1.9 poin } (4) \\
& & (k * n) * r = (k * r) * n
\end{aligned}
$$

$(\Leftarrow)$ Diketahui: Definisi 2.1.1 poin (1), (2), (3), dan (4).

Akan ditunjukkan: $(X, *, 0)$ merupakan aljabar BCI implikatif yaitu

1. $((k * n) * (k * r)) * (n * r) = 0$

2. $(k * (k * n) * n) = 0$

3. $k * k = 0$

4. $k * (k * n) = (n * (n * k)) * (k * n)$

Diperhatikan

(2) Berdasarkan diketahui poin (3), jika $r = k * n$ maka

$$
\begin{aligned}
(k * (k * n) * n) &= (k * n) * (k * n) \text{ Diketahui poin } (3) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(3) Jelas berdasarkan poin (2)

(4) Berdasarkan diketahui poin (4), jika $r = 0$ maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
(k * 0) * (k * n) &= ((n * 0) * (n * k)) * (k * n) \\
k * (k * n) &= (n * (n * k)) * (k * n)
\end{aligned}
$$

Sehinggan didapatkan Persamaan 2.10

$$k * (k * n) = (n * (n * k)) * (k * n) \tag{2.10}$$

(1) Berdasarkan diketahui poin(4), diperoleh

$$
\begin{aligned}
(k * n) * (k * r) &= ((r * n) * (r * k)) * (k * r) \\
((k * n) * (k * r)) * (r * n) &= (((r * n) * (r * k)) * (k * r)) * (r * n) && \text{Poin } (3) \\
((k * n) * (k * r)) * (r * n) &= (((r * n) * (r * k)) * (r * n)) * (k * r) && \text{Poin } (3) \\
((k * n) * (k * r)) * (r * n) &= (((r * n) * (r * n)) * (r * k)) * (k * r) && \text{Poin } (2) \\
((k * n) * (k * r)) * (r * n) &= (0 * (r * k)) * (k * r) && \text{, misal } 0 = r * r \\
((k * n) * (k * r)) * (r * n) &= ((r * r) * (r * k)) * (k * r) && \text{Poin } (3) \\
((k * n)(k * r)) * (r * n) &= ((r * (r * k))r) * (k * r) && \text{Poin } (3) \\
((k * n)(k * r)) * (r * n) &= ((r * (r * k))(k * r)) * r
\end{aligned}
$$

Berdasarkan Persamaan 2.10, maka

$$\begin{aligned}((k*n)*(k*r))*(r*n) &= (k*(k*r))*r && \text{Poin } (3)\\ &= (k*r)*(k*r) && \text{Poin } (2)\\ &= 0\end{aligned}$$

■

2.2. Subaljabar pada Aljabar BCI

Jika dipunyai suatu aljabar BCI X maka dapat ditentukan himpunan banian atau subhimpunan. Berdasarkan subhimpunan tersebut dapat didefinisikan suatu subaljabar sebanai berikut:

Definisi 2.2.1 *(Yang dan Ahn , 2014) Suatu himpunan banian tak kosonn S dari aljabar BCI X disebut subaljabar dari X jika $k*n \in S$ untuk setiap $k, n \in S$.*

Contoh 2.2.2 Berdasarkan Contoh 2.1.5. Himpunan $S = \{0, w, x\}$ merupakan subaljabar, jika $k*n \in S$, maka

- Misalkan $k = 0, n = 0$. Diperoleh $0*0 = 0 \in S$
- Misalkan $k = 0, n = w$. Diperoleh $0*w = w \in S$
- Misalkan $k = 0, n = x$. Diperoleh $0*x = x \in S$
- Misalkan $k = w, n = 0$. Diperoleh $w*0 = w \in S$
- Misalkan $k = w, n = w$. Diperoleh $w*w = 0 \in S$
- Misalkan $k = w, n = x$. Diperoleh $w*x = x \in S$

- Misalkan $k = x, n = 0$. Diperoleh $x * 0 = x \in S$
- Misalkan $k = x, n = w$. Diperoleh $x * w = w \in S$
- Misalkan $k = x, n = x$. Diperoleh $x * x = 0 \in S$

sehingga terbukti bahwa $S = \{0, w, x\}$ merupakan subaljabar dari aljabar BCI X.

2.3. Ideal pada Aljabar BCI

Dalam aljabar BCI dapat didefinisikan suatu ideal, sehingga definisi dari ideal adalah sebanai berikut:

Definisi 2.3.1 *(Hao dan Li , 2004) Misalkan $(X, *, 0)$ suatu aljabar BCI dengan $I \subseteq X$ dan $I \leq \varnothing$. Himpunan I disebut ideal dari X jika memenuhi beberapa kondisi yaitu: untuk setiap $k, n \in I$*

1. *$0 \in I$;*
2. *untuk setiap $k \in X$ berlaku $k * n \in I$ dan $n \in I$ mengakibatkan $k \in I$;*

Contoh 2.3.2 Berdasarkan Contoh 2.1.2, himpunan $I = \{0, 1\}$ merupakan ideal pada aljabar BCI $X = \{0, 1, 2\}$ sebab:

1. Karena $I = \{0, 1\}$, maka jelas bahwa 0 anggota di I
2. Untuk $k * n \in I$ dan $n \in I$ maka diperoleh $k \in I$
   - $k * n = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $n = 0 \in I \Rightarrow k = 0 \in I$
   - $k * n = 0 * 1 = 1 \in I$ dan $n = 1 \in I \Rightarrow k = 0 \in I$
   - $k * n = 1 * 0 = 1 \in I$ dan $n = 0 \in I \Rightarrow k = 1 \in I$

- $k * n = 1 * 1 = 0 \in I$ dan $n = 1 \in I \Rightarrow k = 1 \in I$

Karena aksioma (1) dan (2) terpenuhi. Sehingga terbukti bahwa $I = \{0, 1\}$ merupakan Ideal pada aljabar BCI $X = \{0, 1, 2\}$.

Contoh 2.3.3 Berdasarkan contoh 2.1.5, himpunan $I = \{0, v, w\}$ merupakan ideal pada aljabar BCI $X = \{0, v, w, x, y, z\}$ sebab:

1. Karena $I = \{0, v, w\}$, maka jelas bahwa 0 anggota di I
2. Untuk $k * n \in I$ dan $n \in I$ maka diperoleh $k \in I$
   - $k * n = 0 * 0 = 0 \in I$ dan $n = 0 \in I \Rightarrow k = 0 \in I$
   - $k * n = 0 * v = v \in I$ dan $n = v \in I \Rightarrow k = 0 \in I$
   - $k * n = 0 * w = w \in I$ dan $n = w \in I \Rightarrow k = 0 \in I$
   - $k * n = v * 0 = v \in I$ dan $n = 0 \in I \Rightarrow k = v \in I$
   - $k * n = v * v = 0 \in I$ dan $n = v \in I \Rightarrow k = v \in I$
   - $k * n = v * w = w \in I$ dan $n = w \in I \Rightarrow k = v \in I$
   - $k * n = w * 0 = w \in I$ dan $n = 0 \in I \Rightarrow k = w \in I$
   - $k * n = w * v = v \in I$ dan $n = v \in I \Rightarrow k = w \in I$
   - $k * n = w * w = 0 \in I$ dan $n = w \in I \Rightarrow k = w \in I$

Karena aksioma (1) dan (2) terpenuhi. Sehingga terbukti bahwa $I = \{0, v, w\}$ merupakan Ideal pada aljabar BCI $X = \{0, v, w, x, y, z\}$.

Dalam setiap kelas penting dalam aljabar BCI dapat didefinisikan suatu ideal, sehingga dapat didefinisikan suatu ideal komutatif dan ideal positif implikatif adalah sebagai berikut:

2.3.1. Ideal Komutatif pada Aljabar BCI

Definisi 2.3.4 *(J.Meng , 1993) Misalkan* $(X, *, 0)$ *suatu aljabar BCI dengan* $I \subseteq X$ *dan* $I \neq \emptyset$*. Himpunan* I *disebut Ideal Komutatif dari aljabar BCI* X *jika memenuhi beberapa kondisi yaitu:*

1. $0 \in I$;
2. *Untuk semua* $k, n, r \in X$ *berlaku,* $(k * n) * r \in I$ *dan* $r \in I$ *berakibat* $k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))) \in I$;

Teorema 2.3.5 *(J.Meng , 1993) Setiap ideal komutatif dari aljabar BCI adalah ideal.*

Bukti. Diberikan I adalah ideal komutatif pada aljabar BCI X dan diberikan $p * r \in I$ dan $r \in I$, kemudian $(p * 0) * r \in I$ dan $r \in I$.
Berdasarkan Definisi Ideal Komutatif pada Aljabar BCI 2.3.4 poin (2) dapat dinyatakan dengan memisalkan $n = 0$ maka

$$k = k * ((0 * (0 * k)) * (0 * (0 * (k * 0)))) \in I$$

.

Terbukti bahwa I adalah ideal. ■

Proposisi 2.3.6 *(J.Meng , 1993) Setiap ideal* I *adalah komutatif jika dan hanya jika memenuhi kondisi :*
$k * n \in I$ *berakibat* $k * (n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))$

Bukti. $(\Rightarrow)$ Diketahui, himpunan I merupakan ideal komutatif.
Akan ditunjukkan, $k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))) \in I$.
Diperhatikan, berdasarkan Definisi ideal komutatif pada Aljabar BCI 2.3.4, jika

diasumsikan $r = 0$ maka diperoleh $(k * n) * 0 = k * n \in I$.

Berdasarkan Definisi ideal komutatif pada aljabar BCI 2.3.4 poin (1), jelas bahwa $0 \in I$, maka $k * n \in I$.

$(\Leftarrow)$ Diketahui, $k * n \in I$ maka $k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))) \in I$. Akan ditunjukkan, himpunan I merupakan ideal komutatif.

1. Berdasarkan Teorema 2.3.5, maka jelas bahwa $0 \in I$.

2. Akan ditunjukkan bahwa $(k * n) * r \in I$ dan $r \in I$ berakibat $k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))) \in I$.

   Berdasarkan diketahui, maka jelas $(k * n) * r \in I$ dan $r \in I$ berakibat $k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))) \in I$.

■

Contoh 2.3.7 Berdasarkan Contoh 2.1.3 merupakan ideal komutatif pada aljabar BCI sebab:

Misalkan $I = \{0, 1\}$. Akan ditunjukkan ($\forall k, n, r \in X$) $(k * n) * r \in I$ dan $r \in I$ berakibat $k*((n*(n*k))*(0*(0*(k*n)))) \in I$. Berdasarkan Tabel 2.1 didapatkan. Himpunan $I = \{0, 1\}$ merupakan ideal komutatif sebab:

- Misalkan $k = 0$, $n = 0$, $r = 0$. Diperoleh

  $(0 * 0) * 0 = 0 \in I$ maka $0 * ((0 * (0 * 0)) * (0 * (0 * (0 * 0)))) = 0 \in I$

- Misalkan $k = 0$, $n = 0$, $r = 1$. Diperoleh

  $(0 * 0) * 1 = 1 \in I$ maka $0 * ((0 * (0 * 0)) * (0 * (0 * (0 * 0)))) = 0 \in I$

- Misalkan $k = 0$, $n = 1$, $r = 0$. Diperoleh

  $(0 * 1) * 0 = 1 \in I$ maka $0 * ((1 * (1 * 0)) * (0 * (0 * (0 * 1)))) = 1 \in I$

- Misalkan $k = 0, n = 1, r = 1$. Diperoleh

  $(0 * 1) * 1 = 0 \in I$ maka $0 * ((1 * (1 * 0)) * (0 * (0 * (0 * 1)))) = 1 \in I$

- Misalkan $k = 0, n = 2, r = 0$. Diperoleh

  $(0 * 2) * 0 = 1 \in I$ maka $0 * ((2 * (2 * 0)) * (0 * (0 * (0 * 2)))) = 1 \in I$

- Misalkan $k = 0, n = 2, r = 1$. Diperoleh

  $(0 * 2) * 1 = 1 \in I$ maka $0 * ((2 * (2 * 0)) * (0 * (0 * (0 * 2)))) = 1 \in I$

- Misalkan $k = 1, n = 0, r = 0$. Diperoleh

  $(1 * 0) * 0 = 1 \in I$ maka $1 * ((0 * (0 * 1)) * (0 * (0 * (1 * 0)))) = 0 \in I$

- Misalkan $k = 1, n = 0, r = 1$. Diperoleh

  $(1 * 0) * 1 = 0 \in I$ maka $1 * ((0 * (0 * 1)) * (0 * (0 * (1 * 0)))) = 0 \in I$

- Misalkan $k = 1, n = 1, r = 0$. Diperoleh

  $(1 * 1) * 0 = 0 \in I$ maka $1 * ((1 * (1 * 1)) * (0 * (0 * (1 * 1)))) = 1 \in I$

- Misalkan $k = 1, n = 1, r = 1$. Diperoleh

  $(1 * 1) * 1 = 1 \in I$ maka $1 * ((1 * (1 * 1)) * (0 * (0 * (1 * 1)))) = 0 \in I$

Sehingga terbukti bahwa $I = \{0, 1\}$ merupakan ideal komutatif.

2.3.2. Ideal Positif Implikatif pada Aljabar BCI

Definisi 2.3.8 *(Meng dan Liu , 2000) Misalkan $(X, *, 0)$ suatu aljabar BCI dengan $I \subseteq X$ dan $I \neq \emptyset$. Himpunan I disebut ideal positif implikatif dari aljabar BCI X jika memenuhi beberapa kondisi yaitu:*

1. $0 \in I$;
2. *Untuk semua $k, n, r \in X$ berlaku, $((k*r)*r)*(n*r) \in I$ dan $n \in I$berakibat $k * r \in I$;*

Proposisi 2.3.9 *(Meng dan Liu , 2000) Diberikan I merupakan ideal pada aljabar BCI X. Maka kondisi berikut ini adalah ekuivalen:*

1. *I merupakan aljabar BCI Positif Implikatif;*

2. *$((k * n) * n) * (0 * n) \in I$ berakibat $k * n \in I$;*

untuk setiap $k, n \in X$

Bukti.

1. Berdasarkan Definisi ideal positif implikatif pada aljabar BCI 2.3.8, jelas bahwa I merupakan aljabar BCI positif implikatif.

2. Diketahui I merupakan ideal dari aljabar BCI X.

   I dikatakan positif implikatif BCI jika dan hanya jika $((k * n) * n) * (0 * n) \in I$ maka $k * n \in I$.

   $(\Rightarrow)$ Dengan mengganti r menjadi n dan mengganti n menjadi 0, maka diperoleh $((k * n) * n) * (0 * n) \in I$ berakibat $k * n \in I$.

   $(\Leftarrow)$ Dengan mengganti n menjadi r dan mengganti 0 menjadi n, maka diperoleh $((k * r) * r) * (n * r) \in I$ berakibat $k * r \in I$.

■

Contoh 2.3.10 Berdasarkan Contoh 2.1.3 merupakan ideal positif implikatif pada BCI sebab.

Misalkan $I = \{0, 1\}$. Akan ditunjukkan $((k*r)*r)*(n*r) \in I$ dan $n \in I$ berakibat $k * r \in I$. Berdasarkan Tabel 2.1 didapatkan. Himpunan $I = \{0, 1\}$ merupakan ideal positif implikatif sebab:

- Misalkan $k = 0, n = 0, r = 0$. Diperoleh

  $((0 * 0) * 0) * (0 * 0) = 0 \in I$ akibat $0 * 0 = 0 \in I$

- Misalkan $k = 0, n = 0, r = 2$. Diperoleh

  $((0 * 2) * 2) * (0 * 2) = 1 \in I$ akibat $0 * 2 = 1 \in I$

- Misalkan $k = 0, n = 1, r = 0$. Diperoleh

  $((0 * 0) * 0) * (1 * 0) = 1 \in I$ akibat $0 * 0 = 0 \in I$

- Misalkan $k = 0, n = 1, r = 1$. Diperoleh

  $((0 * 1) * 1) * (1 * 1) = 0 \in I$ akibat $0 * 1 = 1 \in I$

- Misalkan $k = 0, n = 1, r = 2$. Diperoleh

  $((0 * 2) * 2) * (1 * 2) = 1 \in I$ akibat $0 * 2 = 1 \in I$

- Misalkan $k = 1, n = 0, r = 0$. Diperoleh

  $((1 * 0) * 0) * (0 * 0) = 1 \in I$ akibat $1 * 0 = 1 \in I$

- Misalkan $k = 1, n = 0, r = 1$. Diperoleh

  $((1 * 1) * 1) * (0 * 1) = 0 \in I$ akibat $1 * 1 = 0 \in I$

- Misalkan $k = 1, n = 1, r = 0$. Diperoleh

  $((1 * 0) * 0) * (1 * 0) = 0 \in I$ akibat $1 * 0 = 1 \in I$

- Misalkan $k = 1, q = 1, r = 1$. Diperoleh

  $((1 * 1) * 1) * (1 * 1) = 1 \in I$ akibat $1 * 1 = 0 \in I$

Karena telah memenuhi (1) dan (2) maka terbukti bahwa $I = \{0, 1\}$ adalah ideal positif komutatif.

2.4. Integrasi Keilmuan

Salah satu ilmu yang dijelaskan pada al-Qur'an yaitu ilmu matematika. Ilmu matematika merupakan ilmu yang sangat penting untuk kehidupan. Dengan matematika dapat dicari berbagai hal seperti mengukur jarak, mengukur waktu bahkan jual beli barang dan menukar uang. Sehingga ilmu matematika sangat penting maka konsep dasar dari matematika yang benar harus diajarkan kepada anak sejak dini dengan benar dan kuat(Setyono , 2007). Paling tidak penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian harus dikuasai dengan sempurna. Ilmu matematika merupakan ilmu dasar dari ilmu-ilmu yang lain seperti contohnya dalam sains, matematika digunakan untuk mengukur kecepatan maupun jarak, dalam ilmu karmasi matematika digunakan untuk mengukur dosis obat yang akan digunakan(Yusrina , 2018). Sehingga dalam ilmu perhitungan atau matematika diperlukan pengetahuan dan ketelitian, seperti pada firman Allah dalam Q.S Maryam ayat 93-94 yang berbunyi:

اِنْ كُلُّ مَنْ فِى السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ اِلَّآ اٰتِى الرَّحْمٰنِ عَبْدًا ۝٩٣

لَقَدْ اَحْصٰىهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ۝٩٤

Artinya : "Tidak ada seorangpun di langit dan di bumi, kecuali akan datang kepada Tuhan Yang Maha Pemurah selaku seorang hamba. Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti".

Ayat di atas Allah menjelaskan bahwa semua amal perbuatan dan ketakwaan setiap orang akan tercatat secara teliti dan terperinci serta tidak ada satupun yang terluput di dalamnya. Amal perbuatan besar maupun kecil akan dihitung dengan detail dan dipertanggungjawabkan sesuai dengan ukurannya. Dalam hal ini dapat diketahui bahwa matematika merupakan suatu ilmu mendasar yang sangat penting untuk difahami dan dipelajari.

Seperti pada hadis riwayat al-Bukhori yang menunjukkan bahwa setiap amal dan perbuatan manusia yang baik dan yang dikerjakan maka Allah akan melipat gandakan kebaikan tersebut. Seperti pada sabda Rasulullah SAW, Allah berfirman kepada malaikat:

عَنْ أَبِى هُرَيْرَ ةَ أَنَّ رَسُولُ اللَّهِ – صلى اللَّه عليه وسلم – قال (يَقُوْلُ اللَّهُ إِذَا أَرَادَ عَبْدِى أَنْ يَعْمَلَ سَيِّئَةً فَلاَ تَكْتُبُوهَا عَلَيْهِ حَتَّى يَعْمَلَهَا فَإِنْ عَمِلَهَا فَاكْتُبُوهَا بِمِثْلِهَا وَإِنْ تَرَكَهَا مِنْ أَجْلِى فَاكْتُبُوهَا لَهُ حَسَنَةً وَإِذَا أَرَادَ أَنْ يَعْمَلَ حَسَنَةً فَلَمْ يَعْمَلْهَا فَاكْتُبُوهَا لَهُ حَسَنَةً فَإِنْ عَمِلَهَا فَاكْتُبُوهَا لَهُ بِعَشْرِ أَمْثَالِهَا إِلَى سَبْعِمِائَةٍ)

Yang artinya: "Jika hamba-Ku berniat melakukan kesalahan, maka janganlah kalian menulis kesalahan itu sampai ia (benar-benar) mengerjakannya. Jika ia sudah mengerjakannya, maka tulislah sesuai dengan perbuatannya. Jika ia meninggalkan kesalahan tersebut karena Aku, maka tulislah untuknya satu kebaikan. Jika ia ingin mengerjakan kebaikan namun tidak mengerjakannya, tulislah sebagai kebaikan untuknya. Jika ia mengerjakan kebaikan tersebut, tulislah baginya sepuluh kali kebaikannya itu hingga tujuh ratus (kebaikan)" (HR. al-Bukhâri). Maka sudah jelas bahwa ilmu Matematika sangat penting untuk difahami dan dipelajari.

Salah satu ilmuan Islam Matematika yang terkenal yaitu al-Khawarizmi yang mempunyai nama asli Muhammad Ibnu Musa al-Khawarizmi, beliau juga dikenal sebagai Abu Abdullah Muhammad bin Ahmad bin Yusoff. Pada tahun 780-850 M merupakan zaman kegemilangan bagi al-Khawarizmi. Dalam segi pendidikan juga telah dibuktikan bahwa al-Khawarizmi merupakan seorang tokoh Islam yang mempunyai pengaruh yang luas. Pengetahuan dan keahlian yang dimiliki beliau bukan hanya pada bidang syariah melaikan dalam bidang falsafah, aritmatika, geometri, ilmu hitung, sejarah Islam bahkan kimia. Al-Khawarizmi pun merupakan seorang guru Aljabar di Eropa(Yusuf , 2013).

Ilmu aljabar merupakan cabang dari ilmu matematika, di mana aljabar menjadi dasar pada ilmu matematika. Aljabar sendiri memiliki beberapa fokus keilmuan salah satunya adalah aljabar abstrak. Pada aljabar abstrak mempelajari mengenai konsep-konsep struktur aljabar beserta dengan sifat-sifatnya. Struktur aljabar merupakan himpunan yang tak kosong dengan satu atau lebih relasi ekuivalen dan satu atau lebih operasi biner dengan aksioma-aksioma tertentu(Andika , 2017).

Bidang aljabar abstrak pun mengalami perkembangan dan ditemukan juga aljabar-aljabar yang baru. Salah satu dari perkembangan aljabar yaitu aljabar BCI. aljabar BCI merupakan perumusan dari aljabar BCK sehingga aljabar BCK termuat di dalam aljabar BCI. Karena berkembangnya ilmu pengetahuan dari tahun ke tahun semakin pesat sehingga aljabar BCI pun juga berkembang pesat(Yusrina , 2018). Aljabar BCI merupakan suatu kembangan mengenai struktur ajabar. Struktur aljabar merupakan himpunan tak kosong dengan satu atau lebih operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma(Iseki , 1966). Pada aljabar BCI terdapat teorema maupun proposisi yang harus dibuktikan kebenarannya agar tidak menimbulkan keraguan, terutama pada teorema-teorema yang ada pada matematika. Hal tersebut sesuai dengan ayat Al-Qur’an dalam Q.S Al-Baqarah ayat 23 yang berbunyi:

وَإِنْ كُنْتُمْ فِي رَيْبٍ مِمَّا نَزَّلْنَا عَلَىٰ عَبْدِنَا فَأْتُوا بِسُورَةٍ مِنْ مِثْلِهِ وَادْعُوا شُهَدَاءَكُمْ مِنْ دُونِ اللَّهِ إِنْ كُنْتُمْ صَادِقِينَ ﴿٢٣﴾

Artinya: "Dan jika kamu (tetap) dalam keraguan tentang al-Qur'an yang kami wahyukan kepada hamba kami (Muhammad), buatlah[31] satu surat (saja) yang semisal al-Qur'an itu dan ajaklah penolong-penolongmu selain Allah, jika kamu orang-orang yang benar."

Pada ayat di atas menjelaskan bahwa bagi mereka orang-orang yang meragukan tentang kebenaran al-Qur'an yang tidak dapat ditiru oleh siapapun walaupun mengarahkan seluruh orang yang ahli sastra dan ahli bahasa, mereka tidak ada satupun yang bisa meniru karena al-Qur'an merupakan mukjizat yang di berikan oleh Allah SWT kepada Nabi Muhammad Saw. Pembahasan mengenai Kebenaran dan kebatilan juga dijelaskan pada Q.S al-Isra' ayat 81 yang berbunyi:

وَقُلْ جَاءَ الْحَقُّ وَزَهَقَ الْبَاطِلُ ۚ إِنَّ الْبَاطِلَ كَانَ زَهُوقًا

Artinya: "Dan katakanlah, "Kebenaran telah datang dan yang batil telah lenyap." Sungguh, yang batil itu pasti lenyap".

Dalam kehidupan sehari-hari dengan adanya perbedaan dalam masyarakat diperlukannya suatu kajian lebih lanjut mengenai keputusan yang benar dan yang salah. Dalam menentukan kebenaran bahwa suatu informasi benar perlu dilakukannya suatu kajian lebih dalam untuk membuktikannya antara yang benar maupun yang salah. Hal ini di atur dalam kitab "*Risalah Qawa-id* Fikih". Dalam kitab tersebut terdapat kaidah yang menerangkan mengenai suatu keputusan jika terdapat pertentangan antara kebenaran dan kebatilan. Kaidah tersebut berbunyi:

إِذَا تَعَا رَضَ الْأَصْلُ وَالظَّا هِرُ

Yang artinya: "Kalau terjadi pertentangan antara *Asal* dan *dhahir*". Maka dapat dilakukan beberapa solusi menurut alasanya. Yang pertama, dapat ditafshil , adakalanya dapat dibenarkan atau *dhahir* dikuatkan dengan suatu sebab atau kebiasaan, maka *dhahir* tersebut harus dimenangkan. Ketiga, apabila *Asal* dan *dhahir* bertentangan dan keduanya memiiki sebab kemungkinannya lemah, maka yang menang adalah *Asal*. Keempat, Apabila *Asal* dan *dhahir* saling bertentangan dan *dhahir* memiliki kemungkinan yang lebih kuat, maka *dhahir*lah yang menang.

Dan terdapat pula perkataan berasal dari Sayyidina ali bin abi thalib *karramallahu wajhah*, beliau mengatakan

اَلْحَقُّ بِلاَنِظَامٍ يَغْلِبُهُ الْبَاطِلُ بِالنِّظَامِ

Artinya: "Kebenaran yang tanpa diikuti keteraturan akan dikalahkan dengan kebatilan yang diikuti keterturan". Perkataan tersebut menjelaskan bahwa setiap suatu kebenaran jika tidak didukung dengan suatu pembuktian maka kebenaran tersebut seperti sia-sia dan percuma. Akan tetapi suatu kebatilan jika didukung dengan suatu pembuktian, maka kebatilan tersebut akan bisa dikatakan kebenaran jika terdapat beberapa bukti untuk mendukung kebatilan tersebut. Dan terdapat pula hadis riwayat al-Bukhari yang berbunyi:

حَدَّثَنَا عُبَيْدُ اللَّهِ بْنُ مُوسَى عَنْ إِسْمَاعِيلَ عَنْ قَيْسٍ عَنْ الْمُغِيرَةِ بْنِ شُعْبَةَ عَنْ النَّبِيِّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ قَالَ لَا يَزَالُ طَائِفَةٌ مِنْ أُمَّتِي ظَاهِرِينَ حَتَّى يَأْتِيَهُمْ أَمْرُ اللَّهِ وَهُمْ ظَاهِرُونَ

Artinya: “Akan senantiasa ada kelompok dari umatku yang tegar di jalan kebenaran hingga keputusan Allah datang kepada mereka, dan mereka selalu tegar dalam jalan kebenaran”.

Dari hadis di atas dapat dijelaskan bahwa apabila ada kelompok yang yakin dengan suatu kebenaran tersebut dan tidak bimbang dengan pilihannya dengan mereka selalu berusaha mencari bukti untuk menunjukkan bahwa hal tersebut merupakan suatu kebenaran, maka dengan usaha dan doa Allah pasti memberikan jalan untuk mereka agar dimudahkannya mencari bukti untuk menunjukkan kebenaran tersebut. Sehingga dapat disimpulkan bahwa perlu dilakukannya pembuktian dan diikuti oleh doa dan usaha maka tercapai kebenaran dan hal tersebut dan berlaku pada pembuktian suatu teorema dan proposisi yang ada pada skripsi ini agar menjadi suatu pernyataan yang belaku untuk umum.

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai metode penelitian, maka dari itu penelitian ini dapat tertuju secara baik dari segi materi dan waktu pengerjaannya.

3.1. Jenis Penelitian

Jenis penelitian ini termasuk ke dalam penelitian kualitatif. Penelitian kualitatif merupakan metode untuk menganalisis atau menggambarkan hasil penelitian dengan tidak membuat kesimpulan yang lebih kompleks. (Komariah , 2019). Penelitian ini menggambarkan dan menguraikan dengan jelas hubungan antara aljabar BCI dengan ideal implikatif, selain itu pada penelitian ini juga menerangkan teorema-teorema yang berhubungan yaitu akan dibahas tentang definisi serta sifat-sifat dari aljabar BCI dan ideal implikatif. Data yang diperoleh untuk penelitian ini adalah bersumber dari buku, jurnal, serta refrensi lain yang terkait.

3.2. Metode Pengumpulan Data

Metode yang dilakukan yaitu dengan melakukan studi pustaka berdasarkan refrensi-refrensi yang berkaitan dengan aljabar BCI dan Ideal Implikatif. Dari berbagai literatur yang telah dikumpulkan, kemudian mengambil satu jurnal sebagai refrensi utama. Sehingga didapatkan judul BCI-Implicative ideals of BCI-Algebras oleh Yong Lin Liu, Yang Xu, dan Jie Meng. Dari jurnal tersebut, dilakukan analisis mengenai konsep Ideal Implikatif pada aljabar BCI serta sifat dan teorema yang terkait.

3.3. Tahapan Penelitian

Tahapan-tahapan dalam penyelesaian penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Melakukan kajian pustaka yang berhubungan dengan penelitian seperti buku, jurnal, serta sumber refrensi lain yang mendukung.
2. Menjelaskan definisi dan contoh yang berkaitan dengan aljabar BCI, subaljabar, Ideal pada aljabar BCI dan Ideal Komutatif pada aljabar BCI serta menjelaskan dan membuktikan sifat-sifat dan teorema yang ada.
3. Menjelaskan definisi dan contoh dari Ideal implikatif pada aljabar BCI dan membuktikan sifat-sifat dan teorema dari Ideal implikatif pada aljabar BCI.
4. Menarik kesimpulan dari hasil analisis yang telah dilakukan.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam pembahasan ini akan dipaparkan tentang definisi dan sifat-sifat dari Ideal implikatif pada aljabar BCI. Serta menjelaskan mengenai integrasi keilmuan tentang pembuktian kebenaran.

4.1. Ideal Implikatif pada Aljabar BCI

Pada subbab ini akan dibahas mengenai definisi ideal implikatif pada aljabar BCI.

Definisi 4.1.1 *Misalkan $(X, *, 0)$ suatu aljabar BCI dengan $I \subseteq X$ dan $I \neq \varnothing$, maka I disebut ideal Implikatif dari X jika memenuhi beberapa kondisi yaitu:*

1. *$0 \in I$;*

2. *Untuk semua $k, n, r \in X$ berlaku, $(((k * n) * n) * (0 * n)) * r \in I$ dan $r \in I$ berakibat $k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))) \in I$;*

Contoh 4.1.2 Berdasarkan Contoh 2.1.2, himpunan X merupakan ideal implikatif pada aljabar BCI X dengan memisalkan $I = \{0, 1\}$. Akan ditunjukkan bahwa $0 \in I$ dan $(((k * n) * n) * (0 * n)) * r \in I$ dan $r \in I$ berakibat $k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))) \in I$. Berdasarkan Tabel 2.1 didapatkan. Himpunan $I = \{0, 1\}$ merupakan ideal implikatif sebab:

1. Karena $I = \{0, 1\}$, maka jelas bahwa 0 anggota di I.

2. Untuk $(((k * n) * n) * (0 * n)) * r \in I$ dan $r \in I$ berakibat $k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))) \in I$.

   - Misalkan $k = 0$, $n = 0$, $r = 0$. diperoleh
     $(((0 * 0) * n) * (0 * 0)) * 0 = 0 \in I$ dan $0 \in I$ maka $0 * ((0 * (0 * 0)) * (0 * (0 * (0 * 0)))) = 0 \in I$
   - Misalkan $k = 1$, $n = 1$, $r = 0$. diperoleh
     $(((1 * 1) * 1) * (0 * 1)) * 0 = 1 \in I$ dan $0 \in I$ maka $1 * ((1 * (1 * 1)) * (0 * (0 * (1 * 1)))) = 0 \in I$
   - Misalkan $k = 2$, $n = 2$, $r = 0$. diperoleh
     $(((2 * 2) * 2) * (0 * 2)) * 0 = 0 \in I$ dan $0 \in I$ maka $2 * ((2 * (2 * 2)) * (0 * (0 * (2 * 2)))) = 0 \in I$

   Hal ini juga berlaku untuk setiap $k, n, r \in X$.

Karena aksioma (i) dan (ii) terpenuhi. Sehingga terbukti bahwa $I = \{0, 1\}$ merupakan Ideal implikatif pada aljabar BCI X.

Contoh 4.1.3 Diberikan himpunan $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ merupakan aljabar BCI dengan operasi $*$ pada X didefinisikan pada tabel Cayley sebagai berikut.

Tabel 4.1 Tabel Cayley Himpunan *X* Terhadap Operasi $*$

$*$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	3	3	3
1	1	0	1	3	3	3
2	2	2	0	3	3	3
3	3	3	3	0	0	0
4	4	3	4	1	0	0
5	5	3	5	1	1	0

Misalkan $I = \{0, 1, 2\}$. Akan ditunjukkan bahwa I merupakan ideal implikatif pada aljabar BCI X. Berdasarkan Tabel 4.1, himpunan $I = \{0, 1, 2\}$ merupakan ideal implikatif sebab:

1. Karena $I = \{0, 1, 2\}$, maka jelas bahwa 0 anggota di I.

2. Untuk $(((k * n) * n) * (0 * n)) * r \in I$ dan $r \in I$ berakibat $k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))) \in I$.

   - Misalkan $k = 2$, $n = 1$, $r = 0$. Diperoleh $(((2 * 1) * 1) * (0 * 1)) * 0 = 0 \in I$ dan $0 \in I$ maka $2 * ((1 * (1 * 1)) * (0 * (0 * (2 * 1)))) = 2 \in I$
   - Misalkan $k = 1$, $n = 0$, $r = 2$. Diperoleh $(((1 * 0) * 0) * (0 * 0)) * 2 = 1 \in I$ dan $2 \in I$ maka $1 * ((0 * (0 * 1)) * (0 * (0 * (1 * 01)))) = 1 \in I$
   - Misalkan $k = 2$, $n = 2$, $r = 1$. Diperoleh $(((2 * 2) * 2) * (0 * 2)) * 1 = 0 \in I$ dan $1 \in I$ maka $2 * ((2 * (2 * 2)) * (0 * (0 * (2 * 2)))) = 0 \in I$

   Hal ini juga berlaku untuk setiap $k, n, r \in X$.

Karena aksioma (i) dan (ii) terpenuhi. Sehingga terbukti bahwa $I = \{0, 1, 2\}$ merupakan Ideal implikatif pada aljabar BCI X.

Contoh 4.1.4 Berdasarkan Contoh 2.1.5, himpunan X merupakan ideal implikatif pada aljabar BCI X dengan memisalkan $I = \{0, v, w\}$. Akan ditunjukkan bahwa $0 \in I$ dan $(((k * n) * n) * (0 * n)) * r \in I$ dan $r \in I$ berakibat $k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))) \in I$. Berdasarkan Tabel 2.3 didapatkan. Himpunan $I = \{0, v, w\}$ merupakan ideal implikatif sebab:

1. Karena $I = \{0, y, z\}$, maka jelas bahwa 0 anggota di I.

2. Untuk $(((k * n) * n) * (0 * n)) * r \in I$ dan $r \in I$ berakibat $k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))) \in I$.

   - Misalkan $k = 0$, $n = 0$, $r = 0$. Diperoleh $(((0 * 0) * 0) * (0 * 0)) * 0 = 0 \in I$ dan $0 \in I$ maka $0 * ((0 * (0 * 0)) * (0 * (0 * (0 * 0)))) = 0 \in I$
   - Misalkan $k = v$, $n = w$, $r = 0$. Diperoleh $(((v * w) * w) * (0 * w)) * 0 = z \in I$ dan $0 \in I$ maka $v * ((w * (w * v)) * (0 * (0 * (v * w)))) = y \in I$
   - Misalkan $x = w$, $n = v$, $r = 0$. Diperoleh $(((w * v) * v) * (0 * v)) * 0 = 0 \in I$ dan $0 \in I$ maka $w * ((v * (v * w)) * (0 * (0 * (w * v)))) = z \in I$

   Hal ini juga berlaku untuk setiap $k, n, r \in X$.

Karena aksioma (i) dan (ii) terpenuhi. Sehingga terbukti bahwa $I = \{0, y, z\}$ merupakan Ideal implikatif pada aljabar BCIX.

Teorema 4.1.5 *Diberikan I merupakan ideal dari aljabar BCI X. Ideal I adalah ideal implikasi jika dan hanya jika $((k * n) * n) * (0 * n) \in I$ maka $k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))) \in I$.*

Bukti. $(\Rightarrow)$ Diketahui I merupakan ideal implikatif BCI dan $((k*n)*n)*(0*n) \in I$. Akan ditunjukkan bahwa $k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))) \in I$. Selanjutnya, ambil sebarang $k, n, r \in I$.

Diperhatikan, $((k * n) * n) * (0 * n) \in I$.

Lebih lanjut, berdasarkan Teorema 2.1.9 poin (1) yang menyatakan $k*0=k$, maka

$$((k*n)*n)*(0*n) = (((k*n)*n)*(0*n))*0 \tag{4.1}$$

Karena I merupakan ideal implikatif BCI berarti $0 \in I$. Sehingga Persamaan 4.1 yaitu $(((k*n)*n)*(0*n))*0 \in I$.
Berdasarkan Definisi 4.1.1 maka $k*((n*(n*k))*(0*(0*(k*n)))) \in I$. Terbukti bahwa $k*((n*(n*k))*(0*(0*(k*n)))) \in I$
$(\Leftarrow)$ Diketahui $((k*n)*n)*(0*n) \in I$ maka $k*((n*(n*k))*(0*(0*(k*n)))) \in I$. Akan ditunjukkan bahwa I merupakan ideal implikatif BCI atau dengan kata lain akan ditunjukkan aksioma pada Definisi ideal implikatif pada aljabar BCI 4.1.1, yaitu:

1. Berdasarkan Definisi ideal pada aljabar BCI 2.3.1 yang menyatakan bahwa $0 \in I$, jelas bahwa $0 \in I$.

2. Ambil sembarang $k, n, r \in X$. Dipunyai bahwa $(((k*n)*n)*(0*n))*r \in I$ dan $r \in I$. Akan ditunjukkan bahwa $k*((n*(n*k))*(0*(0*(k*n)))) \in I$. Berdasarkan Definisi ideal pada aljabar BCI 2.3.1, maka $((k*n)*n)*(0*n) \in I$.
   Berdasarkan apa yang diketahui maka diperoleh bahwa

   $$k*((n*(n*k))*(0*(0*(k*n)))) \in I$$

   .

   Sehingga terbukti bahwa I merupakan ideal implikatif BCI.

■

Teorema 4.1.6 *Setiap ideal implikatif BCI merupakan ideal.*

Bukti. Ambil sembarang I merupakan ideal implikatif. Akan ditunjukkan bahwa I merupakan ideal.

Jika $n = 0$. Berdasarkan Definisi ideal implikatif pada aljabar BCI 4.1.1 poin(2), maka

$(((k*n)*n)*(0*n))*r$	$= ((k*0)*0)*(0*0))*r$	Definisi aljabar BCI 2.1.1 poin (3) $k*k=0$
	$= ((k*0)*0)*r$	Teorema 2.1.9 poin (1) $k*0=k$
	$= (k*0)*r$	Teorema 2.1.9 poin (1) $k*0=0$
	$= k*r \in I$ dan $r \in I$	

Lebih lanjut,

$k*((0*(0*k))*(0*(0*(k*0))))$	
$= k*(0*(0*k))*(0*(0*k))$	Definisi aljabar BCI 2.1.1 poin (3) $k*k=0$
$= k*0$	Teorema 2.1.9 poin (1) $k*0=k$
$= k \in I$	

■

Terbukti bahwa setiap ideal implikatif BCI merupakan ideal. Akan tetapi kebalikan dari Terorema 4.1.6 belum tentu berlaku. Hal ini dapat ditunjukkan dengan contoh sebagai berikut.

Contoh 4.1.7 Diberikan himpunan $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ merupakan aljabar BCI dengan operasi $*$ pada X didefinisikan pada tabel Cayley sebagai berikut. Misalkan $I = \{0, 1\}$. Akan ditunjukkan bahwa I merupakan ideal pada aljabar

Tabel 4.2 Tabel Cayley Himpunan *X* Terhadap Operasi $*$

$*$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	4
1	1	0	0	0	4
2	2	2	0	0	4
3	3	3	2	0	4
4	4	4	4	4	0

BCI X akan tetapi bukan ideal implikatif pada aljabar BCI X.

Berdasarkan Tabel 4.3, himpunan $I = \{0, 1\}$ merupakan ideal pada aljabar BCI X akan tetapi bukan ideal implikatif. Misalkan $k = 3$, $n = 2$, $r = 0$. Berlaku $((k * n) * n) * (0 * n) \in I$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}(((3 * 2) * 2) * (0 * 2)) * 0 &= (2 * 2) * (0 * 2) \\ &= 0 \in I\end{aligned}$$

dan $r = 0 \in I$. Akan tetapi berlaku $k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))) \in I$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}3 * ((2 * (2 * 3)) * (0 * (0 * (3 * 2)))) &= 2 * ((2 * 0) * 0) \\ &= 2 \notin I\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa untuk setiap ideal implikatif BCI merupakan ideal aljabar BCI, akan tetapi untuk setiap ideal aljabar BCI bukan merupakan ideal implikatif BCI. ■

Teorema 4.1.8 *Setiap ideal implikatif BCI merupakan ideal positif implikatif BCI.*

Bukti. Ambil sebarang I merupakan ideal implikatif BCI. Akan ditunjukkan bahwa I merupakan ideal positif implikatif.

Berdasarkan Teorema 4.1.6, jelas bahwa ideal implikatif BCI, himpunan I merupakan ideal. Dengan kata lain, merujuk pada Proposisi 2.3.9. Akan ditunjukkan bahwa $((k * n) * n) * (0 * n) \in I$ maka $k * n \in I$.

Dipunyai $((k * n) * n) * (0 * n) \in I$, berdasarkan Teorema 4.1.5 maka

$$k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))) \in I;$$

Misalkan $k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))) = k$. Berdasarkan Definisi aljabar BCI 2.1.1 poin (1) yang menyatakan $((k * n) * (k * r)) * (r * n) = 0$, maka diperoleh

$$((k * n) * (k * k)) * (k * n) = 0;$$

Berdasarkan Definisi terurut parsial pada aljabar BCI 2.1.7, diperoleh

$$(k * n) * (k * k) \leq (k * n).$$

Sehingga didapat

$(k * n) * [k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n))))]$

$\leq [(n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))] * n$ Teorema 2.1.9 poin (4), $(k * n) * r = (k * r) * n$

$= ((n * (n * k)) * n) * (0 * (0 * (k * n)))$ Teorema 2.1.9 poin (4), $(k * n) * r = (k * r) * n$

$= ((n * n) * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))$ Definisi 2.1.1 poin (3), $k * k = 0$

$= (0 * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))$ Teorema 2.1.9 poin (4), $(k * n) * r = (k * r) * n$

$= (0 * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))$ Teorema 2.1.9 poin (4), $(k * n) * r = (k * r) * n$

$= [0 * (0 * (0 * (k * n)))] * (n * k)$ Teorema 2.1.9 poin (8), $0 * (0 * (0 * k)) = 0 * k$

$= (0 * (k * n)) * (n * k)$ Teorema 2.1.9 poin (7), $(0 * (k * n)) = 0 \rightarrow (0 * k) * (0 * n) = 0$

$= ((0 * k) * (0 * n)) * (n * k)$ Teorema 2.1.9 poin (4), $(k * n) * r = (k * r) * n$

$= ((0 * (n * k)) * k) * (0 * n)$ Teorema 2.1.9 poin (7), $(0 * (k * n)) = 0 \rightarrow (0 * k) * (0 * n) = 0$

$= (((0 * n) * (0 * k)) * k) * (0 * n)$ Teorema 2.1.9 poin (4), $(k * n) * r = (k * r) * n$

$= (((0 * n) * (0 * k)) * (0 * n)) * k$	Teorema 2.1.9 poin (4), $(k * n) * r = (k * r) * n$
$= (((0 * n) * (0 * n)) * (0 * k)) * k$	Definisi 2.1.1 poin (3), $k * k = 0$
$= (0 * (0 * k)) * k$	Teorema 2.1.9 poin (4), $(k * n) * r = (k * r) * n$
$= (0 * k) * (0 * k)$	Definisi 2.1.1 poin (3), $k * k = 0$
$= 0 \in I$	

Karena $(k * n) * (k * ((n * (n * k))) * (0 * (0 * (k * n)))) \in I$ maka $(k * ((n * (n * k))) * (0 * (0 * (k * n)))) \in I$ dan karena I ideal, jadi $(k * n) \in I$.

■

Terbukti bahwa setiap ideal implikatif BCI merupakan ideal positif implikatif. Akan tetapi kebalikan dari Terorema 4.1.8 belum tentu berlaku. Hal ini dapat ditunjukkan dengan contoh sebagai berikut.

Contoh 4.1.9 Misalkan $I = \{0, 2\}$. Akan ditunjukkan bahwa I merupakan ideal positif implikatif BCI akan tetapi bukan ideal implikatif pada aljabar BCI X.

Berdasarkan Tabel 4.3, himpunan $I = \{0, 2\}$ merupakan ideal positif implikatif BCI akan tetapi bukan ideal implikatif pada aljabar BCI X sebab: untuk $f = 1$,

$n = 3$, $r = 0$, berlaku $((k * r) * r) * (y * r) \in I$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}(((1 * 3) * 3) * (0 * 3)) * 0 &= (0 * 3) * (0 * 3) \\ &= 0 \in I\end{aligned}$$

dan $n = 0 \in I$. Akan tetapi berlaku $k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))) \in I$ maka diperoleh

$$1 * ((3 * (3 * 1)) * (0 * (0 * (1 * 3)))) = 1 * (0 * 0) \qquad = 1 \notin I$$

Jadi terbukti bahwa untuk setiap ideal implikatif BCI merupakan ideal positif implikatif BCI, akan tetapi untuk setiap ideal positif implikatif BCI bukan merupakan ideal implikatif BCI. ■

Teorema 4.1.10 *Setiap ideal implikatif BCI merupakan ideal komutatif BCI.*

Bukti. Diketahui, himpunan I merupakan ideal implikatif BCI. Akan ditunjukkan bahwa I merupakan ideal komutatif BCI.

Berdasarkan Teorema 4.1.6, himpunan I merupakan ideal BCI. Dengan kata lain, berdasarkan Proposisi 2.3.6, akan ditunjukkan jika $k * n \in I$ maka $k * (n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n))) \in I$.

Lebih lanjut, berdasarkan Teorema 4.1.5, himpunan I merupakan ideal implikatif BCI jikan dan hanya jika $((k * n) * n) * (0 * n) \in I$ maka $k * (n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n))) \in I$.

Diperhatikan,

$$
\begin{aligned}
(((k*n)*n)*(0*n))*(k*n) &= (((k*n)*(0*n))*n)*(k*n) && \text{Teorema 2.1.9 poin } (4),\\
& && (k*n)*r=(k*r)*n\\
&= (((k*n)*(0*n))*(k*n))*n && \text{Teorema 2.1.9 poin } (4)\\
& && (k*n)*r=(k*r)*n\\
&= (((k*n)*(k*n))*(0*n))*n && \text{Definisi 2.1.1 poin } (2),\\
& && (k*(k*n))*n=0\\
&= (0*(0*n))*n && \text{Definisi 2.1.1 poin } (2)\\
& && (k*(k*n))*n=0\\
&= 0 \in I
\end{aligned}
$$

Karena I merupakan ideal, sehingga berdasarkan Definisi ideal pada aljabar BCI 2.3.1 maka diperoleh

1. Jelas bahwa $0 \in I$
2. Jika $k*n \in I$ dan $n \in I$ maka $n*k \in I$, sehingga
   Jika $k*n \in I$ maka $(((k*n)*n)*(0*n)) \in I$.
   Berdasarkan Teorema 4.1.5, karena $(((k*n)*n)*(0*n)) \in I$ maka diperoleh
   $k*(n*(n*k))*(0*(0*(k*n))) \in I$

■

Terbukti bahwa setiap ideal implikatif BCI merupakan ideal positif implikatif. Akan tetapi kebalikan dari Terorema 4.1.10 belum tentu berlaku, sebab

Contoh 4.1.11 Misalkan $I = \{0, 1\}$. Akan ditunjukkan bahwa I merupakan ideal komutatif BCI X akan tetapi bukan ideal implikatif pada aljabar BCI X.

Berdasarkan Tabel 4.3, himpunan $I = \{0, 1\}$ merupakan ideal komutatif BCI X akan tetapi bukan ideal implikatif sebab: untuk $k = 3$, $n = 2$, $r = 0$, berlaku $(((k * n) * n) * (0 * n)) \in I$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}(((3 * 2) * 2) * (0 * 2)) * 0 &= (2 * 2) * (0 * 2) \\ &= 0 \in I\end{aligned}$$

dan $r = 0 \in I$. Akan tetapi berlaku $k * (n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n))) \in I$ maka diperoleh

$$3 * ((2 * (2 * 3)) * (0 * (0 * (3 * 2)))) = 2 * ((2 * 0) * 0) \qquad = 2 \notin I$$

Jadi terbukti bahwa untuk setiap ideal implikatif BCI merupakan ideal komutatif BCI, akan tetapi untuk setiap ideal komutatif BCI bukan merupakan ideal implikatif BCI. ■

Teorema 4.1.12 *Diberikan $I \subseteq X$ dan $I \neq \varnothing$. Ideal I merupakan ideal implikatif pada aljabar BCI X jika dan hanya jika memenuhi ideal komutatif pada aljabar BCI X dan ideal positif imflikatif pada aljabar BCI X.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Berdasarkan Teorema 4.1.8, terbukti bahwa ideal implikatif pada aljabar BCI X merupakan ideal positif implikatif pada aljabar BCI X dan berdasarkan Teorema 4.1.10, terbukti bahwa ideal implikatif merupakan ideal komutatif pada aljabar BCI X.

($\Leftarrow$) Ambil sebarang I merupakan ideal positif implikatif BCI X dan ideal komutatif BCI X. Akan ditunjukkan, I merupakan ideal implikatif BCI X. Diperhatikan, berdasarkan Proposisi 2.3.9 poin (2), himpunan I merupakan ideal positif implikatif jika $((k * g) * g) * (0 * g) \in I$ maka $k * g \in I$. Selanjutnya, karena I merupakan ideal komutatif, berdasarkan Proposisi 2.3.6, maka $k * g \in I$ maka $k * ((g * (g * k)) * (0 * (0 * (k * g)))) \in I$. Lebih lanjut, berdasarkan Teorema 4.1.5,maka terbukti bahwa I merupakan ideal implikatif. ■

Definisi 4.1.13 *Diberikan aljabar BCI X dan $I \subseteq X$ dengan $I \neq \emptyset$. Ideal I disebut p-ideal pada X jika memenuhi aksioma sebagai berikut:*

1. $0 \in I$
2. $(k * r) * (n * r) \in I$ *dan* $n \in I$ *berakibat* $k \in I$

Teorema 4.1.14 *Ideal I pada aljabar BCI X merupakan p-ideal jika dan hanya jika memenuhi $(k * r) * (n * r) \in I$ berakibat $k * n \in I$, untuk setiap $k, n, r \in X$.*

Bukti. $(\Rightarrow)$ Diketahui I merupakan p-ideal. Akan ditunjukkan, $(k * r) * (n * r) \in I$ maka $k * n \in I$, untuk setiap $k, n, r \in X$.

Berdasarkan Definisi aljabar BCI 2.1.1 poin (1), diperoleh

$$0 = ((k * r) * (k * n)) * (n * r) \qquad \text{Teorema 2.1.9 poin } (4),$$

$$(k * n) * r = (k * r) * n$$

$$= ((k * r) * (n * r)) * (k * n)$$

Lebih lanjut, diperhatikan

$$((k * n) * (k * n)) * (((k * r) * (n * r)) * (k * n)) = 0 * 0$$

$$= 0 \in I$$

Sehingga berdasarkan Definisi p-ideal 4.1.13 maka $k * n \in I$

($\Leftarrow$) Diketahui $(k * r) * (n * r) \in I$ maka $k * n \in I$. Akan ditunjukkan, himpunan I merupakan p-ideal.

1. Berdasarkan Definisi ideal pada lajaar BCI 2.3.1, jelas bahwa $0 \in I$.
2. Berdasarkan yang diketahui $k * n \in I$ karena I merupakan ideal, maka jelas bahwa $k \in I$.

■

Lemma 4.1.15 *Himpunan I merupakan ideal pada aljabar BCI X, dengan $k \in I$ berakibat* $0 * (0 * k) \in I$.

Bukti. Diketahui himpunan I merupakan aljabar BCI X. Akan ditunjukkan, $k \in I$ berakibat $0 * (0 * k) \in I$.

Diperhatikan, dengan menggunakan Definisi aljabar BCI 2.1.1 poin (3) yang menyatakan $k * k = 0$, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &= (0 * k) * (0 * k) && \text{Teorema 2.1.9 poin } (4) \\
&&& (k * n) * r = (k * r) * n \\
&= (0 * (0 * k)) * k && \text{Definisi 2.1.1 poin } (2) \\
&&& (k * (k * n)) * n = 0 \\
&= 0 \in I
\end{aligned}
$$

Karena $k \in I$ dan $(0 * (0 * k)) * k \in I$. Jadi, berdasarkan Definisi aljabar BCI 2.3.1 yang menyatakan untuk setiap $k \in X$ berlaku $k * n \in I$ dan $n \in I$ berakibat $n \in I$ maka terbukti $0 * (0 * k) \in I$. ■

Proposisi 4.1.16 *Setiap ideal I pada aljabar BCI X adalah p-ideal pada X jika dan hanya jika $0 * (0 * k) \in I$ berakibat $k \in I$.*

Bukti. $(\Rightarrow)$ Diketahui I merupakan p-ideal. Akan ditunjukkan $0*(0*k) \in I$ maka $k \in I$. Diperhatikan, untuk sebarang $k \in X$, diperoleh

$$0 * (0 * k) = (k * k) * (0 * k) \in I$$

Karena $0 \in I$ dan $(k * k) * (0 * k) \in I$ maka $k \in I$.

$(\Leftarrow)$ Diketahui $0 * (0 * k) \in I$ maka $k \in I$. Akan ditunjukkan I merupakan p-ideal.

1. Karena I ideal, berdasarkan Definisi ideal pada aljabar BCI 2.3.1 poin (1), jelas bahwa $0 \in I$.

2. Akan ditunjukkan $(k * r) * (n * r) \in I$ dan $n \in I$ maka $k \in I$.

   Diperhatikan, dengan menggunakan Lemma 4.1.15 yang menyatakan $0 * (0 * p)$, dengan menganalogkan $p = (k * r) * (n * r)$ maka

   $$(k * r) * (n * r) = 0 * (0 * ((k * r) * (n * r)))$$

   Lebih lanjut, dengan merujuk pada Teorema 2.1.9 poin (10) yang menyatakan $0 * (0 * ((k * r) * (n * r))) = (0 * n) * (0 * k)$ maka

   $$\begin{aligned}
   & 0 * (0 * ((k * r) * (n * r)) \\
   &= (0 * (n * r)) * (0 * (k * r)) && \text{Teorema 2.1.9 poin}(4), \\
   & && (k * n) * r = (k * r) * n \\
   &= (0 * (0 * (k * r))) * (n * r) && \text{Teorema 2.1.9 poin}(7), \\
   & && (0 * (k * n)) = 0 \rightarrow (0 * k) * (0 * n) = 0
   \end{aligned}$$

$= (0 * ((0 * k) * (0 * r))) * (n * r)$	Teorema 2.1.9 poin(7),
	$(0 * (k * n)) = 0 \rightarrow$
	$(0 * k) * (0 * n) = 0$
$= ((0 * (0 * k)) * (0 * (0 * r))) * (n * r)$	Teorema 2.1.9 poin(4),
	$(k * n) * r = (k * r) * n$
$= ((0 * (0 * (0 * r))) * ((0 * k))) * (n * r)$	Teorema 2.1.9 poin(8),
	$0 * (0 * (0 * k)) = 0 * k$
$= ((0 * r) * (0 * k)) * (n * r)$	Teorema 2.1.9 poin(4)
	$(k * n) * r = (k * r) * n$
$= ((0 * r) * (n * r)) * (0 * k)$	Teorema 2.1.9 poin(4)
	$(k * n) * r = (k * r) * n$
$= ((0 * (n * r)) * r) * (0 * k)$	Teorema 2.1.9 poin(7)
	$(0 * (k * n)) = 0 \rightarrow$
	$(0 * k) * (0 * n) = 0$
$= (((0 * n) * (0 * r)) * r) * (0 * k)$	Teorema 2.1.9 poin(4)
	$(k * n) * r = (k * r) * n$
$= ((0 * (0 * r) * n) * r) * (0 * k)$	Teorema 2.1.9 poin(4)
	$(k * n) * r = (k * r) * n$
$= (((0 * (0 * r)) * r) * n) * (0 * k)$	Teorema 2.1.9 poin(4)
	$(k * n) * r = (k * r) * n$

$= (((0 * r) * (0 * r)) * n) * (0 * k)$ Definisi 2.1.1 poin(3)

$k * k = 0$

$= (0 * n) * (0 * k)$ Teorema 2.1.9 poin(10)

$0 * (0 * ((k * r) * (n * r))) =$

$(0 * n) * (0 * k)$

$= 0 * (0 * (k * n)) \in I$

Berdasarkan Teorema 2.1.9 poin (5) yang menyatakan $k * n = 0 \rightarrow (r * n) * (r * k) = 0$, sehingga diperoleh $0 * (0 * (k * n)) = 0 * (0 * ((k * r) * (n * r)))$, dengan $0 * (0 * (k * n)) = 0 \in I$ dan $0 * (0 * ((k * r) * (n * r))) \in I$. Berdasarkan diketahui, berarti $k, n \in I$. Karena $(k * r) * (n * r) \in I$ dan $k * n \in I$. Berdasarkan Teorema 4.1.14, jadi terbukti bahwa I merupakan p-ideal.

■

Teorema 4.1.17 *Setiap p-ideal merupakan ideal implikatif pada aljabar BCI.*

Bukti. Ambil sebarang I merupakan p-ideal. Akan ditunjukkan I merupakan ideal implikatif. Berdasarkan Teorema 4.1.5, akan ditunjukkan bahwa $((k * n) * n) * (0 * n) \in I$ maka $k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))) \in I$. Sehingga dipunyai $((k * n) * n) * (0 * n) \in I$.

$$0 * [0 * (k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))))]$$

$$= 0 * [(0 * k) * (((0 * n) * (0 * (n * k))) * (0 * (0 * (0 * (k * n)))))]$$

Teorema 2.1.9 poin (7)
$(0 * (k * n)) = 0 \rightarrow$
$(0 * k) * (0 * n) = 0$

$$= 0 * [(0 * k) * (((0 * n) * ((0 * n) * (0 * k)))) * (0 * (0 * (0 * (k * n)))))]$$

Teorema 2.1.9 poin (8)
$0 * (0 * (0 * k)) =$
$0 * k$

$$= 0 * [(0 * k) * (((0 * n) * ((0 * n) * (0 * k)))) * (0 * (k * n))]$$

Teorema 2.1.9 poin (4)
$(k * n) * r =$
$(k * r) * n$

$$= 0 * [(0 * k) * (((0 * (0 * n) * (0 * k)) * n) * (0 * (k * n))]$$

Teorema 2.1.9 poin (7)
$(0 * (k * n)) = 0 \rightarrow$
$(0 * k) * (0 * n) = 0$

$$= 0 * [(0 * k) * (((0 * (0 * n) * (0 * (0 * k)))) * n) * (0 * (k * n))]$$

Teorema 2.1.9 poin (7)
$(0 * (k * n)) = 0 \rightarrow$
$(0 * k) * (0 * n) = 0$

$$= 0 * [(0 * k) * ((((0 * (0 * n) * n) * (0 * (0 * k)))) * (0 * (k * n))]$$

Teorema 2.1.9 poin (4)
$(k * n) * r =$
$(k * r) * n$

$= 0 * [(0 * k) * (((0 * n) * (0 * n))) * (0 * (0 * k)))) * (0 * (k * n))]$ Teorema 2.1.9 poin (4) $(k * n) * r =$ $(k * r) * n$

$= 0 * [(0 * k) * (0 * (0 * (0 * k))) * (0 * (k * n))]$ Teorema 2.1.9 poin (8) $0 * (0 * (0 * k)) =$ $0 * k$

$= 0 * [(0 * k) * ((0 * k) * (0 * (k * n)))]$ Teorema 2.1.9 poin (7) $(0 * (k * n)) = 0 \rightarrow$ $(0 * k) * (0 * n) = 0$

$= 0 * [(0 * k) * ((0 * k) * ((0 * k) * (0 * n)))]$ Teorema 2.1.9 poin (4) $(k * n) * r =$ $(k * r) * n$

$= 0 * [(0 * k) * ((0 * ((0 * k) * (0 * n))) * k)]$ Teorema 2.1.9 poin (7) $(0 * (k * n)) = 0 \rightarrow$ $(0 * k) * (0 * n) = 0$

$= 0 * [(0 * k) * ((0 * (0 * k) * (0 * (0 * n))) * k)]$ Teorema 2.1.9 poin (4) $(k * n) * r =$ $(k * r) * n$

$= 0 * [(0 * k) * ((0 * (0 * k) * k) * (0 * (0 * n)))]$ Teorema 2.1.9 poin (4) $(k * n) * r =$ $(k * r) * n$

$= 0 * [(0 * k) * ((0 * k) * (0 * k)) * (0 * (0 * n))]$ Definisi 2.1.1 poin (3)

$k * k = 0$

$= 0 * [(0 * k) * (0 * (0 * (0 * n)))]$ Teorema 2.1.9 poin (8)

$0 * (0 * (0 * k)) =$

$0 * k$

$= 0 * ((0 * k) * (0 * n))$ Teorema 2.1.9 poin (8)

$0 * (0 * (0 * k)) =$

$0 * k$

$= 0 * (0 * (k * n))$

dan

$[0 * (0 * (k * n))] * [((k * n) * n) * (0 * n)]$

$= [0 * (((k * n) * n) * (0 * n))] * (0 * (k * n))$ Teorema 2.1.9 poin (7)

$(0 * (k * n)) = 0 \rightarrow$

$(0 * k) * (0 * n) = 0$

$= [(0 * (((k * n)) * (0 * n)) * (0 * n))] * (0 * (k * n))$ Teorema 2.1.9 poin (7)

$(0 * (k * n)) = 0 \rightarrow$

$(0 * k) * (0 * n) = 0$

$= [(0 * (((k * n)) * (0 * n)) * (0 * (0 * n)))] * (0 * (k * n))$ Teorema 2.1.9 poin (4)

$(k * n) * r =$

$(k * r) * n$

$= [(0 * (((k * n)) * (0 * (k * n)) * (0 * n))) * (0 * (0 * n))]$ Definisi 2.1.1 poin (3)

$k * k = 0$

$= (0 * (0 * n)) * (0 * (0 * n))$ Definisi 2.1.1 poin (3)

$k * k = 0$

$= 0 \in I$

Sehingga dipunyai $0 * [0 * (k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n)))))] \in I$. Berdasarkan Proposisi 4.1.16 didapatkan $(k * ((n * (n * k)) * (0 * (0 * (k * n))))) \in I$. Sehingga terbukti bahwa I merupakan ideal implikatif BCI.

Akan tetapi kebalikan dari Terorema 4.1.17 belum tentu berlaku. Hal ini dapat ditunjukkan dengan contoh sebagai berikut. ■

Contoh 4.1.18 Diberikan himpunan $X = \{0, 1, 2, 3\}$ merupakan aljabar BCI dengan operasi $*$ pada X didefinisikan pada tabel Cayley sebagai berikut.

Tabel 4.3 Tabel Cayley Himpunan *X* Terhadap Operasi $*$

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	3
1	1	0	1	3
2	2	2	0	3
3	3	3	3	0

Misalkan $I = \{0, 1\}$. Akan ditunjukkan bahwa I merupakan ideal pada aljabar BCI X tetapi bukan p-ideal.

Berdasarkan Tabel 4.3, himpunan $I = \{0, 1\}$ merupakan ideal implikatif akan tetapi bukan p-ideal sebab: untuk $k = 0$, berlaku $0 * (0 * k) \in I$ maka $k \in I$.

Sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
(0 * (0 * 2)) &= 0 * 0 \\
&= 0 \in I
\end{aligned}
$$

Akan tetapi

$$k = 2 \notin I$$

Jadi terbukti bahwa untuk setiap p-ideal merupakan ideal implikatif pada aljabar BCI, akan tetapi untuk setiap ideal implikatif pada aljabar BCI bukan merupakan p-ideal. ■

4.2. Integrasi Keilmuan dalam Islam

Pada subbab ini akan dibahas mengenai integrasi keilmuan antara konsep suatu pembuktian kebenaran dalam suatu definisi aljabar dengan ayat-ayat al-Qur'an, hadis maupun kaidah-kaidah Islam.

Dalam ilmu aljabar, pernyataan yang berlaku dalam sebuah kalimat di dalam aljabar dapat bernilai benar atau salah, akan tetapi tidak dapat bernilai benar dan salah. Sehingga perlu dilakukannya suatu pembuktian dari beberapa teorema maupun proposisi yang berlaku dalam suatu definisi aljabar BCI. Seperti pada kaidah dalam kitab "*Risalah gawa-id* Fikih" Dalam kitab tersebut menerangkan mengenai suatu keputusan jika terdapat pertentangan antara kebenaran dan kesalahan. Kaidah tersebut berbunyi:

اَلْحَقُّ بِلاَنِظَامٍ يَغْلِبُهُ الْبَاطِلُ بِالنِّظَامِ

Artinya: “Kebenaran yang tanpa diikuti keteraturan akan dikalahkan dengan kebatilan yang diikuti keterturan”.

Pada kaidah tersebut menjelaskan bahwa suatu kebenaran jika tidak didukung oleh pembuktian maka kebenaran tersebut seperti percuma. Hal tersebut analog dengan suatu teori dalam ilmu aljabar. Dalam aljabar jika terdapat suatu teorema maka harus dilakukannya suatu pembuktian dengan menggunakan teorema maupun proposisi yang mendukung definisi tersebut. Jika teorema tersebut tidak didukung oleh sebuah teorema dan proposisi yang mendasari pembuktian tersebut, maka suatu teorema tersebut tidak dapat dijadikan sebagai sesuatu yang konkret atau dengan kata lain teorema tersebut tidak akan menjadi suatu pernyataan yang akan digunakan untuk umum.

Salah satu contohnya yaitu jika akan dibuktikannya suatu sifat atau teorema yang menyatakan “Himpunan I merupakan ideal implikatif aljabar BCI jika memenuhi keduanya yaitu I merupakan ideal positif implikatif aljabar BCI dan I merupakan ideal komutatif aljabar BCI”. Pernyataan tersebut harus dibuktikan yaitu dengan cara melakukan studi pustaka yang berhubungan dengan aljabar BCI, ideal pada aljabar BCI, ideal positif implikatif pada aljabar BCI dan ideal komutatif pada aljabar BCI. Sehingga setelah ditemukannya penunjang dari penyataan tersebut mulailah dilakukannya suatu pembuktian. Sehingga dari pembuktian tersebut didapatkan hasil bahwa benar himpunan I merupakan ideal positif implikatif pada aljabar BCI dan ideal komutatif pada aljabar BCI bisa disebut dengan ideal implikatif pada aljabar BCI. Sehingga dari suatu pernyataan tersebut yang dapat dibuktikan maka teorema tersebut dapat belaku untuk umum dengan kata lain hasil yang didapatkan yaitu sebuah kebenaran.

Dan dari hasil tersebut, suatu kebenaran itu dapat dijadikan sebagai sumber atau ilmu baru yang dapat membantu banyak orang untuk mengembangkan suatu ilmu yang lebih luas. Hal tersebut dapat dijadikan acuan oleh banyak orang seperti perintah Rasulullah Saw. kepada umatnya yaitu:

خَيْرُ النَّاسِ أَنْفَعُهُمْ لِلنَّاسِ

Artinya: "Sebaik-baik manusia adalah yang paling bermanfaat bagi orang lain".

Hadis tersebut diriwayatkan oleh at-Thabrani. Hadis tersebut menjelaskan menjadi pribadi yang bermanfaat yaitu salah satu karakter yang harus dimiliki oleh seorang Muslim. Seorang muslim lebih diperintahkan untuk memberikan manfaat kepada dirinya dan dapat bermanfaat untuk orang lain. Karena jika dapat memberikan manfaat kepada orang lain maka semuanya akan kembali untuk kebaikan diri sendiri.Analog pada permasalahan ini yaitu ketika telah dibuktikannya suatu teorema maupun proposisi dan telah dijamin suatu kebenarannya maka teorema maupun proposisi tersebut bermanfaat bagi orang lain yang digunakanj untuk acuan dari ilmu yang akan dikembangkan lagi. Sebagaimana dalam sabda Rasulullah yaitu:

حَدَّ ثَنَا يَحْيَى بْنُ بُكَيْرٍ حَدَّثَنَا اللَّيْثُ عَنْ عُقَيْلٍ عَنْ ابْنِ شِهَابٍ أَنَّ سَالِمًا أَخْبَرَهُ أَنَّ عَبْدَ اللَّهِ بْنَ عُمَرَ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُمَا أَخْبَرَهُ أَنَّ رَسُولَ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ قَالَ الْمُسْلِمُ أَخُو الْمُسْلِمِ لَا يَظْلِمُهُ وَلَا يُسْلِمُهُ وَ مَنْ كَانَ فِي حَاجَةِ أَخِيهِ كَانَ اللَّهُ فِي حَاجَتِهِ وَمَنْ فَرَّجَ عَنْ مُسْلِمٍ كُرْبَةً فَرَّجَ اللَّهُ عَنْهُ

كُرْبَةً مِنْ كُرُبَاتِ يَوْمِ الْقِيَامَةِ وَمَنْ سَتَرَ مُسْلِمًا سَتَرَهُ اللَّهُ يَوْمَ الْقِيَامَةِ

Artinya: "Seorang muslim adalah saudara bagi muslim lainnya, dia tidak mendhaliminya dan tidak memberikannya untuk disakiti. Siapa yang membantu kebutuhan saudaranya maka Allah akan membantu kebutuhannya. Siapa yang menghilangkan satu kesusahan seorang muslim, maka Allah menghilangkan satu kesusahan baginya dari kesusahan-kesusahan hari kiamat. Dan siapa yang menutupi (aib) seorang muslim maka Allah akan menutup aibnya pada hari kiamat".

Maksud dari sabda rasulullah tersebut adalah siapa yang membantu kebutuhan saudaranya maka Allah akan memenuhi kebutuhannya. Pada permasalahan ini membantu saudara tidak selalu soal uang, membantu tentang ilmu juga bisa. Contohnya yaitu ketika telah mdibuktikannya suatu teorema maka bisa terjadi bahwa teorema tersebut memenuhi kebutuhan orang lain atau dengan kata lain teorema tersebut dapat menunjang penelitian mereka.

Dan terdapat pula kaidah pada kitab "*Risalah Qawa-id* Fikih" yang bunyinya:

اَلْأَمْرُ إِذَا ضَاقَ اتَّسَعَ

Artinya: "Sesuatu itu apabila sempit, maka menjadi luas".

Maksud dari kaidah tersebut adalah analog pada ilmu matematika yaitu sesuatu yang sempit menerangkan mengenai aljabar BCI kemudian dikembangkan oleh peneliti-peneliti yang lain dengan memanfaatkan teorema maupun proposisi yang berkaitan dengan aljabar BCI sehingga muncullah perkembangannya seperti ideal dari aljabar BCI, aljabar BCI komutatif, aljabar BCI positif implikatif, aljabar BCI implikatif dan masih banyak lagi perkembangan dari aljabar BCI.

Sehingga dari ayat al-Qur'an dan Hadis maka dapat disimpulkan, bahwa apa yang sudah dikerjakan dan menghasilkan suatu ilmu yang baru dan dijamin suatu kebenarannya maka ilmu tersebut akan sangat bermanfaat untuk banyak orang. Sehingga terciptanya ilmu-ilmu baru yang dapat membantu banyak orang.

BAB V

PENUTUP

Dalam pembahasan ini merupakan pembahasan terakhir yang memperlihatkan mengenai simpulan dan saran yang didapatkan dari pembahasan sebelumnya.

5.1. Simpulan

Berdasarkan pemaparan mengenai sifat-sifat yang terdapat dalam konsep aljabar BCI yaitu ideal dan ideal implikatif pada aljabar BCI, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut.
Sifat-sifat dari Ideal implikatif pada aljabar BCI sebagai berikut.

1. Setiap ideal implikatif BCI merupakan ideal.
2. Setiap ideal implikatif BCI merupakan ideal positif implikatif BCI.
3. Setiap ideal implikatif BCI merupakan ideal komutatif BCI.
4. Ideal I merupakn ideal Implikatif jika dan hanya jika memenuhi ideal komutatif dan ideal positif implikatif
5. Setiap ideal implikatif BCI merupakan p-ideal.

5.2. Saran

Setelah membahas mengenai sifat-sifat Ideal implikatif pada aljabar BCI, terdapat saran untuk dilakukannya penelitian lebih lanjut mengenai karakteristik ideal implikatif pada aljabar BCI.

DAFTAR PUSTAKA

Abdurrahman, M. Yusuf, (2013). *Cara Belajar Ilmuwan-Ilmuwan Muslim Pencetus Sains-Sains Canggih Modern*. Yogyakarta : Diva Press

Andika, F. R.,2017 *Ideal-Ideal Semu Pada Aljabar-BCI Semu*

Arai, Y. Iseki, K. dan Tanaka, S., (1966), *Caharacterizations of BCI, BCK-Algebras*, Proceedings of The Japan Academy, 42(2): 105-107.

Bae Jun Y, Long Xin X, dan Hwan Roh E.,(1998) *A Class of algebras Related To BCI Algebras And Semigroups*. Soochow journal of mathematics, 24(4), 309-321.

Handayani,D. S. I. P.,2009 *Menentukan Bilangan Kebebasan Titik Dan Sisi Pada Graf Komplit* K_n *Dan Graf Bipartisi Komplit* $K_(m, n)$ $m, n \in N$

Hao, J dan Li, C.X. (2004) *On Ideal of An Ideal in BCI-Algebra*. *Scientiae Mathematicae Japonicae*,(10):493-500

Huang, Y. (2003). *On Positive and Weakly Positive Implicative BCI-Algebras*. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 26(4), 575–582.

Huang Y., 2005 *On Implicative BCI-Algebras*, Proc. Jpn. Acad. (42) 26–29

J. Meng, Y. Xu, dan Y. L. Liu, (2007) *BCI-Implcative ideal of BCI-Algebras*. *Information Sciences*, 177: 4987-4996

J. Meng,(1993) *An ideal characterization of commutative BCI-algebras*, Pusan Kyongnam Math. J. 9 (1) 1–6

J. Meng,dan Y. L. Liu, (2000) *Sub-Implicative ideals and Sub-Commutative ideals of BCI-Algebras*. *Soochow Journal of Mathematics*, 26(4): 441-453

K. Iseki,(1966) *An algebra related with a propositional calculus*, Proc. Jpn. Acad. (42) 26–29

Kurniawati, B. S.,(2017) *on Implicative Bci-Algebras*. *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 63(3), 395–403.

M.A. Chaudhry, (2002) *On Branchwise Implicative BCI-Algebras*. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 29(4): 417-425

Mestika, Z. (2004), *Metode Penelitian Kepustakaan*. Yayasan Obor Indonesia, Jakarta.

Nada, B.,2008 *Menentukan Pelabelan Total Sisi Ajaib Dan Konstanta Ajaib Terkecil Pada Graf Sikel,Lintasan Dan Star*

Saeid, A.B. (2010) *Fantastic Ideals in BCI-Algebras*. *World Applied Sciences Journal*, 8(5):550-554

Setyono, A. ,(2013). *Mathemagics: Cara Jenius Belajar Belajar Matematika*. Jakarta : Gramedia pustaka Utama

Komariah, A. (2019). *Metodologi Penelitian Kualitatif.*

Tiande, Lei, dan Changchang, Xi,(1985) *P-Radical in BCI-Algebras*. Math. Japonica, 30(4), 511-517

Y.L. Liu, X.H. Zhang,(1994), *Characterization of weakly positive implicative BCI-algebras*, J. Hanzhong Teachers College (Natural) (1) 4–8

Yang, K.S dan Ahn, S.S. (2014) *Union Soft Q-ideal in BCI-Algebras*, *Applied Mathematical Sciences*. 8(58):2859-2869

Yusrina,(2018) *Sifat - Sifat Gabungan Ideal Sub-Implikatif Halus Dalam Aljabar BCI*