PSEUDO Q-ALJABAR

SKRIPSI

Disusun Oleh
SITI KHOLIFAH
H72217040

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL
SURABAYA

2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini,

Nama	:	SITI KHOLIFAH
NIM	:	H72217040
Program Studi	:	Matematika
Angkatan	:	2017

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul " PSEUDO Q-ALJABAR ". Apabila suatu saat nanti terbukti saya melakukan tindakan plagiat, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian pernyataan keaslian ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 22 Desember 2021

Yang menyatakan,

METERAI TEMPEL

ECD2CAJX651894412

SITI KHOLIFAH

NIM. H72217040

LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

Skripsi oleh

Nama	:	SITI KHOLIFAH
NIM	:	H72217040
Judul Skripsi	:	PSEUDO Q-ALJABAR

telah diperiksa dan disetujui untuk diujikan.

Surabaya, 22 Desember 2021

Pembimbing I	Pembimbing II
Wika Dianita Utami,M.Sc	Lutfi Hakim, M.Ag
NIP. 199206102018012003	NIP. 197312252006041001

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika
UIN Sunan Ampel Surabaya

Ari Fatani, M.Kom
NIP. 198701272014031002

PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI

Skripsi oleh

Nama	:	SITI KHOLIFAH
NIM	:	H72217040
Judul Skripsi	:	PSEUDO Q-ALJABAR

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji
pada tanggal 12 Januari 2022

Mengesahkan,
Tim Penguji

Penguji I	Penguji II
Dr. Moh. Hafiyusholeh, M.Si, M.PMat	Putroue Keumala Intan, M.Si
NIP. 198002042014031001	NIP. 1198805282018012001

Penguji III	Penguji IV
Wika Dianita Utami,M.Sc	Lutfi Hakim, M.Ag
NIP. 199206102018012003	NIP. 197312252006041001

Mengetahui,
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Ampel Surabaya

Prof. Dr. Hj. Evi Fatimatur Rusydiyah, M.Ag
NIP. 197312272005012003

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL SURABAYA
PERPUSTAKAAN
Jl. Jend. A. Yani 117 Surabaya 60237 Telp. 031-8431972 Fax.031-8413300
E-Mail: perpus@uinsby.ac.id

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika UIN Sunan Ampel Surabaya, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : SITI KHOLIFAH
NIM : H72217040
Fakultas/Jurusan : SAINTEK / MATEMATIKA
E-mail address : cholifah.faiha8070@gmal.com

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah :
☑ Skripsi ☐ Tesis ☐ Desertasi ☐ Lain-lain (.....)
yang berjudul :

PSEUDO Q-ALJABAR

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan Hak Bebas Royalti Non-Ekslusif ini Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (database), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di Internet atau media lain secara ***fulltext*** untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Surabaya, 12 Januari 2022

Penulis

(SITI KHOLIFAH)
nama terang dan tanda tangan

ABSTRAK

PSEUDO Q-ALJABAR

Struktur aljabar merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi yang memenuhi berbagai aksioma tertentu. Salah satu struktur aljabar adalah pseudo BCK-aljabar. Pseudo BCK-aljabar merupakan BCK-aljabar yang dilengkapi dengan relasi terurut parsial $\leq$, operasi biner $*$ dan $\circ$ serta elemen khusus 0 yang memenuhi beberapa aksioma. Selain pseudo BCK-aljabar, terdapat pseudo BCI-aljabar dan BCH-aljabar. Secara konsep, munculnya pseudo BCI-aljabar dan BCH-aljabar termotivasi oleh pseudo BCK-aljabar. Dimana sebelum munculnya pseudo BCI-aljabar dan BCH-aljabar, struktur aljabar yaitu BCI-aljabar merupakan perumuman dari BCK-aljabar dan BCH-aljabar merupakan perumuman dari BCI-aljabar. Konsep perumuman juga diberlakukan pada BCH-aljabar, dimana BCH-aljabar diperumumum dan dikenal dengan Q-aljabar. Dengan tujuan menunjukan definisi dan sifat dari paeudo Q-aljabar serta menunjukan sifat hubungan pseudo Q-aljabar terhadap pseudo BCI-aljabar dan pseudo BCH-aljabar. Sehingga peneltian ini menghasikan konsep mengenai pseudo Q-aljabar dan akibat yang akan ditimbulkan dari bagaimana sifat-sifat yang ada pada pseudo Q-aljabar yaitu (1) $x * x = x \circ x = 0$; (2) $x * 0 = x \circ 0 = x$; (3) $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$. serta hubungan antara pseudo Q-aljabar terhadap pseudo BCI-aljabar dengan memenuhi sifat (i) Pseudo BCI-aljabar poin 2 yaitu $x(x \circ y) \leq y, x \circ (x * y) \leq y$; (ii) Pseudo BCI-aljabar poin 3 yaitu $x \leq x$ dan hubungan antara pseudo Q-aljabar terhadap pseudo BCH-aljabar dengan memenuhi sifat dari pseudo Q-aljabar yaitu (i) $x * x = x \circ x = 0$; (ii) $x * 0 = x = x \circ x$; (iii) $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$.

Kata kunci: Pseudo BCK-aljabar, Pseudo BCI-aljabar, Pseudo BCH-aljabar, dan Pseudo Q-aljabar

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

ABSTRACT

PSEUDO Q-ALGEBRA

An algebraic structure is a non-empty set equipped with operations that satisfy certain axioms. One of the algebraic structures is pseudo BCK-algebra. Pseudo BCK-algebra is a BCK-algebra that is equipped with a partially ordered relation $\leq$, binary operations $*$ and $\circ$ and special element 0 which satisfies several axioms. In addition to pseudo BCK-algebra, there are pseudo BCI-algebra and BCH-algebra. Conceptually, the emergence of pseudo BCI-algebra and BCH-algebra is motivated by pseudo BCK-algebra. Where before the emergence of pseudo BCI-algebra and BCH-algebra, the algebraic structure, namely BCI-algebra is a generalization of BCK-algebra and BCH-algebra is a generalization of BCI-algebra. The generalization concept is also applied to BCH-algebra, where BCH-algebra is generalized and known as Q-algebra. With the aim of showing the definition and nature of paeudo Q-algebra and showing the nature of the relationship between pseudo Q-algebra and pseudo BCI-algebra and pseudo BCH-algebra. So that this research produces the concept of pseudo Q-algebra and the consequences that will arise from how the properties that exist in pseudo Q-algebra are (1) $x * x = x \circ x = 0$; (2) $x * 0 = x \circ 0 = x$; (3) $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$. and the relationship between pseudo Q-algebra and pseudo BCI-algebra by fulfilling the properties of (i) Pseudo BCI-algebra point 2, namely $x(x \circ y) \leq y, x \circ (x * y) \leq y$; (ii) Pseudo BCI-algebra point 3, namely $x \leq x$ and the relationship between pseudo Q-algebra and pseudo BCH-algebra by fulfilling the properties of pseudo Q-algebra, namely (i) $x * x = x \circ x = 0$; (ii) $x * 0 = x = x \circ x$; (iii) $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$.

Keywords: Pseudo BCK-algebra, Pseudo BCI-algebra, Pseudo BCH-algebra, and Pseudo Q-algebra

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL . . . . . **i**
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN . . . . . **ii**
LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING . . . . . **iii**
PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI . . . . . **iv**
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI . . . . . **v**
ABSTRAK . . . . . **vi**
ABSTRACT . . . . . **vii**
DAFTAR ISI . . . . . **viii**
DAFTAR TABEL . . . . . **x**
DAFTAR LAMBANG . . . . . **xi**
PENDAHULUAN **1**
1.1. Latar Belakang Masalah 1
1.2. Rumusan Masalah 4
1.3. Tujuan Penelitian 5
1.4. Manfaat Penelitian 5
1.5. Sistematika Penulisan 5
II TINJAUAN PUSTAKA **7**
2.1. Q-aljabar 7
2.2. Pseudo BCI-Aljabar 13
2.3. Pseudo BCH-Aljabar 25
2.4. Kajian Aljabar Dalam Islam 31
III METODE PENELITIAN **34**
3.1. Jenis dan Sumber Data 34
3.2. Metode Pengumpulan Data 34
3.3. Tahapan Penelitian 35
IV HASIL DAN PEMBAHASAN **36**
4.1. Pseudo Q-aljabar 36

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

4.2. Hubungan pseudo Q-aljabar terhadap pseudo BCI-aljabar dan pseudo BCH-aljabar 45
4.3. Integrasi Keilmuan 54
V PENUTUP 56
5.1. Simpulan 56
5.2. Saran 57
DAFTAR PUSTAKA 58

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

DAFTAR TABEL

2.1 Tabel cayley operasi $*$ pada himpunan A 7

2.2 Tabel cayley operasi $*$ pada Z_4 9

2.3 Tabel cayley operasi $*$ pada Z_4 10

4.1 Tabel cayley operasi $*$ pada A 37

4.2 Tabel cayley operasi $\circ$ pada A 37

4.3 Tabel cayley operasi $*$ 38

4.4 Tabel cayley operasi $\circ$ 38

4.5 Tabel cayley operasi $*$ 46

4.6 Tabel cayley operasi $\circ$ 47

4.7 Tabel cayley operasi $*$ 49

4.8 Tabel cayley operasi $\circ$ 49

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

DAFTAR LAMBANG

$\in$: elemen atau anggota

$\leq$: kurang dari sama dengan

$*$: operasi biner star

$\circ$: operasi biner circle

$\bullet$: operasi biner dot

$\neq$: tidak sama dengan

$\emptyset$: himpunan tidak kosong

$\forall$: untuk setiap

$\Rightarrow$: jika maka

$\Leftrightarrow$: jika dan hanya jika

$\blacksquare$: akhir suatu bukti

$\mathbb{Z}$: himpunan semua bilangan bulat

a^{-1} : invers

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Matematika yaitu suatu ilmu dasar yang memiliki peran penting dalam kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi, serta sebagai alat bantu maupun perkembangan matematika sendiri (Siagian, 2016). Perkembangan bidang ilmu pengetahuan dan teknologi juga dicantumkan dalam Al-Qur'an surah Ar-Rum ayat 22.

وَمِنْ ءَايَٰتِهِۦ خَلْقُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفُ أَلْسِنَتِكُمْ
وَأَلْوَٰنِكُمْ ۚ إِنَّ فِى ذَٰلِكَ لَءَايَٰتٍ لِّلْعَٰلِمِينَ ﴿٢٢﴾

Dalam surat Ar-Rum ayat 22, Allah berfirman yang artinya: "Dan diantara tanda-tanda kebesaran-Nya ialah pencipta langit dan bumi dan perbedaan bahasamu serta warna kulitmu. Sungguh, pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang mengetahui"(QS. Ar-Rum:22).

Dalam ayat diatas menjelaskan dasarnya, matematika sebagai ilmu terstruktur serta sistematik yang mengandung makna bahwa konsep dan prinsip dalam matematika saling berhubungan antara yang satu dengan yang lainnya. Matematika mempunyai beberapa sub keilmuan, antara lain kalkulus, aljabar, geometri dan lainnya (Siagian, 2016).

Aljabar adalah salah satu bagian dari bilangan matematika yang di

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

dalamnya terdapat teori bilangan, geometri dan analisis. Analisis merupakan proses pemecahan suatu masalah komplek menjadi bagian-bagian kecil sehingga lebih mudah dipahami seperti dicantumkan dalam Al-Qur'an surah Al-Insyirah ayat 5 yang berbunyi:

فَإِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ۝٥

Yang artinya: "Maka sesungguhnya sesudah kesulitan ada kemudahan" (QS. Al-Insyirah).

Berdasarkan pengertian dari analisis yaitu proses pemecahan suatu masalah komplek menjadi bagian-bagian kecil sehingga lebih mudah dipahami, sehingga bagian-bagian kecil termasuk memahami dasar dari matematika salah satunya adalah himpunan.

Secara teori, himpunan merupakan suatu kumpulan dari objek yang dapat teridentifikasi secara jelas. Himpunan secara umum dilambangkan dengan huruf kapital miring dan anggotanya dengan huruf kecil miring. Grupoid merupakan himpunan dengan satu operasi biner. Grupoid yang memenuhi aksioma asosiatif, memiliki identitas dan elemen invers disebut grup. Lebih lanjut, grup yang memiliki sifat komutatif disebut sebagai grup komutatif atau grup abelian. K-aljabar juga merupakan struktur aljabar. K-aljabar dibangun atas grup dengan menggunakan operasi biner $\bullet$ pada grup $(G, *)$ serta aksioma-aksioma yang melengkapi. K-aljabar memiliki dua kelas berdasarkan grup dan pembangunnya, yaitu Q-aljabar serta B-aljabar. K-aljabar yang dibangun dari grup komutatif maka disebut dengan Q-aljabar, sedangkan K-aljabar yang dibangun dari grup saja

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

disebut dengan B-aljabar. Pada Q-aljabar juga dibagi menjadi beberapa kelas, antara lain BCH-aljabar, BCI-aljabar, dan BCK-aljabar (Dar, 2006).

Y. Imai dan K. Iséki (1966) memperkenalkan dua kelas aljabar abstrak yaitu BCK-aljabar dan BCI-aljabar. BCK-aljabar merupakan suatu himpunan tak kosong A dilengkapi operasi biner $*$ dan 0 sebagai elemen khusus yang memenuhi aksioma (1)$((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$; (2) $(x * (x * y)) * y = 0$; (3) $x * x = 0$; (4) $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$; (5) $0 * x = 0$ untuk setiap $x, y, z \in A$. BCK-aljabar diperumum menjadi BCI-aljabar. BCI-aljabar yaitu himpunan tak kosong A dengan operasi biner $*$ dan 0 sebagai elemen khusus yang memenuhi beberapa aksioma diantarnya (1) $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$; (2) $(x * (x * y)) * y = 0$; (3) $x * x = 0$; (4) $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ sehingga $x = y$ untuk setiap $x, y, z \in A$.

Lebih lanjut QP Hu dan X. Li (1983) telah menunjukkan subkelas BCI-aljabar yang diperumum menjadi kelas BCH-aljabar. BCH-aljabar merupakan suatu himpunan tak kosong A dengan operasi biner $*$ dan 0 sebagai elemen khusus yang memenuhi aksioma (1) $x * x = 0$; (2) jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x = y$; (3) $(x * y) * z = (x * z) * y$ untuk setiap $x, y, z \in A$. S. Ahn dan HS Kim (1999) memperkenalkan gagasan baru yang memperumum himpunan BCH-aljabar yang disebut Q-aljabar, sedangkan Q-aljabar merupakan suatu himpunan tak kosong A dengan operasi biner $*$ dan 0 sebagai elemen khusus yang memenuhi beberapa aksioma diantarnya (1)$x * x = 0$; (2) $x * 0 = x$; (3) $(x * y) * z = (x * z) * y$ untuk setiap $x, y, z \in A$.

Dilain pihak, pada BCK-aljabar dapat didefinisikan relasi terurut parsial yaitu $\leq$. Dimana himpunan BCK-aljabar A yang dilengkapi relasi terurut parsial $\leq$ memunculkan konsep pseudo BCK-aljabar. Pseudo BCK-aljabar adalah suatu aljabar $(A, \leq, *, \circ, 0)$ dengan himpunan tak kosong A terdapat $\leq$ merupakan relasi

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

biner, sedangkan $*$ dan $\circ$ disebut operasi biner, dan 0 merupakan elemen khusus. Jika memenuhi beberapa aksioma (1) $(x * z) \circ (x * y) \leq y * z, (x \circ z) * (x \circ y) \leq y \circ z$; (2) $x \circ (x * z) \leq z, x * (x \circ y) \leq y$; (3) $x \leq x$; (4) $0 \leq x$; (5) $x \leq z, z \leq x$, maka $x = z$; (6) $x \leq y \Leftrightarrow x * z = 0 \Leftrightarrow x \circ z = 0$.

Karena BCI-aljabar dan BCH-aljabar merupakan perumuman dari BCK-aljabar, akibatnya pada BCI-aljabar dan BCH-aljabar juga dapat didefinisikan relasi terurut parsial $\leq$ yang disebut sebagai pseudo. Pseudo BCI-aljabar adalah struktur $(A, \leq, *, \circ, 0)$, dimana $\leq$ adalah relasi biner pada himpunan A, $*$ dan $\circ$ adalah operasi biner pada A dan 0 adalah elemen khusus A, yang memenuhi aksioma (1) $(x * y) \circ (x * z) \leq z * y, (x \circ y) * (x \circ z) \leq z \circ y$; (2) $x * (x \circ y) \leq y, x \circ (x * y) \leq y$; (3) $x \leq x$; (4) $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$; (5) $x \leq y \Leftrightarrow x * y = 0 \Leftrightarrow x \circ y = 0$.. Kemudian pseudo BCH-aljabar adalah aljabar $A = (A, *, \circ, 0)$ yang memenuhi aksioma (1) $x * x = x \circ x = 0$; (2) $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$; (3) $x * y = y \circ x = 0 \Rightarrow x = y$; (4) $x * y = 0 \Leftrightarrow x \circ y = 0$.

Berdasarkan ide dari konsep pseudo pada BCK-aljabar, BCI-aljabar dan BCH-aljabar, maka perlu dikaji bagaimana konsep pseudo Q-aljabar. Sehingga pada penelitian ini akan dibahas pengertian dan sifat-sifat dari pseudo Q-aljabar. Lebih lanjut, juga akan dikaji sifat keterkaitan antara pseudo Q-aljabar terhadap pseudo BCI-aljabar dan pseudo BCH-aljabar.

1.2. Rumusan Masalah

Berlandasan penjelasan pada latar belakang masalah tersebut, didapat perumusan masalah diantarannya:

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

1. Bagaimana definisi dan sifat dari pseudo Q-aljabar?
2. Bagaimana sifat hubungan pseudo Q-aljabar terhadap pseudo BCI-aljabar dan pseudo BCH-aljabar?

1.3. Tujuan Penelitian

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah yang telah ada, maka didapat tujuan dari pembahasan penelitian ini diantaranya:

1. Untuk menunjukkan definisi dan sifat dari pseudo Q-aljabar.
2. Untuk menunjukkan sifat hubungan pseudo Q-aljabar terhadap pseudo BCI-aljabar dan pseudo BCH-aljabar.

1.4. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Manfaat Teoritis

   Penelitian yang dilakukan ini dapat dimanfaatkan sebagai salah satu acuan untuk penelitian selanjutnya.

2. Manfaat Praktis

   Dengan adanya penelitian ini diharapkan dapat memberi wawasan pengetahuan dan keilmuan mengenai definisi serta sifat-sifat pseudo Q-aljabar.

1.5. Sistematika Penulisan

BAB 1 PENDAHULUAN

Pada bab ini akan menunjukan beberapa referensi terkait dengan pseudo

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Q-aljabar yang akan dijadikan latar belakang dari penulisan laporan ini. Pada bab ini juga terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan serta sistematika penulisan.

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

Tinjuan pustaka adalah bagian yang memaparkan teori tentang Pada bab ini menunjukan tentang definisi Q-aljabar, pseudo BCI-aljabar dan pseudo BCH-aljabar.

BAB 3 METODE PENELITIAN

Pada bab ini berisi metode penelitian, sehingga penelitian dapat tertuju dengan baik dalam hal materi dan waktu pengerjaan.

BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini memaparkan hasil dan pembahasan mengenai definisi dan sifat pada pseudo Q-aljabar, serta hubungan pseudo Q-aljabar terhadap pseudo BCI-aljabar dan pseudo BCH-aljabar.

BAB 5 PENUTUP

Pada bagian penutup berisi mengenai simpulan dan saran dari hasil pada bab analisis dan pembahasan.

DAFTAR PUSTAKA

Daftar pustaka adalah bagian yang berisi referensi-referensi yang digunakan dalam penelitian ini, baik artikel, jurnal, dan buku.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan membahas tentang definisi Q-aljabar, pseudo BCI-aljabar, dan pseudo BCH-aljabar.

2.1. Q-aljabar

Definisi 2.1.1 *(M.Badriqul dan agung L, 2018) Himpunan tak kosong A yang berisi konstanta 0 dan dilengkapi suatu operasi biner $*$ dinotasikan $(A, *, 0)$ adalah Q-aljabar apabila untuk setiap $x, y, z \in A$, memenuhi:*

I $x * x = 0$

II $x * 0 = x$

III $(x * y) * z = (x * z) * y$

Contoh 2.1.2 Misalkan $A = \{0, 1, 2, 3\}$ menggunakan operasi $*$ dapat diartikan seperti tabel berikut

Tabel 2.1 Tabel cayley operasi $*$ pada himpunan A

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	2	2	0	0
3	3	2	0	0

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Himpunan $A = \{0, 1, 2, 3\}$ dengan operasi $*$ adalah Q-aljabar sebab tiga kondisi berikut terpenuhi yaitu

I Ambil sebarang $x \in A$, berlaku $x * x = 0$

Misalkan $x = 1$. Diperoleh $1 * 1 = 0$.

II Ambil sebarang $x \in A$, berlaku $x * 0 = x$

Misalkan $x = 3$. Diperoleh $3 * 0 = 3$.

III Ambil sebarang $x, y, z \in A$, berlaku $(x * y) * z = (x * z) * y$

Misalkan $x = 1, y = 2, z = 3$. Diperoleh

$$\begin{aligned} (1 * 2) * 3 &= 0 * 3 \\ &= 0 \\ (1 * 3) * 2 &= 0 * 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Contoh 2.1.3 Misalkan Z adalah himpunan semua bilangan bulat dan didefinisikan $nZ := \{nz | z \in Z\}$ dengan $n \in Z$. Struktur aljabar $(nZ; -; 0)$ adalah suatu Q-aljabar dengan $-$ merupakan suatu pengurangan biasa pada bilangan bulat karena memenuhi tiga aksioma yaitu ambil sebarang $nz_1, nz_2, nz_3 \in nZ$, dimana $z_1, z_2, z_3 \in Z$.

I $nz_1 - nz_1 = 0$

II $nz_1 - 0 = nz_1$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

III $(nz_1 - nz_2) - nz_3 = (nz_1 - nz_3) - nz_2$, sebab

$$\begin{aligned}
(nz_1 - nz_2) - nz_3 &= (nz_1 - nz_3) - nz_2 \\
&= n(z_1 - z_3) - nz_2 \\
&= n((z_1 - z_3) - z_2) \\
&= n(z_1 - z_3 - z_2) \\
&= n(z_1 - z_2 - z_3) \\
&= n((z_1 - z_2) - z_3) \\
&= (nz_1 - nz_2) - nz_3
\end{aligned}$$

Contoh 2.1.4 Diberikan $Z_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dan didefinisikan $+_4$ dari himpunan Z_4, dimana $(Z_4, +_4)$ adalah grup komutatif. Lebih lanjut, didefinisikan operasi biner $*$ untuk setiap $g, h \in Z_4$ dengan $g * h = g +_4 h^{-1}$, maka $(Z_4, *, 0)$ adalah Q-aljabar karena pada Definisi 2.1.1 kondisinya terpenuhi yaitu ambil sebarang $g, h, i \in Z_4$. Berikut tabel cayley pada Z_4

Tabel 2.2 Tabel cayley operasi $*$ pada Z_4

Z_4	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Tabel 2.3 Tabel cayley operasi $*$ pada Z_4

$*$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

I $g * g = g +_4 g^{-1} = 0$.

Misal $g = \overline{2}$. Diperoleh

$$\begin{aligned} g * g &= \overline{2} +_4 2^{-1} \\ &= \overline{2} +_4 \overline{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

II $g * 0 = g +_4 \overline{0} = g$.

Misal $g = 1$. Diperoleh

$$\begin{aligned} g * 0 &= 1 +_4 0 \\ &= 1 +_4 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

III $(g * h) * i = (g * i) * h$, maka

$$\begin{aligned} (g * h) * i &= (g +_4 h^{-1}) * i \\ &= (g +_4 h^{-1}) +_4 i^{-1} \\ &= (g +_4 i^{-1}) +_4 h^{-1} \\ &= (g * i) * h \end{aligned}$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Misalkan $g = 1$, $h = 2$ dan $i = 3$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
(g * h) * i &= (g * i) * h \\
(\bar{1} * \bar{2}) * \bar{3} &= (\bar{1} * \bar{3}) * \bar{2} \\
(\bar{1} +_4 \bar{2}) +_4 \bar{1} &= (\bar{1} +_4 \bar{1}) +_4 \bar{2} \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Proposisi 2.1.5 *(Raisa A dkk, 2019) Jika $(A, *, 0)$ adalah suatu Q-aljabar, maka $(j * (j * k)) * k = 0$, untuk sebarang $j, k \in A$.*

Bukti. Diketahui $(A, *, 0)$ adalah Q-aljabar. Ambil sebarang $j, k \in A$. Diperhatikan, berdasarkan Definisi 2.1.1 yaitu $(x * y) * z = (x * z) * y$ diperoleh

$$\begin{aligned}
(j * (j * k)) * k &= (j * k) * (j * k) \quad \text{(Definisi 2.1.1 } (j * k) * (j * k) = 0\text{)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.1.6 *(Shwan.A.B dan Sule A.O, 2016) Terpenuhinya sifat assosiatif pada setiap Q-Aljabar $(A, *, 0)$ merupakan sebuah grup terhadap operasi $*$.*

Bukti. Diketahui sifat assosiatif terpenuhi pada Q-aljabar $(A, *, 0)$. Akan ditunjukkan A merupakan grup. Karena himpunan A bukan himpunan kosong dan dilengkapi dengan operasi biner $*$, maka jelas terpenuhi untuk setiap $j, k \in A$ berlaku $j * k \in A$. Dengan kata lain, akan ditunjukkan aksioma eksistensi elemen identitas dan eksistensi elemen invers.

1. Ambil sebarang $j \in A$. Karena A bersifat assosiatif yaitu $(j*k)*l = j*(k*l)$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

untuk setiap $j, k, l \in A$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
(j * j) * j &= j * (j * j) && \text{(Definisi 2.1.1 yaitu } j * j = 0) \\
0 * j &= j * 0 && \text{(Definisi 2.1.1 yaitu } j * 0 = 0) \\
0 * j &= j
\end{aligned}$$

Karena diperoleh $0 * j = j$ artinya terdapat $0 \in A$ sedemikian sehingga untuk setiap $j \in A$, berlaku $0 * j = j$. Jadi A memiliki eksistensi elemen invers.

2. Ambil sebarang $j \in A$. Berlandaskan pada Definisi 2.1.1 poin I berlaku $j * j = 0$ dan 0 adalah elemen identitas. Akibatnya diperoleh untuk setiap $j \in A$, terdapat $j \in A$ sedemikian $j * j = 0$. Jadi Q-aljabar A memiliki eksistensi elemen invers.

■

Lemma 2.1.7 *(Neggers, Ahn, dan Kim, 2001) Jika* $(A, *, 0)$ *adalah suatu Q-Aljabar yang memenuhi* $j * k = j * l$ *untuk semua* $j, k, l \in A$ *maka* $0 * k = 0 * l$.

Bukti. Ambil sebarang $j, k, l \in A$. Berdasarkan diketahui,diperoleh

$$\begin{aligned}
j * k &= j * l \\
(l * k) * j &= (j * l) * j && \text{(Definisi 2.1.1 yaitu } (x * y) * z = (x * z) * y) \\
(j * j) * k &= (j * j) * l && \text{(Definisi 2.1.1 yaitu } j * j = 0) \\
0 * k &= 0 * l
\end{aligned}$$

■

Definisi 2.1.8 *(Neggers, Ahn, dan Kim, 2001) Misalkan* $(A, *, 0)$ *adalah Q-aljabar. Untuk sebarang subhimpunan tak kosong* S *dari* A*, didefinisikan*

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$$G(S) = \{j \in S | 0 * j = j\}.$$

Lebih lanjut, apabila $S = A$ maka $G(A)$ disebut bagian-G dari A.

Akibat 2.1.9 *(Neggers, Ahn, dan Kim, 2001) Pada $G(A)$ berlaku hukum kanselasi kiri.*

Bukti. Ambil sebarang $a, b, c \in G(A)$ dengan $a * b = a * c$. Dengan menggunakan Lemma 2.1.7 diperoleh $0 * b = 0 * c$. Karena $a, b, c \in G(A)$ maka berdasarkan Definisi 2.1.8 diperoleh $b = c$. Jadi berlaku hukum kanselasi kiri. ■

Proposisi 2.1.10 *(Neggers, Ahn, dan Kim, 2001) Misalkan $(A, *, 0)$ adalah Q-aljabar. Untuk $j \in G(A)$ jika dan hanya jika $0 * j \in G(A)$.*

Bukti.

($\Rightarrow$) Diketahui $j \in G(A)$. Akan ditunjukkan $0 * j \in G(A)$.

Karena $j \in G(A)$ berarti $j \in A$ dimana $0 * j = j$. Jelas $0 * j \in A$ sehingga $0 * (0 * j) = 0 * j \in G(A)$

($\Leftarrow$) Diketahui $0 * j \in G(A)$. Akan ditunjukkan $j \in G(A)$.

Karena $0 * j \in G(A)$ maka diperoleh $0 * (0 * j) = 0 * j$. Berdasarkan Akibat 2.1.9 diperoleh $0 * j = j$. Jadi $j \in G(A)$

■

2.2. Pseudo BCI-Aljabar

Berikut diberikan definisi dan sifat dari BCI-aljabar dan pseudo BCI-aljabar.

Definisi 2.2.1 *(Wieslaw A. Dudek dan Young, 2008) BCI-aljabar merupakan suatu himpunan tak kosong A dari operasi biner $*$ dan 0 sebagai elemen khusus jika untuk*

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

setiap $x, y, z \in A$ *memenuhi 4 aksioma:*

(1) $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$

(2) $(x * (x * y)) * y = 0$

(3) $x * x = 0$

(4) $x * y = 0$ *dan* $y * x = 0$ *sehingga* $x = y$

Definisi 2.2.2 *(Shwan A.B dan Sule A.O, 2016) Pada BCI-aljabar* A *didefinisikan relasi terurut parsial, yaitu* $\leq$*. Dimana untuk setiap* $x \leq y$ *jika dan hanya jika* $x * y = 0$ *dan* $x \circ y = 0$ *untuk sebarang* $x, y \in A$*.*

Definisi 2.2.3 *(Young B.J, Hee S.K dan J.Neggers, 2006) Sebuah pseudo BCI-aljabar adalah struktur* $(A, \leq, *, \circ, 0)$*, dimana* $\leq$ *adalah relasi biner pada himpunan* A*,* $*$*, dan* $\circ$ *adalah operasi biner pada* A *dan* 0 *adalah elemen khusus* A*, yang memenuhi aksioma:*

(1) $(x * y) \circ (x * z) \leq z * y, (x \circ y) * (x \circ z) \leq z \circ y$

(2) $x * (x \circ y) \leq y, x \circ (x * y) \leq y$

(3) $x \leq x \Leftrightarrow x * x = 0 \Leftrightarrow x \circ x = 0$

(4) $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$

(5) $x \leq y \Leftrightarrow x * y = 0 \Leftrightarrow x \circ y = 0$

Diperhatikan bahwa pseudo BCI-aljabar yang memenuhi $x * y = x \circ y$ untuk setiap $x, y \in A$ adalah BCI-aljabar. Dapat diperhatikan juga bahwa pseudo BCI-aljabar yang memenuhi $0 \leq x$ untuk setiap $x \in A$ merupakan pseudo BCI-aljabar.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Proposisi 2.2.4 *(Lee dan Park, 2009) Misalkan A adalah pseudo BCI-aljabar. Untuk semua* $j, k, l \in A$ *:*

1. $j \leq 0 \Rightarrow j = 0$
2. $j \leq k \Rightarrow l * k \leq l * j, l \circ k \leq l \circ j$
3. $j \leq k, k \leq l \Rightarrow j \leq l$
4. $(j * k) \circ l = (j \circ l) * k$
5. $j * k \leq l \Leftrightarrow j \circ l \leq k$
6. $(j * k) * (l * k) \leq j * l, (j \circ k) \circ (l \circ k) \leq j \circ l$
7. $j \leq k \Rightarrow j * l \leq k * l, j \circ l \leq k \circ l$
8. $j * 0 = j = j \circ 0$
9. $j * (j \circ (j * k)) = j * k, j \circ (j * (j \circ k)) = j \circ k$
10. $0 * (j \circ k) \leq k \circ j$
11. $0 \circ (j * k) \leq k * j$
12. $0 * (j * k) = (0 \circ j) \circ (0 * k)$
13. $0 \circ (j \circ k) = (0 * j) * (0 \circ k)$

Bukti.

1. Diketahui $j \leq 0$ dari Definisi 2.2.2 berarti $j * 0 = j \circ 0 = 0$. Akan ditunjukkan $j = 0$. Terlebih dahulu ditunjukkan $0 \leq j$. Diperhatikan berdasarkan Definisi

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

2.2.1 yaitu $(x * (x * y)) * y = 0$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= (j * (j \circ j)) \circ j && \text{(Definisi 2.2.3 yaitu } j \leq j \Leftrightarrow j * j = 0 \Leftrightarrow j \circ j = 0) \\ &= (j * 0) \circ j && \text{(Karena } j * 0 = 0) \\ &= 0 \circ j \end{aligned}$$

Karena $0 = 0 \circ j$ berdasarkan definisi relasi terurut parsial diperoleh $0 \leq j$. Karena $j \leq 0$ dan $0 \leq j$, jadi $j = 0$.

2. Diketahui $j \leq k$ artinya $j * k = 0$. Akan ditunjukkan $l * k \leq l * j$ dan $l \circ k \leq l \circ j$

   (i) Untuk $l * k \leq l * j$. Diperhatikan berdasarkan Definisi 2.2.3 yaitu $(x * y) \circ (x * z) \leq z * y$ diperoleh

$$\begin{aligned} &((l * k) \circ (l * j)) \leq j * k && \text{(Definisi 2.2.2)} \\ &((l * k) \circ (l * j)) \circ (j * k) = 0 && \text{(Diketahui yaitu } j * k = 0) \\ &((l * k) \circ (l * j)) \circ 0 = 0 && \text{(Definisi 2.2.2)} \\ &((l * k) \circ (l * j)) \leq 0 && \text{(Proposisi 2.2.4 poin 1)} \\ &(l * k) \circ (l * j) = 0 && \text{(Definisi 2.2.2)} \\ &(l * k) \leq (l * j) \end{aligned}$$

   (ii) Untuk $l \circ k \leq l \circ j$. Diperhatikan berdasarkan Definisi 2.2.3 yaitu $(x *$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$y) \circ (x * z) \leq z * y$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
&((l \circ k) * (l \circ j)) \leq j \circ k && \text{(Definisi 2.2.2)} \\
&((l \circ k) * (l \circ j)) * (j \circ k) = 0 && \text{(Diketahui yaitu } j \circ k = 0\text{)} \\
&((l \circ k) * (l \circ j)) * 0 = 0 && \text{(Definisi 2.2.2)} \\
&((l \circ k) * (l \circ j)) \leq 0 && \text{(Proposisi 2.2.4 poin 1)} \\
&(l \circ k) * (l \circ j) = 0 && \text{(Definisi 2.2.2)} \\
&(l \circ k) \leq (l \circ j)
\end{aligned}
$$

3. Diketahui $j \leq k$ dan $k \leq l$ berarti $j * k = 0$ dan $k * l = 0$.

   Akan ditunjukkan $j \leq l$ atau dengan kata lain akan ditunjukkan $j * l = 0$.

   (i) Diperhatikan dari Definisi 2.2.2 jika $j \leq k$ berarti $j * k = 0$. Lebih lanjut berdasarkan Definisi 2.2.3 yaitu $j \leq k \Leftrightarrow j * k = 0 \Leftrightarrow j \circ k = 0$, jika $j * k = 0$ maka $j \circ k = 0$. Dengan menggunakan Proposisi 2.2.4 yaitu $j \leq k \Rightarrow l * k \leq l * j$, jika $j \leq k$ maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
j * l &\leq j * k && \text{(Diketahui yaitu } j * k = 0\text{)} \\
j * l &\leq 0 && \text{(Proposisi 2.2.4 poin 1)} \\
j * l &= 0 && \text{(Definisi 2.2.2)} \\
j &\leq l
\end{aligned}
$$

   (ii) Diperhatikan dari Definisi 2.2.2 didapatkan, jika $k \leq l$ maka $k * l = 0$. Lebih lanjut berdasarkan Definisi 2.2.3 yaitu $j \leq k \Leftrightarrow j * k = 0 \Leftrightarrow j \circ k = 0$, jika $k * l = 0$ maka $k \circ l = 0$. Dengan menggunakan Proposisi

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

2.2.4 yaitu $j \leq k \Rightarrow l \circ k \leq l \circ j$ diperoleh

$$\begin{aligned} j \circ l &\leq j \circ k && \text{(Diketahui yaitu } j \circ k = 0) \\ j \circ l &\leq 0 && \text{(Proposisi 2.2.4 poin 1)} \\ j \circ l &= 0 && \text{(Definisi 2.2.2)} \\ j &\leq l \end{aligned}$$

4. Akan ditunjukkan $(j * k) \circ l = (j \circ l) * k$. Berdasarkan Definisi 2.2.3 poin 1 diperoleh

$$j * (j \circ l) = (j * 0) * (j \circ l) \leq l * 0 = l$$

Dengan Proposisi 2.2.4 poin 2 diperoleh

$$(j * k) \circ l \leq (j * k) \circ (j * (j \circ l)) \tag{2.1}$$

Selanjutnya dengan Definisi 2.2.3 yaitu $(x * y) \circ (x * z) \leq z * y$ diperoleh

$$(j * k) \circ (j * (j \circ l)) \leq (j \circ l) * k \tag{2.2}$$

Berdasarkan Pertidaksamaan 2.1 dan Pertidaksamaan 2.2, serta menggunakan Proposisi 2.2.4 poin 3 diperoleh

$$(j * k) \circ l \leq (j \circ l) * k \tag{2.3}$$

Lebih lanjut, berdasarkan Definisi 2.2.3 yaitu $j \circ (j * k) \leq k$ diperoleh

$$j \circ (j * k) \leq k$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Dengan Proposisi 2.2.4 poin 2 diperoleh

$$(j \circ l) * k \leq (j \circ l) * (j \circ (j * k)) \tag{2.4}$$

Dengan Definisi 2.2.3 yaitu $(x \circ y) * (x \circ z) \leq z \circ y$ diperoleh

$$(j \circ l) * (j \circ (j * k)) \leq (j * k) \circ l \tag{2.5}$$

Berdasarkan pertidaksamaan 2.4 dan pertidaksamaan 2.5 dan menggunakan Proposisi 2.2.4 poin 3 diperoleh

$$(j \circ l) * k \leq (j * k) \circ l \tag{2.6}$$

Jadi, berdasarkan hasil Pertidaksamaan 2.3 dan hasil Pertidaksamaan 2.6 dengan Definisi 2.2.3 yaitu $j \leq k, k \leq j \Rightarrow j = k$ disimpulkan bahwa

$$(j * k) \circ l = (j \circ l) * k$$

5. Akan ditunjukkan $j * k \leq l$ jika dan hanya jika $j \circ l \leq k$

   ($\Leftarrow$) Diketahui $j \circ l \leq k$. Akan ditunjukkan $j * k \leq l$ diperoleh

$j \circ l \leq k$	(Definisi 2.2.2)
$(j \circ l) * k = 0$	(Proposisi 2.2.4 yaitu $(j \circ l) * k = (j * k) \circ l$)
$(j * k) \circ l = 0$	(Definisi 2.2.2)
$j * k \leq l$	

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

($\Rightarrow$) Diketahui $j * k \leq l$. Akan ditunjukkan $j \circ l \leq k$ diperoleh

$j * k \leq l$ (Definisi 2.2.2

$(j * k) \circ l = 0$ (Proposisi 2.2.4 yaitu $(j * l) \circ k = (j \circ k) * l$)

$(j \circ l) * k = 0$ (Definisi 2.2.2)

$j \circ l \leq k$

6. (i) Akan ditunjukkan $(j * k) * (l * k) \leq j * l$ artinya akan ditunjukkan $((j * k) \circ (l * k)) * (j * l) = 0$. Dengan menggunakan Proposisi 2.2.4 poin 4 diperoleh

$((j * k) * (l * k)) \circ (j * l) = 0$ (Definisi 2.2.2)

$(j * k) * (l * k) \leq (j * l)$

(ii) Akan ditunjukkan $(j \circ k) \circ (l \circ k) \leq j \circ l$ artinya akan ditunjukkan $((j \circ k) * (l \circ k)) \circ (j \circ l) = 0$. Dengan menggunakan Proposisi 2.2.4 poin 4 diperoleh

$((j \circ k) \circ (l \circ k)) * (j \circ l) = 0$ (Definisi 2.2.2)

$(j \circ k) \circ (l \circ k) \leq (j \circ l)$

7. Diketahui $j \leq k$ artinya $j * k = j \circ k = 0$

(i) Akan ditunjukkan $j * l \leq k * l$. Berdasarkan Proposisi 2.2.4 poin 6

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

diperoleh

$$
\begin{aligned}
&(j * l) * (k * l) \leq (j * k) && (\text{ Karena } j * k = 0) \\
&(j * l) * (k * l) \leq 0 && (\text{Proposisi 2.2.4 poin 1}) \\
&(j * l) * (k * l) = 0 && (\text{Definisi 2.2.2}) \\
&(j * l) \leq (k * l)
\end{aligned}
$$

(ii) Akan ditunjukkan $j \circ l \leq k \circ l$. Berdasarkan Proposisi 2.2.4 poin 6 diperoleh

$$
\begin{aligned}
&(j \circ l) * (k \circ l) \leq (j \circ k) && (\text{Karena } j \circ k = 0) \\
&(j \circ l) \circ (k \circ l) \leq 0 && (\text{Proposisi 2.2.4 yaitu poin 1}) \\
&(j \circ l) \circ (k \circ l) = 0 && (\text{Definisi 2.2.2}) \\
&(j \circ l) \leq (k \circ l)
\end{aligned}
$$

8. Akan ditunjukkan $j * 0 = j$ dan $j \circ 0 = j$.

(i) Diperhatikan berdasarkan Definisi 2.2.3 poin 2 diperoleh

$$
\begin{aligned}
&j * (j \circ 0) \leq 0 && (\text{Proposisi 2.2.4 poin 1}) \\
&j * (j \circ 0) = 0 && (\text{Definisi 2.2.2}) \\
&j \leq j \circ 0
\end{aligned}
$$

Lebih lanjut

$$
\begin{aligned}
0 &= 0 \circ 0 && (\text{Definisi 2.2.3 yaitu } j \leq j \Leftrightarrow j * j = 0) \\
&= (j * j) \circ 0 && (\text{Proposisi 2.2.4 poin 4}) \\
&= (j \circ 0) * j
\end{aligned}
$$

Karena $0 = (j \circ 0) * j$ berdasarkan Definisi 2.2.2 maka $j \circ 0 \leq j$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Karena $j \leq j \circ 0$ dan $j \circ 0 \leq j$ maka $j \circ 0 = j$

(ii) Diperhatikan berdasarkan Definisi 2.2.3 poin 2 diperoleh

$$\begin{aligned} j \circ (j * 0) &\leq 0 && \text{(Proposisi 2.2.4 poin 1)} \\ j \circ (j * 0) &= 0 && \text{(Definisi 2.2.2)} \\ j &\leq j * 0 \end{aligned}$$

Lebih lanjut

$$\begin{aligned} 0 &= 0 * 0 && \text{(Definisi 2.2.3 yaitu } j \leq j \Leftrightarrow j * j = 0) \\ &= (j \circ j) * 0 && \text{(Proposisi 2.2.4 poin 4)} \\ &= (j * 0) \circ j \end{aligned}$$

Karena $0 = (j * 0) \circ j$ berdasarkan Definisi 2.2.2 maka $j * 0 \leq j$

Karena $j \leq j * 0$ dan $j * 0 \leq j$ maka $j * 0 = j$

9. Akan ditunjukkan $j * (j \circ (j * k)) = j * k$ dan $j \circ (j * (j \circ k)) = j \circ k$ artinya $j * (j \circ (j * k)) \leq j * k$ dan $j \circ (j * (j \circ k)) \leq j \circ k$

(i) Diperhatikan berdasarkan Definisi 2.2.3 yaitu $j * (j \circ k) \leq k$ diperoleh $j * (j \circ (j * k)) \leq j * k$. Disisi lain,

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \circ 0 && \text{(Definisi 2.2.3 yaitu } j \leq k \Leftrightarrow j * k = 0) \\ &= (j * k) \circ (j * k) && \text{(Proposisi 2.2.4 poin 4)} \\ &= (j \circ (j * k)) * k \end{aligned}$$

Karena $0 = (j \circ (j * k)) * k$ berdasarkan Definisi 2.2.2 maka $(j \circ (j * k)) \leq k$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Karena $(j \circ (j * k)) \leq k$ berdasarkan Proposisi 2.2.4 poin 7 maka

$$j * (j \circ (j * k)) \leq j * k \tag{2.7}$$

Sehingga $j*(j\circ(j*k)) \leq j*k$ dan Persamaan 2.7 $j*(j\circ(j*k)) \leq j*k$ menggunakan Proposisi 2.2.4 poin 4 diperoleh $j * (j \circ (j * k)) = j * k$

(ii) Diperhatikan berdasarkan Definisi 2.2.3 yaitu $j \circ (j * k) \leq k$ diperoleh $j \circ (j * (j \circ k)) \leq j \circ k$. Disisi lain,

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \circ 0 && \text{(Definisi 2.2.3 yaitu } j \leq k \Rightarrow j \circ k = 0) \\ &= (j \circ k) * (j \circ k) && \text{(Proposisi 2.2.4 poin 4)} \\ &= (j * (j \circ k)) \circ k \end{aligned}$$

Karena $0 = (j*(j\circ k))\circ k$ berdasarkan Definisi 2.2.2 maka $(j*(j\circ k)) \leq k$

Karena $(j * (j \circ k)) \leq k$ berdasarkan Proposisi 2.2.4 poin 7 maka

$$j \circ k \leq j \circ (j * (j \circ k)) \tag{2.8}$$

Sehingga $j\circ(j*(j\circ k)) \leq j\circ k$ dan Persamaan 2.7 $j*(j\circ(j*k)) \leq j*k$ menggunakan Proposisi 2.2.4 poin 4 diperoleh $j \circ (j * (j \circ k)) = j \circ k$

10. Akan ditunjukkan $0 * (j \circ k) \leq k \circ j$. Berdasarkan Proposisi 2.2.4 poin 3

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

diperoleh

$$
\begin{aligned}
&(j \circ j) * (j \circ k) \leq k \circ j && \text{(Definisi 2.2.2)}\\
&((j \circ j) * (j \circ k)) * (k \circ j) = 0 && \text{(Definisi 2.1.1 yaitu } j \circ j = 0\text{)}\\
&(0 * (j \circ k)) * (k \circ j) = 0 && \text{(Definisi 2.2.2)}\\
&0 * (j \circ k) \leq k \circ j
\end{aligned}
$$

11. Akan ditunjukkan $0 \circ (j * k) \leq k * j$. Berdasarkan Proposisi 2.2.4 poin 3 diperoleh

$$
\begin{aligned}
&(j * j) \circ (j * k) \leq k * j && \text{(Definisi 2.2.2)}\\
&((j * j) \circ (j * k)) \circ (k * j) = 0 && \text{(Definisi 2.1.1 yaitu } j * j = 0\text{)}\\
&(0 \circ (j * k)) \circ (k * j) = 0 && \text{(Definisi 2.2.2)}\\
&0 \circ (j * k) \leq k * j
\end{aligned}
$$

12. Akan ditunjukkan $0 * (j * k) = (0 \circ j) \circ (0 * k)$. Diperhatikan

$$
\begin{aligned}
&0 * (j * k) && \text{(Definisi 2.2.1 poin 3)}\\
&= ((0 * k) \circ (0 * k)) * (j * k) && \text{(Proposisi 2.2.4 poin 4)}\\
&= ((0 * l) * (j * k)) \circ (0 * k) && \text{(Definisi 2.2.1 poin 3)}\\
&= (((j \circ j) * k) * (j * k)) \circ (0 * k) && \text{(Proposisi 2.2.4 poin 4)}\\
&= (((j * k) \circ j) * (j * k)) \circ (0 * k) && \text{(Proposisi 2.2.4 poin 4)}\\
&= (((j * k) * (j * k)) \circ j) \circ (0 * k) && \text{(Definisi 2.2.1 poin 3)}\\
&= (0 \circ j) \circ (0 * j)
\end{aligned}
$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

13. Akan ditunjukkan $0 \circ (j \circ k) = (0 * j) * (0 \circ k)$. Diperhatikan

$$
\begin{aligned}
& 0 \circ (j \circ k) && \text{(Definisi 2.2.1 yaitu } (0 \circ k) * (0 \circ k) = 0\text{)} \\
&= ((0 \circ k) * (0 \circ k)) \circ (j \circ k) && \text{(Proposisi 2.2.4 poin 4)} \\
&= ((0 \circ k) \circ (j \circ k)) * (0 \circ k) && \text{(Definisi 2.2.1 yaitu } j * j = 0\text{)} \\
&= (((j * j) \circ k) \circ (j \circ k)) * (0 \circ k) && \text{(Proposisi 2.2.4 poin 4)} \\
&= (((j \circ k) * j) \circ (j \circ k)) * (0 \circ k) && \text{(Proposisi 2.2.4 poin 4)} \\
&= (((j \circ k) \circ (j \circ k)) * j) * (0 \circ k) && \text{(Definisi 2.2.1 yaitu } (j \circ k) \circ (j \circ k) = 0\text{)} \\
&= (0 * j) \circ (0 \circ j)
\end{aligned}
$$

■

2.3. Pseudo BCH-Aljabar

Berikut diberikan definisi dan sifat dari BCH-aljabar dan pseudo BCH-aljabar.

Definisi 2.3.1 *(Asfand F dan M. Arshad, 2017) BCH-aljabar merupakan suatu himpunan tak kosong A dari operasi biner $*$ dan 0 sebagai elemen khusus jika untuk setiap $x, y, z \in A$ memenuhi beberapa aksioma diantaranya:*

(1) $x * x = 0$

(2) $x * y = 0$ *dan* $y * x = 0$ *sehingga* $x = y$

(3) $x * y) * z = (x * z) * y$

Definisi 2.3.2 *(Shwan A.B dan Sule A.O, 2016) Pada BCH-aljabar A dapat diartikan relasi terurut parsial yakni $\leq$. Dimana untuk setiap $x \leq y$ jika dan hanya jika $x * y = 0$ untuk sebarang $x, y \in A$.*

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Definisi 2.3.3 *(Andrzej, 2016) Sebuah pseudo-BCH-aljabar adalah aljabar* $(A, *, \circ, 0)$ *yang memenuhi aksioma:*

(1) $x * x = x \circ x = 0$

(2) $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$

(3) $x * y = y \circ x = 0 \Rightarrow x = y$

(4) $x * y = 0 \Leftrightarrow x \circ y = 0$

Diperhatikan bahwa pseudo BCH-aljabar yang memenuhi $x * y = x \circ y$ untuk setiap $x, y \in A$ adalah BCH-aljabar. Dapat diperhatikan juga bahwa pseudo BCH-aljabar yang memenuhi $0 \leq x$ untuk setiap $x \in A$ merupakan pseudo BCH-aljabar.

Proposisi 2.3.4 *(Andrzej, 2015) Misalkan* A *adalah pseudo BCH-aljabar. Untuk semua* $j, k, l \in A$ *:*

1. $j \leq k, k \leq j \Rightarrow j = k$
2. $j \leq 0 \Rightarrow j = 0$
3. $j * (j \circ k) \leq k, j \circ (j * k) \leq k$
4. $j * 0 = j = j \circ 0$
5. $0 * j = 0 \circ j$
6. $j \leq k \Rightarrow 0 * j = 0 \circ k$
7. $0 \circ (0 * (0 \circ j)) = 0 \circ j, 0 * (0 \circ (0 * j)) = 0 * j$
8. $0 * (j * k) = (0 \circ j) \circ (0 * k)$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

9. $0 \circ (j \circ k) = (0 * j) * (0 \circ k)$

Bukti.

1. Diketahui $j \leq k$ dan $k \leq j$. Akan ditunjukkan $j = k$

   Jika $j \leq k$ maka berdasarkan Definisi 2.3.2 diperoleh $j * k = 0$. Jika $k \leq j$ maka berdasarkan Definisi 2.3.2 diperoleh $k * j = 0$.

   Karena $k * j = 0$ dan $k * j = 0$ maka berdasarkan Definisi 2.3.3 yaitu $j * k = k \circ j = 0 \Rightarrow j = k$ dapat disimpulkan $j = k$.

2. Diketahui $j \leq 0$ berarti $j * 0 = j \circ 0 = 0$. Akan ditunjukkan $j = 0$. Terlebih dahulu ditunjukkan $0 \leq j$. Berdasarkan Definisi 2.3.3 yaitu $j * j = j \circ j = 0$ diperoleh

   $0 * 0 = 0$ (Definisi 2.3.3 yaitu $j \circ j = 0$)

   $(j \circ j) * 0 = 0$ (Definisi 2.3.3 yaitu $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$)

   $(j * 0) \circ j = 0$ (Karena $j * 0 = 0$)

   $0 \circ j = 0$

   Karena $0 \circ j = 0$ berdasarkan definisi relasi terurut parsial diperoleh $0 \leq j$, sehingga berdasarkan Proposisi 2.3.4 poin 1, jika $j \leq 0$ dan $0 \leq l$ maka $j = 0$.

3. Akan ditunjukkan $j * (j \circ k) \leq k$ dan $j \circ (j * k) \leq k$.

   (i) Akan ditunjukkan $j * (j \circ k) \leq k$. Berdasarkan Definisi 2.3.2 dengan kata lain akan ditunjukkan $(j * (j \circ k)) \circ k = 0$. Diperhatikan dengan

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Definisi 2.3.3 yaitu $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$, diperoleh

$$\begin{aligned}(j * (j \circ k)) \circ k &= (j \circ k) * (j \circ k) \quad \text{(Definisi 2.3.3 poin 1)}\\ &= 0\end{aligned}$$

Sehingga dengan menggunakan Definisi 2.3.2 diperoleh $j * (j \circ k) \leq k$.

(ii) Akan ditunjukkan $j \circ (j * k) \leq k$. Berdasarkan Definisi 2.3.2 dengan kata lain akan ditunjukkan $(j * (j \circ k)) \circ k = 0$. Diperhatikan dengan Definisi 2.3.3 yaitu $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$, diperoleh

$$\begin{aligned}(j \circ (j * k)) * k &= (j * k) \circ (j * k) \quad \text{(Definisi 2.3.3 poin 1)}\\ &= 0\end{aligned}$$

Sehingga dengan menggunakan Definisi 2.3.2 diperoleh $j \circ (j * k) \leq k$.

4. Akan ditunjukkan $j * 0 = j$ dan $j \circ 0 = j$.

(i) Diperhatikan berdasarkan Proposisi 2.3.4 poin 3 diperoleh

$$\begin{aligned}&j * (j \circ 0) \leq 0 \quad \text{(Proposisi 2.3.4 poin 2)}\\ &j * (j \circ 0) = 0 \quad \text{(Definisi 2.3.2)}\\ &j \leq j \circ 0\end{aligned}$$

Lebih lanjut

$$\begin{aligned}0 &= 0 \circ 0 && \text{(Definisi 2.3.3 yaitu } j * j = 0)\\ &= (j * j) \circ 0 && \text{(Definisi 2.3.3 yaitu } (x * y) \circ z = (x \circ z) * y)\\ &= (j \circ 0) * j\end{aligned}$$

Karena $(j \circ 0) * j = 0$ berdasarkan Definisi 2.3.2 maka $j \circ 0 \leq j$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Karena $j \leq j \circ 0$ dan $j \circ 0 \leq j$ maka $j \circ 0 = j$

(ii) Diperhatikan berdasarkan Proposisi 2.3.4 poin 3 diperoleh

$$j \circ (j * 0) \leq 0 \quad \text{(Proposisi 2.3.4 poin 2)}$$
$$j \circ (j * 0) = 0 \quad \text{(Definisi 2.3.2)}$$
$$j \leq j * 0$$

Lebih lanjut

$$\begin{aligned} 0 &= 0 * 0 && \text{(Definisi 2.3.3 yaitu } j \circ j = 0 \text{)} \\ &= (j \circ j) * 0 && \text{(Definisi 2.3.3 yaitu } (x * y) \circ z = (x \circ z) * y\text{)} \\ &= (j * 0) \circ j \end{aligned}$$

Karena $(j * 0) \circ j = 0$ berdasarkan Definisi 2.3.2 maka $j * 0 \leq j$

Karena $j \leq j * 0$ dan $j * 0 \leq j$ maka $j * 0 = j$

5. Akan ditunjukkan $0 * j = 0 \circ j$. Diperhatikan dengan Definisi 2.3.3 yaitu $j * j = j \circ j = 0$ dipunyai

$$\begin{aligned} 0 * j &= (j \circ j) * j && \text{(Definisi 2.3.3 yaitu } (x * y) \circ z = (x \circ z) * y\text{)} \\ &= (j * j) \circ j && \text{(Definisi 2.3.3 yaitu } j * j = 0\text{)} \\ &= 0 \circ j \end{aligned}$$

6. Diketahui $j \leq k$ artinya $j \circ k = 0$. Akan ditunjukkan $0 * j = 0 \circ k$. Diperhatikan dengan Definisi 2.3.3 yaitu $x * y = 0 \Leftrightarrow x \circ y = 0$ dipunyai

$$\begin{aligned} 0 * j &= (j \circ k) * j && \text{(Definisi 2.3.3 yaitu } (x * y) \circ z = (x \circ z) * y\text{)} \\ &= (j * j) \circ k && \text{(Definisi 2.3.3 yaitu } j * j = 0\text{)} \\ &= 0 \circ k \end{aligned}$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

7. Akan ditunjukkan $0 \circ (0 * (0 \circ j)) = 0 \circ j$ dan $0 * (0 \circ (0 * j)) = 0 * j$

   (i) Akan ditunjukkan $0 \circ (0 * (0 \circ j)) = 0 \circ j$. Berdasarkan Proposisi 2.3.4 poin 3 diperoleh

   $0 * (0 \circ j) \leq j$ (Proposisi 2.3.4 poin 6)

   $0 \circ (0 * (0 \circ j)) = 0 \circ j$ (Definisi 2.3.4 yaitu $0 * x = 0 \circ x$)

   $0 \circ (0 * (0 \circ j)) = 0 \circ j$

   (ii) Akan ditunjukkan $0 * (0 \circ (0 * j)) = 0 * j$. Berdasarkan Proposisi 2.3.4 poin 3 diperoleh

   $0 \circ (0 * j) \leq j$ (Proposisi 2.3.4 poin 6)

   $0 * (0 \circ (0 * j)) = 0 * j$ (Definisi 2.3.4 yaitu $0 * x = 0 \circ x$)

   $0 * (0 \circ (0 * j)) = 0 * j$

8. Akan ditunjukkan $0 * (j * k) = (0 \circ j) \circ (0 * k)$, sehingga

   $(0 \circ j) \circ (0 * k)$ (Definisi 2.3.3 yaitu $(j * k) * (j * k) = 0$)

   $= (((j * k) * (j * k)) \circ j) \circ (0 * k)$ (Definisi 2.3.3 yaitu $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$)

   $= (((j * k) \circ j) * (j * k)) \circ (0 * k)$ (Definisi 2.3.3 yaitu $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$)

   $= (((j \circ j) * k) * (j * k)) \circ (0 * k)$ (Definisi 2.3.3 yaitu $j * j = j \circ j = 0$)

   $= (((0 * k) * (j * k)) \circ (0 * k)$ (Definisi 2.3.3 yaitu $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$)

   $= (((0 * k) \circ (0 * k)) * (j * k)$ (Definisi 2.3.3 yaitu $(0 * k) \circ (0 * k) = 0$)

   $= 0 * (j * k)$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

9. Akan ditunjukkan $0 \circ (j \circ k) = (0 * j) * (0 \circ k)$, sehingga

$$
\begin{aligned}
&= (0 * j) * (0 \circ k) && \text{(Definisi 2.3.3 yaitu } (j \circ k) \circ (j \circ k) = 0\text{)} \\
&= (((j \circ k) \circ (j \circ k)) * j) * (0 \circ k) && \text{(Definisi 2.3.3 yaitu } (x * y) \circ z = (x \circ z) * y\text{)} \\
&= (((j \circ k) * j) \circ (j \circ k)) * (0 \circ k) && \text{(Definisi 2.3.3 yaitu } (x * y) \circ z = (x \circ z) * y\text{)} \\
&= (((j * j) \circ k) \circ (j \circ k)) * (0 \circ k) && \text{(Definisi 2.3.3 yaitu } j * j = j \circ j = 0\text{)} \\
&= (((0 \circ k) \circ (j \circ k)) * (0 \circ k) && \text{(Definisi 2.3.3 yaitu } (x * y) \circ z = (x \circ z) * y\text{)} \\
&= (((0 \circ k) * (0 \circ k)) \circ (j \circ k) && \text{(Definisi 2.3.3 yaitu } (0 \circ k) * (0 \circ k) = 0\text{)} \\
&= 0 \circ (j \circ k)
\end{aligned}
$$

2.4. Kajian Aljabar Dalam Islam

Salah satu ilmu yang termasuk dalam Al-Qur'an adalah matematika. Bagian dari matematika meliputi probabilitas, pemodelan, teori grafik, statistik, dan aljabar. Dalam aljabar, salah satunya melibatkan konsep-konsep yang perlu diteliti dalam bidang analisis. Dalam bidang kalkulus, ada beberapa pola yang perlu diteliti yaitu, pembuktian lemma, proposisi, dan teorema. Pembahasan aljabar meliputi Q-aljabar, pseudo BCI-aljabar, dan pseudo BCH-aljabar. Himpunan dapat disebut Q-aljabar, pseudo BCI-aljabar, dan pseudo BCH-aljabar jika memenuhi aksioma atau kondisi tertentu, dan terdapat beberapa teorema pendukung (Ni'mah, 2020). Jika syarat-syarat tersebut dikaitkan dengan Al-Qur'an, seseorang dapat berasumsi bahwa seseorang dapat masuk surga jika memenuhi syarat-syarat tertentu dan kemudian menerima kebahagiaan dari Allah SWT. Seperti Al-Qur'an Surah An-Nisa Ayat 122.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

وَٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ وَعَمِلُواْ ٱلصَّٰلِحَٰتِ سَنُدۡخِلُهُمۡ جَنَّٰتٖ
تَجۡرِي مِن تَحۡتِهَا ٱلۡأَنۡهَٰرُ خَٰلِدِينَ فِيهَآ أَبَدٗاۖ

Dalam surah An-Nisa ayat 122, Allah berfirman yang artinya: ”Dan orang yang beriman dan mengerjakan amal kebajikan, kelak akan Kami masukkan ke dalam surga yang mengalir di bawahnya sungai-sungai, mereka kekal di dalamnya selama-lamanya,...”(Q.S An-Nisa : 122).

Berlandaskan surah tersebut menjelaskan bahwa setiap orang yang beriman kepada Allah dengan selalu mengerjakan amal sholeh, kelak akan kekal berada dalam surga yang terdapat aliran sungai-sungai di bawahnya. Oleh karena itu apabila ingin memperoleh sesuatu, harus memenuhi syarat-syarat yang dibutuhkan. Sama halnya jika ingin memperoleh hasil dari himpunan Q-aljabar, pseudo BCI-aljabar serta pseudo BCH-aljabar, maka harus memenuhi syarat atau aksioma tertentu sesuai yang dibutuhkan.

Himpunan sendiri dapat diibaratkan sebagai muslim, tetapi yang dimaksud adalah orang-orang yang beriman kepada Allah SWT dan beramal sholeh. Sebagaimana Allah firmankan dalam Al-Qur’an Surat As-Saffat ayat 22-24,

۞ ٱحۡشُرُواْ ٱلَّذِينَ ظَلَمُواْ وَأَزۡوَٰجَهُمۡ وَمَا كَانُواْ يَعۡبُدُونَ ٢٢ مِن دُونِ
ٱللَّهِ فَٱهۡدُوهُمۡ إِلَىٰ صِرَٰطِ ٱلۡجَحِيمِ ٢٣ وَقِفُوهُمۡۖ إِنَّهُم مَّسۡـُٔولُونَ ٢٤

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Artinya: ”(Diperintahkan kepada malaikat), ”Kumpulkanlah orang-orang yang zalim beserta teman sejawat mereka dan apa yang dahulu mereka sembah, selain Allah lalu tunjukkanlah kepada mereka jalan ke neraka. Tahanlah mereka (di tempat perhentian), sesungguhnya mereka akan ditanya,” (QS. AS-Saffat: 22-24).

Berdasarkan surah As-Saffat ayat 22-24 yaitu mengumpulkan orang-orang yang zalim beserta teman sejawat mereka yang tidak mau menyembah selain Allah, sama halnya seperti himpunan yang dapat dikatakan memenuhi kondisi atau aksioma tertentu ketika dilakukannya pembuktian dan teorema yang mendukung. Proses pembuktian membutuhkan unsur pendukung tertentu yang terbukti dan tanggung jawab atas apa yang telah mereka lakukan.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

BAB III

METODE PENELITIAN

Dalam bab ini akan ditunjukkan tentang metode penelitian yang dilakukan, sehingga penelitian dapat berjalan dengan baik dalam hal materi maupun waktu pengerjaannya.

3.1. Jenis dan Sumber Data

Pada penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif yaitu penelitian yang bertujuan untuk memperoleh dan menganalisis hasil penelitian, kemudian dijabarkan dalam sebuah analisis hingga memperoleh kesimpulan sesuai tujuan penelitian(Puput, 2009). Selain itu, dalam arti proses yang sama dengan metode pengumpulan data, penelitian ini juga termasuk dalam penelitian tinjauan pustaka. Sebagai bentuk penelitian yang membaca, mencatat, dan menganalisis data yang dikumpulkan dalam bentuk jurnal atau buku, dan tidak menggunakan penelitian lapangan (Mestika, 2004). Penelitian ini menunjukkan dan menggambarkan secara jelas tentang pseudo Q-aljabar serta memaparkan definisi dan sifat-sifat yang terkait.

3.2. Metode Pengumpulan Data

Metode pengumpulan data dalam penelitian ini dilakukan pengamatan melalui referensi-referensi yang bersangkutan dengan pseudo Q-aljabar. Dari berbagai jurnal yang telah dikumpulkan, didapat jurnal utama yang berjudul *"Some Properties and Homomorphisms of Pseudo Q-Algebras"* oleh Shwan

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

A.Bajalan dan Sule A.Ozbal (Shwan A.B dan Sule A.O, 2016). Dari referensi tersebut, selanjutnya dilakukan analisis mengenai Q-aljabar serta sifat dan teorema yang terkait. Kemudian juga dilakukan analisis terhadap pseudo Q-aljabar.

3.3. Tahapan Penelitian

Tahap dalam penelitian ini sebagai berikut:

1 Melakukan studi literatur yang berkaitan dengan konsep pseudo Q-aljabar, dapat berupa buku, jurnal, hasil penelitian terdahulu, maupun sumber literatur lainnya.

2 Menunjukkan definisi dan contoh yang berkaitan dengan Q-aljabar, pseudo BCI-aljabar, pseudo BCH-aljabar serta menjelaskan dan membuktikan sifat-sifat serta teorema yang ada.

3 Menjelaskan definisi dan contoh serta membuktikan definisi dan sifat-sifat dari pseudo Q-aljabar.

4 Menyimpulkan dari hasil analisis yang dilakukan.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini definisi dan sifat-sifat dari pseudo Q-aljabar dan sifat keterkaitan antara pseudo Q-aljabar terhadap pseudo BCI-aljabar dan pseudo BCH-aljabar, serta integrasi dari struktur pseudo Q-aljabar dalam islam akan dijabarkan.

4.1. Pseudo Q-aljabar

Definisi 4.1.1 *(Bajalan,2016) A adalah suatu himpunan tak kosong yang memenuhi konstanta 0 dan terdapat suatu operasi biner $*$ dan $\circ$, dinotasikan $(A, *, \circ, 0)$ merupakan Pseudo Q-aljabar jika untuk setiap $x, y, z \in A$ memenuhi:*

(1) $x * x = x \circ x = 0$;

(2) $x * 0 = x \circ 0 = x$;

(3) $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$.

Contoh 4.1.2 Misalkan $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Ditentukan operasi biner $*$ dan $\circ$ pada A dengan tabel berikut:

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Tabel 4.1 Tabel cayley operasi $*$ pada A

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	2	0	0	0
3	3	2	0	0

Tabel 4.2 Tabel cayley operasi $\circ$ pada A

°	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	2	2	0	0
3	3	3	0	0

Himpunan A dengan operasi $*$ dan $\circ$ merupakan pseudo Q-aljabar karena memenuhi tiga kondisi yaitu

(1) Ambil sebarang $x \in A$, berlaku $x * x = x \circ x = 0$.

Misalkan $x = 1$. Diperoleh $1 * 1 = 0$ dan $1 \circ 1 = 0$

(2) Ambil sebarang $x \in A$, berlaku $x * 0 = x \circ 0 = x$.

Misalkan $x = 3$. Diperoleh $3 * 0 = 3$ dan $3 \circ 0 = 3$

(3) Ambil sebarang $x, y, z \in A$, berlaku $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Misalkan $x = 1, y = 2, z = 3$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
(x * y) \circ z &= (x \circ z) * y \\
(1 * 2) \circ 3 &= (1 \circ 3) * 2 \\
0 \circ 3 &= 0 * 2 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Contoh 4.1.3 Misalkan $A = \{0\}$. Ditentukan operasi biner $*$ dan $\circ$ pada A dengan hasilnya juga 0. Berikut tabel cayley operasi $*$ dan $\circ$ pada himpunan $A = \{0\}$

Tabel 4.3 Tabel cayley operasi $*$

*	0
0	0

Tabel 4.4 Tabel cayley operasi $\circ$

$\circ$	0
0	0

Himpunan A dengan operasi $*$ dan $\circ$ merupakan pseudo Q-aljabar, karena memenuhi tiga aksioma yaitu:

(1) Ambil sebarang $x \in A$, berlaku $x * x = x \circ x = 0$. Misalkan $x = 0$. Diperoleh $0 * 0 = 0$ dan $0 \circ 0 = 0$.

(2) Ambil sebarang $x \in A$, berlaku $x * 0 = x \circ 0 = x$. Misalkan $x = 0$. Diperoleh $0 * 0 = 0$ dan $0 \circ 0 = 0$.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

(3) Ambil sebarang $x, y, z \in A$, berlaku $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$. Misalkan $x = 0, y = 0, z = 0$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
(x * y) \circ z &= (x \circ z) * y \\
(0 * 0) \circ 0 &= (0 \circ 0) * 0 \\
0 \circ 0 &= 0 * 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Lebih lanjut himpunan $A = \{0\}$ disebut pseudo Q-aljabar trivial atau aljabar trivial. Secara umum untuk $A = \{a\}$ dengan definisi $a * a = a \circ a = 0$ merupakan pseudo Q-aljabar trivial.

Proposisi 4.1.4 *Jika* $(A, *, \circ, 0)$ *adalah pseudo Q-aljabar, maka* $(j * (j \circ k)) \circ k = (j \circ (j * k)) * k = 0$*, untuk sebarang* $j, k \in A$.

Bukti. Akan ditunjukkan $(j * (j \circ k)) \circ k = 0$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
&(j * (j \circ k)) \circ k && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } (x * y) \circ z = (x \circ z) * y\text{)} \\
&= (j \circ k) * (j \circ k) && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } (j \circ k) * (j \circ k) = 0\text{)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan $(j \circ (j * k) * k = 0$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
&(j \circ (j * k)) * k && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } (x * y) \circ z = (x \circ z) * y\text{)} \\
&= (j * k) \circ (j * k) && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } (j * k) \circ (j * k) = 0\text{)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Definisi 4.1.5 *Pada pseudo Q-aljabar A didefinisikan relasi terurut parsial, yaitu $\leq$. Dimana untuk setiap $x \leq y$ jika dan hanya jika $x * y = 0$ dan $x \circ y = 0$ untuk sebarang $x, y \in A$.*

Proposisi 4.1.6 *Misalkan $(A, *, \circ, 0)$ adalah pseudo Q-aljabar jika untuk semua $j, k \in A$:*

(1) $j \leq 0 \Rightarrow j = 0$

(2) $j * (j \circ k) \leq k, j \circ (j * k) \leq k$

(3) $0 * j = 0 \circ j$

(4) $j \leq k \Rightarrow 0 * j = 0 \circ k$

(5) $0 \circ (0 * (0 \circ j)) = 0 \circ j, 0 * (0 \circ (0 * j)) = 0 * j$

(6) $0 * (j * k) = (0 \circ j) \circ (0 * k)$

(7) $0 \circ (j \circ k) = (0 * j) * (0 \circ k)$

Bukti.

(1) Diketahui $j \leq 0$ berarti $j * 0 = 0$ dan $j \circ 0 = 0$. Akan ditunjukkan $j = 0$. Berdasarkan Definisi 4.1.1 yaitu $j * 0 = j \circ 0 = j$, maka didapat

$$j * 0 = 0$$
$$\Leftrightarrow j = 0$$

(2) Akan ditunjukkan $j * (j \circ k) \leq k$ dan $j \circ (j * k) \leq k$.

(i) Akan ditunjukkan $j * (j \circ k) \leq k$. Atau dengan kata lain, berdasarkan

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Definisi 4.1.5 akan ditunjukkan bahwa $(j*(j\circ k))\circ k = 0$. Diperhatikan,

$$\begin{aligned}
&(j*(j\circ k))\circ k && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } (x*y)\circ z = (x\circ z)*y\text{)}\\
&= (j\circ k)*(j\circ k) && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } (j\circ k)*(j\circ k) = 0\text{)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

(ii) Akan ditunjukkan $j\circ(j*k)\leq k$. Atau dengan kata lain, berdasarkan Definisi 4.1.5 akan ditunjukkan bahwa $(j\circ(j*k))*k = 0$. Diperhatikan,

$$\begin{aligned}
&(j\circ(j*k))*k && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } (x*y)\circ z = (x\circ z)*y\text{)}\\
&= (j*k)\circ(j*k) && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } (j*k)\circ(j*k) = 0\text{)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

(3) Akan ditunjukkan $0*j = 0\circ j$. Diperhatikan dengan Definisi 4.1.1 dipunyai $j*j = j\circ j = 0$ lebih lanjut diperoleh

$$\begin{aligned}
0*j &= (j\circ j)*j && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } (x*y)\circ z = (x\circ z)*y\text{)}\\
&= (j*j)\circ j && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } j*j = 0\text{)}\\
&= 0\circ j
\end{aligned}$$

(4) Diketahui $j\leq k$ artinya $j\circ k = 0$. Akan ditunjukkan $0*j = 0\circ k$. Diperhatikan,

$$\begin{aligned}
0*j &= (j\circ k)*j && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } (x*y)\circ z = (x\circ z)*y\text{)}\\
&= (j*j)\circ k && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } j*j = 0\text{)}\\
&= 0\circ k
\end{aligned}$$

(5) Akan ditunjukkan $0\circ(0*(0\circ j)) = 0\circ j$ dan $0*(0\circ(0*j)) = 0*j$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

(i) Akan ditunjukkan $0 \circ (0 * (0 \circ j)) = 0 \circ j$. Berdasarkan Proposisi 4.1.6 poin 2 diperoleh

$0 * (0 \circ j) \leq j$ (Proposisi 4.1.6 ypoin 4)

$0 \circ (0 * (0 \circ j)) = 0 \circ j$ (Proposisi 4.1.6 yaitu $0 * j = 0 \circ j$)

(ii) Akan ditunjukkan $0 * (0 \circ (0 * j)) = 0 * j$. Berdasarkan Proposisi 4.1.6 poin 2 diperoleh

$0 \circ (0 * j) \leq j$ (Proposisi 4.1.6 ypoin 4)

$0 * (0 \circ (0 * j)) = 0 * j$ (Proposisi 4.1.6 yaitu $0 * j = 0 \circ j$)

(6) Akan ditunjukkan $0 * (j * k) = (0 \circ j) \circ (0 * k)$. Diperhatikan

$(0 \circ j) \circ (0 * k)$ (Definisi 4.1.1 yaitu $(j * k) * (j * k) = 0$)

$= (((j * k) * (j * k)) \circ j) \circ (0 * k)$ (Definisi 4.1.1 yaitu $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$)

$= (((j * k) \circ j) * (j * k)) \circ (0 * k)$ (Definisi 4.1.1 yaitu $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$)

$= (((j \circ j) * k) * (k * j)) \circ (0 * k)$ (Definisi 4.1.1 yaitu $j * j = j \circ j = 0$)

$= (((0 * k) * (j * k)) \circ (0 * k)$ (Definisi 4.1.1 yaitu $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$)

$= (((0 * k) \circ (0 * k)) * (j * k)$ (Definisi 4.1.1 yaitu $(0 * k) \circ (0 \circ k) = 0$)

$= 0 * (j * k)$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

(7) Akan ditunjukkan $0 \circ (j \circ k) = (0 * j) * (0 \circ k)$. Diperhatikan

$$
\begin{aligned}
&(0 * j) * (0 \circ k) && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } (j \circ k) \circ (j \circ k) = 0\text{)} \\
&= (((j \circ k) \circ (j \circ k)) * j) * (0 \circ k) && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } (x * y) \circ z = (x \circ z) * y\text{)} \\
&= (((j \circ k) * j) \circ (j \circ k)) * (0 \circ k) && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } (x * y) \circ z = (x \circ z) * y\text{)} \\
&= (((j * j) \circ k) \circ (j \circ k)) * (0 \circ k) && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } j * j = j \circ j = 0\text{)} \\
&= (((0 \circ k) \circ (j \circ k)) * (0 \circ k) && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } (x * y) \circ z = (x \circ z) * y\text{)} \\
&= (((0 \circ k) * (0 \circ k)) \circ (j \circ k) && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } (0 \circ k) * (0 \circ k) = 0\text{)} \\
&= 0 \circ (j \circ k)
\end{aligned}
$$

■

Teorema 4.1.7 *Misalkan* $(A, *, \circ, 0)$ *adalah pseudo Q-aljabar. Pernyataan berikut saling ekuivalen:*

(i) $j * (k * l) = (j * k) * l$,

(ii) $0 * j = j = 0 \circ j$,

(iii) $j * k = j \circ k = k * j$,

(iv) $j \circ (k \circ l) = (j \circ k) \circ l$

untuk setiap $j, k, l \in A$.

Bukti.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Diketahui $j * (k * l) = (j * k) * l$, untuk setiap $j, k, l \in A$.

Akan ditunjukkan $0 * j = j = 0 \circ j$, untuk setiap $j \in A$.

Ambil sebarang $j \in A$.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Berdasarkan Definisi pseudo Q-aljabar poin 2 diperoleh

$$\begin{aligned} j &= j * 0 && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } j * j = 0) \\ &= j * (j * j) && \text{(Definisi 4.1.1 } x * (y * z) = (x * y) * z) \\ &= (j * j) * j && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } j * j = 0) \\ &= 0 * j \end{aligned}$$

Lebih lanjut dengan menggunakan Proposisi 4.1.6 poin 3 diperoleh $j = 0 * j = 0 \circ j$.

Jadi terbukti $0 * j = j = 0 \circ j$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Diketahui $0 * j = j = 0 \circ j$, untuk setiap $j \in A$.

Akan ditunjukkan $j * k = l \circ k = k * j$, untuk setiap $j, k \in A$.

Ambil sebarang $j, k \in A$. Diperhatikan berdasarkan diketahui diperoleh

$$\begin{aligned} j * k &= 0 * (j * k) && \text{(Proposisi 4.1.6 yaitu } 0 * (j * k) = (0 \circ j) \circ (0 * k)) \\ &= (0 \circ j) \circ (0 * k) && \text{(Diketahui } 0 * j = j = 0 \circ j) \\ &= j \circ k \end{aligned}$$

Lebih lanjut berdasarkan diketahui diperoleh

$$\begin{aligned} j \circ k &= (0 * j) \circ k && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } (x * y) \circ z = (x \circ z) * y) \\ &= (0 \circ k) * j && \text{(Diketahui } 0 \circ k = k) \\ &= k * j \end{aligned}$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Diketahui $j * k = j \circ k = k * j$, untuk setiap $j, k \in A$.

Akan ditunjukkan $j \circ (k \circ l) = (j \circ k) \circ l$, untuk setiap $j, k, l \in A$.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Ambil sebarang $j, k, l \in A$. Berdasarkan diketahui $j \circ k = k * j$ diperoleh

$$\begin{aligned} j \circ (k \circ l) &= (k \circ l) * j \quad \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } (x * y) \circ z = (x \circ z) * y) \\ &= (k * j) \circ l \quad \text{(Diketahui } k * j = j \circ k) \\ &= (j \circ k) \circ l \end{aligned}$$

$(iv) \Rightarrow (i)$ Diketahui $j \circ (k \circ l) = (j \circ k) \circ l$, untuk setiap $j, k, l \in A$.

Akan ditunjukkan $j * (k * l) = (j * k) * l$, untuk setiap $j, k, l \in A$. Ambil sebarang $j, k, l \in A$. Berdasarkan Teorema 4.1.7 poin (iii) diperoleh

$$\begin{aligned} j * (k * l) &= j \circ (k \circ l) \quad \text{(Teorema 4.1.7 poin (i))} \\ &= (j \circ k) \circ l \quad \text{(Teorema 4.1.7 poin (iii))} \\ &= (j * k) * l \end{aligned}$$

■

4.2. Hubungan pseudo Q-aljabar terhadap pseudo BCI-aljabar dan pseudo BCH-aljabar

Berikut akan diberikan sifat terkait pseudo Q-aljabar terhadap pseudo BCI-aljabar dan pseudo BCH-aljabar.

Teorema 4.2.1 *Setiap pseudo Q-aljabar memenuhi*

(i) Pseudo BCI-aljabar poin 2 yaitu $x * (x \circ y) \leq y, x \circ (x * y) \leq y$.

(ii) Pseudo BCI-aljabar poin 3 yaitu $x \leq x$.

Bukti. Misalkan A adalah pseudo Q-aljabar. Akan ditunjukkan

(i) Pseudo BCI-aljabar poin 2 yaitu $x * (x \circ y) \leq y, x \circ (x * y) \leq y$.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

(ii) Pseudo BCI-aljabar poin 3 yaitu $x \leq x$.

Diperhatikan

(i) Berdasarkan Proposisi 4.1.6 poin 2 yaitu jelas terpenuhi

$$x * (x \circ y) \leq y$$
$$dan$$
$$x \circ (x * y) \leq y$$

(ii) Akan ditunjukkan $x \leq x$ atau dengan kata lain akan ditunjukkan

(a) $x * x = 0$

(b) $x \circ x = 0$

Jelas terpenuhi $x * x = 0$ dan $x \circ x = 0$ sebab berdasarkan Definisi pseudo Q-aljabar poin 1 yaitu $x * x = x \circ x = 0$. ■

Contoh 4.2.2 Misalkan $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Ditentukan operasi biner $*$ dan $\circ$ pada A dengan tabel berikut

Tabel 4.5 Tabel cayley operasi $*$

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	2	0	0	0
3	3	2	3	0

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Tabel 4.6 Tabel cayley operasi $\circ$

$\circ$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	2	2	0	0
3	3	1	0	0

Akan ditunjukkan

(i) Pseudo BCI-aljabar poin 2 $x * (x \circ y) \leq y, x \circ (x * y) \leq y$.

(ii) Pseudo BCI-aljabar poin 3 yaitu $x \leq x$.

(i) Ambil sebarang $x, y \in A$, akan ditunjukkan $x * (x \circ y) \leq y$ atau dengan kata lain berdasarkan Definisi 4.1.5 didapat $(x * (x \circ y)) \circ y = 0$. Misal $x = 1$ dan $y = 2$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&(x * (x \circ y)) \circ y \\
&= (1 * (1 \circ 2)) \circ 2 \\
&= (1 * 0) \circ 2 \\
&= (1 \circ 2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ambil sebarang $x, y \in A$, akan ditunjukkan $x \circ (x * y) \leq y$ atau dengan kata lain berdasarkan Definisi 4.1.5 didapat $(x \circ (x * y)) * y = 0$. Misal $x = 1$ dan

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$y = 2$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&(x \circ (x * y)) * y \\
&= (1 \circ (1 * 2)) * 2 \\
&= (1 \circ 0) * 2 \\
&= (1 * 2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(ii) Akan ditunjukkan $x \leq x$ atau dengan kata lain berdasarkan Definisi 4.1.5 akan ditunjukkan $x * x = 0$ dan $x \circ x = 0$. Misal $x = 2$ atau dengan kata lain akan ditunjukkan

(a) $x * x = 0$

$2 * 2 = 0$

(b) $x \circ x = 0$

$2 \circ 2 = 0$

Teorema 4.2.3 *Setiap pseudo BCH-aljabar A adalah pseudo Q-aljabar. Dengan kata lain, akan ditunjukkan terpenuhi aksioma*

(i) $x * x = x \circ x = 0$

(ii) $x * 0 = x = x \circ x$

(iii) $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$

Bukti. Misalkan A adalah pseudo BCH-aljabar. Akan ditunjukkan A adalah pseudo Q-aljabar.

Diperhatikan

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

(i) Jelas bahwa $x * x = x \circ x = 0$ berdasarkan aksioma pseudo BCH-aljabar Definisi 2.3.3 poin 1 yaitu $x * x = x \circ x = 0$.

Karena A adalah pseudo BCH-aljabar.

(ii) Berdasarkan Proposisi 2.3.4 poin 4 diperoleh bahwa

$x * 0 = x = x \circ 0$.

(iii) Jelas bahwa $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$ berdasarkan pseudo BCH-aljabar Definisi 2.3.3 poin 2 yaitu $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$.

■

Contoh 4.2.4 Misal A adalah pseudo BCH-aljabar dan $A = \{0, a, b, c, d\}$. Ditentukan operasi biner $*$ dan $\circ$ pada A dengan tabel berikut

Tabel 4.7 Tabel cayley operasi $*$

*	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	d
a	a	0	a	0	d
b	b	b	0	0	d
c	c	b	c	0	d
d	d	d	d	d	0

Tabel 4.8 Tabel cayley operasi $\circ$

°	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	d
a	a	0	a	0	d
b	b	b	0	0	d
c	c	c	a	0	d
d	d	d	d	d	0

Himpunan A dengan operasi biner $*$ dan $\circ$ merupakan pseudo BCH-aljabar dan akan ditunjukkan A adalah pseudo Q-aljabar. Diperhatikan

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

(i) Ambil sebarang $x \in A$. Akan ditunjukkan $x * x = x \circ x = 0$ atau dengan kata lain $x * x = 0 dan x \circ x = 0$. Misal $x = c$ sehingga berdasarkan tabel cayley didapatkan $c * c = 0$ dan $c \circ c = 0$.

(ii) Ambil sebarang $x \in A$. Akan ditunjukkan $x * 0 = x = b \circ 0$ atau dengan kata lain $x * 0 = x dan x \circ 0 = x$. Misal $x = b$ sehingga berdasarkan tabel cayley didapatkan $b * 0 = b$ dan $b \circ 0 = b$.

(iii) Ambil sebarang $x \in A$. Akan ditunjukkan $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$. Misal $x = a, y = 0, z = d$ sehingga berdasarkan tabel cayley didapatkan

$$\begin{aligned}
(x * y) \circ z &= (x \circ z) * y \\
(a * 0) \circ d &= (a \circ d) * 0 \\
a \circ d &= d * 0 \\
d &= d
\end{aligned}$$

Lebih lanjut, kebalikan pernyataan dari Teorema 4.2.3 dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 4.2.5 *Setiap pseudo Q-aljabar A memenuhi:*

$$(x * y) = (x \circ y) = 0 \Rightarrow x = y$$

merupakan kondisi dari pseudo BCH-aljabar.

Bukti. Misalkan A adalah pseudo Q-aljabar dimana terpenuhi

$$(x * y) = (x \circ y) = 0 \Rightarrow x = y$$

Akan ditunjukkan A adalah pseudo BCH-aljabar.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Atau dengan kata lain, akan ditunjukkan terpenuhi

(1) $x * x = x \circ x = 0$

(2) $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$

(3) $x * y = y \circ x = 0 \Rightarrow x = y$

(4) $x * y = 0 \Leftrightarrow x \circ y = 0$

(1) Karena A adalah pseudo Q-aljabar. Jelas terpenuhi $x * x = x \circ x = 0$ berdasarkan pseudo Q-aljabar Definisi 4.1.1 poin 1 yaitu $x * x = x \circ x = 0$.

(2) Karena A adalah pseudo Q-aljabar. Jelas terpenuhi $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$ berdasarkan pseudo Q-aljabar Definisi 4.1.1 poin 3 yaitu $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$.

(3) Berdasarkan diketahui jelas terpenuhi $(x * y) = (y \circ x) = 0 \Rightarrow x = y$.

(4) Akan ditunjukkan $x * y = 0 \Leftrightarrow x \circ y = 0$.

($\Rightarrow$) Diketahui $x * y = 0$. Berdasarkan syarat yang ada $x = y$. Akan ditunjukkan $x \circ y = 0$. Diperhatikan

$$\begin{aligned} x \circ y &= x \circ x \quad \text{(Definisi 2.3.3 yaitu } x \circ x = 0\text{)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Diketahui $x \circ y = 0$.

Akan ditunjukkan $x * y = 0$. Dengan menggunakan Teorema 4.1.7 yaitu

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

$x * y = x \circ y$, sehingga

$$\begin{aligned} x * y &= x \circ x \quad \text{(Definisi 2.3.3 yaitu } x \circ x = 0\text{)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Teorema 4.2.6 *Setiap pseudo Q-aljabar A memenuhi*

$$j * (j \circ k) = j * k$$

atau

$$j \circ (j * k) = j \circ k$$

untuk semua $j, k \in A$, dimana A merupakan aljabar trivial.

Bukti. Misalkan A adalah pseudo Q-aljabar.

Dimana A memenuhi

$$j * (j \circ k) = j * k$$

atau

$$j \circ (j * k) = j \circ k$$

Akan ditunjukkan A adalah aljabar trivial.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

Misalkan $j = k$. Akibatnya diperoleh

$$\begin{aligned}
& j * (j \circ k) && = j \circ k \\
\Leftrightarrow\ & j * (j \circ j) && = j * j && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } j * j = j \circ j = 0) \\
\Leftrightarrow\ & j * 0 && = 0 && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } j * 0 = j) \\
\Leftrightarrow\ & j && = 0
\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}
& j \circ (j * k) && = j \circ k \\
\Leftrightarrow\ & j \circ (j * j) && = j \circ j && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } j * j = j \circ j = 0) \\
\Leftrightarrow\ & j \circ 0 && = 0 && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } j \circ 0 = j) \\
\Leftrightarrow\ & j && = 0
\end{aligned}$$

Karena $j = 0$ dan $j = k$, sehingga diperoleh $j = 0$. Jadi, A merupakan aljabar trivial. ■

Pada Teorema 4.2.6 hanya berlaku jika $j = k = 0$. Hal ini tidak berlaku jika $j \neq k$, sebab dimisalkan diberikan pseudo Q-aljabar $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Misalkan $j = 1$ dan $k = 2$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
j * (j \circ k) &\neq j \circ k \\
1 * (1 \circ 2) &\neq 1 \circ 2 \\
1 * 0 &\neq 1 \circ 2 \\
1 &\neq 0
\end{aligned}$$

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

atau

$$\begin{aligned} j \circ (j * k) &\neq j \circ k \\ 1 \circ (1 * 2) &\neq 1 \circ 2 \\ 1 \circ 0 &\neq 1 \circ 2 \\ 1 &\neq 0 \end{aligned}$$

4.3. Integrasi Keilmuan

Hasil yang diperoleh pada penelitian ini cukup memuaskan yang mana pseudo Q-aljabar memiliki sifat-sifat antara lain (1) $x * x = x \circ x = 0$; (2) $x * 0 = x \circ 0 = x$; (3) $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$. Oleh karena itu, hasil yang diperoleh sesuai dengan tujuan penelitian yaitu untuk membuktikan dan memecahkan sifat-sifat serta teorema yang ada. Tujuan ini dapat terlaksana karena adanya bekerja keras, seperti yang dijelaskan firman Allah SWT pada surat Az-Zummar ayat 39.

قُلْ يٰقَوْمِ اعْمَلُوْا عَلٰى مَكَانَتِكُمْ اِنِّيْ عَامِلٌ ۚ فَسَوْفَ تَعْلَمُوْنَ ۙ

Artinya: ”Katakanlah (Muhammad),”Wahai kaumku! Berbuatlah menurut kedudukanmu, aku pun berbuat (demikian). Kelak kamu akan mengetahui” (QS. Az-Zummar:39).

Berdasarkan firman tersebut, Allah selalu meminta manusia untuk selalu bersemangat dalam bekerja apapun pekerjaannya selama tidak melanggar hal yang dilarang oleh agama maupun negara. Semangat kerja yang dilakukan juga tentunya harus didasari sesuai kemampuan yang dimiliki.

Islam telah menganjurkan kepada seluruh muslim untuk selalu bekerja

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

keras agar dapat menghasilkan sesuatu yang baru. Kerja kerasnya seseorang itu bisa mencakup kebaikan ataupun keburukan dan kelak akan memperoleh hasil sesuai yang dilakukan, seperti yang dijelaskan dalam firman Allah QS. Al-Insyiqaq ayat 6.

يَٰٓأَيُّهَا ٱلْإِنسَٰنُ إِنَّكَ كَادِحٌ إِلَىٰ رَبِّكَ كَدْحًا فَمُلَٰقِيهِ

Artinya: ”Wahai manusia! Sesungguhnya kamu telah bekerja keras menuju Tuhanmu, maka kamu akan menemui-Nya”(QS. Al-Insyiqaq:6).

Berdasarkan ayat tersebut menjelaskan bahwa ketika seseorang bekerja keras akan selalu menuai hasilnya. Sehingga dalam analisis ini dapat menghasilkan sifat-sifat pseudo Q-aljabar yaitu (1) $x * x = x \circ x = 0$; (2) $x * 0 = x \circ 0 = x$; (3) $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$, dan menghasilkan hubungan antara pseudo BCI-aljabar serta pseudo BCH-aljabar terhadap pseudo Q-aljabar.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

BAB V

PENUTUP

5.1. Simpulan

Berdasarkan hasil penjelasan pada bab sebelumnya, sehingga dapat disimpulkan, bahwa

1. Definisi dan sifat pseudo Q-aljabar:

   (i) Pseudo Q-aljabar memiliki definisi bahwa A merupakan suatu himpunan tak kosong yang memenuhi konstanta 0 dan terdapat suatu operasi biner $*$ dan $\circ$, dinotasikan $(A, *, \circ, 0)$, jika untuk setiap $x, y, z \in A$. Memenuhi (1) $x * x = x \circ x = 0$; (2) $x * 0 = x \circ 0 = x$; (3) $(x * y) \circ z = (x \circ z) * y$.

   (ii) Sifat pseudo Q-aljabar yaitu (a)jika $(A, *, \circ, 0)$ adalah pseudo Q-aljabar, maka $(j * (j \circ k)) \circ k = (j \circ (j * k)) * k = 0$, untuk sebarang $j, k \in A$.(b) Misalkan $(A, *, \circ, 0)$ adalah pseudo Q-aljabar jika untuk semua $j, k \in A$ memenuhi (1) $j \leq 0 \Rightarrow j = 0$; (2) $j * (j \circ k) \leq k, j \circ (j * k) \leq k$;(3) $0 * j = 0 \circ j$;(4) $j \leq k \Rightarrow 0 * j = 0 \circ k$;(5) $0 \circ (0 * (0 \circ j)) = 0 \circ j, 0 * (0 \circ (0 * j)) = 0 * j$;(6)$0 * (j * k) = (0 \circ j) \circ (0 * k)$ (7) $0 \circ (j \circ k) = (0 * j) * (0 \circ k)$. (c) Misalkan $(A, *, \circ, 0)$ adalah pseudo Q-aljabar. Pernyataan berikut saling ekuivalen (i) $j * (k * l) = (j * k) * l$; (ii) $0 * j = j = 0 \circ j$; (iii) $j * k = j \circ k = k * j$; (iv) $j \circ (k \circ l) = (j \circ k) \circ l$ untuk setiap $j, k, l \in A$.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

2. Hubungan antara pseudo BCI-aljabar serta pseudo BCH-aljabar terhadap pseudo Q-aljabar:

   (i) Setiap pseudo Q-aljabar merupakan pseudo BCI-aljabar dengan aksioma berikut (1) Pseudo BCI-aljabar poin 2 yaitu $x * (x \circ y) \leq y, x \circ (x * y) \leq y$; (2) Pseudo BCI-aljabar poin 3 yaitu $x \leq x$.

   (ii) Setiap pseudo BCH-aljabar merupakan pseudo Q-aljabar dan dapat dikatakan jika memenuhi $(x * y) = (y \circ x) = 0 \Rightarrow x = y$ maka setiap pseudo Q-aljabar adalah pseudo BCH-aljabar.

5.2. Saran

Berdasarkan analisis dan pembahasan pseudo Q-aljabar yang telah dilakukan, maka penelitian terkait homomorfisma pseudo Q-aljabar dapat dilakukan lebih lanjut.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

DAFTAR PUSTAKA

Azura, Raisa. (2019). *Q-aljabar*. Jurnal Matematika UNAND. Vol. VII No. 1 Hal. 1-8.

Badriqul, M.Mudrik dan Agung L. (2018). *Sifat-sifat Q-aljabar*. Jurnal Ilmiah Matematika Vol. 6 No. 3.

Bajalan, A, Shwan dan A.Ozbal, Sule. (2016). *Some Properties and Homomorphisms of Pseudo Q-algebras*. Journal of Contemporary Applied Mathematics Vol. 6 No. 2.

Dar,K.H. dan Akram,M..(2006). *On Subclasses of K-Algebras*. Journal: Annuals of University of Craiova,Math.Comp.Sci.Ser.

Lee, K.J dan Park, C.H. (2009). *Some Ideals of Pseudo BCI-algebras*. Journal App.Math Informatics, 27(1-2):217-231.

Mestika, Z. (2004). *Metode Penelitian Kepustakaan*. Yayasan Obor Indonesia, Jakarta.

Mutia dan Huda, Mualimul. (2017). *Mengenal Matematika dalam Perspektif Islam* Fokus: Jurnal Kajian Keislaman dan Kemasyarakatan, Vol. 2, No. 02.

Neggers, J. Ahn, S.S Kim, H.S. (2001). *On Q-Algebra*. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol 27 (12): hal 749-757.

Ni'mah,Z.,Hafiyusholeh,M., Utami,W.D. (2020). *Normally Flat Content Semimodules*. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1538, No. 1, p. 012028). IOP Publishing.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id

QP Hu X Li. (1983). *On BCH-algebras*. Math Seminar Note II 313-320.

S. Ahn Hs Kim. (1999). *On BCH-algebras* Journal Chungcheong Math. Sco. 12, hal 33-41.

Saeful Rahmat, Puput. (2009). *Penelitian Kualitatif*. EQUILIBIZIUM, Vol 5 No. 9 Hal 1-8.

Siagian,D.M. (2016). *Kemampuan Koneksi Matematika dalam Pembelajaran Matematika*. MES(Journal of mathematics education and science). Vol.2, No.1.

Walendziak, A. (2016). *On Ideal of Pseudo BCH-algebras*. Annales University Mariae Curie Lubkin Polonia. Vol LXX, No. 1 Hal. 81-91.

Walendziak, A. (2016). *Pseudo BCH-algebras*. Discussiones Mathematicae General Algebra and Applications 35, hal.5-19.

Walendziak, A Dudek Young, B. (2008). *Pseudo BCI-algebras*. East Asian Math. Journal. 24, No. 2 Hal. 187-190.

Y.Imai K.Iski. (1966). *On Axiom Systems of Propositional Calculi*. Proc. Japan Acad. 42, 19-22.

Young, B. Hee S J, Neggers. (2006). *On Pseudo BCI Ideal of Pseudo BCI-algebras*. Mathematic Bechnk, 58 hal. 39-46.

digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id digilib.uinsby.ac.id