**OPERASI *CLOSURE* PADA MV-ALJABAR**

# SKRIPSI

UIN SUNAN AMPEL
S U R A B A Y A

Disusun Oleh

**PUTRI WIDIYA ARIYANTI**

**H72217058**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL**

**SURABAYA**

**2022**

# PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini,

| | | |
|---|---|---|
| Nama | : | PUTRI WIDIYA ARIYANTI |
| NIM | : | H72217058 |
| Program Studi | : | Matematika |
| Angkatan | : | 2017 |

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul "OPERASI *CLOSURE* PADA MV-ALJABAR". Apabila suatu saat nanti terbukti saya melakukan tindakan plagiat, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian pernyataan keaslian ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 28 Januari 2022

Yang menyatakan,

PUTRI WIDIYA ARIYANTI

NIM. H72217058

## LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

Skripsi oleh

| | | |
|---|---|---|
| Nama | : | PUTRI WIDIYA ARIYANTI |
| NIM | : | H72217058 |
| Judul Skripsi | : | OPERASI *CLOSURE* PADA MV-ALJABAR |

telah diperiksa dan disetujui untuk diujikan.

| Pembimbing I | Pembimbing II |
|---|---|
| Wika Dianita Utami, M.Sc | Dr. Abdulloh Hamid, M.Pd |
| NIP. 199206102018012003 | NIP. 198508282014031003 |

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika
UIN Sunan Ampel Surabaya

Aris Fanani, M.Kom
NIP. 198701272014031002

# PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI

Skripsi oleh

| | | |
|---|---|---|
| Nama | : | PUTRI WIDIYA ARIYANTI |
| NIM | : | H72217058 |
| Judul Skripsi | : | OPERASI *CLOSURE* PADA MV-ALJABAR |

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji
pada tanggal 28 Januari 2022

Mengesahkan,
Tim Penguji

| Penguji I | Penguji II |
|---|---|
| Dr. Moh. Hafiyusholeh, M.Si., M.PMat. | Putroe Keumala Intan, M.Si |
| NIP. 198002042014031001 | NIP. 198805282018012001 |

| Penguji III | Penguji IV |
|---|---|
| Wika Dianita Utami, M.Sc | Dr. Abdulloh Hamid, M.Pd |
| NIP. 199206102018012003 | NIP. 198508282014031003 |

Mengetahui,
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Ampel Surabaya

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI UIN SUNAN AMPEL SURABAYA

Prof. Dr. Hj. Evi Fatimatur Rusydiyah, M.Ag
NIP. 197312272005012003

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL SURABAYA
PERPUSTAKAAN
Jl. Jend. A. Yani 117 Surabaya 60237 Telp. 031-8431972 Fax.031-8413300
E-Mail: perpus@uinsby.ac.id

## LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika UIN Sunan Ampel Surabaya, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

| | |
|---|---|
| Nama | : PUTRI WIDIYA ARIYANTI |
| NIM | : H72217058 |
| Fakultas/Jurusan | : SAINTEK /MATEMATIKA |
| E-mail address | : pewe9791@ymail.com |

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah :
☑ Sekripsi ☐ Tesis ☐ Desertasi ☐ Lain-lain (……………………………)
yang berjudul :

OPERASI CLOSURE PADA IMV - ALJABAR

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan Hak Bebas Royalti Non-Ekslusif ini Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (database), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di Internet atau media lain secara ***fulltext*** untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Surabaya, 18 April 2022

Penulis

( PUTRI WIDIYA A )
*nama terang dan tanda tangan*

# ABSTRAK

## OPERASI *CLOSURE* PADA MV-ALJABAR

MV-aljabar $M$ adalah struktur aljabar dengan dua operasi biner (yaitu $\oplus$ dan $*$) yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu pada MV-aljabar. Dalam MV-aljabar didefinisikan suatu Ideal dan dalam suatu Ideal MV-aljabar, dibentuk suatu himpunan yang berisikan ideal-ideal dari MV-aljabar yang dinyatakan sebagai operasi *closure*. Sehingga muncullah gagasan mengenai operasi *closure* pada MV-aljabar. Operasi *closure* pada MV-aljabar merupakan suatu pemetaan $c : Id(A) \rightarrow Id(A)$ yang memenuhi beberapa aksioma yaitu $(1) I \subseteq I^c, (2) I^{cc} = I^c,$ dan $(3)$ Jika $I \subseteq J$ maka $I^c \subseteq J^c,$ dimana $I^c$ adalah *closure* $I.$ Adapun sifat - sifat dari operasi *closure* pada MV-aljabar adalah $(1)$ *Closure* Stabil dimana $A$ adalah sebuah MV-Aljabar, jika $Id(A)$ adalah *linearly order by inclusion* maka setiap operasi *closure* pada A adalah stabil. $(2)$ *Closure Semi-Prime* dimana operasi *closure* $c$ adalah *semi-prime* jika dan hanya jika $(I^c \odot J^c)^c = (I \odot J)^c$ untuk setiap ideal $I, J \in A.$

**Kata kunci**: MV-aljabar, Closure MV-aljabar, Closure Stabil, dan Closure Semi-Prime

## ABSTRACT


### CLOSURE OPERATIONS ON MV-ALGEBRAS

MV-algebras $M$ is an algebraic structure with two binary operations (namely $\oplus$ and $*$) that satisfy certain axioms of MV-algebras. In MV-algebras defined an Ideal. In an Ideal MV-algebras, a set containing the ideals of MV-algebras is formed which is expressed as the *closure* operation. Thus, the idea of *closure* in MV-algebras came up. The *closure* operation in MV-algebras is a mapping $c : Id(A) \rightarrow Id(A)$ which satisfies several axioms namely $(1) I \subseteq I^c, (2) I^{cc} = I^c,$ and $(3)$ If $I \subseteq J$ then $I^c \subseteq J^c,$ where $I^c$ is closure $I$. The properties of the *closure* operation on MV-algebra are $(1)$ *Closure* Stable where $A$ is an MV-Algebras, if $Id(A)$ is *linearly order by inclusion* then every *closure* operation on A is stable. $(2)$ *Closure Semi-Prime* where operation *closure* $c$ is *semi-prime* if and only if $(I^c \odot J^c)^c = (I \odot J)^c$ for every ideal $I, J \in A$.



**Keywords**: MV-algebras, Closure MV-algebras, Stable Closure, and Semi-Prime Closure

# DAFTAR ISI

# DAFTAR TABEL

# DAFTAR LAMBANG

| | |
|---|---|
| $\in$ | : Elemen atau anggota |
| $\odot$ | : Operasi biner pada MV-aljabar |
| $\ominus$ | : Operasi biner pada MV-aljabar |
| $\leq$ | : Operasi parsial pada MV-aljabar |
| $\subseteq$ | : Subset atau himpunan bagian |
| $\neq$ | : Tidak subset atau bukan merupakan himpunan bagian |
| $\alpha$ | : Indeks alpha |
| $\Lambda$ | : Indeks lambda |
| $\beta$ | : Indeks beta |
| $\bigcap$ | : Intersection atau irisan |
| $\sum$ | : Jumlahan |
| $\blacksquare$ | : Akhir suatu bukti |
| $(M, \oplus, *)$ | : Operasi biner pada MV-Aljabar |

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1. Latar Belakang Masalah

Matematika ialah ilmu pasti yang terdiri dari beberapa subkeilmuan, yaitu analisis, statistika, ilmu terapan dan ilmu komputasi. Bidang analisis ialah bidang ilmu matematika yang mengkaji tentang konsep aljabar. Pola mengkaji konsep analisis diawali dengan suatu definisi serta aksioma yang kemudian dipergunakan untuk pembuktian sebuah teorema, lemma, serta proposisi (Zaidatun , 2019). Banyak konsep matematika yang termuat pada al-Qur'an, termasuk konsep aljabar. Sebagaimana ditunjukkan dengan ayat al-Qur'an yang membahas mengenai operasi bilangan dalam surat Al-Baqarah (2) ayat 234:

وَالَّذِيْنَ يُتَوَفَّوْنَ مِنْكُمْ وَيَذَرُوْنَ اَزْوَاجًا يَّتَرَبَّصْنَ بِاَنْفُسِهِنَّ اَرْبَعَةَ اَشْهُرٍ وَّعَشْرًا ۚ
فَاِذَا بَلَغْنَ اَجَلَهُنَّ فَلَا جُنَاحَ عَلَيْكُمْ فِيْمَا فَعَلْنَ فِيْٓ اَنْفُسِهِنَّ بِالْمَعْرُوْفِ ۗ وَاللّٰهُ بِمَا
تَعْمَلُوْنَ خَبِيْرٌ

Artinya: "Dan orang-orang yang mati di antara kamu serta meninggalkan istri-istri hendaklah mereka (istri-istri) menunggu empat bulan sepuluh hari. Kemudian apabila telah sampai (akhir) idah mereka, maka tidak ada dosa bagimu mengenai apa yang mereka lakukan terhadap diri mereka menurut cara yang patut. Dan Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan."(QS. Al-Baqarah : 234)

Berdasarkan Q.S. Al-Baqarah ayat 234, terdapat operasi penjumlahan yang dianalogkan dengan masa idah. Masa idah itu sendiri adalah empat bulan lebih sepuluh hari. Pada ilmu matematika dituliskan $4$ bulan $+10$ hari. Asumsikan, jika $1$ bulan $= 30$ hari, sehingga masa idah itu terjadi selama $4 \times 30$ hari $+10$ hari $= 130$ hari.

Operasi penjumlahan dalam matematika dinotasikan dengan simbol maupun aturan yang berlaku. Akibatnya matematika ialah suatu ilmu bahasa yang memanfaatkan simbol dan metode yang berlaku (Jaenal , 2019). Pada bidang keilmuan aljabar terdapat subkeilmuan lain yaitu aljabar abstrak. Aljabar abstrak merupakan disiplin keilmuan yang mengkaji tentang bentuk aljabar mengenai himpunan, grup, ring (gelanggang), lapangan *(field)* serta ruang vektor. Himpunan ialah gugusan objek yang terbukti dengan jelas. Gugusan objeknya disebut sebagai anggota bagian dari suatu himpunan (Bhattacharya dkk. , 1995). Selain dikaji dalam ilmu matematika, teori himpunan juga tertera dalam QS. Yunus ayat $101$:

قُلِ انْظُرُوْا مَاذَا فِى السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ ۗ وَمَا تُغْنِى الْاٰيٰتُ وَالنُّذُرُ عَنْ قَوْمٍ لَّا
يُؤْمِنُوْنَ



Artinya: "Katakanlah: 'Perhatikanlah apa yang ada di langit dan di bumi! Tidaklah bermanfaat tanda-tanda (kebesaran Allah) dan rasul-rasul yang memberi peringatan bagi orang yang tidak beriman'." (QS. Yunus : $101$)

Berdasarkan QS. Yunus:$101$ disebutkan bahwa terdapat dua himpunan mengenai kebesaran Allah, yakni himpunan segala sesuatu yang ada di langit dan himpunan segala sesuatu yang ada di muka bumi. Selain ayat di atas, teori himpunan juga disebutkan dalam salah satu hadis yaitu:

حَدَّثَنَا مُحَمَّدُ بْنُ سُلَيْمَانَ الْأَنْبَارِيُّ أَنَّ عَبْدَ الْمَلِكِ بْنَ عَمْرٍو حَدَّثَهُمْ عَنْ
دَاوُدَ بْنِ قَيْسٍ قَالَ حَدَّثَنِي سَعْدُ بْنُ إِسْحَقَ حَدَّثَنِي أَبُو ثُمَامَةَ الْحَنَّاطُ أَنَّ
كَعْبَ بْنَ عُجْرَةَ أَدْرَكَهُ وَهُوَ يُرِيدُ الْمَسْجِدَ أَدْرَكَ أَحَدُهُمَا صَاحِبَهُ قَالَ
فَوَجَدَنِي وَأَنَا مُشَبِّكٌ بِيَدَيَّ فَنَهَانِي عَنْ ذَلِكَ وَقَالَ إِنَّ رَسُولَ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ
عَلَيْهِ وَسَلَّمَ قَالَ إِذَا تَوَضَّأَ أَحَدُكُمْ فَأَحْسَنَ وُضُوءَهُ ثُمَّ خَرَجَ عَامِدًا إِلَى
الْمَسْجِدِ فَلَا يُشَبِّكَنَّ يَدَيْهِ فَإِنَّهُ فِي صَلَاةٍ

Artinya: ”Telah menceritakan kepada kami Muhammad bin Sulaiman Al-Anbari bahwasanya Abdul Malik bin Amru telah menceritakan kepada mereka, dari Dawud bin Qais dia berkata; Telah menceritakan kepadaku Sa’d bin Ishaq telah menceritakan kepadaku Abu Tsumamah Al-Hannath bahwasanya Ka’ab bin ’Ujrah pernah mendapatkannya hendak pergi ke masjid. Salah satunya bertemu dengan temannya. Kata Abu Tsumamah; Ka’ab mendapatiku sedang menjalin kedua tanganku, maka dia melarangku berbuat demikian dan berkata; Sesungguhnya Rasulullah shallallahu ’alaihi wasallam bersabda: ”Apabila salah seorang di antara kalian berwudhu, lalu dia membaguskan wudhunya, kemudian pergi dengan sengaja ke masjid, maka janganlah dia menjalin kedua tangannya, karena perbuatan itu dianggap himpunan ibadah salat.” (H.R Sunan Abu Dawud No. 475)

Dalam hadis diatas dijelaskan bahwa terdapat suatu himpunan yaitu himpunan ibadah salat. Himpunan sendiri didefinisikan sebagai sekumpulan objek yang terdefinisi jelas dan memiliki karakter yang sama. Begitu pun himpunan ibadah salat yang beranggotakan dari berwhudu, menyempurnakan wudhu, berniat melakukan ibadah dan dilarang menjalin kedua tangannya dengan mahramnya. Yang mana himpunan tersebut merupakan tuntunan sebelum melakukan ibadah salat. Dalam melaksanakan ibadah salat sendiri terdapat beberapa rukun-rukun salat yang harus dilaksanakan, salah satunya adalah sujud. Sujud dapat dilakukan dimana saja kecuali tempat yang najis. Seperti yang dijelaskan pada hadis berikut yang berbunyi:

حَدَّثَنَا مُوسَى بْنُ إِسْمَعِيلَ حَدَّثَنَا حَمَّادٌ ح و حَدَّثَنَا مُسَدَّدٌ حَدَّثَنَا عَبْدُ الْوَاحِدِ عَنْ عَمْرِو بْنِ يَحْيَى عَنْ أَبِيهِ عَنْ أَبِي سَعِيدٍ قَالَ قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ وَقَالَ مُوسَى فِي حَدِيثِهِ فِيمَا يَحْسَبُ عَمْرٌو إِنَّ النَّبِيَّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ قَالَ الْأَرْضُ كُلُّهَا مَسْجِدٌ إِلَّا الْحَمَّامَ وَالْمَقْبَرَةَ

Artinya: ”Telah menceritakan kepada kami Musa bin Isma’il telah menceritakan kepada kami Hammad -dari jalun lainnya- Dan telah menceritakan kepada kami Musaddad telah menceritakan kepada kami Abdul Wahid dari Amru bin Yahya dari Ayahnya dari Abu Sa’id dia berkata; Rasulullah shallallahu ’alaihi wasallam bersabda. Dan Musa berkata di dalam hadits riwayatnya, yang ia taksir hadis Amru bahwasanya Nabi shallallahu ’alaihi wasallam bersabda: ”Semua tempat di bumi ini adalah Masjid (dapat digunakan untuk shalat atau bersujud) kecuali kamar mandi dan kuburan.”(H.R Sunan Abu Dawud No. 415)

Berdasarkan hadis di atas dijelaskan bahwa terdapat dua tempat untuk bersujud yaitu tempat yang diperbolehkan untuk bersujud dan tempat yang diharamkan untuk bersujud. Dua tempat itulah yang dapat dinyatakan dalam sebuah teori himpunan. Yang mana teori himpunan tersebut adalah himpunan tempat yang diperbolehkan untuk bersujud serta himpunan tempat yang diharamkan untuk bersujud yaitu kuburan dan kamar mandi. Hadis di atas ekuivalen dengan kaidah yang terdapat dalam kitab *"Risalah Qawa-id Fiqh"*:

اَلْأَصْلُ فِي ٱلْأَشْيَاءِ التَّحْرِيْمُ حَتَّى يَدُلَّ الدَّلِيْلُ عَلَى ٱلإِبَاحَةِ

Artinya: "Segala sesuatu pada dasarnya boleh, kecuali jika ada dalil yang mengharamkannya."

Dari kaidah di atas dijelaskan bahwa segala sesuatu pada dasarnya diperbolehkan, akan tetapi menjadi haram apabila terdapat dalil yang menyatakan keharamannya. Seperti halnya pada hadis Sunan Abu Dawud No. $415$, semua tempat di muka bumi diperbolehkan untuk bersujud akan tetapi terdapat pula tempat yang diharamkan untuk bersujud. Pada hadis dan kaidah di atas menjelaskan salah satu bentuk umum himpunan dalam islam. Teori himpunan sendiri dipelajari dalam ilmu matematika.

Matematika ialah ilmu yang mengkaji tentang logika, bentuk, struktur, hubungan dan ruang. Saat mengkaji ilmu matematika, selain memahami makna matematika diperlukan kajian lanjut mengenai sifat atau karakteristik dari matematika. Yang mana kajian itu dipelajari dalam aljabar abstrak.

Suatu aljabar abstrak yang memiliki dua operasi biner dan terbukti pada aksioma khusus dikenal sebagai ring (gelanggang). Himpunan tak kosong $R$ dengan dua operasi biner terhadap perkalian dan penjumlahan dikatakan sebagai ring (gelanggang) jika terhadap operasi penjumlahan merupakan suatu grup komutatif atau memenuhi sifat tertutup, asosiatif, mempunyai elemen identitas, dan eksistensi elemen invers serta komutatif terhadap operasi penjumlahan dan merupakan semigrup terhadap operasi perkalian artinya berlaku sifat tertutup dan asosiatif serta berlaku sifat distributif terhadap operasi perkalian dan penjumlahan, yang dinotasikan $(R, +, \times)$ (Rahcman dkk. , 2012). Ring $R$ dikatakan ring komutatif jika bersifat komutatif terhadap operasi perkalian serta ring $R$ merupakan ring satuan apabila mempunyai elemen identitas akan operasi perkalian. Suatu ring $R$ yang memenuhi sifat komutatif dan mempunyai elemen identitas pada operasi perkalian adalah ring komutatif dengan elemen satuan. Dalam suatu ring, dibahas juga mengenai konsep ideal. Ideal merupakan bagian dari suatu ring yang memiliki struktur yang istimewa. Diberikan $(R, +, \times)$ adalah ring dengan $\mathtt{I} \subseteq R$ dan $\mathtt{I} \neq \emptyset$. Himpunan $\mathtt{I}$ dikatakan ideal pada $R$ apabila: $(i)\mathtt{I}$ subgrup dari $R$ terhadap penjumlahan $(+)$, $(ii)$ Untuk setiap $x \in \mathtt{I}$ dan $r \in R$ berlaku $xr \in \mathtt{I}$ dan $rx \in \mathtt{I}$ (Herstein , 1975).

Berdasarkan definisi ring komutatif, memotivasi suatu abstraksi sehingga muncullah konsep MV-aljabar. Sebuah MV-aljabar didefinisikan sebagai suatu aljabar $(M, \oplus, *, 0)$, dimana $\oplus$ adalah operasi biner, $*$ adalah operasi uner, dan $0$ adalah konstanta sehingga aksioma berikut terpenuhi yaitu untuk setiap $j, k \in M$ berlaku $(i)(M, \oplus, 0)$ merupakan abelian monoid, $(ii)(j^*)^* = j, (iii)0^* \oplus j = 0^*$ dan $(iv)(j^* \oplus k)^* \oplus k = (k^* \oplus j)^* \oplus j$ (Heubo-Kwegna and Nganou , 2020).

Lebih lanjut, berlandaskan teori Ideal dari Ring diabstraksikan suatu teori Ideal MV-aljabar. Misalkan $M$ adalah MV-aljabar dan I merupakan himpunan bagian tak kosong dari M ($\mathtt{I} \subseteq M, \mathtt{I} \neq \emptyset$). Dapat dikatakan bahwa $\mathtt{I}$ adalah ideal MV-aljabar apabila memenuhi beberapa kondisi, yaitu $(i)$ $0 \in \mathtt{I}$, $(ii)$ $j, k \in \mathtt{I}$ maka $j \oplus k \in \mathtt{I}$, $(iii)$ $j \in \mathtt{I}$ dan $k \leq j$ maka $k \in \mathtt{I}$ (Anatolij and Beloslav , 1998).

Menelaah pada ideal dari ring komutatif dengan elemen satuan $R$, bahwa jumlahan, gabungan, serta irisan dari beberapa ideal juga merupakan ideal.

Akibatnya, dibentuk suatu himpunan yang berisi ideal-ideal dari ring komutatif. Lebih lanjut didefinisikan suatu pemetaan operasi *closure* dengan ideal ring komutatif yang dinotasikan dengan $c : I \rightarrow I(I \mapsto I^c)$. Suatu pemetaan antara elemen-elemen dari himpunan terurut parsial dikatakan sebagai operasi *closure* jika memenuhi tiga aksioma yaitu $(i)$ $I \subseteq I^c$ (ekstensi), $(ii)$ $I \subseteq J \Longrightarrow I^c \subseteq J^c$ *(order-preservation)* dan $(iii)$ $(I^c)^c = I^c$ (idempoten) (Dario and Marco , 2012).

Dari pemaparan diatas dapat dilihat bahwa gagasan operasi *closure* memainkan peran penting dalam teori ring komutatif yang ideal. Karena operasi *closure* erat kaitannya dengan teori ring komutatif yang ideal sehingga memotivasi abstraksi gagasan operasi *closure* pada MV-aljabar. Oleh karena itu, penelitian ini mengkaji lebih lanjut tentang operasi *closure* pada MV-aljabar.

### 1.2. Rumusan Masalah

Dari penjelesan latar belakang, dirumuskan beberapa masalah yaitu:

1. Bagaimana pengertian dari operasi *closure* pada MV-aljabar ?
2. Bagaimana sifat-sifat dari operasi *closure* pada MV-aljabar ?



### 1.3. Tujuan Penelitian

Berlandaskan rumusan masalah, tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Untuk membuktikan pengertian dari operasi *closure* pada MV-aljabar.
2. Untuk menunjukkan sifat-sifat dari operasi *closure* pada MV-aljabar.

### 1.4. Manfaat Penelitian

Beberapa manfaat yang diinginkan pada penelitian ini yaitu:

1. Manfaat Teoritis

   Dapat menjadi literatur dalam mengkaji ulang ataupun mengembangkan penelitian yang terkait.

2. Manfaat Praktis

   Dapat memberi ilmu serta pengetahuan baru tentang operasi *closure* pada MV-aljabar.

## 1.5. Sistematika Penulisan

Sitematika dalam penelitian ini yaitu sebagai berikut.

1. **BAB I PENDAHULUAN**

   Mengkaji tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitin, manfaat penelitian, serta sistematika penulisan.

2. **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

   Mengkaji penjelasan teori mengenai definisi, contoh serta beberapa sifat dari MV-aljabar serta ideal MV-aljabar.

3. **BAB III METODE PENELITIAN**

   Mengkaji mengenai sebuah metode yang dipergunakan pada penelitian yang dapat menunjang keberhasilan penelitian.

4. **BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN**

   Mengkaji tentang hasil yang diperoleh pada operasi *closure* dan sifat-sifat dari operasi *closure*.

5. **BAB V PENUTUP**

   Membahas mengenai kesimpulan serta saran.

# BAB II

# TINJAUAN PUSTAKA

Bab dua ini membahas tentang dasar-dasar teori yang dipergunakan pada pengerjaan penelitian yaitu mengenai MV-aljabar dan Ideal MV-aljabar.

## 2.1. MV-aljabar

Berikut ini dijelaskan tentang definisi MV-aljabar.

**Definisi 2.1.1** *(Nola dkk. , 2003) Suatu aljabar* $(M, \oplus, *, 0)$ *disebut MV-aljabar, dimana* $\oplus$ *adalah operasi biner,* $*$ *adalah operasi uner, dan* $0$ *adalah konstanta apabila untuk setiap* $j, k, l \in M$ *memenuhi beberapa aksioma berikut:*

1. $(M, \oplus, 0)$ *adalah Abelian monoid,*
   (a) $j \oplus (k \oplus l) = (j \oplus k) \oplus l$ *(Asosiatif),*
   (b) $j \oplus 0 = j$ *(Elemen Identitas),*
   (c) $j \oplus k = k \oplus j$ *(Komutatif),*
2. $(j^*)^* = j$,
3. $0^* \oplus j = 0^*$,
4. $(j^* \oplus k)^* \oplus k = (k^* \oplus j)^* \oplus j$.

Pada setiap MV-aljabar $M$ didefinisikan $1 = 0^*$. Lebih lanjut, pada MV-aljabar didefinisikan operasi $\odot$ dan $\ominus$ dimana operasi tersebut bergantung pada operasi biner $\oplus$, yaitu

$$j \odot k = (j^* \oplus k^*)^* \tag{2.1}$$

Dan berdasarkan definisi operasi biner $\odot$ pada Persamaan (2.1), diperoleh

$$(j^* \odot k^*)^* = (((j^*)^* \oplus (k^*)^*)^*)^* = ((j \oplus k)^*)^* = j \oplus k \tag{2.2}$$

Dan

$$j \ominus k = j \odot k^* = (j^* \oplus (k^*)^*)^* = (j^* \oplus k)^* \tag{2.3}$$

Berdasarkan Definisi 2.1.1 yaitu $(j^*)^* = j$, diperoleh:

$$1^* = (0^*)^* = 0 \tag{2.4}$$

Lebih lanjut, berdasarkan Definisi 2.1.1 dipunyai

$$j \oplus 0^* = 0^* \qquad \text{(Berdasarkan diketahui yaitu } 1 = 0^*\text{)}$$

diperoleh

$$j \oplus 1 = 1 \tag{2.5}$$

Berdasarkan Definisi 2.1.1 yaitu $(j^* \oplus k)^* \oplus k = (k^* \oplus j)^* \oplus j$ dan sifat MV-aljabar terhadap operasi $\ominus$ sehingga dipunyai

$$(j \ominus k) \oplus k = (k \ominus j) \oplus j \tag{2.6}$$

Berdasarkan Persamaan (2.3) yaitu $j \ominus k = j \odot k^*$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
(j \ominus k) \oplus k &= (j \odot k^*) \oplus k \\
&= (j^* \oplus (j^*)^*)^* \oplus k \\
&= (j^* \oplus k)^* \oplus k && \text{(Definisi 2.1.1 } (j^* \oplus k)^* \oplus k = (k^* \oplus j)^* \oplus j) \\
&= (k^* \oplus j)^* \oplus j && \text{(Definisi 2.1.1 } (M, \oplus, 0) \text{ sifat komutatif)} \\
&= (k^* \oplus j^*)^* \oplus j \\
&= (k^* \oplus (j^*)^*)^* \oplus j && \text{(Persamaan 2.1 } (j^* \oplus k^*)^* = j \odot k) \\
&= (k \odot j^*) \oplus j && \text{(Berdasarkan Persamaan 2.3 } j \odot k^* = j \ominus k) \\
&= (k \ominus j) \oplus j
\end{aligned}
$$

Misalkan $k = 0^*$. Maka berdasarkan Definisi 2.1.1 yaitu $(j^* \oplus k)^* \oplus k = (k^* \oplus j)^* \oplus j$ diperoleh:

$$j \oplus j^* = 1. \tag{2.7}$$

Berikut diberikan contoh himpunan MV-aljabar.

**Contoh 2.1.2** (Chang , 1958) Misalkan $A = [0, 1] \subseteq R$. Didefinisikan operasi $\oplus$ dengan $s \oplus t = min(s + t, 1)$ untuk setiap $s, t \in A$ dan didefinisikan operasi $*$ dengan $s^* = 1 - s$. Himpunan $(A, \oplus, *, 0)$ adalah MV-aljabar, sebab :

1. Himpunan $(A, \oplus, 0)$ adalah Abelian monoid.

   - Asosiatif

     Ambil sebarang $s, t, u \in A$.

     Akan ditunjukkan bahwa $(s \oplus t) \oplus u = s \oplus (t \oplus u)$

Diperhatikan

$$\begin{aligned}
(s \oplus t) \oplus u &= (min(a+t,1)) \oplus u \\
&= min(min(s+t,1)+u,1) \\
&= min(min(s+t+u,u+1),1) \\
&= min(s+t+u,u+1,1) \\
&= min(u,+1,1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s \oplus (t \oplus u) &= s \oplus (min(t+u,1)) \\
&= min(min(t+u,1)+s,1) \\
&= min(min(t+u+s,s+1),1) \\
&= min(t+u+s,s+1,1) \\
&= min(s+1,1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

- Elemen Identitas

  Terdapat $e = 0 \in A$, untuk setiap $p \in A$, maka berlaku $e \oplus s = s$



$$\begin{aligned}
e \oplus s = 0 \oplus s &= min(0+s,1) \\
&= min(s,1) \\
&= s
\end{aligned}$$

- Komutatif

  Untuk setiap $s, t \in A$, berlaku $s \oplus t = t \oplus s$.

  Ambil sebarang $s, t \in A$.

Diperhatikan,

$$\begin{aligned} s \oplus t &= min(s+t, 1) \\ &= min(t+s, 1) \\ &= t \oplus s \end{aligned}$$

2. Ambil sebarang $s \in A$, berlaku

$$\begin{aligned} s^{**} &= (s^*)^* \\ &= (1-s)^* \\ &= 1-(1-s) \\ &= s \end{aligned}$$

3. Ambil sebarang $s \in A$, berlaku

$$\begin{aligned} 0^* \oplus s &= (1-0) \oplus s \\ &= 1 \oplus s \\ &= min(1+s, 1) \\ &= 1 \\ &= 0^* \end{aligned}$$

4. Ambil sebarang $s, t \in A$, maka berlaku

$$\begin{aligned}
(s^* \oplus t^*)^* \oplus t &= ((1-s) \oplus (1-t))^* \oplus t \\
&= (min(1-s+1-t, 1))^* \oplus t \\
&= min(2-s-t, 1)^* \oplus t \\
&= 1^* \oplus t \\
&= 0 \oplus t \\
&= min(0+t, 1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(t^* \oplus s)^* \oplus s &= ((1-t) \oplus s)^* \oplus s \\
&= (min(1-t+s, 1))^* \oplus s \\
&= 1^* \oplus s \\
&= 0 \oplus s \\
&= min(0+s, 1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

**Contoh 2.1.3** (Rasouli and Davvaz , 2010) Misalkan $A = \{0, m_1, m_2, 1\}$. Diberikan definisi pada tabel berikut:

**Tabel 2.1 Tabel Cayley Himpunan $A$ Terhadap Operasi Biner $\oplus$**

| $\oplus$ | $0$ | $m_1$ | $m_2$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $m_1$ | $m_2$ | $1$ |
| $m_1$ | $m_1$ | $m_1$ | $1$ | $1$ |
| $m_2$ | $m_2$ | $1$ | $m_2$ | $1$ |
| $1$ | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |

**Tabel 2.2 Tabel Cayley Himpunan $A$ Terhadap Operasi Uner $*$**

| $*$ | $0$ | $m_1$ | $m_2$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $m_2$ | $m_1$ | $0$ |

Himpunan $(A, \oplus, *, 0)$ adalah MV-aljabar.

1. $(A, \oplus, 0)$ adalah Abelian Monoid.

   (a) Asosiatif

   Akan ditunjukkan untuk setiap $j, k, l \in A$ berlaku $j \oplus (k \oplus l) = (j \oplus k) \oplus l$.

   Misal $j = 0, k = m_1$ dan $l = m_2$, maka diperoleh

   $j \oplus (k \oplus l) = 0 \oplus (m_1 \oplus m_2) = 0 \oplus 1 = 1$

   $(j \oplus k) \oplus l = (0 \oplus m_1) \oplus x_2 = m_1 \oplus m_2 = 1$

   (b) Elemen identitas

   Terdapat $e = 0 \in A$ untuk setiap $j \in A$ berlaku $e \oplus j = j$.

   Misal $j = 0$, maka diperoleh

   $e \oplus j = 0 \oplus j = 0 \oplus 0 = 0.$

   (c) Komutatif

   Untuk setiap $j, k \in A$ berlaku $j \oplus k = k \oplus j$.

   Misal $j = 0$ dan $k = 1$, maka diperoleh

   $j \oplus k = 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = k \oplus j.$

   (d) Untuk setiap $j \in A$ berlaku $j^{**} = j$.

   Misal $j = m_1$, maka diperoleh

   $j^{**} = (j^*)^* = ((m_1)^*)^* = (m_2)^* = m_1.$

   (e) Untuk setiap $j \in A$ berlaku $0^* \oplus j = 0^*$.

   Misal $j = m_2$, maka diperoleh

   $0^* \oplus j = 0^* \oplus m_2 = 1 \oplus m_2 = 1 = 0^*.$

   (f) Untuk setiap $j, k \in A$ berlaku $(j^* \oplus k)^* \oplus k = (k^* \oplus j)^* \oplus j$. Misal $x = 0$ dan $y = m_1$, maka diperoleh

   $(j^* \oplus k)^* \oplus = (0^* \oplus m_1)^* \oplus m_1 = (1 \oplus m_1)^* \oplus m_1 = (1)^* \oplus m_1 =$

$0 \oplus m_1 = m_1$

$(k^* \oplus j)^* \oplus j = (m_1^* \oplus 0)^* \oplus 0 = (m_2 \oplus 0)^* \oplus 0 = (m_2)^* \oplus 0 = m_1 \oplus 0 = m_1.$

**Teorema 2.1.4** *(Mundici, 2007) Diberikan MV-aljabar $(M, \oplus, *, 0)$. Untuk setiap elemen $j, k \in M$, maka kondisi berikut ekuivalen:*

1. *$j^* \oplus k = 1$,*
2. *$j \odot k^* = 0$,*
3. *$k = j \oplus (k \ominus j)$,*
4. *Terdapat $l \in M$ sedemikian sehingga $j \oplus l = k$.*

**Bukti.** $(1) \Rightarrow (2)$

Diketahui: $j^* \oplus k = 1$.

Akan ditunjukkan bahwa $j \odot k^* = 0$.

Berdasarkan Persamaan 2.1 diperoleh $j \odot k^* = (j^* \oplus k)^*$.

Apabila Persamaan $j \odot k^* = (j^* \oplus k)^*$ di $(*)$-kan di kedua ruas, maka diperoleh

$(j \odot k^*)^* = ((j^* \oplus k)^*)^*$ (Definisi 2.1.1 yaitu $j^{**} = j$)

$(j \odot k^*)^* = j^* \oplus k$ (Berdasarkan diketahui yaitu $j^* \oplus k = 1$)

$(j \odot k^*)^* = 1$ (Kedua ruas di $(*)$-kan)

$((j \odot k^*)^*)^* = 1^*$ (Definisi 2.1.1 yaitu $j^{**} = j$ dan Persamaan 2.4 yaitu $1^* = 0$)

$x \odot y^* = 0$

$(2) \Rightarrow (3)$ Diketahui: $j \odot k^* = 0$

Akan ditunjukkan $k = k \oplus (k \ominus j)$.

Berdasarkan Definisi 2.1.1 yaitu $(M, \oplus, 0)$ yang bersifat komutatif, maka

$$\begin{aligned}
j \oplus (k \ominus j) &= (k \ominus j) \oplus j && \text{(Persamaan (2.6) yaitu } (j \ominus k) \oplus k = (k \ominus j) \oplus j\text{)}\\
&= (j \ominus k) \oplus k && \text{(Persamaan (2.1) yaitu } j \odot k = (j^* \oplus k^*)^*\text{)}\\
&= (j \odot k^*) \oplus k && \text{(Berdasarkan diketahui yaitu } j \odot k^* = 0\text{)}\\
&= 0 \oplus k && \text{(Definisi 2.1.1 } (M, \oplus, 0) \text{ Abelian monoid, elemen identitas)}\\
&= k
\end{aligned}$$

$(3) \Rightarrow (4)$

Diketahui $k = j \oplus (k \ominus j)$

Akan ditunjukkan bahwa terdapat $l \in M$ sedemikian sehingga $j \oplus l = k$.

Pilih $l = k \ominus j$. Sehingga berdasarkan diketahui, maka diperoleh

$$\begin{aligned} j \oplus l &= j \oplus (k \ominus j) \\ &= k \end{aligned}$$

$(4) \Rightarrow (1)$

Diketahui: Terdapat $l \in M$ sedemikian sehingga $j \oplus l = k$.

Akan ditunjukkan bahwa $j^* \oplus l = 1$.

Diperhatikan,

$$\begin{aligned} j^* \oplus k &= j^* \oplus (j \oplus l) && \text{(Definisi 2.1.1 } (M, \oplus, 0) \text{ Abelian monoid, sifat asosiatif)} \\ &= (j^* \oplus j) \oplus l && \text{(Berdasarkan Persamaan (2.7) yaitu } j \oplus j^* = 1) \\ &= 1 \oplus l && \text{(Karena } 1 = 0^*) \\ &= 0^* \oplus l && \text{(Definisi 2.1.1 yaitu } j \oplus 0^* = 0^*) \\ &= 0^* && \text{(Berdasarkan Persamaan 2.4 yaitu } 1^* = (0^*)^* = 0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

**Teorema 2.1.5** *Misalkan $M$ adalah MV-aljabar. Untuk setiap $b \in M, b^*$ adalah solusi tunggal $j$ yang memenuhi persaman berikut:*

$$\begin{cases} b \oplus j = 1 \\ b \odot j = 0 \end{cases}$$

**Bukti.** Ambil sebarang $b \in M$. Diperhatikan

1. $b \oplus j = 1$

   $\Leftrightarrow j = b^*$

2. $b \odot j = 0$

   $\Leftrightarrow j = b^*$

Jadi, $j = b^* \in M$ merupakan solusi tunggal dari persamaan $b \oplus j = 1$ dan $b \odot j = 0$.

■

Diberikan $M$ adalah MV-aljabar. Untuk setiap dua elemen $j$ dan $k$ didefinisikan bahwa

$$j \leq k \Leftrightarrow j^* \oplus k = 0^* = 1 \tag{2.8}$$

Operasi $\leq$ disebut orde parsial atau natural orde dari $M$ yang memiliki sifat reflektif, antisimetri dan transitif.

**Teorema 2.1.6** *(Mundici , 2007) Diberikan MV-aljabar $(M, \oplus, *, 0)$. Dalam setiap MV-aljabar $M$ natural order $\leq$ memenuhi sifat berikut:*

1. *$j \leq k$ jika dan hanya jika $k^* \leq j^*$,*

2. *Jika $j \leq k$ maka untuk setiap $l \in M$ berlaku $j \oplus l \leq k \oplus l$ dan $j \odot l \leq k \odot l$,*

3. *Jika $j \odot j \leq l$ maka $j \leq k^* \oplus l$.*

**Bukti.**

1. $j \leq k$ jika dan hanya jika $k^* \leq j^*$

   $(\Rightarrow)$ Diketahui $j \leq k$ artinya $j^* \oplus k = 1$.

   Akan ditunjukkan $k^* \leq j^*$ artinya $(k^*)^* \oplus j^* = 1$.

   Diperhatikan,

| | |
|---|---|
| $(k^*)^* \oplus j^*$ | (Definisi 2.1.1 yaitu $(j^*)^* = j$) |
| $= k \oplus j^*$ | (Definisi 2.1.1 yaitu $j \oplus k = k \oplus j$) |
| $= j^* \oplus k$ | (Berdasarkan diketahui yaitu $j^* \oplus k = 1$) |
| $= 1$ | |

   Karena $(k^{**}) \oplus j^* = 1$, maka $k^* \leq j^*$.

   $(\Leftarrow)$ Diketahui $k^* \leq j^*$ artinya

   $(k^*)^* \oplus j^* = 1 \Leftrightarrow j^* \oplus (k^*)^* = 1 \Leftrightarrow j^* \oplus k = 1$

   Akan ditunjukkan $j \leq k$ artinya akan ditunjukkan $j^* \oplus k = 1$.

   Diperhatikan,



| | |
|---|---|
| $j^* \oplus k$ | (Definisi 2.1.1 yaitu $(M, \oplus, 0)$ Abelian monoid, sifat komutatif) |
| $= k \oplus y^*$ | (Definisi 2.1.1 yaitu $(j^*)^* = j$) |
| $= (k^*)^* \oplus j^*$ | (Berdasarkan diketahui yaitu $(k^*)^* \oplus j^* = 1$) |
| $= 1$ | |

   Karena $j^* \oplus k = 1$, maka $j \leq k$.

2. Jika $j \leq k$ maka untuk setiap $l \in M$ berlaku $j \oplus l \leq k \oplus l$ dan $j \odot l \leq k \odot l$.

   Diketahui $j \leq y$, artinya $j^* \oplus k = 1$

Akan ditunjukkan untuk setiap $l \in M$, berlaku:

(a) $j \oplus l \leq k \oplus l$.

Ambil sebarang $l \in M$.

Akan ditunjukkan $j \oplus l \leq k \oplus l$.

Dengan kata lain akan ditunjukkan $(j \oplus l)^* \oplus (k \oplus l) = 1$

Diperhatikan,

| | |
|---|---|
| $(j \oplus l)^* \oplus (k \oplus l)$ | (Definisi 2.1.1 sifat komutatif) |
| $= (k \oplus l) \oplus (j \oplus l)^*$ | (Definisi 2.1.1 sifat asosiatif ) |
| $= k \oplus (l \oplus (j \oplus l)^*)$ | (Definisi 2.1.1 sifat komutatif) |
| $= k \oplus ((j \oplus l)^* \oplus l)$ | (Definisi 2.1.1 yaitu $(j^*)^* = j$) |
| $= k \oplus (((j^*)^* \oplus l)^* \oplus l)$ | (Definisi 2.1.1 poin $(4)$) |
| $= k \oplus ((l^* \oplus j^*)^* \oplus j^*$ | (Definisi 2.1.1 sifat komutatif) |
| $= k \oplus (j^* \oplus (l^* \oplus j^*)^*)$ | (Berdasarkan Persamaan 2.1) |
| $= k \oplus (j^* \oplus (j \odot l))$ | (Definisi 2.1.1 sifat asosiatif) |
| $= (k \oplus j^*) \oplus (j \odot l)$ | (Berdasarkan diketahui yaitu $j^* \oplus k = 1$) |
| $= 1 \oplus (j \odot l)$ | (Berdasarkan Teorema 2.1.4 dan Teorema 2.1.5) |
| $= 1 \oplus 0$ | (Berdasarkan definisi yaitu $1 = 0^*$) |
| $= 0^* \oplus 0$ | (Berdasarkan Persamaan 2.7) |
| $= 1$ | |

Karena $(j \oplus l)^* \oplus (k \oplus l) = 1$, maka $j \oplus l \leq l \oplus l$.

(b) $j \odot l \leq k \odot l$.

Ambil sebarang $l \in M$.

Akan ditunjukkan $j \odot l \leq k \odot l$.

Dengan kata lain akan ditunjukkan $(j \odot l)^* \oplus (k \odot l) = 1$

Diperhatikan,

| | |
|---|---|
| $(j \odot l)^* \oplus (k \odot l)$ | (Definisi 2.1.1 sifat komutatif) |
| $= (k \odot l) \oplus (j \odot l)^*$ | (Berdasarkan Persamaan 2.1) |
| $= (k^* \oplus l^*)^* \oplus ((j^* \oplus k^*)^*)^*$ | (Definisi 2.1.1 yaitu $(j^*)^* = j$) |
| $= (k^* \oplus l^*)^* \oplus (j^* \oplus l^*)$ | (Definisi 2.1.1 sifat asosiatif dan komutatif) |
| $= j^* \oplus (k^* \oplus l^*)^* \oplus l^*$ | (Definisi 2.1.1 poin $(4)$) |
| $= j^* \oplus ((l^*)^* \oplus k)^* \oplus k$ | (Definisi 2.1.1 yaitu $(j^*)^* = j$) |
| $= j^* \oplus (l \oplus y)$ | (Definisi 2.1.1 sifat komutatif) |
| $= j^* \oplus k \oplus (l \oplus k)^*$ | (Berdasarkan diketahui yaitu $j^* \oplus k = 1$) |
| $= 1 \oplus (l \oplus k)^*$ | (Berdasarkan Persamaan 2.1) |
| $= 1 \oplus l^* \odot k^*$ | (Berdasarkan Teorema 2.1.4 dan Teorema 2.1.5) |
| $= 1 \oplus 0$ | (Berdasarkan definisi yaitu $1 = 0^*$) |
| $= 0^* \oplus 0$ | (Berdasarkan Persamaan 2.7) |
| $= 1$ | |

Karena $(j \odot l)^* \oplus (k \odot l) = 1$, maka $j \odot l \leq k \odot l$.

3. Jika $j \odot k \leq l$ maka $j \leq k^* \oplus l$.

   Diketahui $j \odot k \leq l$ artinya $(j \odot k)^* \oplus l = 1$.

   Akan ditunjukkan $j \leq k^* \oplus l$.

   Atau akan ditunjukkan $j^* \oplus (k^* \oplus l) = 1$.

Diperhatikan,

$j^* \oplus (k^* \oplus l)$ (Definisi 2.1.1 sifat asosiatif)

$= (j^* \oplus k^*) \oplus l$ (Definisi 2.1.1 yaitu $(x^*)^* = x$)

$= ((j^* \oplus k^*)^*)^* \oplus l$ (Berdasarkan Persamaan 2.1 yaitu $x \odot y = (x^* \oplus y^*)^*$)

$= (j \odot k)^* \oplus l$ (Berdasarkan diketahui yaitu $(x \odot y)^* \oplus z = 1$)

$= 1$

Karena $j^* \oplus (k^* \oplus l) = 1$ maka $j \leq k^* \oplus l$.

■

## 2.2. Ideal MV-aljabar

Dalam MV-aljabar didefinisikan suatu ideal sebagai berikut:

**Definisi 2.2.1** (*Dubuc and Poveda , 2010*) *Misalkan $M$ adalah MV-aljabar dan $\mathtt{I}$ merupakan himpunan bagian tak kosong dari $M$. Himpunan $\mathtt{I}$ dikatakan ideal apabila memenuhi kondisi berikut:*

1. $0 \in \mathtt{I}$,
2. $j, k \in \mathtt{I}$ *maka* $j \oplus k \in \mathtt{I}$
3. $j \in \mathtt{I}$ *dan* $k \leq j$ *maka* $k \in \mathtt{I}$

Berikut diberikan contoh dari ideal MV-aljabar.

**Contoh 2.2.2** Berdasarkan Contoh 2.1.2, maka himpunan $\mathtt{I} = \{0, 1\}$ adalah ideal pada MV-aljabar $A$ sebab:

1. Himpunan $\mathtt{I} = \{0, 1\}$, maka terbukti bahwa $0 \in \mathtt{I}$.

2. Ambil sebarang $j, k \in \mathtt{I}$ maka $j \oplus k \in \mathtt{I}$. Asumsikan $j = 1, k = 1$, diperoleh

   $j \oplus k = min(1 + 1, 1) = min(2, 1) = 1 \in \mathtt{I}$

3. Ambil sebarang $j \in \mathtt{I}$ dan $k \leq \mathtt{I}$ maka $l \in \mathtt{I}$.

   Diperhatikan $k \leq j \Leftrightarrow k^* \oplus j = 1$ dan didefinisikan operasi $*$ dengan

   $$j^* = 1 - j$$

   .

   Asumsikan $j = 0$, maka diperoleh

   $j = 0 \in \mathtt{I}$ dan $k^* \oplus j = (1-k) \oplus j = (1-1) \oplus 0 = 0 \oplus 0 = 0 \in \mathtt{I} \Rightarrow k = 1 \in \mathtt{I}$

Karena memenuhi ketiga aksioma tersebut, dengan demikian terbukti bahwa himpunan $\mathtt{I} = \{0, 1\}$ adalah ideal MV-aljabar dari $A$.

**Contoh 2.2.3** Berdasarkan Contoh 2.1.3, maka himpunan $\mathtt{I} = \{0, 1\}$ ialah ideal pada MV-aljabar $A = \{0, m_1, m_2, 1\}$ sebab:

1. Himpunan $\mathtt{I} = \{0, 1\}$, terbukti bahwa $0 \in \mathtt{I}$.

2. Ambil sebarang $j, k \in I$ maka $j \oplus k \in I$

   - $j \oplus k = 0 \oplus 0 = 0 \in \mathtt{I}$
   - $j \oplus k = 0 \oplus 1 = 1 \in \mathtt{I}$
   - $j \oplus k = 1 \oplus 0 = 1 \in \mathtt{I}$
   - $j \oplus k = 1 \oplus 1 = 1 \in \mathtt{I}$

3. Ambil sebarang $j \in I$ dan $k \leq j$ maka $k \in \mathtt{I}$.

   Diperhatikan $k \leq j \Longleftrightarrow k^* \oplus j = 1$, sehingga

- $j = 0 \in \mathtt{I}$ dan $k^* \oplus j = 0^* \oplus 0 = 1 \oplus 0 = 1 \in \mathtt{I} \Rightarrow y = 0 \in \mathtt{I}$
- $j = 0 \in \mathtt{I}$ dan $k^* \oplus j = 1^* \oplus 0 = 0 \oplus 0 = 0 \in \mathtt{I} \Rightarrow y = 1 \in \mathtt{I}$
- $j = 1 \in \mathtt{I}$ dan $k^* \oplus j = 0^* \oplus 1 = 1 \oplus 1 = 1 \in \mathtt{I} \Rightarrow y = 0 \in \mathtt{I}$
- $j = 1 \in \mathtt{I}$ dan $k^* \oplus j = 1^* \oplus 1 = 0 \oplus 1 = 1 \in \mathtt{I} \Rightarrow y = 1 \in \mathtt{I}$

Karena memenuhi ketiga aksioma tersebut, dengan demikian terbukti bahwa himpunan $\mathtt{I} = \{0, 1\}$ adalah ideal MV-aljabar dari $A = \{0, m_1, m_2, 1\}$.

**Contoh 2.2.4** Berdasarkan Contoh 2.1.3 dimana $A = \{0, m_1, m_2, 1\}$ , maka himpunan $I = \{m_1, m_2\}$ bukan merupakan ideal, sebab tidak ada elemen $0$ yang termuat di dalam himpunan $I$. Karena salah satu aksioma dari ideal MV-aljabar tidak terpenuhi, maka himpunan $I = \{m_1, m_2\}$ bukan merupakan ideal dari MV-aljabar.

## 2.3. Ideal Maksimal pada MV-aljabar

Pada ideal MV-aljabar didefinisikan suatu ideal maksimal sebagai berikut:

**Definisi 2.3.1** *Diberikan $M$ adalah sebuah MV-aljabar dan $\mathtt{I}$ adalah ideal dari MV-aljabar $M$. Ideal $\mathtt{I}$ disebut ideal maksimal jika $\mathtt{I} \subseteq J$ maka $J = M$, untuk setiap ideal $J$ dimana $J \neq \mathtt{I}$.*

**Contoh 2.3.2** Berdasarkan Contoh 2.1.3, dengan $A = \{0, m_1, m_2, 1\}$ dimana $0 < m_1, m_2 < 1$. Himpunan $\mathtt{I} = \{0, m_1\}$ ialah ideal maksimal di $A$, sebab untuk setiap ideal $J$ dimana $J \neq \mathtt{I}$ dan $J = \{0, m_1, m_2, 1\}$, diperoleh $\mathtt{I} = \{0, m_1\} \subseteq J = \{0, m_1, m_2, 1\}$, maka $J = \{0, m_1, m_2, 1\} = A = \{0, m_1, m_2, 1\}$.

## 2.4. Integrasi Keilmuan

Matematika yaitu disiplin ilmu yang punya banyak manfaat dalam kehidupan. Matematika banyak memberikan bentuk penyelesaian dan kebermanfaatan. Namun banyak orang yang masih beranggapan bahwa matematika adalah suatu ilmu yang ditakuti, sehingga masih banyak yang tidak tertarik untuk mempelajari ilmu matematika. Apabila ditinjau lebih lanjut, ilmu matematika sangat diperlukan kapanpun dan dimanapun berada. Sebagaimana firman Allah dalam surat Ar-Ra'd ayat 4:

وَفِى الْاَرْضِ قِطَعٌ مُّتَجٰوِرٰتٌ وَّجَنّٰتٌ مِّنْ اَعْنَابٍ وَّزَرْعٌ وَّنَخِيْلٌ صِنْوَانٌ وَّغَيْرُ
صِنْوَانٍ يُّسْقٰى بِمَاۤءٍ وَّاحِدٍۙ وَّنُفَضِّلُ بَعْضَهَا عَلٰى بَعْضٍ فِى الْاُكُلِۗ اِنَّ فِيْ ذٰلِكَ لَاٰيٰتٍ
لِّقَوْمٍ يَّعْقِلُوْنَ

Artinya : "Dan di bumi terdapat bagian-bagian yang berdampingan, kebun-kebun anggur, tanaman-tanaman, pohon kurma yang bercabang, dan yang tidak bercabang; disirami dengan air yang sama, tetapi Kami lebihkan tanaman yang satu dari yang lainnya dalam hal rasanya. Sungguh, pada yang demikian itu terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi orang-orang yang mengerti." (QS. ar-Rad:4)

Berdasarkan QS. Ar-Ra'd ayat 4 dijelaskan bahwa segala hal yang ada di bumi dan yang ada di langit memiliki bagian-bagian yang berdampingan, saling berhubungan satu pohon dengan pohon lain, satu tanaman dengan tanaman lain, serta antara satu ilmu dengan ilmu yang lainnya. Sama halnya dengan ilmu matematika, ilmu matematika saling berhubungan erat dan saling membutuhkan dengan ilmu-ilmu yang lain. Karena matematika adalah suatu ilmu yang dijadikan dasar oleh disiplin ilmu lain. Sehingga, ilmu matematika erat kaitannya dengan ilmu yang lain.

Konsep dari ilmu matematika sendiri banyak dijelaskan dalam al-Qu'ran diantaranya adalah matematika terapan, statistika, aljabar, serta ilmu komputasi. Aljabar adalah cabang dari ilmu matematika, yang mana cabang dari aljabar itu sendiri adalah aljabar abstrak. Dalam aljabar sering kali membahas mengenai definisi dan aksioma yang selanjutnya digunakan untuk pembuktian sebuah teorema, lemma maupun proposisi. Dalam proses pembuktian, dibutuhkan ketelitian dan kekonsistenan agar hasil yang diperoleh sesuai dengan yang diharapkan. Dalam ajaran agama Islam, kekonsistenan dikatakan sebagai *istiqomah*. *Istiqomah* dalam al-Quran dapat diartikan secara sederhana sebagai suatu tindakan yang konsisten terhadap suatu hal yang telah disepakati. Sebagaimana firman Allah Swt:

كَيْفَ يَكُوْنُ لِلْمُشْرِكِيْنَ عَهْدٌ عِنْدَ اللّٰهِ وَعِنْدَ رَسُوْلِهٖٓ اِلَّا الَّذِيْنَ عَاهَدْتُّمْ عِنْدَ
الْمَسْجِدِ الْحَرَامِۚ فَمَا اسْتَقَامُوْا لَكُمْ فَاسْتَقِيْمُوْا لَهُمْۗ اِنَّ اللّٰهَ يُحِبُّ الْمُتَّقِيْنَ

Artinya: "Bagaimana mungkin ada perjanjian (aman) di sisi Allah dan Rasul-Nya dengan orang-orang musyrik, kecuali dengan orang-orang yang kamu telah mengadakan perjanjian (dengan mereka) di dekat Masjidilharam (Hudaibiyah), maka selama mereka berlaku jujur terhadapmu, hendaklah kamu berlaku jujur (pula) terhadap mereka. Sungguh, Allah menyukai orang orang yang bertakwa." (QS. at-Taubah : 7)

Terdapat ayat lain yang mebahas tentang *istiqomah* yaitu pada QS. Fussilat ayat 30:

إِنَّ الَّذِيْنَ قَالُوْا رَبُّنَا اللهُ ثُمَّ اسْتَقَامُوْا تَتَنَزَّلُ عَلَيْهِمُ الْمَلٰئِكَةُ أَلَّا تَخَافُوْا وَلَا
تَحْزَنُوْا وَأَبْشِرُوْا بِالْجَنَّةِ الَّتِيْ كُنْتُمْ تُوْعَدُوْنَ

Artinya: ”Sesungguhnya orang-orang yang berkata, ”Tuhan kami adalah Allah” kemudian mereka meneguhkan pendirian mereka maka malaikat-malaikat akan turun kepada mereka (dengan berkata), ”Janganlah kamu merasa takut dan janganlah kamu bersedih hati; dan bergembiralah kamu dengan (memperoleh) surga yang telah dijanjikan kepadamu.” (QS. Fussilat : 30)

Selain beberapa ayat diatas, *istiqomah* juga disebutkan dalam salah satu hadis yaitu:

عَنْ أَبِي عَمْرٍو وَقِيْلَ : أَبِي عَمْرَةَ سُفْيَانُ بْنِ عَبْدِ اللهِ الثَّقَفِي رَضِيَ اللهُ عَنْهُ
قَالَ : قُلْتُ : يَا رَسُوْلَ اللهِ قُلْ لِي فِي الْإِسْلَامِ قَوْلاً لاَ أَسْأَلُ عَنْهُ أَحَداً غَيْرَكَ .
قَالَ : قُلْ آمَنْتُ بِاللهِ ثُمَّ اسْتَقِمْ [رواه مسلم]



Artinya: ”Telah menceritakan kepadaku Muhammad bin ’Ar’arah telah menceritakan kepada kami Syu’bah dari Sa’d bin Ibrahim dari Abu Salamah dari Aisyah radliallahu ’anha bahwa dia berkata; Nabi shallallahu ’alaihi wasallam pernah ditanya; ”Amalan apakah yang paling dicintai Allah?” Dia menjawab; ’Yang dikerjakan terus menerus walaupun sedikit, lalu beliau bersabda: ’Beramallah sesuai dengan kemampuan kalian.’”(HR. Al-Bukhari No. 5984)

Hadis di atas menjelaskan bahwa suatu amalan yang dikerjakan sedikit demi sedikit secara terus-menerus adalah amalan yang Allah cintai. Dapat dikatakan amalan yang dikerjakan secara berkelanjutan tanpa henti itu sebagai *istiqomah*. Hadis ini berhubungan erat dengan perintah Allah Swt dalam QS. Fussilat ayat 30 tentang perintah agar selalu *beristiqomah* dalam beragama bagi orang yang beriman, yaitu selalu taat kepada Allah Swt, menjalani segala perintah-Nya serta menjauhi larangan-Nya Abdurrohman (2018). Para ulama juga mengatakan bahwa:

اَلْاِسْتِقَامَةُ خَيْرٌ مِنْ أَلْفِ كَرَامَةْ

Artinya: ”Istiqomah lebih baik daripada seribu karomah.”

Dengan *beristiqomah* maka lambat laun akan memperoleh hasil yang diinginkan. Dengan keuletan yang seimbang, ketika suatu tujuan telah tercapai disitulah letak keistimewaan (*karomah*) yang diperoleh dari hasil jerih payah seseorang. Sama halnya dalam proses pembuktian, dibutuhkan kekonsistenan dalam mendefinisikan suatu operasi supaya apa yang telah didefinisikan tersebut dapat dijadikan suatu referensi untuk membuktikan sebuah teorema, lemma dan juga proposisi yang ada.

Dalam membuktikan suatu teorema, dibutuhkan keyakinan untuk mendefinisikan suatu operasi agar dapat digunakan sebagai referensi untuk proses pembuktian teorema. Keyakinan tersebut dibutuhkan agar tidak menimbulkan suatu keraguan dalam proses pembuktian. Dalam kitab *”Risalah Qawa-id Fiqh”* terdapat kaidah yang menjelaskan mengenai keraguan akan kebenaran akibat rasa bimbang. Kaidah tersebut berbunyi:

اَلْيَقِيْنُ قَدْ يُزَالُ بِالشَّكِ

Artinya: ”Yakin itu terkadang bisa hilang sebab bimbang.”

Dari kaidah di atas dijelaskan bahwa suatu keyakinan bisa saja menghilang akibat dari rasa bimbang atau ragu. Oleh karena itu, dalam proses pembuktian suatu teorema diperlukannya suatu keyakinan untuk membuktikan kebenarannya. Dalam mencari sebuah kebenaran dibutuhkan juga usaha dan doa agar kebenaran yang dicari dapat dipertanggungjawabkan.

Seperti halnya pembuktian teorema di aljabar yang pada penelitian ini akan membuktikan sifat dari operasi *closure* pada MV-aljabar. Dalam membuktikan teoremanya, tidak boleh timbul rasa ragu atau bimbang atas apa yang akan dibuktikan. Karena jika mengalami suatu keraguan, maka muncullah keraguan-keraguan lain yang dapat menyebabkan suatu kebenaran yang tidak dapat dipertanggungjawabkan.

# BAB III

# METODE PENELITIAN

Bab ini memaparkan mengenai metode yang dipakai dalam membantu penelitian yang mana penelitian ini dapat terarah dengan baik.

## 3.1. Metodologi Penelitian

Pada penelitian ini dikategorikan penelitian deskripsi kualitatif, karena dalam penelitian ini mengkaji suatu definisi, teorema serta karakteristik sifat-sifat *closure MV-aljabar*. Penelitian deskripsi kualitatif ialah sebuah proses penelitian yang dipelukan dalam meneliti suatu objek yang alami. Penelitian ini menguraikan dengan jelas mengenai konsep dari operasi *closure* pada MV-aljabar dan karakteristik sifat-sifat operasi *closure* pada MV-aljabar.

## 3.2. Metode Pengumpulan Data

Data yang dipakai pada penelitian ini didapat berdasarkan referensi-referensi karya ilmiah oleh para pakar, baik berupa buku ilmiah, jurnal ilmiah, serta refensi lain yang erat kaitannya dengan MV-aljabar dan Operasi *Closure*. Dari beraneka sumber referensi yang sudah disatukan, diambil satu jurnal sebagai referensi utama. Dari referensi itu, diperoleh judul ”Closure Operations on MV-algebras” oleh Oliver A. Heubo-Kwegna, dan Jean B. Nganou (Heubo-Kwegna and Nganou , 2020). Berdasarkan jurnal tersebut, dilakukan analisis tentang konsep operasi *closure* dan karakteristik sifat-sifat operasi *closure* pada MV-aljabar.

### 3.3. Tahapan Penelitian

Dilakukan beberapa tahapan penelitian sebagai berikut:

1. Proses pengumpulan data dari berbagai literatur.
2. Mengkaji mengenai definisi, contoh serta teorema mengenai MV-aljabar dan Ideal MV-aljabar.
3. Mengkaji tentang definisi, contoh dan teorema yang berkaitan dengan karakteristik dari operasi *closure* pada MV-aljabar.
4. Menarik suatu kesimpulan dari hasil analisis yang sudah dikerjakan.

# BAB IV

# HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai suatu definisi dan karakteristik dari operasi *closure* MV-Aljabar. Dan dipaparkan tentang integrasi keislaman yang menunjang penelitian.

## 4.1. Operasi *Closure* pada MV-Aljabar

Dalam subbab ini dijelaskan tentang definisi operasi *closure* pada MV-aljabar.

**Definisi 4.1.1** *Diberikan $M$ adalah sebuah MV-Aljabar dan $Id(M)$ adalah himpunan semua ideal dari $M$. Himpunan $Id(M)$ adalah operasi closure pada $M$ jika terdapat pemetaan $c : Id(M) \longmapsto Id(M)$ yang memenuhi beberapa aksioma berikut yaitu untuk setiap $\mathcal{I} \in Id(M)$:*

1. $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^c$;
2. $\mathcal{I}^{cc} = \mathcal{I}^c$;
3. *Jika* $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ *maka* $\mathcal{I}^c \subseteq \mathcal{J}^c$.

   *dimana* $\mathcal{I}^c$ *adalah closure* $\mathcal{I}$.

*Himpunan $c$ dikatakan c-closed jika $I^c = I$ untuk setiap ideal $I$ pada $M$.*

**Contoh 4.1.2** Berdasarkan Contoh 2.1.3 $A = \{0, m_1, m_2, 1\}$ adalah MV-aljabar. Diperoleh ideal dari $A$ adalah $\{0\}, \{0, m_1\}, \{0, m_2\}, \{0, 1\}$ dan $A$.

Sedemikian sehingga $Id(A) = \{\{0\}, \{0, m_1\}, \{0, m_2\}, \{0, 1\}, A\}$.

Lebih lanjut didefinisikan pemetaan sebagai berikut:

$$c : Id(A) \longrightarrow Id(A)$$

$$\mathcal{I} \longmapsto c(\mathcal{I}) = \mathcal{I}^c = \mathcal{I}$$

Pemetaan $c$ merupakan operasi *closure* pada $A$, sebab:

1. $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^c$.

   Misal $\mathcal{I} = \{0, m_1\}$ sehingga $\mathcal{I}^c = \{0, m_1\}$.

   Jelas bahwa $\mathcal{I} = \{0, m_1\} \subseteq \mathcal{I}^c = \{0, m_1\}$.

2. $\mathcal{I}^{cc} = \mathcal{I}^c$

   Misal $\mathcal{I} = \{0, m_2\}$. Diperoleh $\mathcal{I}^c = \{0, m_2\}, \mathcal{I}^{cc} = \{0, m_2\}$.

   Terpenuhi $\mathcal{I}^{cc} = \{0, m_2\} = \mathcal{I}^c = \{0, m_2\}$.

3. $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J} \Longrightarrow \mathcal{I}^c \subseteq \mathcal{J}^c$

   Misal $\mathcal{I} = \{0\}$ dan $\mathcal{J} = \{0, m_1\}$.

   Diperoleh $\mathcal{I}^c = \{0\}$ dan $\mathcal{J}^c = \{0, m_1\}$.

   Terpenuhi $\mathcal{I} = \{0\} \subseteq \mathcal{J} = \{0, m_1\} \Longrightarrow \mathcal{I}^c = \{0\} \subseteq \mathcal{J}^c = \{0, m_2\}$

**Teorema 4.1.3** *Misalkan $M$ adalah MV-aljabar. Jika c adalah operasi closure pada $M$ dan $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ adalah ideal family di $M$, maka:*

1. *Untuk setiap ideal $I$, $I^c = \bigcap\{J : J \in Id(M), I \subseteq J$ adalah c-closed$\}$.*

2. $\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c$.

3. *Jika setiap $I_\alpha$ adalah c-closed, maka $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$ juga merupakan c-closed.*

4. $\left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c = \left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)^c$.

**Bukti.** Diketahui $c$ adalah operasi *closure* pada $M$ dan $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ adalah ideal *family* di $M$.

1. Diketahui $I$ adalah ideal MV-aljabar $M$.

   Misalkan $\mathcal{A}$ adalah himpunan semua $c-$ideal yang memuat $I$.

   Akan ditunjukkan $I^c = \bigcap\{J : J \in Id(M), I \subseteq J$ dan $J$ adalah *c-closed* $\}$

   Atau dengan kata lain, akan ditunjukkan

   (a) $I^c \subseteq \bigcap\{J : J \in Id(M), I \subseteq J$ dan $J$ adalah *c-closed* $\}$

   Berdasarkan Definisi 4.1.1 yaitu jika $I \subseteq J$ maka $I^c \subseteq J^c$, sehingga diperoleh

   $$\begin{aligned} I \subseteq J &\Rightarrow I^c \subseteq J^c \qquad (J \text{ adalah } c\text{-}closed \text{ yaitu } J^c = J) \\ &\Leftrightarrow I^c \subseteq J \end{aligned}$$

   Karena $I^c \subseteq J$ untuk setiap $J \subseteq \mathcal{A}$, maka berlaku $I^c \subseteq \bigcap\{J : J \in Id(M), I \subseteq J$ dan $J$ adalah *c-closed*$\}$.

   (b) $\bigcap\{J : J \in Id(M) I \subseteq J$ dan $J$ adalah c-closed$\} \subseteq I^c$

   Diperhatikan bahwa $I^c \subseteq \mathcal{A}$.

   Berdasarkan Definisi 4.1.1 diperoleh $I \subseteq I^c$.

   Akibatnya untuk sebarang $J \subseteq \mathcal{A}$ berlaku $\bigcap J \subseteq \mathcal{A}$.

   Karena $J$ adalah *c-closed* yang berarti $J^c = J$, maka berlaku juga $J \subseteq I^c$.

   Sehingga berlaku juga $\bigcap\{J : J \in Id(M), I \subseteq J$ dan $J$ adalah *c-closed*$\} \subseteq I^c$.

   Sehingga berdasarkan $(a)$ dan $(b)$ terpenuhi bahwa

$I^c = \bigcap\{J : J \in Id(M), I \subseteq J$ dan $J$ adalah *c-closed* $\}$.

2. Akan ditunjukkan $\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c$

   Atau dengan kata lain, akan ditunjukkan

   (a) $\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\Lambda^c\right)^c \subseteq \bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\Lambda^c$

   Ambil sebarang indeks $\beta \in \Lambda$. Diperoleh,

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c \subseteq I_\beta^c \qquad \text{(Definisi 4.1.1 yaitu jika } I \subseteq J \text{ maka } I^c \subseteq J^c\text{)}$$
$$\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c \subseteq (I_\beta^c)^c \qquad \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } I^{cc} = I^c\text{)}$$
$$\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c \subseteq I_\beta^c$$

   Akibatnya, untuk setiap indeks $\beta \in \Lambda$ diperoleh

$$\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c \subseteq \bigcap_{\beta\in\Lambda} I_\beta^c$$

   Lebih lanjut, untuk setiap indeks di $\Lambda$ diperoleh

$$\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c \subseteq \bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c$$

   (b) $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c \subseteq \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c$

   Berdasarkan Definisi 4.1.1 yaitu $I \subseteq I^c$, maka jelas berlaku

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c \subseteq \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c$$

Sehingga berdasarkan $(a)$ dan $(b)$ terpenuhi bahwa $\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c$.

3. Diketahui $I_\alpha$ adalah *c-closed* artinya $I_\alpha^c = I_\alpha$.

   Akan ditunjukkan $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$ merupakan *c-closed*.

   Atau dengan kata lain, akan ditunjukkan $\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$.

   Diperhatikan, karena $I_\alpha^c = I_\alpha$, maka berdasarkan Teorema 4.1.3 poin 2 diperoleh

$$\begin{aligned}
\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)^c &= \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c && \text{(Teorema 4.1.3 yaitu } \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\text{)}\\
&= \bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c && \text{(Karena } I_\alpha \text{ } c\text{-closed yaitu } I_\alpha^c = I_\alpha\text{)}\\
&= \bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha
\end{aligned}$$

4. Akan ditunjukkan $\left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c = \left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)^c$

   Atau dengan kata lain, akan ditunjukkan

   (a) $\left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c \subseteq \left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)^c$

   Ambil sebarang indeks $\beta \in \Lambda$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
I_\beta &\subseteq \sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } I \subseteq J \Longrightarrow I^c \subseteq J^c\text{)}\\
\Leftrightarrow I_\beta^c &\subseteq \left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)^c
\end{aligned}$$

   Lebih lanjut untuk setiap indeks $\beta \in \Lambda$ dilakukan operasi penjumlahan, maka diperoleh

$$\sum_{\beta\in\Lambda} I_\beta^c \subseteq \left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)^c \qquad \text{(Kedua ruas di}\textit{closure}\text{kan)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{\beta\in\Lambda} I_\beta^c\right)^c \subseteq \left(\left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)^c\right)^c \qquad \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } I^{cc} = I^c\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{\beta\in\Lambda} I_\beta^c\right)^c \subseteq \left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)^c$$

Sehingga diperoleh $\left(\sum_{\beta\in\Lambda} I_\beta^c\right)^c \subseteq \left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)^c$.

(b) $\left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)^c \subseteq \left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c$

Berdasarkan Definisi 4.1.1 yaitu $I \subseteq I^c$ untuk setiap $\alpha \in \Lambda$ diperoleh

$$I_\alpha \subseteq I_\alpha^c \qquad \text{(Kedua ruas di}\textit{closure}\text{kan)}$$

$$\Leftrightarrow I_\alpha^c \subseteq (I_\alpha^c)^c \qquad \text{(Kedua ruas dijumlahkan)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c \subseteq \left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c$$

Sehingga berdasarkan $(a)$ dan $(b)$ terpenuhi

$$\left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c = \left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)^c$$

.

■

## 4.2. *Closure* Stabil pada MV-Aljabar

Jika dipunyai dua ideal (misalkan $I$ dan $J$) dari MV-aljabar , maka secara umum $I \cap J$ juga merupakan ideal. Lebih lanjut, berikut akan diberikan definisi *closure* dari irisan dua ideal yang disebut *closure* stabil.

**Definisi 4.2.1** *Diberikan sebuah operasi closure $c$ pada $M$. Operasi closure $c$ dikatakan stabil jika $(I \cap J)^c = I^c \cap J^c$ untuk setiap ideal $I, J$ di $M$.*

**Teorema 4.2.2** *Diberikan $M$ adalah sebuah MV-Aljabar. Jika $Id(M)$ adalah linearly order by inclusion, maka setiap operasi closure pada $M$ adalah stabil.*

**Bukti.** Misalkan $c$ adalah operasi *closure* pada $M$.

Akan ditunjukkan operasi *closure* $c$ pada $M$ adalah stabil yaitu $(I \cap J)^c = I^c \cap J^c$.
Ambil sebarang $I, J$ ideal di $M$. Karena $Id(M)$ adalah *linearly order by inclusion* maka terdapat kemungkinan $I \subseteq J$ atau $J \subseteq I$.

Asumsikan $I \subseteq J$.

Karena $I \subseteq J$ artinya $I \cap J = I$ maka dengan Definisi 4.1.1 yaitu jika $I \subseteq J$ maka $I^c \subseteq J^c$ berlaku $I^c \cap J^c = I^c$.

Diperhatikan,

$$
\begin{aligned}
& I \cap J = I && \text{(Kedua ruas di}\textit{closure}\text{kan)} \\
\Leftrightarrow\ & (I \cap J)^c = I^c && (\text{Karena } I^c \subseteq J^c \Leftrightarrow I^c \cap J^c = I^c) \\
\Leftrightarrow\ & (I \cap J)^c = I^c \cap J^c
\end{aligned}
$$

Karena $(I \cap J)^c = I^c \cap J^c$ untuk setiap $I, J \in M$. Sehingga operasi *closure* $c$ pada $M$ adalah stabil. ■

### 4.3. *Closure Semi-Prime* pada MV-Aljabar

Diperhatikan kembali, pada MV-aljabar didefinisikan operasi $\odot$. Operasi $\odot$ juga dapat didefinisikan pada himpunan ideal, dimana berikut diberikan definisi mengenai dua himpunan ideal dan definisi *semi-prime* yang berkaitan dengan operasi $\odot$ dari dua ideal.

**Definisi 4.3.1** *Misalkan $I, J$ adalah ideal pada MV-aljabar $M$. Didefinisikan suatu produk dari dua himpunan ideal $I$ dan $J$ terhadap operasi $\odot$ yaitu*

$$I \odot J = \{x \in M \mid x \leq (c_1 \odot d_1) \oplus \cdots \oplus (c_n \odot d_n); n \geq 1, c_i \in I, d_i \in J\}$$

Berdasarkan Definisi 4.3.1, maka definisi produk dua himpunan ideal dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} I \odot J &= \{x \in M \mid x \leq (c_1 \odot d_1) \oplus \cdots \oplus (c_n \odot d_n); n \geq 1, c_i \in I, d_i \in J\} \\ &= \{x \in M \mid x^* \oplus [(c_1 \odot d_1) \oplus \cdots \oplus (c_n \odot d_n)] = 1; n \geq 1, c_i \in I, d_i \in J\} \\ &= \{x \in M \mid x^* \oplus [({c_1}^* \oplus {d_1}^*)^* \oplus \cdots \oplus ({c_n}^* \oplus {d_n}^*)^*] = 1; n \geq 1, c_i \in I, d_i \in J\} \end{aligned}$$

**Definisi 4.3.2** *Misalkan $M$ adalah MV-aljabar. Diberikan sebuah operasi closure $c$ pada $M$. Operasi closure $c$ dikatakan semi-prime jika $I^c \odot J^c \subseteq (I \odot J)^c$ untuk setiap ideal $I, J \in M$.*



**Teorema 4.3.3** *Sebuah operasi closure $c$ adalah semi-prime jika dan hanya jika $(I^c \odot J^c)^c = (I \odot J)^c$ untuk setiap ideal $I, J \in M$.*

**Bukti.**

($\Longrightarrow$) Diketahui $c$ adalah *semi-prime* artinya $I^c \odot J^c \subseteq (I \odot J)^c$ untuk setiap ideal $I, J \in M$.

Ambil sebarang ideal $I$ dan $J$ di $M$.

Akan ditunjukkan bahwa $(I^c \odot J^c)^c = (I \odot J)^c$

Atau akan ditunjukkan:

1. $(I^c \odot J^c)^c \subseteq (I \odot J)^c$.

   Berdasarkan diketahui, diperoleh

$$\begin{aligned} I^c \odot J^c &\subseteq (I \odot J)^c && \text{(Kedua ruas di}\textit{closure}\text{kan)} \\ (I^c \odot J^c)^c &\subseteq ((I \odot J)^c)^c && \text{(Definisi 4.1.1 yaitu } I^{cc} = I^c) \\ (I^c \odot J^c)^c &\subseteq (I \odot J)^c \end{aligned}$$

2. $(I \odot J)^c \subseteq (I^c \odot J^c)^c$.

   Berdasarkan Definisi 4.1.1 yaitu $I \subseteq I^c$. Jika $I$ ideal dari $M$ maka $I \subseteq I^c$, dan jika $J$ ideal dari $M$ maka $J \subseteq J^c$.

   Akibatnya,

$$\begin{aligned} I \odot J &\subseteq I^c \odot J^c && \text{(Kedua ruas di}\textit{closure}\text{kan)} \\ \Leftrightarrow (I \odot J)^c &\subseteq (I^c \odot J^c)^c \end{aligned}$$

   Sehingga berdasarkan 1 dan 2 terpenuhi $(I^c \odot J^c)^c = (I \odot J)^c$.

   $(\Longleftarrow)$ Diketahui $(I^c \odot J^c)^c = (I \odot J)^c$.

Akan ditunjukkan bahwa operasi *closure* c adalah *semi-prime* yaitu $I^c \odot J^c \subseteq (I^c \odot J^c)^c$, untuk setiap $I, J \in M$.

Ambil sebarang ideal $I, J \in A$. Karena $(I^c \odot J^c)^c = (I \odot J)^c$ maka berlaku

$$(I^c \odot J^c)^c \subseteq (I \odot J)^c \tag{4.1}$$

Berdasarkan Definisi 4.1.1 yaitu $I \subseteq I^c$ maka

$$I^c \odot J^c \subseteq (I^c \odot J^c)^c \tag{4.2}$$

Berdasarkan Persamaan 4.2 dan 4.1 dapat disimpulkan

$$I^c \odot J^c \subseteq (I \odot J)^c$$

Karena berlaku $I^c \odot J^c \subseteq (I^c \odot J^c)^c$. Jadi operasi *closure* adalah *semi-prime*. ■

**Contoh 4.3.4** (Changs MV-aljabar)

Diberikan struktur $(\mathcal{C}, 0, \oplus, *)$, untuk setiap $t \in \omega$ didefinisikan sebagai berikut:

$$th = \begin{cases} 0, & \text{jika } t = 0 \\ h, & \text{jika } t = 1 \\ h + (t-1)h & \text{jika } t > 1 \end{cases}$$

$$1 - th = \begin{cases} 1, & \text{jika } t = 0 \\ 1 - h, & \text{jika } t = 1 \\ 1 - (t-1)h - h & \text{jika } t > 1 \end{cases}$$

Didefinisikan suatu operasi pada himpunan $\mathcal{C}$ yaitu:

1. Jika $j = th$ dan $k = vh$ maka $j \oplus k = (v + t)h$,
2. Jika $j = 1 - th$ dan $y = 1 - vh$ maka $j \oplus k = 1$,
3. Jika $j = th$ dan $y = 1 - vh$ dan $v \leq t$ maka $j \oplus k = 1$,
4. Jika $j = th$ dan $y = 1 - vh$ dan $t < v$ maka $j \oplus k = 1 - (v - t)h$.
5. Jika $j = 1 - vh$ dan $y = th$ dan $v \leq t$ maka $j \oplus k = 1$.

6. Jika $j = 1 - vh$ dan $y = th$ dan $t < v$ maka $j \oplus k = 1 - (v - t)h$.

7. Jika $j = th$ maka $j^* = 1 - th$.

8. Jika $j = 1 - th$ maka $j^*th$.

9. $j \leq k$ jika dan hanya jika:

   (a) $j = th$ dan $k = 1 - vh$.

   (b) $j = th$ dan $k = vh$ dan $t \leq v$.

   (c) $j = 1 - th$ dan $k = 1 - vh$ dan $v \leq t$.

Maka, struktur $(\mathcal{C}, \oplus, *, 0)$ adalah MV-aljabar, atau bisa disebut Chang's MV-aljabar.

Lebih lanjut ideal $\mathcal{C}$ adalah $\{0\}, m,$ dan $\mathcal{C}$, dimana $m$ adalah ideal maksimal.

Didefinisikan *closure* pada $\mathcal{C}$

$$c : Id(\mathcal{C}) \longrightarrow Id(\mathcal{C})$$

$$0 \longmapsto c(0) = 0^c = 0$$

$$m \longmapsto c(m) = m^c = \mathcal{C}$$

$$\mathcal{C} \longmapsto c(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^c = \mathcal{C}$$

Diperhatikan, bahwa ideal-ideal dari $\mathcal{C}$ berlaku $\{0\}, m,$ dan $\mathcal{C}$.

Sedemikian sehingga berdasarkan Teorema 4.2.2, karena $Id(\mathcal{C})$ berlaku *linearly order by inclusion* sehingga *closure* $c$ pada $\mathcal{C}$ merupakan operasi closure stabil.

Akan tetapi, jika didefinisikan operasi $\odot$ pada $\mathcal{C}$ yaitu $m \odot m$. Maka operasi *closure* pada Chang's MV-aljabar $\mathcal{C}$ bukan merupakan *semi-prime* sebab, Misal $I = J = m$. Berdasarkan Definisi 4.3.1 diperoleh

$$I^c \odot J^c = m^c \odot m^c = \mathcal{C} \odot \mathcal{C} = \mathcal{C} \tag{4.3}$$

dan

$$(I \odot J)^c = (m \odot m)^c = 0^c = 0 \tag{4.4}$$

Sehingga berdasarkan Persamaan 4.3 dan 4.4 maka $I^c \odot J^c \nsubseteq (I \odot J)^c$.

### 4.4. Integrasi Keilmuan

Matematika ialah suatu ilmu tentang bentuk, relasi, serta ukuran. Matematika mempunyai karakteristik khusus yaitu suatu abstraksi dari dunia nyata yang memakai suatu bahasa simbol, serta konsisten dalam sistemnya. Contohnya pada proses pembuktian teorema yang berkaitan dengan sebuah definisi. Selanjutnya, dari teorema tersebut muncullah suatu akibat yang dikenal sebagai lemma atau *corollary*. Dalam pembuktian teorema, proposisi, maupun lemma seringkali membutuhkan proses yang panjang dan cermat. Pada suatu proses pembuktian diperlukan referensi pendukung yang akurat, sehingga perlu dilakukan *tabayyun*. *Tabayyun* dalam bahasa Indonesia dikatakan bahwa mencari suatu kejelasan, mengamati suatu hal sebelum mengungkapnya dengan tujuan memperoleh hasil yang benar. Sebagaimana firman Allah Swt. dalam QS. Al-Isra ayat 36 sebagai berikut:

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِ عِلْمٌ ۚ إِنَّ السَّمْعَ وَالْبَصَرَ وَالْفُؤَادَ كُلُّ أُولَٰئِكَ كَانَ عَنْهُ
مَسْئُولًا

Artinya: ”Dan janganlah kamu mengikuti sesuatu yang tidak kamu ketahui. Karena pendengaran, penglihatan dan hati nurani, semua itu akan diminta pertanggungjawabannya.”(Q.S. Al-Isra : 36)

Dijelaskan pula dalam QS. Al-Hujarat ayat 6:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓا۟ إِن جَآءَكُمْ فَاسِقٌۢ بِنَبَإٍ فَتَبَيَّنُوٓا۟ أَن تُصِيبُوا۟ قَوْمًۢا بِجَهَٰلَةٍ
فَتُصْبِحُوا۟ عَلَىٰ مَا فَعَلْتُمْ نَٰدِمِينَ

Artinya: ”Wahai orang-orang yang beriman. Jika seseorang yang fasik datang kepadamu membawa suatu berita, maka telitilah kebenarannya, agar kamu tidak mencelakakan suatu kaum karena kebodohan (kecerobohan), yang akhirnya kamu menyesali perbuatanmu itu.” (Q.S. Al-Hujarat : 6)

Kedua ayat di atas menyebutkan bahwa segala sesuatu termasuk sebuah informasi pasti mempunyai nilai kebenaran yaitu antara benar atau salah. Supaya tidak memperoleh hasil informasi yang palsu sebaiknya harus ditunjukkan terlebih dahulu nilai kebenaran informasi tersebut. Perintah untuk bertabayyun juga tergambarkan dalam sebuah hadis sebagai berikut:



حَدَّثَنَا حَفْصُ بْنُ عُمَرَ حَدَّثَنَا شُعْبَةُ ح و حَدَّثَنَا مُحَمَّدُ بْنُ الْحُسَيْنِ حَدَّثَنَا
عَلِيُّ بْنُ حَفْصٍ قَالَ حَدَّثَنَا شُعْبَةُ عَنْ خُبَيْبِ بْنِ عَبْدِ الرَّحْمَنِ عَنْ حَفْصِ بْنِ
عَاصِمٍ قَالَ ابْنُ حُسَيْنٍ فِي حَدِيثِهِ عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ أَنَّ النَّبِيَّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ
قَالَ كَفَى بِالْمَرْءِ إِثْمًا أَنْ يُحَدِّثَ بِكُلِّ مَا سَمِعَ قَالَ أَبُو دَاوُد وَلَمْ يَذْكُرْ حَفْصٌ
أَبَا هُرَيْرَةَ قَالَ أَبُو دَاوُد وَلَمْ يُسْنِدْهُ إِلَّا هَذَا الشَّيْخُ يَعْنِي عَلِيَّ بْنَ حَفْصٍ
الْمَدَائِنِيَّ

Artinya: ”Telah menceritakan kepada kami Hafsh bin Umar berkata, telah menceritakan kepada kami Syu’bah. (dalam jalur lain disebutkan) Telah menceritakan kepada kami Muhammad bin Al Husain berkata, telah menceritakan kepada kami Ali bin Hafsh ia berkata; telah menceritakan kepada kami Syu’bah dari Khubaib bin ’Abdurrahman dari Hafsh bin Ashim -Husain berkata dalam haditsnya- dari Abu Hurairah bahwa Nabi shallallahu ’alaihi wasallam bersabda: ”Cukuplah seseorang mendapatkan dosa, jika menceritakan setiap apa saja yang ia dengar.” Abu Dawud berkata, ”Hafsh tidak menyebutkan nama Abu Hurairah.” Abu Dawud berkata, ”Dan ia juga tidak menyandarkannya kecuali kepada Syaikh ini, yaitu Ali bin Hafsh Al Mada‘ini.”(Hadits Sunan Abu Dawud No. 4340)

Pada hadis tersebut dijelaskan bahwa jika seseorang tidak memastikan suatu kebenaran tentang apa yang didengar kemudian menyampaikan apa yang didengar kepada orang lain, maka seseorang itu dianggap berdusta atau berdosa. Oleh karena itu dapat dipahami bahwa ketika memperoleh suatu berita maka hendaknya janganlah tergesa-gesa dalam menyampaikannya kepada orang lain. Jika mendapatkan suatu berita atau informasi maka haruslah diteliti dahulu kebenaran dari informasi tersebut.

Hal tersebut analog dengan sebuah teori dalam ilmu aljabar. Dalam ilmu aljabar, apabila terdapat sebuah teorema maka harus diteliti dahulu kebenaran teorema tersebut yaitu dengan metode pembuktian menggunakan definisi, teorema maupun proposisi yang mendukung teorema tersebut. Apabila telah diteliti kebenaran dari teorema tersebut maka teorema tersebut dapat dijadikan seagai suatu definisi yang konkret yang digunakan untuk umum.

Salah satu contohnya yaitu pada Teorema 4.1.3 yang menyatakan ”Misalkan $M$ adalah MV-aljabar dan $c$ adalah operasi *closure* pada $M$ dan $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ adalah ideal *family* di $M$, maka: (1) Untuk setiap ideal $I$, $I^c = \bigcap\{J : J \in Id(M), I \subseteq J$ adalah *c-closed*$\}$; (2) $\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c$; (3) Jika setiap $I_\alpha$ adalah *c-closed*, maka $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$ juga merupakan *c-closed*; dan (4) $\left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c = \left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)^c$."

Teorema ini masih belum pasti kebenarannya, sehingga diperlukan pembuktian yang jelas dan runtut atau dengan kata lain perlu dilakukannya *tabayyun*. Karena pembuktian teorema membutuhkan banyak referensi, sehingga diperlukan studi literatur terlebih dahulu mengenai operasi *closure* pada MV-aljabar. Setelah ditemukan literasi yang sesuai, maka literasi tersebut dapat membantu dalam proses pembuktian teorema yang terkait. Ketika telah didapatkan suatu kebenaran pada pembuktian teorema tersebut, maka teorema diatas dapat dijadikan sebagai acuan untuk teorema lebih lanjut. Atau dengan kata lain teorema tersebut dapat disebarluaskan karena telah diperoleh kebenarannya.

Dari suatu teorema, memunculkan suatu akibat yang dinamakan lemma atau *corollary*. Dari satu teorema dapat menghasilkan beberapa lemma yang erat kaitannya dengan teorema tersebut. Dalam kitab "Risalah Qawa-id Fiqh" terdapat kaidah yang menjelaskan mengenai sesuatu yang sempit bisa menjadi luas. Kaidah tersebut berbunyi:



اَلْأَمْرُ إِذَا اتَّسَعَ ضَاقَ

Artinya: "Sesuatu itu apabila telah sempit, maka menjadi luas."

Makna kaidah di atas ialah sesuatu yang sempit bisa jadi menjadi luas. Seperti pada pembuktian teorema dalam ilmu aljabar. Yang dimaksudkan sempit adalah teorema dan yang dimaksud dengan luas adalah lemma. Artinya suatu teorema dapat dikembangkan menjadi beberapa akibat yang dinamakan lemma.

Analog pada pembuktian operasi *closure* pada MV-aljabar yang mana mengakibatkan timbulnya sifat-sifat dari *closure* MV aljabar yaitu *closure* stabil dan *closure semi-prime*.

Berdasarkan ayat-ayat al-Qur'an, beberapa hadis, dan beberapa kaidah yang telah disebutkan, dapat diambil kesimpulan bahwa sesuatu yang dilakukan harus dicari kebenarannya. Didorong pula dengan keyakinan akan suatu kebenaran tersebut. Sehingga dari nilai kebenaran dan keyakinan tersebut dapat memunculkan sesuatu yang baru, yang mana harus dilakukan *tabayyun*.

# BAB V

# PENUTUP

Bab ini membahas tentang hasil kesimpulan dan saran yang diperoleh dari teori yang telah dijelaskan dalam bab sebelumya.

## 5.1. Kesimpulan

Berdasarkan ulasan pada bab sebelumya, berikut kesimpulan yang didapatkan:

1. Definisi Operasi *Closure* pada MV-aljabar

   Diberikan $M$ adalah sebuah MV-Aljabar dan $Id(M)$ adalah himpunan semua ideal dari $M$. Himpunan $Id(M)$ adalah operasi *closure* pada $M$ jika terdapat pemetaan $c : Id(M) \longmapsto Id(M)$ yang memenuhi beberapa aksioma berikut yaitu untuk setiap $\mathcal{I} \in Id(M)$:

   (a) $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^c$;

   (b) $\mathcal{I}^{cc} = \mathcal{I}^c$;

   (c) Jika $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ maka $\mathcal{I}^c \subseteq \mathcal{J}^c$.

   dimana $\mathcal{I}^c$ adalah *closure* $\mathcal{I}$.

2. Sifat-sifat Operasi *Closure* pada MV-aljabar

   (a) Misalkan $M$ adalah MV-aljabar. Jika $c$ adalah operasi *closure* pada $M$ dan $(I_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ adalah ideal *family* di $M$, maka:

i. Untuk setiap ideal $I$, $I^c = \bigcap\{J : J \in Id(M), I \subseteq J$ adalah *c-closed*$\}$.

ii. $\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c$.

iii. Jika setiap $I_\alpha$ adalah *c-closed*, maka $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$ juga merupakan *c-closed*.

iv. $\left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha^c\right)^c = \left(\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha\right)^c$.

(b) Diberikan $M$ adalah sebuah MV-Aljabar. Jika $Id(M)$ adalah linearly order by inclusion, maka setiap operasi closure pada $M$ adalah stabil.

(c) Sebuah operasi *closure* $c$ adalah *semi-prime* jika dan hanya jika $(I^c \odot J^c)^c = (I \odot J)^c$ untuk setiap ideal $I, J \in M$.

## 5.2. Saran

Berdasarkan ulasan operasi *closure* pada MV-aljabar yang telah dilakukan, maka penelitian tentang operasi *star* pada MV-aljabar dapat dilakukan lebih lanjut.

# DAFTAR PUSTAKA


Abdurrohman, K.H., 2018, *Konsep Istiqomah Dalam Menuntut Ilmu (Studi Terhadap Al-Quran Surat Fussilat Ayat 30)*, IAIN Salatiga.

Anatolij, D., Beloslav, R., 1998, *Weakly Divisible MV-Algebras and Product*, Mathematical Institute, Slovak Academy of Sciences, Slovakia.

Andrzej, W., 2005, *On Implicative Ideals of Pseudo MV-Algebras*, Scientiae Mathematicae Japonicae Online, e-2005:363-369.

Bhattacharya, P.B., Jain, S.K., Nangpaul, S.R., 1995, *Basic Abstract Algebra*, Cambridge University Press, Cambridge.

Budi, A.S., 2014, *Dinamika Psikologis Istiqomah Pada Santri Hamilil Quran Pondok Pesantren Madrasatul Quran Tebu Ireng*, UIN Maulana Malik Ibrahim, Malang.

Chang, C.C., 1958, *Algebraic Analysis of Many Valued Logic*, Transactions of the American Mathematical Society, 88:467-490.

Cignoli, R., Mundici, D., 1997, *An Elementary Proof of Chang's Completeness Theorem for the Infinite-valued Calculus of ukasiewicz*, Kluwer Academic Publisher: Printed in the Netherlands, 58:79-97.

Dario, S., Marco, F., 2012, *Closure Operations and Star Operations in Commutative Rings*, Universita Degli Studi, Roma.

Dubuc, E.J., Poveda, Y.A., 2010, *Representation theory of MV-algebras*, Annals of Pure and Applied Logic, 161:1024-1046.

Forouzesh, F., 2016, *On Nodal and Conodal Ideals In MV-Algebras*, Le Matematiche, LXXI(II):63-79.

Herstein, I.N., 1975, *Topics in Algebra*, $2^{nd}$ ed. John Wiley and Sons, New York.

Heubo-Kwegna, O.A., Nganou, J.B., 2020, *Closure operation on MV-algebras*, Fuzzy Sets and System.

Jaenal, M.A. 2019, *Karakteristik Aljabar Lie Dengan Aljabar BCL (Binary And Constants Liu)*, UIN Sunan Ampel, Surabaya.

Majid, A., 2012, *Aljabar Max-Plus dan Sifat-Sifatnya*, UIN Maulana Malik Ibrahim, Malang.

Mundici, D., 2007, *MV-Algebras*, University of Florence, Italy.

Nola, A.D., Flondor, P., Leustean, I., 2003, *MV-modules*, Journal of Algebra, 267(1):21-40.

Rachman, F.R., Bakar, N.N., Helmi, M.R., 2018, *Ideal pada Ring Komutatif* Jurnal Matematika UNAND, Vol. II(2):33-37.

Rasouli, S., Davvaz, B., 2010, *Roughness in MV-algebras*, Information Sciences, 180:737-747.

Rochmatul, H., 2019, *Submodul Prima Pada Modul Bebas Atas Ring Komutatif Dengan Elemen Satuan*, UIN Sunan Ampel, Surabaya.

Zaidatun, N., 2019, *Normally Flat Content Semimodules*, UIN Sunan Ampel, Surabaya.