

**IMPLEMENTASI MODEL MATEMATIKA PADA PENYEBARAN
HIV-AIDS DENGAN KONTROL OPTIMAL**

SKRIPSI



**UIN SUNAN AMPEL
S U R A B A Y A**

Disusun Oleh
AHMAD NAUFAL DZAKY SYUKRON
H02217001

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL
SURABAYA**

2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini,

Nama : AHMAD NAUFAL DZAKY SYUKRON

NIM : H02217001

Program Studi : Matematika

Angkatan : 2017

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul "IMPLEMENTASI MODEL MATEMATIKA PADA PENYEBARAN HIV-AIDS DENGAN KONTROL OPTIMAL". Apabila suatu saat nanti terbukti saya melakukan tindakan plagiat, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian pernyataan keaslian ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 03 Februari 2022

Yang menyatakan,



AHMAD NAUFAL DZAKY SYUKRON

NIM. H02217001

LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

Skripsi oleh

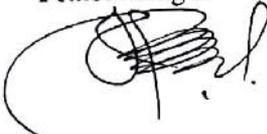
Nama : AHMAD NAUFAL DZAKY SYUKRON
NIM : H02217001
Judul Skripsi : IMPLEMENTASI MODEL MATEMATIKA PADA PE-
NYEBARAN HIV AIDS DENGAN KONTROL OPTI-
MAL

telah diperiksa dan disetujui untuk diujikan.

Pembimbing I


Aris Fanani, M.Kom
NIP. 198701272014031002

Pembimbing II


Lutfi Hakim, M.Ag
NIP. 197312252006041001

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika
UIN Sunan Ampel Surabaya


Aris Fanani, M.Kom
NIP. 198701272014031002

PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI

Skripsi oleh

Nama : AHMAD NAUFAL DZAKY SYUKRON
NIM : H02217001
Judul Skripsi : IMPLEMENTASI MODEL MATEMATIKA PADA PE-
NYEBARAN HIV AIDS DENGAN KONTROL OPTI-
MAL

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji
pada tanggal 03 Februari 2022

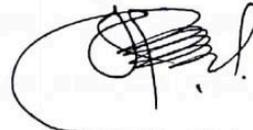
Mengesahkan,
Tim Penguji

Penguji I



Aris Fanani, M.Kom
NIP. 198701272014031002

Penguji II



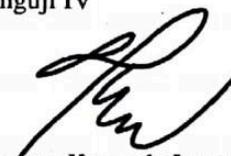
Lutfi Hakim, M.Ag
NIP. 197312252006041001

Penguji III



Dr. Moh. Hafiyusholeh, M.Si, M.PMat
NIP. 198002042014031001

Penguji IV



Putroue Keumala Intan, M.Si
NIP. 19880520818012001

Mengetahui,

Fakultas Sains dan Teknologi
UNCSunan Ampel Surabaya




Prof. Dr. Fatimatur Rusdiyah, M.Ag
NIP. 197312272005012003



KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL SURABAYA
PERPUSTAKAAN

Jl. Jend. A. Yani 117 Surabaya 60237 Telp. 031-8431972 Fax.031-8413300
E-Mail: perpus@uinsby.ac.id

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika UIN Sunan Ampel Surabaya, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : Ahmad Naufal Dzaky Syukuran
NIM : H02217001
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
E-mail address : naufaldzaky38@gmail.com

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah :

Sekripsi Tesis Desertasi Lain-lain (.....)

yang berjudul :

Implementasi model matematika pada penyebaran HIV AIDS dengan kontrol optimal

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif ini Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (database), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di Internet atau media lain secara *fulltext* untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Surabaya, 30 Maret 2022

Penulis

(Ahmad Naufal Dzaky S)

ABSTRAK

IMPLEMENTASI MODEL MATEMATIKA PADA PENYEBARAN HIV-AIDS DENGAN KONTROL OPTIMAL

Penyakit menular seksual (PMS) masih menjadi perhatian khusus bagi pemerintahan Indonesia khususnya Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, salah satunya adalah penyakit HIV/AIDS. HIV/AIDS adalah salah satu penyakit menular seksual (PMS) yang menyebar dari satu individu ke individu lain dengan perantara seks bebas, penggunaan jarum suntik yang tidak steril dan tranfusi darah oleh individu yang mengidap virus HIV. Pada tahun 2013 sekitar 35 juta populasi manusia hidup berdampingan dengan HIV/AIDS yang mana jumlah tersebut meliputi 16 juta perempuan dan 3,2 juta anak-anak berusia kurang dari 15 tahun. Penelitian ini bertujuan meminimumkan penyebaran HIV/AIDS yang berada di Indonesia, pada hal ini maka tujuan umum pada penelitian adalah meminimumkan fungsi tujuan yang telah ditentukan. Penelitian ini melakukan pengembangan model penyebaran S, I dan A dengan penambahan kelas populasi E , selain itu pada penelitian ini juga terdapat penambahan dua variabel kontrol yakni u_1 dan u_2 yang meliputi kontrol penyuluhan dan kontrol pengobatan. Setelah dilakukan penyelesaian kontrol optimal menggunakan prinsip minimum Pontryagin serta simulasi numerik dengan metode Rungge Kutta orde 4 telah diperoleh hasil bahwa pemberian variabel kontrol pengobatan u_2 merupakan kontrol yang lebih optimal dibandingkan dengan kontrol u_1 . Hal ini dikarenakan variabel kontrol u_2 memiliki nilai yang minimum sebesar 1873.

Kata kunci: HIV/AIDS, Prinsip Minimum Pontryagin, Rungge Kutta orde 4.

ABSTRACT

IMPLEMENTATION OF MATHEMATIC MODEL ON SPREAD OF HIV-AIDS WITH OPTIMAL CONTROL

Sexually transmitted diseases (STDs) are still a special concern for the Indonesian government, especially the Ministry of Health of the Republic of Indonesia, one of which is HIV/AIDS. HIV/AIDS is a sexually transmitted disease (STD) that spreads from one individual to another through free sex, the use of unsterilized needles and blood transfusions by individuals with the HIV virus. In 2013 about 35 million human population coexisted with HIV/AIDS which includes 16 million women and 3.2 million children aged less than 15 years. This study aims to minimize the spread of HIV/AIDS in Indonesia, in this case the general goal of the study is to minimize the function of the predetermined objectives. This study develops a distribution model of S , I and A with the addition of a population class E , besides that in this study there are also the addition of two control variables, namely u_1 and u_2 which includes counseling control and treatment control. After completing the optimal control using the Pontryagin minimum principle and numerical simulation using the Runge Kutta method of order 4, the results showed that the treatment control variable u_2 was a more optimal control than the control u_1 . This is because the control variable u_2 has a minimum value of 1873.

Keywords: HIV/AIDS, Pontryagin Minimum Principle, Fourth-order Runge Kutta.

DAFTAR ISI

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	ii
LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING	iii
PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI	iv
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI	v
ABSTRAK	vi
ABSTRACT	vii
DAFTAR ISI	1
I PENDAHULUAN	3
1.1. Latar Belakang Masalah	3
1.2. Rumusan Masalah	9
1.3. Tujuan Penelitian	9
1.4. Manfaat Penelitian	10
1.5. Batasan Masalah	10
1.6. Sistematika Penulisan	11
II TINJAUAN PUSTAKA	13
2.1. Sistem Kekebalan Tubuh	13
2.2. HIV/AIDS	14
2.3. Persamaan Diferensial	17
2.4. Sistem Persamaan Diferensial	18
2.5. Model Matematika	19
2.5.1. Model SIR	19
2.5.2. Model SEIR	21
2.5.3. Model Penyebaran HIV/AIDS tanpa kontrol	22
2.5.4. Model Penyebaran HIV/AIDS dengan Kontrol Optimal	24
2.6. Kontrol Optimal	27
2.7. Prinsip Minimum Pontryagin	30
2.8. Metode Rungge Kutta orde 4	32

2.9. Integrasi Keilmuan	34
III METODE PENELITIAN	37
3.1. Jenis Penelitian	37
3.2. Pengumpulan Data	37
3.3. Analisis Data	37
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	40
4.1. Model Penyebaran HIV/AIDS	40
4.1.1. Model Penyebaran HIV/AIDS Tanpa Kontrol	40
4.1.2. Model Penyebaran HIV/AIDS dengan Kontrol	42
4.2. Penyelesaian Masalah Kontrol Optimal	45
4.2.1. Fungsi Hamiltonian	45
4.2.2. Persamaan State dan Co-State	46
4.2.3. Hasil Kontrol Optimal	48
4.3. Penyelesaian Numerik	49
4.4. Integrasi Keilmuan	56
V PENUTUP	59
5.1. Simpulan	59
5.2. Saran	61
A Perhitungan Kontrol Optimal	68
B Perhitungan Persamaan State	70
C Persaman Co-State	72

UIN SUNAN AMPEL
S U R A B A Y A

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Penyakit menular seksual (PMS) masih menjadi perhatian khusus bagi pemerintahan Indonesia khususnya Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, salah satunya adalah penyakit HIV/AIDS. Pada tahun 2013 sekitar 35 juta populasi manusia hidup berdampingan dengan HIV/AIDS yang mana jumlah tersebut meliputi 16 juta perempuan dan 3,2 juta anak-anak berusia kurang dari 15 tahun (Kemenkes, 2014). Menurut penelitian milik Maimunah & Aldila dijelaskan bahwa HIV/AIDS adalah salah satu penyakit menular seksual (PMS) yang menyebar dari satu individu ke individu lain dengan perantara seks bebas, penggunaan jarum suntik yang tidak steril dan tranfusi darah oleh individu yang mengidap virus HIV (Maimunah and Aldila, 2018). Fenomena ini telah dijelaskan pada Al-Quran surat Al-Isra ayat 32 yang melarang praktek perzinahan:

وَلَا تَقْرَبُوا الزَّوْجَ إِنَّهُ كَانَ فَاحِشَةً وَسَاءَ سَبِيلًا

Artinya : Dan janganlah kamu mendekati zina, sesungguhnya zina itu adalah suatu perbuatan yang keji dan suatu jalan yang buruk. (Qs.Al-Isra 32)

Oleh karenanya kementerian Kesehatan Republik Indonesia melaksanakan program KTS (Konseling Tes Sukarela) yang telah dimulai sejak tahun 2006 dan

TIPK (Tes HIV atas Inisiatif pemberi layanan dan Konseling) sebagai upaya mitigasi pada masalah HIV/AIDS (Kementrian Kesehatan RI, 2018).

Human Immunodeficiency Virus (HIV) adalah faktor utama suatu individu terjangkit *Acquired Immunodeficiency Syndrome* (AIDS)(Sukokarilinda, 2012). HIV memiliki sumber penularan yang beragam meskipun penyakit ini dikategorikan sebagai penyakit menular seksual (PMS) seperti darah, sekresi serviks dan ASI dari penderita HIV (Shaiful and Setiawan, 2017). Berdasarkan pada penelitian Cheng dkk, terdapat sekitar 34 juta individu yang terjangkit HIV (*Human Immunodeficiency Virus*), jumlah tersebut meningkat dari dekade sebelumnya (Cheng et al., 2014). Penderita HIV akan mengalami pelemahan pada kekebalan tubuh, oleh karenanya individu yang terjangkit HIV lebih mudah terjangkit penyakit dikarenakan virus ini dikategorikan ke dalam famili *Retroviridae* (Zamzami et al., 2018)(Zamzami et al., 2018). Tingkat HIV dalam tubuh yang disertai dengan gejala infeksi tertentu adalah suatu indikator bahwa penderita HIV telah menuju ke tahap stadium paling parah dari HIV (Zamzami et al., 2018).

AIDS (*Acquired ImmunoDeficiency Syndrome*) merupakan gejala penyakit yang timbul karena menurunnya kekebalan tubuh yang disebabkan oleh HIV (*Human Immunodeficiency Virus*)(Kemenkes, 2014), tahapan penyakit ini berawal dari pembawa virus HIV menjadi individu terinfeksi AIDS. Pada tahun 2018, tercatat sekitar 38.000 penduduk Indonesia meninggal dikarenakan penyakit AIDS (Joint United Nations Programme on HIV/AIDS) (Joint United Nations Programme on HIV/AIDS (UNAIDS), 2019). Berdasarkan penelitian Agosto dkk AIDS merupakan sebuah penyakit yang tidak bisa disembuhkan, akan tetapi terdapat beberapa pengobatan yang dapat menangani dan memperpanjang hidup dari penderita AIDS (Agusto and Adekunle, 2014). Transisi waktu yang diperlukan oleh pasien HIV menjadi AIDS sekitar 6 bulan hingga 15 tahun, dikarenakan penyakit ini menyerang

sel kekebalan tubuh maka penderita akan rentan terserang beberapa macam penyakit (Naik et al., 2020). Hingga saat ini belum ditemukan vaksin maupun terapi yang dapat menyembuhkan HIV/AIDS secara total, sehingga upaya pengendalian yang dapat dilakukan saat ini adalah dengan pencegahan penyebaran HIV/AIDS (Di Giamberardino and Iacoviello, 2020).

Sejauh ini pengendalian pada penyebaran AIDS paling optimal yang dapat dilakukan adalah pencegahan, dikarenakan belum adanya vaksin dan obat untuk AIDS (Zamzami et al., 2018). Dalam upaya pencegahan dapat dilakukan dengan *antiretroviral treatment* (ART) yang dapat meningkatkan kesehatan dan mengurangi resiko penyebaran HIV sebelum menjadi AIDS. *Antiretroviral treatment* (ART) sebuah metode pencegahan AIDS dengan menghalangi perkembangan virus HIV pada tubuh (Cai et al., 2014). Akan tetapi berdasarkan penelitian Deny dkk, metode pencegahan ini memiliki sisi buruk yakni mahalnya pengobatan dan tidak maksimalnya pengobatan dengan ART (Denysiuk et al., 2018). Oleh sebab itu dibutuhkan sebuah strategi khusus dalam mengendalikan penyebaran AIDS agar diketahui langkah yang tepat untuk menangani penyakit tersebut.

Pemodelan matematika memiliki peranan penting dalam pengendalian penyakit menular diantaranya adalah sebagai mitigasi dan untuk menganalisis dinamika penyebaran penyakit (Uron Hurit, 2016). Pemodelan matematika adalah penyelesaian permasalahan pada kehidupan sehari-hari yang diselesaikan menggunakan pendekatan matematika (Fitria, 2011). Pada kasus tertentu pada pemodelan matematika akan ditambahkan kontrol optimal untuk mendapatkan hasil yang lebih optimal, secara umum kontrol optimal adalah sebuah proses yang dilakukan untuk mendapatkan solusi terbaik dari sebuah penyelesaian (Roy et al., 2015). Aplikasi pada kontrol optimal dapat dicapai dengan indeks performansi yang tepat, dengan demikian sistem kontrol yang dirancang dengan indeks performansi yang tepat dapat

disebut sistem kontrol optimal Toaha (2014). Indeks performansi adalah target pada sebuah permasalahan sistem kontrol (Mahmudah and Naf'an, 2014).

Pengendalian penyakit dengan kontrol optimal telah banyak diteliti oleh beberapa peneliti. Seperti penelitian Sweilam dkk yang menjelaskan bahwa model ko-infeksi malaria-HIV terdiri dari 11 persamaan diferensial dengan tiga variabel kontrol yang berbeda, tiga variabel kontrol dalam model koinfeksi malaria-HIV berperan untuk meminimalisir angka dari individu yang terinfeksi tanpa gejala, penelitian ini memberikan hasil simulasi numeric model yang menggunakan kontrol maupun tanpa kontrol (Sweilam et al., 2020). Hasil simulasi pada penelitian ini menunjukkan ketika variabel sensibilitas antara malaria dan manusia meningkat, maka nilai dari manusia yang terinfeksi HIV tanpa gejala AIDS akan menurun. Selanjutnya pada simulasi tanpa kontrol nilai populasi yang terinfeksi dan terinfeksi tanpa gejala akan meningkat, sedangkan pada simulasi dengan kontrol menunjukkan hasil yang lebih baik pada populasi terinfeksi dan terinfeksi tanpa gejala.

Sedangkan pada penelitian milik Naik juga melakukan penelitian mengenai pengendalian penyakit dengan kontrol optimal. Penelitian ini menjelaskan model penyebaran penyakit yang menggunakan model dasar SIR dengan penambahan variabel exposed (E) dan pemisahan variabel infected (I) menjadi dua bagian. Formulasi model penyebaran pada penelitian ini terdiri dari 5 kelas populasi yakni; Susceptible (S), Exposed (E), Infected (I_1), Infected (I_2) dan Recovery (R). Tujuan dari penelitian ini adalah meminimalisir dinamika penyebaran penyakit HIV dengan pemberian variabel control (V_i) pada kelas populasi Susceptible (S), Exposed (E), Infected (I_1) dan Infected (I_2). Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa formulasi model penyebaran HIV bersifat stabil asimtotik local dan stabil asimtotik global pada nilai $R_0 > 1$, sedangkan masalah control optimal pada penelitian ini menghasilkan persamaan state dan co-state yang akan diselesaikan dengan so-

lusi numerik. Solusi numerik yang dihasilkan terdiri dari 5 skenario yang berbeda (Naik et al., 2020).

Sedangkan pada penelitian Fatmawati & Tasman meneliti tentang pengendalian pada koinfeksi penyakit TB-HIV dengan kontrol optimal. Penelitian tersebut menggunakan model dasar SIA pada kedua penyakit yakni TB dan HIV, formulasi model yang digunakan terdiri dari 6 kelas yakni Susceptible (S), Infected TB (I_t), Infected HIV (I_h), Infected TB-HIV (I_{th}), AIDS (A_h) dan AIDS-TB (A_{th}). Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa model penyebaran TB-HIV yang tanpa kontrol memiliki 4 titik kesetimbangan yakni kesetimbangan bebas penyakit, kesetimbangan bebas HIV, kesetimbangan bebas TB serta kesetimbangan endemic. Selain itu penelitian tersebut juga menghasilkan perbandingan solusi numerik tanpa kontrol dan dengan 2 kontrol yang berbeda yang meliputi pengobatan TB dan pengobatan HIV-AIDS. Hasil simulasi menunjukkan bahwa penggunaan optima kontrol sangat berpengaruh pada model yang, sedangkan pada perbandingan antara kontrol pengobatan TB dengan HIV-AIDS didapatkan bahwa pengobatan TB lebih baik ketimbang pengobatan HIV-AIDS dalam hal untuk mengurangi penderita koinfeksi TB-HIV (Fatmawati and Tasman, 2016).

Beberapa penelitian terdahulu yang lain tentang pengendalian penyakit dengan kontrol optimal diantaranya adalah Sukokarilinda tentang kontrol pengendalian penyakit HIV dengan pemberian ART, hal tersebut juga dilakukan oleh Shirazian & Farahi yang berkonsentrasi tentang kontrol optimal pada penanganan pengendalian penyakit HIV/AIDS dan biaya pada pengendalian penyakit HIV/AIDS (Sukokarilinda, 2012) (Shirazian and Farahi, 2010). Selanjutnya pada penelitian Kwon yang melakukan kontrol optimal penyebaran penyakit HIV/AIDS. Pada penelitian Kwon.dkk(2012) peneliti menggunakan tiga variabel pada model penyebaran HIV diantaranya adalah variabel $T(t)$ yang merepresentasikan jumlah sel CD4 yang se-

hat, $T(a,t)$ yang merepresentasikan jumlah sel CD4 yang terinfeksi berdasarkan usia selnya dan $V(t)$ yang merepresentasikan jumlah partikel virus pada waktu tertentu. Kwon.dkk menggunakan persamaan diferensial orde 2 dan persamaan hiperbola untuk mendeskripsikan persamaan model penyebaran HIV yang digunakan. Kwon menggunakan kontrol dengan terapi pada individu yang terinfeksi HIV (Kwon et al., 2012). Selanjutnya pada Denysiuk dkk pada tahun 2018 yang membahas masalah kontrol optimal pada koinfeksi TB-HIV/AIDS. Kelas populasi yang digunakan pada penelitiannya berjumlah 11 kelas dan diselesaikan secara numerik menggunakan metode runge kutta orde 4 (Denysiuk et al., 2018).

Metode Runge Kutta orde 4 adalah metode yang sering digunakan pada penyelesaian numerik pada persamaan diferensial dikarenakan metode ini adalah pengembangan dari metode euler sehingga memiliki solusi yang lebih optimal. Hal tersebut didukung oleh penelitian Hurit bahwa metode runge kutta orde 4 memiliki solusi yang lebih optimal dibandingkan dengan metode euler dan metode heun. Dikarenakan metode runge kutta orde 4 memiliki hampiran yang lebih kecil sehingga dapat menghasilkan solusi numerik yang optimal (uron Hurit, 2016).

Berdasarkan penjelasan yang telah dipaparkan sebelumnya, penulis akan melakukan penelitian mengenai penyebaran penyakit HIV/AIDS yang dimodifikasi dari penelitian (Leleury et al., 2020). penelitian ini melakukan pengembangan dengan cara menambahkan kelas populasi pengobatan HIV/AIDS. Hal tersebut dilakukan karena pemberian ART dapat dilakukan pada individu yang terinfeksi HIV serta penyuluhan pada individu terekspos sehingga dapat menghambat proses replikasi. Oleh karena itu, penelitian ini akan ditambahkan skenario kontrol pada percobaan penyuluhan populasi terekspos HIV/AIDS serta pengobatan pada populasi terinfeksi HIV. Berdasarkan pemaparan diatas penulis akan melakukan penelitian dengan judul "Implementasi Model Matematika Pada Penyebaran HIV/AIDS de-

ngan Kontrol Optimal”.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan sebelumnya, maka diambil beberapa pokok permasalahan yaitu :

1. Bagaimana bentuk model penyebaran HIV/AIDS tanpa kontrol optimal dan dengan kontrol optimal?
2. Bagaimana penyelesaian kontrol optimal pada model penyebaran HIV/AIDS?
3. Bagaimana hasil simulasi yang diperoleh pada model dengan kontrol optimal dan model tanpa kontrol optimal pada model penyebaran HIV/AIDS?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, adapun tujuan dari penelitian ini yaitu :

1. Mengetahui bentuk model penyebaran HIV/AIDS dengan kontrol optimal.
2. Mengetahui penyelesaian kontrol optimal pada model penyebaran HIV/AIDS.

3. Mengetahui hasil simulasi dengan kontrol optimal dan tanpa kontrol optimal pada model penyebaran HIV/AIDS.

1.4. Manfaat Penelitian

1. Untuk Penulis

Dalam penelitian ini diharapkan dapat menambah sekaligus mengembangkan wawasan dan pengetahuan mengenai aplikasi kontrol optimal pada model penyebaran HIV/AIDS di waktu yang akan datang.

2. Untuk Pembaca

Penelitian ini memiliki manfaat sebagai referensi studi literatur untuk penelitian selanjutnya. Selain itu, penelitian ini juga menambah wawasan baru tentang model penyebaran HIV/AIDS dengan kontrol.

3. Untuk Universitas Islam Negeri Sunan Ampel Surabaya

Dalam penulisan penelitian ini dapat menambah koleksi bahan pustaka yang bermanfaat bagi Universitas Islam Negeri Sunan Ampel dari mahasiswa Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

1.5. Batasan Masalah

Agar penelitian dapat terarah dan sesuai dengan yang diharapkan, maka batasan masalah pada penelitian ini yaitu :

1. Kontrol penyuluhan pada penelitian ini difokuskan pada individu yang telah

terpapar dengan individu yang terinfeksi HIV.

2. Kontrol pengobatan pada penelitian ini adalah dengan ART yang cocok digunakan oleh penderita HIV.
3. Penyelesaian numerik menggunakan metode Rungge Kutta orde 4.

1.6. Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan yang digunakan dalam menyusun laporan skripsi ini terdiri dari lima bab dimana masing-masing bab dibagi dalam sub bab yaitu sebagai berikut :

1. BAB I

Bab ini menjelaskan pokok permasalahan yang menjadi latar belakang penelitian. Selain itu, pada bagian ini penulis juga menjelaskan mengenai rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, Batasan masalah yang digunakan pada penelitian ini.

2. BAB II

Bab ini menjelaskan mengenai tujuan pustakan dan teori-teori yang menjadi dasar untuk menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan penelitian. Selain itu, pada bab ini digunakan sebagai kajian dari beberapa literatur yang terkait dengan topik penelitian meliputi pengertian sistem kekebalan tu-

buh, HIV/AIDS, masalah kontrol optimal dan metode runge kutta orde 4.

3. BAB III

Bab ini berisi tentang metode penelitian yakni berisi deskripsi data yang dipergunakan, serta tahap-tahapan yang dilakukan untuk penyelesaian penelitian tentang masalah kontrol optimal pada model penyebaran HIV/AIDS di Indonesia.

4. BAB IV

Pada bab ini berisi hasil dan pembahasan perhitungan kontrol optimal menggunakan prinsip minimum Pontryagin dan penyelesaian numerik model penyebaran HIV/AIDS tanpa kontrol optimal dan model penyebaran HIV/AIDS dengan kontrol optimal menggunakan metode Runge-Kutta orde 4.

5. BAB V

Pada bab ini terdiri atas kesimpulan-kesimpulan serta saran terkait dengan masalah kontrol optimal model penyebaran HIV/AIDS di Indonesia dengan kontrol optimal serta penyelesaian numerik dari model penyebaran HIV/AIDS tanpa kontrol optimal dan model penyebaran HIV/AIDS dengan kontrol optimal.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Sistem Kekebalan Tubuh

Sistem kekebalan tubuh manusia terdiri dari sistem kekebalan bawaan yang dihasilkan dari proses evolusi invertebrata dan sistem imun yang dapat beradaptasi secara unik dapat ditemui pada vertebrata. Tujuan utama sistem kekebalan tubuh adalah untuk mengenali dan mengeliminasi antigen asing pada tubuh, membentuk ingatan *immunology* dan pengembangan toleransi terhadap antigen tubuh (Luckheram et al., 2012). Sistem kekebalan pada tubuh manusia terbagi menjadi 3 yakni Barrier fisik, Respon imun alami (*innate*) dan Respon imun adaptif. Secara keseluruhan pertahanan tubuh terhadap patogen yang bersifat *destruktif* dilakukan oleh barrier fisik dan respon imun alami akan tetapi bila belum berhasil respon imun adaptif akan aktif sebagai pertahanan terakhir terhadap benda asing yang bersifat patogen (Sudiono, 2014).

Sistem kekebalan tubuh manusia terbentuk dari sel imun, sitokin, jaringan limfoid dan organ lain yang bekerja sama dalam mengeliminasi antigen lain (Sudiono, 2014). Terdapat 2 tipe dari sel imun spesifik yaitu sel T dan sel B, keduanya berasal dari prekusor sumsum tulang yang yang dimodifikasi secara spesifik menjadi sel T dan sel B. Sel T dan sel B terdapat dalam tubuh manusia terutama pada sistem peredaran darah dan jaringan limfoid (Darmadi and Ruslie, 2012). Sel T akan menerima atau mengikat antigen pada suatu reseptor spesifik pada permukaan sel setelah antigen telah dihasilkan oleh makrofag. Sel T yang telah terstimulasi

akan memunculkan mediator kimiawi limfokin, interleukin dan interferon. Mediator kimiawi juga menyebabkan sel B menjadi sel plasma yang dapat membentuk antibodi.

Sel T adalah sel imun yang berperan penting bagi imunitas tubuh, sel T sendiri terbagi menjadi 2 jenis yakni sel T-4(CD4) dan sel T-8(CD8). Sel CD4 adalah salah satu bagian dari limfosit yang bertugas sebagai pertahanan tubuh, sedangkan sel CD8 berperan sebagai penekan yang mengakhiri tanggapan pada kekebalan. Sel CD8 biasa disebut dengan sel pembunuh, dikarenakan sel CD8 dapat memakan sel yang telah terjangkit virus. Sedangkan sel CD4 memiliki protein pada permukaan selnya yang berfungsi sebagai reseptor (Luckheeram et al., 2012).

Sel CD4 memiliki relasi penting dengan HIV(*Human Immunodeficiency Virus*) dikarenakan saat penularan HIV terjadi sel yang pertama kali tertular adalah sel CD4. Penularan pada sel CD4 terjadi melalui permukaan sel CD4 yang berfungsi sebagai reseptor sehingga kode genetik HIV menjadi bagian dari kode genetik sel CD4 Ford et al. (2017). Pada saat sel CD4 terinfeksi maka kemungkinan besar dapat merusak sel CD4 yang lain, setelah beberapa waktu kadar sel CD4 pada orang yang terinfeksi akan menurun secara signifikan sehingga individu yang mengalami kejadian tersebut akan kehilangan kekebalan tubuh sehingga mudah terserang penyakit.

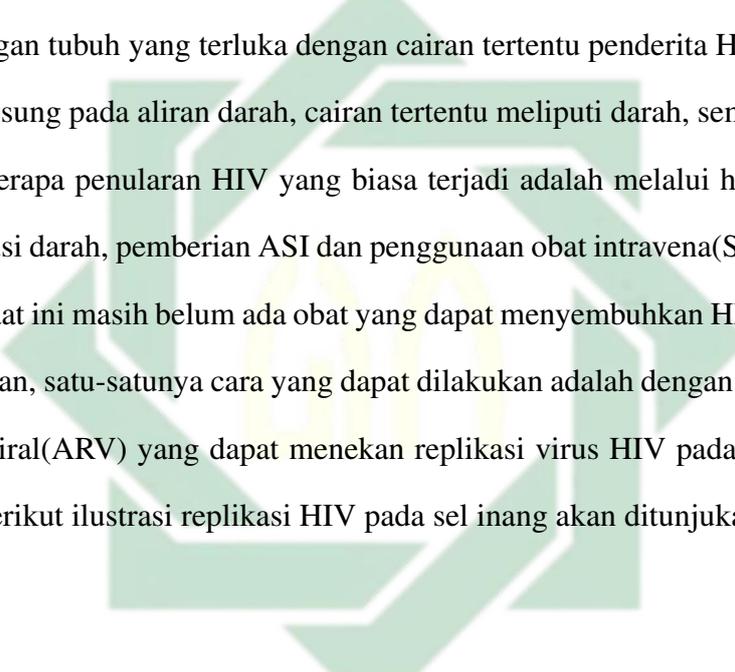
2.2. HIV/AIDS

Human Immunodeficiency Virus(HIV) merupakan jenis virus yang menyerang sistem kekebalan tubuh manusia sehingga tubuh tidak mampu melawan infeksi, virus ini dapat menyebabkan penyakit AIDS (*Acquired ImmunoDeficiency Syndrome*). Partikel virus ini memiliki bentuk bulat spheri dengan diameter 80-120 nm,

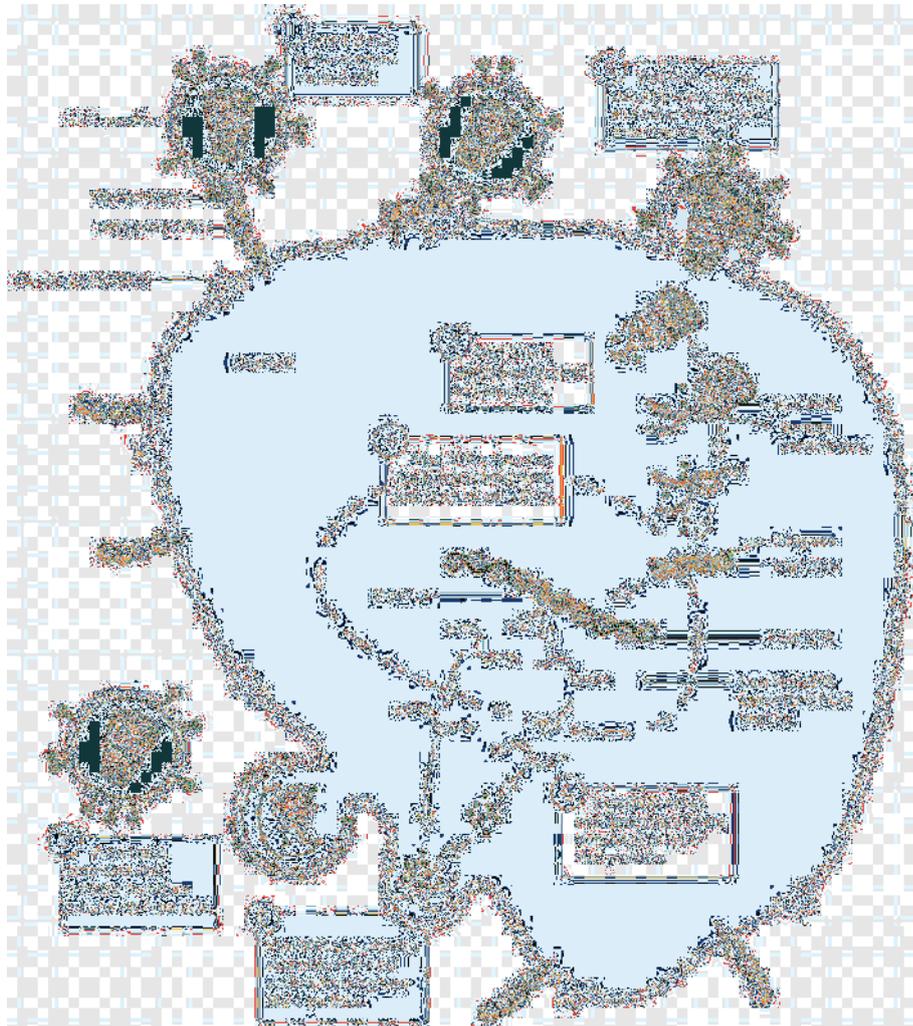
partikel HIV memiliki untai single stranded RNA positif pada inti protein virus dan dikelilingi oleh lapisan fosfolipid yang ditancapi oleh *glikoprotein*. Selain itu pada struktur HIV memiliki dua komponen utama pada bagian intinya yakni genom dan kapsid(Suhaimi et al., 2009). Genom adalah bagian inti dari virus yang memiliki dua utas bagian dari RNA, sedangkan kapsid adalah protein yang melindungi genom(Sukokarilinda, 2012). HIV hanya dapat bereplikasi jika berada pada sel inang dan memanfaatkan sel inang.

Siklus hidup HIV diawali dengan menempelkan partikel virus pada reseptor sel inang, salah satunya adalah sel CD4 dan sel CD8 yang terdapat pada sel-sel leukosit, sel-sel yang menjadi target virus HIV adalah sel CD4, makrofag dan dendrit. Sel-sel yang menjadi target virus HIV terdapat pada mukosa kulit oral, penis dan vagina yang biasa menjadi tempat bersarangnya virus HIV. Selain itu virus HIV juga dapat mengalir pada aliran darah dan melakukan replikasi pada node limpa. Setelah menempel pada reseptor sel inang, maka virus HIV akan melakukan fusi dengan membran sel inang sehingga isi virus akan terlepas ke dalam inti sel inang. Selanjutnya enzim transkripsi pada HIV akan mengubah genom virus yang berisi RNA menjadi DNA, kemudian DNA akan dibawa ke inti sel sehingga menyisip ke DNA sel inang Darmadi and Ruslie (2012). DNA virus HIV yang tersisip ke dalam DNA manusia dapat bertahan cukup lama, kemudian sel inang akan memproses provirus yang kemudian akan diubah menjadi mRNA. Kemudian mRNA akan keluar dari inti sel inang dan membuat protein dan enzim HIV yang baru, pada tahap perakitan inti virus yang baru enzim protease virus berperan memotong protein panjang yang akan menjadi bagian inti virus HIV. Apabila tahap perakitan telah usai maka virus HIV dapat keluar inang dan melakukan penetrasi pada sel inang yang lain Ogunlaran and Oukouomi Noutchie (2016).

Virus yang baru akan terus mereplikasi dirinya dengan sel inang lain terutama pada sel CD4 yang menjadi target utama dari HIV. Dikarenakan sel CD4 banyak terdapat pada sel leukosit manusia yang terdapat pada seluruh peredaran darah manusia, maka sel CD4 yang telah terinfeksi HIV akan menyebar pada seluruh tubuh manusia sehingga dapat menyebabkan beberapa penyakit salah satunya adalah AIDS. HIV dapat ditularkan melalui beberapa cara seperti kontak membran mukosa atau jaringan tubuh yang terluka dengan cairan tertentu penderita HIV atau melalui injek langsung pada aliran darah, cairan tertentu meliputi darah, semen, sekresi dan ASI. Beberapa penularan HIV yang biasa terjadi adalah melalui hubungan seksual, transfusi darah, pemberian ASI dan penggunaan obat intravena (Sun et al., 2018). Hingga saat ini masih belum ada obat yang dapat menyembuhkan HIV/AIDS secara keseluruhan, satu-satunya cara yang dapat dilakukan adalah dengan pemberian obat antiretroviral (ARV) yang dapat menekan replikasi virus HIV pada tubuh (Cai et al., 2014). Berikut ilustrasi replikasi HIV pada sel inang akan ditunjukkan pada gambar



UIN SUNAN AMPEL
S U R A B A Y A



Gambar 2.1 Ilustrasi Replikasi HIV Pada Sel Inang

2.3. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial ialah sebuah persamaan yang mempunyai satu variabel bebas ataupun lebih. Variabel bebas ini memiliki nilai yang tidak bergantung dengan variabel lainnya. Sedangkan variabel terikat memiliki nilai yang bergantung dengan variabel lainnya (Fitria, 2011). Persamaan diferensial memiliki tingkat (*orde*), persamaan dengan tingkat tertinggi terdapat pada persamaan diferensial itu sendiri. Sedangkan derajat pada suatu persamaan diferensial adalah pangkat yang paling tinggi daripada turunan pada persamaan diferensial, umumnya per-

samaan diferensial biasa dengan tingkat (*orde*) n dapat dinotasikan dalam bentuk $y_n = F[x, y, y', \dots, y_{n-1}]$. Berdasarkan bentuknya, persamaan terbagi menjadi dua yakni (Sri et al., 2018):

1. Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial ini mempunyai satu fungsi yang tidak diketahui atau biasa disebut variabel bebas. Persamaan diferensial biasa dapat dinyatakan dengan y adalah sebuah variabel bebas dimana $y = F(x)$. Berikut adalah contoh persamaan diferensial biasa yang akan dipaparkan pada persamaan 2.1.

$$\frac{dy}{dx} = x_2 + \cos x \quad (2.1)$$

2. Persamaan Diferensial Partial

Persamaan diferensial ini memiliki 2 variabel bebas ataupun lebih. Persamaan diferensial ini umumnya disebut sebagai turunan parsial. Persamaan diferensial parsial dinyatakan dengan $y = F(x, t)$ dimana x dan t merupakan variabel bebas. Berikut merupakan contoh persamaan diferensial parsial yang akan dipaparkan pada persamaan 2.2 .

$$\frac{\partial_2 u}{\partial x_2} + \frac{\partial_2 u}{\partial x_2} = 0 \quad (2.2)$$

2.4. Sistem Persamaan Diferensial

Berdasarkan definisi sistem persamaan diferensial merupakan sistem yang memuat n persamaan diferensial dengan n fungsi tertentu yang tidak diketahui, nilai n bernilai ($n \geq 2$) yang mana n merupakan bilangan bulat positif yang lebih besar sama dengan 2. Persamaan diferensial satu dengan yang lain bersifat terikat dan konsisten. Bentuk umum suatu sistem persamaan diferensial orde pertama memiliki

bentuk umum layaknya persamaan 2.3.

$$\frac{dy_n}{dx} = F(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \quad (2.3)$$

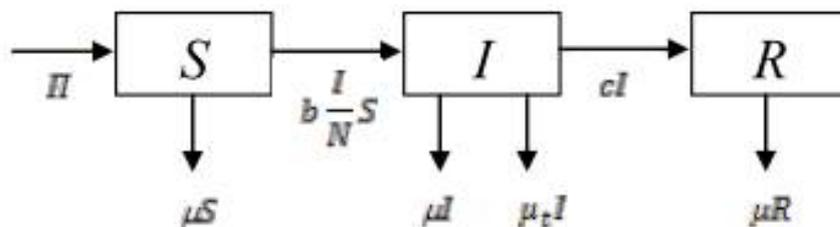
dimana $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ merupakan variabel bebas dan x adalah variabel terikat. Sehingga $\frac{dy_n}{dx}$ adalah turunan dari fungsi y_n terhadap x dan fungsi F adalah fungsi yang tergantung pada variabel $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ (Indrawati, 2012).

2.5. Model Matematika

2.5.1. Model SIR

Model SIR merupakan model matematika yang digunakan dalam memodelkan perkembangan penyebaran penyakit yang terbagi menjadi 3 kelas populasi, diantaranya adalah *Susceptible* (S), *Infected* (I) dan *Recovered* (R) (Adamu et al., 2019). *Susceptible* merupakan kelas populasi yang rentan terkena penyakit akan tetapi kelas populasi ini memiliki peluang untuk terinfeksi penyakit. Sedangkan kelas *Infected* (I) ialah kelas populasi dari individu *Susceptible* (S) yang telah terinfeksi dan pada kelas populasi *Infected* (I) masih dapat menularkan penyakit pada kelas populasi *Susceptible* (S). Pada kelas populasi *Infected* (I) diperlukan periode waktu tertentu untuk memasuki kelas populasi *Recovered* (R). Sedangkan pada kelas populasi *Recovered* merupakan kelas populasi yang terdiri dari individu yang telah sembuh dari penyakit dan masih bisa tertular atau kembali pada kelas populasi *Susceptible* (S) (Weiss Sir Ronald Ross, 2013).

Berikut adalah contoh diagram kompartmen pada model SIR sebagai berikut (Queena F et al., 2012):



Gambar 2.2 Contoh Diagram Kompartmen pada Model SIR

Berdasarkan gambar diatas, maka model matematikanya ialah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \dot{S} &= -b\frac{1}{N}S - \mu S - \Pi \\
 \dot{I} &= b\frac{1}{N}S - (\mu + \mu_t + c)I \\
 \dot{R} &= cI - \mu R
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Dengan :

N = Populasi Total

S = Kelas Populasi Rentan

I = Kelas Populasi Terinfeksi

R = Kelas populasi Sembuh

b = Laju Transmisi Penyakit

μ = Laju Kematian Alami

μ_t = Laju Kematian Karena Penyakit

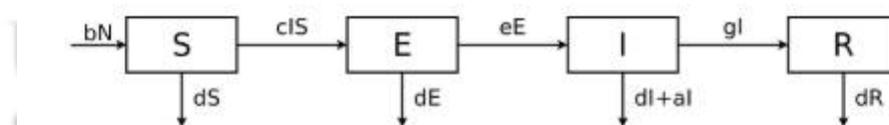
c = Laju Kesembuhan Penyakit

Π = Laju Kelahiran Alami

2.5.2. Model SEIR

Model SEIR adalah model yang digunakan dalam melakukan permodelan perkembangan sebaran penyakit sebuah populasi (Biswas et al., 2014). Sebagai model perkembangan penyakit pada suatu populasi, model SEIR terdiri atas 4 komponen yang merepresentasikan 4 kelas populasi dalam sebuah kasus penyebaran penyakit. Kategori individu pada model SEIR diantaranya adalah *Susceptible* (S) yang merepresentasikan kelas populasi rentan, *Exposed* (E) sebagai kelas populasi yang telah terpapar atau hidup dengan orang yang terinfeksi penyakit, *Infected* (I) sebuah kelas populasi yang telah terinfeksi penyakit, sedangkan *Recovered* (R) sebagai representasi kelas populasi yang telah sembuh (Side et al., 2016).

Berdasarkan 4 kelas populasi pada model SEIR model matematika SEIR dapat di aplikasikan pada beberapa penyakit tertentu seperti malaria, HIV-AIDS, SARS dan lainnya (Yi et al., 2009). Berikut adalah contoh diagram alir dari model matematika SEIR:



Gambar 2.3 Contoh Diagram Kompartemen pada Model SIR

Berdasarkan diagram alir model SEIR pada gambar 2.3 maka akan direpresentasikan persamaan model SEIR pada persamaan 2.5 sebagai berikut:

$$S = bN - cIS - dS$$

$$E = cIS - eE$$

$$I = eE - gI - dI + aI$$

$$R = gI - dR \quad (2.5)$$

Dengan :

N = Populasi Total

S = Kelas Populasi Rentan

E = Kelas Populasi Terekspos

I = Kelas Populasi Terinfeksi

R = Kelas populasi Sembuh

b = Laju Kelahiran Alami

d = Laju Kematian Alami

c = Laju kontak individu rentan dengan individu terpapar

e = Laju Penularan Penyakit

a = Laju Kematian dikarenakan Penyakit

g = Laju Kesembuhan Penyakit

μ_t = Laju Kematian Karena Penyakit

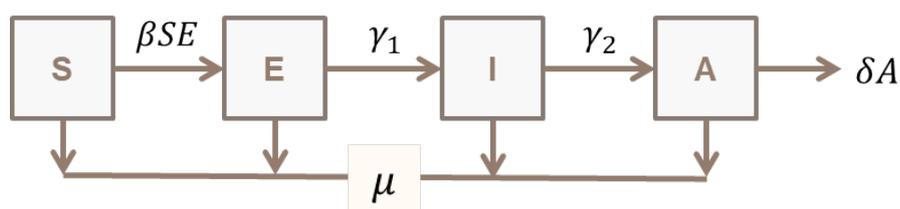
2.5.3. Model Penyebaran HIV/AIDS tanpa kontrol

Model HIV/AIDS tanpa kontrol pada penelitian ini merupakan modifikasi dari penelitian terdahulu milik (Leleury et al., 2020) yang terdiri dari tiga kelas populasi, yang terdiri dari (S), (I) dan (A). Pada penelitian Leleury dkk diasumsikan

bahwa (S) merupakan perkembangan kelas populasi individu rentan, sedangkan (I) merupakan kelas populasi individu yang telah terinfeksi HIV dan (A) merupakan kelas populasi individu yang terinfeksi HIV yang telah menuju ke stadium AIDS.

Model HIV/AIDS tanpa kontrol pada penelitian ini terdapat penambahan kelas populasi terekspos (E), sehingga model penyebaran tidak lagi menggunakan (S), (I) dan (A) melainkan berubah menjadi (S), (E), (I) dan (A). Dalam penelitian ini diasumsikan bahwa (S) merupakan kelas populasi rentan yang dapat masuk pada populasi terekspos (E), yang mana populasi terekspos (E) merupakan kelas populasi yang rentan yang melakukan kontak dengan individu yang memiliki riwayat penyakit HIV/AIDS ataupun individu yang pernah terpapar dengan individu yang memiliki riwayat HIV/AIDS. Setelah populasi terekspos maka akan masuk pada kelas populasi berikutnya yakni kelas populasi terinfeksi HIV/AIDS (I), pada kelas populasi (I) individu yang terinfeksi HIV dapat melaju ke stadium berikutnya AIDS (A) ataupun mengalami kematian alami yang dapat dinotasikan dengan μ . Sedangkan kelas populasi (A) merupakan individu yang terinfeksi HIV yang menuju ke stadium lanjut yakni AIDS, pada kelas populasi ini individu yang terkena AIDS memiliki kemungkinan yang sangat kecil untuk sembuh sehingga dapat mati dikarenakan penyakit AIDS yang dinotasikan dengan δ maupun kematian alami.

. Berikut merupakan diagram kompartmen pada penyebaran HIV/AIDS tanpa kontrol yang akan ditampilkan pada gambar 2.4.



Gambar 2.4 Contoh Diagram Kompartmen pada Model SEIA

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta SE - \mu S \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SE - \gamma_1 E - \mu E - u_1 IS \\ \frac{dI}{dt} &= \gamma_1 E - \gamma_2 I - \mu I - \mu_2 I \\ \frac{dA}{dt} &= \gamma_2 I - \mu A - \delta A\end{aligned}\quad (2.6)$$

Dimana :

S = Kelas Populasi Rentan

E = Kelas Populasi Terpapar

I = Kelas Populasi Terinfeksi (HIV)

A = Kelas Populasi Terinfeksi (AIDS)

Λ = Laju Individu Rentan

β = Laju Kontak Individu Rentan dengan Terpapar

μ = Laju Kematian Alami

γ_1 = Laju *Progress* Penyakit (HIV)

γ_2 = Laju *Progress* Penyakit (AIDS)

δ = Laju Kematian Karena AIDS

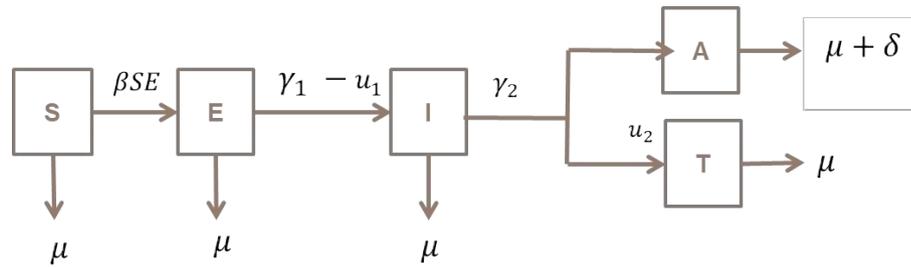
2.5.4. Model Penyebaran HIV/AIDS dengan Kontrol Optimal

Pada penelitian ini model yang digunakan merupakan pengembangan dari penelitian (Leleury et al., 2020) dengan penambahan kontrol optimal pada kelas

populasi terekspos HIV/AIDS serta pada populasi terinfeksi HIV/AIDS dan penambahan kelas populasi *Treatment*(T). Sehingga terdapat 5 kelas populasi yang digunakan pada penelitian ini yakni meliputi populasi individu rentan (S), populasi terekspos HIV (E), populasi individu terinfeksi HIV (I), populasi individu terinfeksi HIV yang telah masuk pada fase AIDS (A) dan kelas populasi individu yang diberikan pengobatan (T).

Model pada penelitian ini diasumsikan bahwa individu lahir dinotasikan dengan Λ , sedangkan pada kelas populasi rentan (S) terdapat laju kontak antara individu rentan dengan individu terpapar(*exposed*) individu terinfeksi HIV(*infected*) dinotasikan dengan β . Pada kelas populasi terekspos (E) diberikan kontrol berupa penyuluhan yang dinotasikan u_1 . Pada kelas populasi terinfeksi HIV(*infected*) diketahui bahwa individu terinfeksi HIV dapat mencapai stadium AIDS dengan notasi γ_2 yang masuk pada kelas populasi AIDS(A). Pada model yang telah diberi kontrol terdapat kelas populasi pengobatan(*treatment*) yang merupakan kelas populasi yang telah menjalani pengobatan, pada kelas populasi pengobatan variabel kontrol u_2 sangat berpengaruh pada model ini sehingga variabel u_2 termasuk dalam kelas populasi infeksi HIV(I) dan kelas populasi pengobatan(T), akan tetapi variabel kontrol u_2 tidak terdapat pada kelas populasi AIDS(A) dikarenakan pengobatan pada individu yang telah terkena AIDS dinilai tidak optimal. Setiap populasi pada model penyebaran HIV/AIDS terdapat kematian alami pada setiap kelas populasi yang dinotasikan dengan μ , sedangkan kematian alami disebabkan AIDS dinotasikan δ .

Diagram kompartmen model penyebaran HIV/AIDS yang telah dimodifikasi dengan pemberian kontrol akan ditampilkan pada gambar 4.2 dan persamaan 4.2 disertai dengan keterangan variabel dibawahnya.



Gambar 2.5 Diagram Kompartmen pada Model penyebaran HIV/AIDS dengan kontrol

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta SE - \mu S \\
 \frac{dE}{dt} &= \beta SE - \gamma_1 E - \mu E - u_1 E \\
 \frac{dI}{dt} &= \gamma_1 E - \gamma_2 I - \mu I - u_2 I + u_1 E \\
 \frac{dA}{dt} &= \gamma_2 I - \mu A - \delta A \\
 \frac{dT}{dt} &= u_2 I - \mu T
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Dimana :

S = Kelas Populasi Rentan

E = Kelas Populasi Terpapar

I = Kelas Populasi Terinfeksi (HIV)

A = Kelas Populasi Terinfeksi (AIDS)

T = Kelas Populasi Pengobatan

Λ = Laju Individu Rentan

β = Laju Kontak Individu Rentan dengan Terpapar

μ = Laju Kematian Alami

γ_1 = Laju *Progress* Penyakit (HIV)

γ_2 = Laju *Progress* Penyakit (AIDS)

δ = Laju Kematian Karena AIDS

u_1 = Variabel Kontrol Penyuluhan

u_2 = Variabel Kontrol Pengobatan

2.6. Kontrol Optimal

Kontrol optimal merupakan salah satu ilmu disiplin pada matematika dan teknik. Secara umum kontrol optimal bekerja layaknya optimasi yang mana kontrol optimal adalah sebuah proses untuk mendapatkan hasil yang terbaik. Kemajuan pada disiplin ilmu kontrol optimal memiliki ikatan dengan masalah-masalah praktis yang diselesaikan selama fase sejarah kehidupan manusia. Awal mula berkembangnya kontrol optimal secara pesat dimulai pada era pasca perang dunia II dimana Richard Bellman menemukan metode *dynamic programming* pada tahun 1957, dilanjutkan oleh penemuan metode *maximum principle* oleh Pontryagin pada tahun 1962 (Venkateswarlu, 1996)(Venkateswarlu, 1996). Sejatinya kontrol optimal telah ada sejak tahun 1200 Masehi, berdasarkan (Subiono, 2011) kontrol optimal dibagi dalam beberapa periode yakni:

- . Periode sebelum kontrol otomatis (j 1868)
- . Periode primitive kontrol otomatis (1868-1900)
- . Periode klasik kontrol otomatis (1900-1960)
- . Periode modern kontrol otomatis (1960-sekarang)

Masalah kontrol optimal umumnya adalah mencari sebuah pengontrol pada suatu persamaan diferensial yang biasa dinotasikan dengan variabel $u(t)$ yang dapat memenuhi suatu indeks perilaku. Variabel kontrol $u(t)$ yang digunakan adalah kontrol yang digunakan pada sistem state awal $x(t_0)$ hingga state akhir $x(t_f)$ sampai mendapatkan nilai optimum pada sebuah fungsi objektif tertentu (Saraswati et al., 2017). Berikut adalah beberapa contoh masalah kontrol optimal yang biasa terjadi sebagai berikut (Subiono, 2011):

- Kontrol pada pertumbuhan tanaman
- Kontrol pada energy pada pembangkit
- Kontrol masalah waktu minimum pada produksi barang

Pada prinsipnya tujuan dari kontrol optimal secara umum adalah menentukan kontrol pada sistem dinamik dan memenuhi beberapa konstrain maupun kendala serta dengan tujuan meminimalkan atau memaksimalkan suatu fungsi tujuan tertentu (Achdou et al., 2020). Fungsi tujuan pada kontrol optimal dibagi menjadi 2 yakni fungsi objektif maksimasi dan minimasi. Maksimasi berarti fungsi objektif yang membawa sistem dari state awal $x(t_0)$ hingga state akhir $x(t_f)$ membawa nilai maksimal pada fungsi objektif, sedangkan pada kasus minimasi fungsi objektif membawa sistem dari state awal $x(t_0)$ hingga state akhir $x(t_f)$ membawa nilai minimal pada fungsi objektif yang digunakan (Saraswati et al., 2017). Pada umumnya kontrol optimal di formulasikan untuk mencari variabel kontrol $u(t)$ yang dapat mengoptimalkan fungsi tujuan. Berikut adalah contoh persamaan Sistem dinamik pada persamaan (2.12).

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad (2.8)$$

Dengan :

$x(t)$ = Variabel State

$u(t)$ = Variabel Kontrol

Berdasarkan persamaan (2.12), variabel $u(t)$ adalah variabel yang mempengaruhi suatu persamaan *state* tertentu dengan $u(t)U$ untuk semua $t \in [0, t]$. Berdasarkan sistem dinamik yang diberikan maka dibutuhkan sebuah kriteria untuk mencari solusi, maka variabel $x(t)$ dan $u(t)$ akan digabungkan sehingga membentuk rumusan fungsi objektif yang baru (Nainggolan, 2017). Secara umum fungsi objektif optimal kontrol dapat dituliskan seperti persamaan berikut.

$$J = \int_0^t (x + cu)dt \quad (2.9)$$

Berdasarkan persamaan (2.13) merupakan fungsi objektif dari sebuah sistem dinamik kontrol optimal yang memiliki *cost function* atau biasa disebut biaya akhir. Pada tahun 1950-an, teori kontrol optimal mulai mengalami perkembangan yang pesat karena perolehan temuan 2 metode penyelesaian masalah kontrol optimal yakni *dynamic programming* oleh Richard Bellman (1957) dan *maximum principle* oleh Pontryagin (1962). Permasalahan mengenai kontrol optimal ini sebenarnya sama dengan permasalahan mengenai optimasi. Optimasi sendiri ialah suatu proses penyelesaian suatu masalah dengan mendapatkan solusi yang paling baik (Theses and Rose, 2015). Sedangkan permasalahan kontrol optimal ialah pemilihan variabel kontrol dari semua variabel kontrol $u(t)$ yang *admissible* atau diterima, yakni kon-

trol pembawa sistem dari state awal $x(t_0)$ ke state akhir $x(t_f)$ sehingga memberikan nilai optimum bagi fungsional objektif tertentu (Purwanti and Mardijah, 2019). Fungsional objektif (FO) atau fungsi tujuan itu sendiri adalah suatu ukuran performa atau sering disebut indeks performance (Yuniarsih, 2012).

Apabila didasarkan pada tujuannya, fungsional objektif dibagi menjadi dua antara lain, FO maksimum dan FO minimum. FO maksimum adalah pembawa sistem dari state awal $x(t_0)$ ke state akhir $x(t_f)$ dan memberikan nilai maksimal untuk fungsional objektif. Salah satu contoh kasus FO maksimum adalah memberikan laba penjualan paling maksimal dimana akan dicari perolehan untung terbesar sehingga yang dihasilkan adalah nilai maksimum dari FO. Sedangkan FO minimum adalah pembawa sistem dari state awal $x(t_0)$ ke state akhir $x(t_f)$ dan memberikan nilai minimal untuk fungsional objektif. Salah satu contoh kasus FO minimum adalah mengendalikan persebaran penyakit, dimana banyak penderita akan diminimalkan dan besar biaya pengobatan yang dikeluarkan bernilai kecil, sehingga yang dihasilkan adalah nilai minimum dari FO.

Sistem berada dalam sebuah state (kondisi atau keadaan) tertentu yang diungkapkan dalam variabel state dalam bentuk vektor $x(t) \in \mathbb{R}^n$ yang berarti ketika t berbeda, vektor $x(t)$ juga menghasilkan nilai yang berbeda sehingga menempati posisi yang berbeda di ruang \mathbb{R}^n . Sehingga dengan kata lain sistem akan bergerak di sepanjang kurva $x(t)$ di \mathbb{R}^n . Sistem dinamik dapat dinyatakan secara matematik oleh sistem persamaan diferensial orde satu (Ulfa and Sugiyanto, 2013).

2.7. Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip Minimum Pontryagin (PMP) ditemukan oleh L.S.Pontryagin pada tahun 1962. PMP merupakan suatu alternatif untuk mendapatkan penyelesaian kon-

trol yang sesuai untuk mendapatkan kontrol yang terbaik pada sistem dinamik dari state awal hingga state akhir yaitu dengan meminimumkan fungsional objektif seperti pada persamaan (2.13) (Hidayat et al., 2018). prinsip minimum pontryagin menyatakan keadaan agar didapatkan solusi optimal pada sistem kontrol dengan cara minimasi fungsi Hamiltonian H yang akan ditunjukkan pada persamaan 4.4 (Syahril, 2002).

$$H = f(x, u, t) + m'(t)g(x, u, t) \quad (2.10)$$

Dengan :

1. H = Fungsi Hamiltonian
2. f = Fungsi Tujuan
3. m' = Persamaan co-state
4. g = Persamaan state

Berikut adalah langkah-langkah penyelesaian kontrol optimal dengan menggunakan prinsip minimum pontryagin (Wang et al., 2020) :

1. Pembentukan Fungsi Hamiltonian

$$H(x, u, t) = g(x, u, t) + \lambda'(x, u, t)$$

2. Minimasi H terhadap variabel kontrol u Minimasi $H = f(x, u, t) + m'(t)g(x, u, t)$

dengan cara:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

Maka diperoleh $u^* = H(x^*, \lambda^*)$

3. Memperoleh fungsi Hamiltonian yang optimal

$$u^* = H(x^*, \lambda^*)$$

4. Penyelesaian persamaan *state* dan *co-state*

$$x^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (2.11)$$

$$\lambda^*(t) = \frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.12)$$

5. Penyelesaian Kontrol Optimal

Pada langkah ini adalah substitusi hasil dari langkah 4 pada ekspresi u^* di langkah 2 untuk mendapatkan kontrol optimal.

2.8. Metode Rungge Kutta orde 4

Metode Rungge Kutta orde 4 adalah salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan syarat awal, metode ini adalah pengembangan dari metode euler sehingga metode ini memiliki ketelitian lebih baik ketimbang metode Heun dan metode Euler (uron Hurit, 2016). Metode Rungge Kutta orde 4 memiliki bentuk sebagai persamaan berikut:

$$y_{(i+1)} = y_i + (w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + w_4k_4) \quad (2.13)$$

Dengan :

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f(t_i + a_1h, y_i + b_1k_1)$$

$$k_3 = f(t_i + a_2h, y_i + b_2k_1 + b_3k_2)$$

$$k_4 = f(t_i + a_3h, y_i + b_4k_1 + b_5k_2 + b_6k_3) \quad (2.14)$$

Masing-masing partisi k pada persamaan 2.14 dapat diuraikan sebagai beri-

kut:

k_1 merupakan kemiringan langkah pertama

k_2 merupakan kemiringan titik tengah yang memiliki keakuratan yang lebih bagus daripada k_1

k_3 adalah perkiraan lain dari langkah titik tengah k_2

k_4 ialah perkiraan kemiringan pada titik akhir

Jenis metode runge kutta yang dipakai pada penelitian ini adalah Runge Kutta orde 4 metode *forward-backward sweep*. Persamaan umum dari Runge Kutta orde 4 *forward-backward sweep* berguna untuk merepresentasikan persamaan *state* dan *co-state* pada persamaan 2.15 dan 2.16. Sehingga didapatkan persamaan umum Runge Kutta metode *forward* seperti persamaan 2.15.

$$k_{1x} = f(t_i, x_i)$$

$$k_{2x} = f(t_i + a_1h, x_i + b_1k_1)$$

$$k_{3x} = f(t_i + a_2h, x_i + b_2k_1 + b_3k_2)$$

$$k_{4x} = f(t_i + a_3h, x_i + b_4k_1 + b_5k_2 + b_6k_3) \quad (2.15)$$

Sementara persamaan umum Runge Kutta orde 4 metode backward sweep untuk merepresentasikan persamaan co-state pada persamaan , sehingga didapatkan sebagaimana persamaan 2.16.

$$k_{1m} = f(t_i, x_i)$$

$$\begin{aligned}
 k_{2m} &= f(t_i + a_1h, x_i + b_1k_1) \\
 k_{3m} &= f(t_i + a_2h, x_i + b_2k_1 + b_3k_2) \\
 k_{4m} &= f(t_i + a_3h, x_i + b_4k_1 + b_5k_2 + b_6k_3)
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

2.9. Integrasi Keilmuan

Penyakit merupakan musibah yang dapat mengenai siapa saja, termasuk orang berakhlak mulia sekalipun. Bahkan sebuah penyakit dapat menjadi sebuah wabah pada daerah tertentu dalam jangka waktu yang lama, seperti wabah penyakit HIV/AIDS yang telah mewabah di Indonesia selama 2 dekade terakhir. Hal ini tertuang dalam Al-Quran yang merupakan pedoman hidup bagi setiap manusia yang menjelaskan penyakit merupakan musibah bagi setiap manusia yang dijelaskan pada QS. At-Thaghabun ayat 11:

مَا أَصَابَ مِنْ مُصِيبَةٍ إِلَّا بِإِذْنِ اللَّهِ وَمَنْ يُؤْمِن بِاللَّهِ يَهْدِ اللَّهُ قَلْبَهُ وَاللَّهُ بِكُلِّ شَيْءٍ عَلِيمٌ

Artinya: Tidak ada suatu musibah pun yang menimpa seseorang kecuali dengan izin Allah, dan setiap orang yang beriman kepada Allah, niscaya Dia akan memberi petunjuk kepada hatinya. dan Allah Maha Mengetahui segala sesuatu.

Ayat diatas memiliki hubungan dengan terjadinya wabah HIV/AIDS yang telah menimpa Indonesia selama 2 dekade terakhir. Fenomena ini mengingatkan manusia untuk selalu melakukan muhasabah diri dan bersabar menghadapi cobaan berupa wabah penyakit yang menimpa Indonesia.

Wabah penyakit hanya dapat diatasi dengan cara penyembuhan dan pencegahan, hal ini tertuang dalam Al-Quran ini pada pembahasan mengenai kesembuhan

penyakit dan penyebaran penyakit atau biasa disebut wabah merupakan sebuah cobaan terhadap umat manusia. Manusia dapat melakukan penelitian tentang ilmu pengetahuan serta ikhtiar sehingga dapat menyembuhkan penyakit. Hal ini disebutkan pada firman Allah SWT di surat Al-Baqarah ayat 155:

وَلَنَبْلُوَنَّكُمْ بِشَيْءٍ مِّنَ الْخَوْفِ وَالْجُوعِ وَنَقْصٍ مِّنَ الْأَمْوَالِ وَالْأَنْفُسِ وَالثَّمَرَاتِ ۗ وَبَشِّرِ
الصَّابِرِينَ

Artinya: Dan sungguh akan Kami berikan cobaan kepadamu, dengan sedikit ketakutan, kelaparan, kekurangan harta, jiwa dan buah-buahan. Dan berikanlah berita gembira kepada orang-orang yang sabar.

Ayat diatas menjelaskan agar manusia senantiasa bersabar dan berikhtiar atas segala ketetapan Allah SWT. Seseorang muslim yang bersabar atas segala ketetapan Allah SWT merupakan sikap tawakkal, sikap tawakkal merupakan salah satu pedoman hidup umat muslim agar tetap tabah dan semakin menambah keimanan pada setiap cobaan dan musibah. Setiap manusia yang sedang tertimpa cobaan dan musibah, untuk setiap penyakit sekalipun, maka Allah memerintahkan untuk banyak bertawakkal kepada Allah, seperti yang tertuang pada Al-Quran surat Ar-Rad ayat 11:

لَهُ مُعَقِّبَاتٌ مِّنْ بَيْنِ يَدَيْهِ وَمِنْ خَلْفِهِ يَحْفَظُونَهُ ۗ مِنْ أَمْرِ اللَّهِ إِنَّ اللَّهَ لَا يُخَيِّرُ مَا يَفْعَلُ
حَتَّىٰ يُخَيِّرُوا مَا بِأَنْفُسِهِمْ ۗ وَإِذَا أَرَادَ اللَّهُ بِقَوْمٍ سُوءًا فَلَا مَرَدَّ لَهُ ۗ وَمَا لَهُمْ مِنْ دُونِهِ مِنْ
وَالٍ

Artinya:Baginya (manusia) ada malaikat-malaikat yang selalu menjaganya bergiliran, dari depan dan belakangnya. Mereka menjaganya atas perintah Allah.

Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah keadaan suatu kaum sebelum mereka mengubah keadaan diri mereka sendiri. Dan apabila Allah menghendaki keburukan terhadap suatu kaum, maka tak ada yang dapat menolaknya dan tidak ada pelindung bagi mereka selain Dia. Begitu juga pada surat As-syura ayat 80 yang juga menjelaskan bahwa Allah SWT tidak menurunkan penyakit kecuali Allah turunkan obatnya.

وَإِذَا مَرِضْتُ فَهُوَ يَشْفِينِ

Artinya: dan apabila aku sakit, Dialah yang menyembuhkan aku, (QS: As-Syura: 80). Berdasarkan penjelasan ayat di atas dianjurkan untuk mengobati penyakit dengan menggunakan obat, alamiah dan kedokteran. Sebagaimana pada tafsir Quraish Shihab bahwa obat dan usaha penyembuhan penyakit diibaratkan sebagai sebab yang penyebabnya hanyalah Allah SWT.

UIN SUNAN AMPEL
S U R A B A Y A

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1. Jenis Penelitian

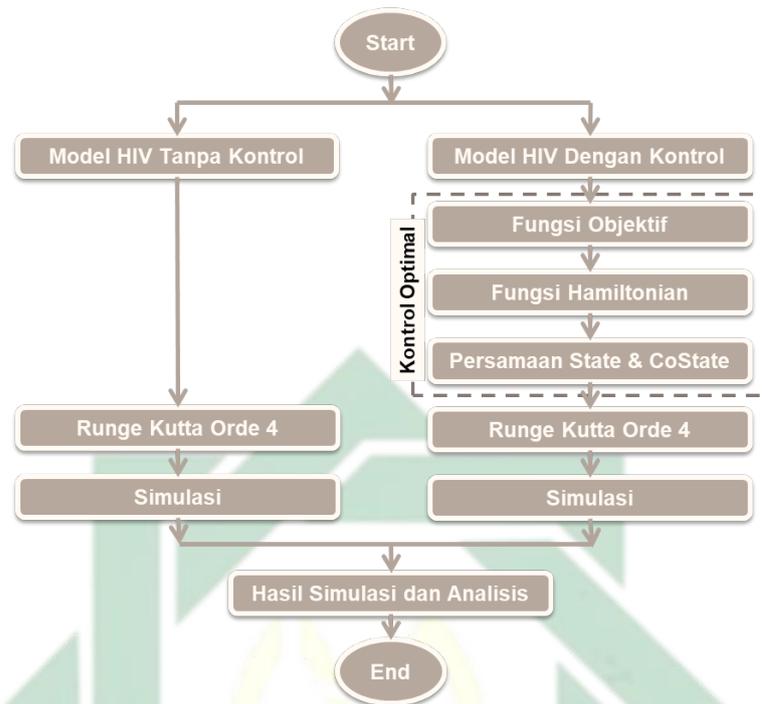
Penelitian mengenai implementasi model matematika pada penyebaran HIV/AIDS dengan kontrol optimal merupakan jenis penelitian kuantitatif, karena data yang digunakan adalah data dalam bentuk numerik atau angka. Berdasarkan manfaatnya, penelitian ini termasuk dalam penelitian terapan dengan tujuan memberikan solusi pada sebuah permasalahan tertentu secara praktis dan tidak berfokus pada pengembangan ide, teori, ataupun gagasan. Namun, berfokus pada penerapan penelitian dalam kehidupan sehari-hari.

3.2. Pengumpulan Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data HIV/AIDS di Indonesia diperoleh dari (Joint United Nations Programme on HIV/AIDS (UNAIDS), 2019) mulai tanggal 9 Desember 2017 sampai 9 Desember 2019. Data tersebut merupakan jenis data sekunder. Data sekunder sendiri merupakan data yang diperoleh dari berbagai macam sumber, yang sudah tercatat di buku maupun laporan. Sedangkan parameter beserta model awal yang digunakan pada penelitian ini bersumber dari (Leleury et al., 2020) dan (Huo et al., 2016).

3.3. Analisis Data

Adapun langkah penelitian dari penelitian ini adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1 Diagram Alir Model Penyebaran HIV/AIDS Dengan Kontrol

1. Modifikasi Model Acuan

Model penyebaran HIV/AIDS yang digunakan pada penelitian ini merupakan pengembangan dari model penelitian (Leleury et al., 2020). Modifikasi model berupa penambahan kontrol optimal ($u(t)$)

2. Penyelesaian masalah kontrol optimal

Adapun langkah-langkah pada penyelesaian masalah kontrol optimal pada model penyebaran HIV/AIDS menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin, yaitu:

(a) Menentukan fungsi tujuan dimana fungsi tujuannya adalah:

$$\int_0^T A_1 I(t) + A_2 A(t) + C_1 u_1^2 + C_2 u_2^2 dt$$

(b) Menentukan persamaan *state* dan *co-state*

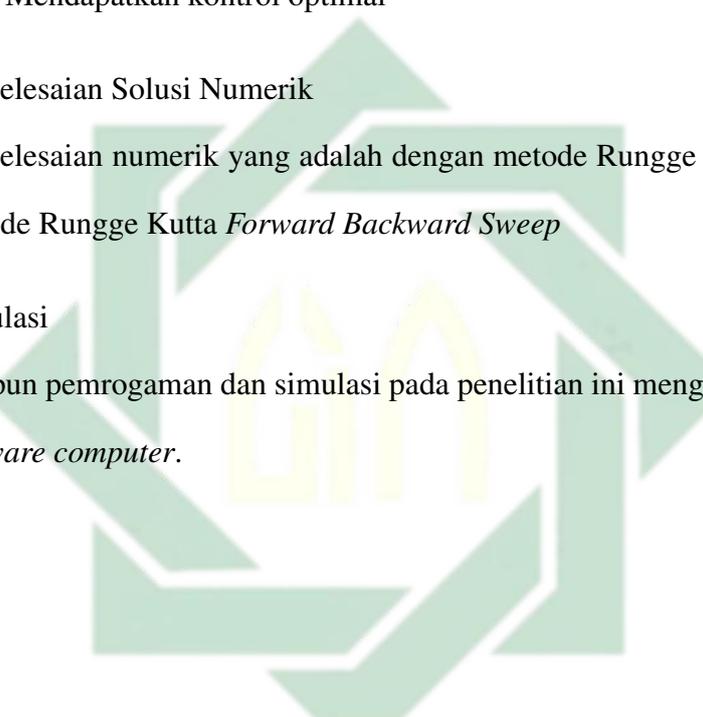
- (c) Membentuk fungsi Hamiltonian
- (d) Menentukan variabel u^* sebagai kontrol optimal
- (e) Menyelesaikan persamaan *state* dan *co-state* dengan kondisi awal beserta *transversal*
- (f) Mendapatkan kontrol optimal

3. Penyelesaian Solusi Numerik

Penyelesaian numerik yang adalah dengan metode Rungge Kutta orde 4 dan metode Rungge Kutta *Forward Backward Sweep*

4. Simulasi

Adapun pemrograman dan simulasi pada penelitian ini menggunakan bantuan *software computer*.



UIN SUNAN AMPEL
S U R A B A Y A

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Model Penyebaran HIV/AIDS

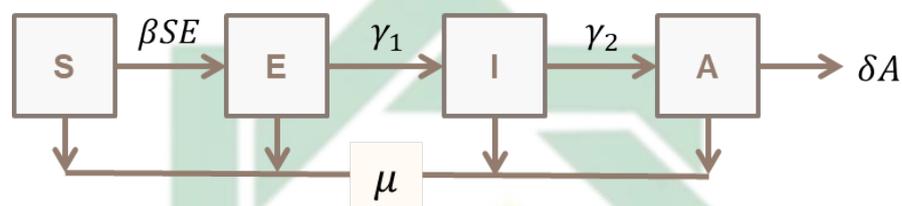
4.1.1. Model Penyebaran HIV/AIDS Tanpa Kontrol

Model HIV/AIDS tanpa kontrol pada penelitian ini merupakan modifikasi dari penelitian terdahulu milik (Leleury et al., 2020) yang terdiri dari tiga kelas populasi, yang terdiri dari (S), (I) dan (A). Pada penelitian Leleury dkk diasumsikan bahwa (S) merupakan perkembangan kelas populasi individu rentan, sedangkan (I) merupakan kelas populasi individu yang telah terinfeksi HIV dan (A) merupakan kelas populasi individu yang terinfeksi HIV yang telah menuju ke stadium AIDS.

Model HIV/AIDS tanpa kontrol pada penelitian ini terdapat penambahan kelas populasi terekspos (E), sehingga model penyebaran tidak lagi menggunakan (S), (I) dan (A) melainkan berubah menjadi (S), (E), (I) dan (A). Dalam penelitian ini diasumsikan bahwa (S) merupakan kelas populasi rentan yang dapat masuk pada populasi terekspos (E), yang mana populasi terekspos (E) merupakan kelas populasi yang rentan yang melakukan kontak dengan individu yang memiliki riwayat penyakit HIV/AIDS ataupun individu yang pernah terpapar dengan individu yang memiliki riwayat HIV/AIDS. Setelah populasi terekspos maka akan masuk pada kelas populasi berikutnya yakni kelas populasi terinfeksi HIV/AIDS (I), pada kelas populasi (I) individu yang terinfeksi HIV dapat melaju ke stadium berikutnya AIDS (A) ataupun mengalami kematian alami yang dapat dinotasikan dengan μ . Sedangkan kelas populasi (A) merupakan individu yang terinfeksi HIV yang me-

nuju ke stadium lanjut yakni AIDS, pada kelas populasi ini individu yang terkena AIDS memiliki kemungkinan yang sangat kecil untuk sembuh sehingga dapat mati dikarenakan penyakit AIDS yang dinotasikan dengan δ maupun kematian alami.

Berdasarkan asumsi yang telah dipaparkan maka didapatkan model kompartemen sebagai berikut beserta model S, E, I, A yang akan dipaparkan pada gambar 4.1 serta persamaan 4.1 :



Gambar 4.1 Contoh Diagram Kompartmen pada Model SEIA

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SE - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SE - \gamma_1 E - \mu E - u_1 IS$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma_1 E - \gamma_2 I - \mu I - \mu_2 I$$

$$\frac{dA}{dt} = \gamma_2 I - \mu A - \delta A \quad (4.1)$$

Dimana:

- . S = Kelas Populasi Rentan
- . E = Kelas Populaso Terpapar
- . I = Kelas Populasi Terinfeksi (HIV)
- . A = Kelas Populasi Terinfeksi (AIDS)
- . Λ = Laju Individu Rentan

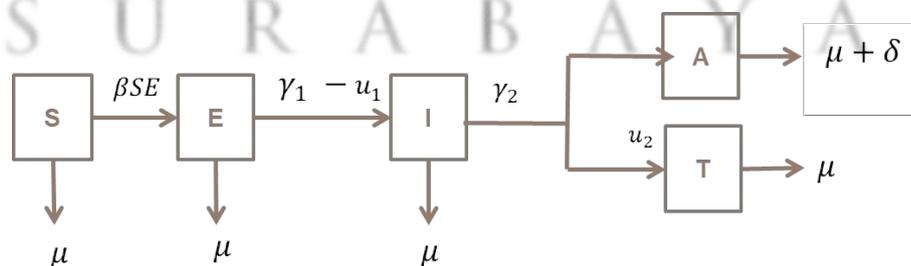
- . β = Laju Kontak Individu Rentan dengan Terpapar
- . μ = Laju Kematian Alami
- . γ_1 = Laju *Progress* Penyakit (HIV)
- . γ_2 = Laju *Progress* Penyakit (AIDS)
- . δ = Laju Kematian Karena AIDS

4.1.2. Model Penyebaran HIV/AIDS dengan Kontrol

Model penyebaran HIV/AIDS dengan kontrol merupakan modifikasi model pada persamaan 4.1 dengan penambahan variabel kontrol u_1 dan u_2 serta penambahan kelas populasi pengobatan (T). Kontrol u_1 pada model penyebaran HIV/AIDS dengan kontrol dalam penelitian ini merupakan penyuluhan pada individu dalam populasi terekspos, sedangkan variabel kontrol u_2 merupakan pengobatan pada individu yang telah terinfeksi HIV, sehingga model penyebaran HIV/AIDS dengan kontrol pada penelitian ini tidak lagi menggunakan model S, E, I dan A akan tetapi berubah menjadi S, E, I, A dan T . Pada model ini diasumsikan bahwa S merupakan kelas populasi rentan yang dapat beralih ke populasi terekspos E , pada populasi terdapat variabel λ sebagai variabel laju individu rentan. Sedangkan variabel β pada kelas populasi S merupakan laju kontak individu rentan dengan individu terekspos E dan μ pada kelas populasi S adalah laju kematian alami. Kelas populasi E merupakan kelas populasi yang terekspos dengan individu terinfeksi HIV I , pada kelas populasi terekspos E terdapat laju kontak antara kelas populasi rentan dengan terekspos yang dinotasikan dengan β . Sedangkan variabel γ_1 merepresentasikan laju infeksi virus HIV serta μ dan u_1 merupakan laju kematian alami dan variabel kontrol penyuluhan.

Kelas populasi I adalah kelas populasi individu yang telah terinfeksi HIV, pada kelas populasi I laju infeksi penyakit HIV dinotasikan dengan γ_1 . Pada kelas populasi I terdapat laju penyakit AIDS yang merupakan suatu kondisi dimana individu yang telah terinfeksi HIV dapat terinfeksi pada stadium berikutnya yakni terinfeksi AIDS, kondisi ini dinotasikan dengan γ_2 . Sedangkan variabel μ merepresentasikan kematian alami kelas populasi terinfeksi I dan u_2 merupakan representasi dari variabel pengobatan individu yang terinfeksi HIV. Pada kelas populasi individu terinfeksi AIDS A kondisi individu yang telah terinfeksi HIV yang beralih ke stadium AIDS dinotasikan dengan γ_2 , sedangkan pada kelas populasi terinfeksi AIDS dapat mengalami kematian dikarenakan AIDS yang dinotasikan dengan δ dan kematian alami pada seseorang yang terkena AIDS dinotasikan dengan μ . Pada kelas populasi pengobatan diasumsikan bahwa u_2 adalah variabel kontrol pengobatan kelas populasi terinfeksi HIV, sedangkan kematian alami dari kelas populasi individu yang telah diobati dinotasikan dengan μ .

Berdasarkan asumsi yang telah dipaparkan maka didapatkan model kompartemen sebagai berikut beserta model S, E, I, A dan T yang akan dipaparkan pada gambar 4.2 serta persamaan 4.2 :



Gambar 4.2 Diagram Kompartemen pada Model penyebaran HIV/AIDS dengan kontrol

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SE - \mu S$$

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \beta SE - \gamma_1 E - \mu E + u_1 E \\ \frac{dI}{dt} &= \gamma_1 E - \gamma_2 I - \mu I - u_2 I + u_1 E \\ \frac{dA}{dt} &= \gamma_2 I - \mu A - \delta A \\ \frac{dT}{dt} &= u_2 I - \mu T\end{aligned}\tag{4.2}$$

Dimana :

S = Kelas Populasi Rentan

E = Kelas Populasi Terpapar

I = Kelas Populasi Terinfeksi (HIV)

A = Kelas Populasi Terinfeksi (AIDS)

T = Kelas Populasi Pengobatan

Λ = Laju Individu Rentan

β = Laju Kontak Individu Rentan dengan Terpapar

μ = Laju Kematian Alami

γ_1 = Laju *Progress* Penyakit (HIV)

γ_2 = Laju *Progress* Penyakit (AIDS)

δ = Laju Kematian Karena AIDS

u_1 = Variabel Kontrol Penyuluhan

u_2 = Variabel Kontrol Pengobatan

4.2. Penyelesaian Masalah Kontrol Optimal

Pengendalian penyebaran HIV/AIDS dapat dilakukan dengan cara pengendalian pada kelas populasi rentan serta pada populasi terinfeksi HIV/AIDS. Sehingga penyelesaian kontrol optimal pada masalah ini didapatkan dengan mendapatkan fungsi hamiltonian, persamaan *state* dan *co-state* serta hasil kontrol optimal yang akan dipaparkan di bawah ini.

4.2.1. Fungsi Hamiltonian

Pada pengendalian penyebaran HIV/AIDS dengan kontrol optimal dilakukan dengan cara mencari fungsi *hamiltonian* terlebih dahulu, fungsi *hamiltonian* dengan bentuk umum fungsi hamiltonian adalah sesuai dengan persamaan 2.10 pada bab 2. Fungsi tujuan pada penelitian ini adalah untuk meminimalisir individu yang terinfeksi HIV serta AIDS menggunakan dua variabel kontrol yang berbeda, sehingga fungsi tujuan pada penelitian ini akan dipaparkan pada persamaan 4.3.

$$J_{min} = \int (A_1 E + A_2 I + C_1 u_1^2 + C_2^2) dt \quad (4.3)$$

berdasarkan fungsi tujuan yang terdapat pada persamaan 4.3 dimana u_1 dan u_2 merupakan variabel kontrol penyuluhan dan kontrol pengobatan, variabel C_1 beserta C_2 merupakan bobot biaya yang masing-masing bernilai 50 dan 80. Sedangkan A_1 dan A_2 merupakan sebuah koefisien dari kelas populasi terekspos E dan kelas populasi terinfeksi HIV I . Dari pemaparan asumsi yang digunakan pada persamaan 4.3, maka didapatkan fungsi hamiltonian sebagai berikut yang dipaparkan pada

persamaan 4.4.

$$H = (A_1E + A_2I + C_1u_1^2 + C_2u_2^2) + \lambda_1(\Lambda - \beta SE - \mu S) + \lambda_2(\beta SE - \gamma_1E - \mu E - u_1E) + \lambda_3(\gamma_1E - \gamma_2I - \mu I - u_2I + u_1E) + \lambda_4(\gamma_2I - \mu A - \delta A) + \lambda_5(u_2I - \mu T) \quad (4.4)$$

4.2.2. Persamaan State dan Co-State

Berdasarkan fungsi hamiltonian yang telah diperoleh pada persamaan 4.4, maka selanjutnya adalah untuk mencari persamaan *state* beserta persamaan *co-state*. Persamaan *state* pada penelitian ini merupakan hasil turunan parsial antara fungsi *hamiltonian* dengan variabel λ , maka bentuk umum persamaan *state* pada penelitian ini dapat dijabarkan pada persamaan dibawah ini.

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} \\ X_2 &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} \\ X_3 &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} \\ X_4 &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_4} \\ X_5 &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_5} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Berdasarkan persamaan umum yang telah dipaparkan pada persamaan 4.5 sehingga didapatkan hasil penurunan persamaan *state* adalah sebagai berikut yang telah dipaparkan berikut pada persamaan .

$$X_1 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \Lambda - \beta SE - \mu$$

$$\begin{aligned}
X_2 &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = \beta SE - \gamma_1 E - \mu E - u_1 E \\
X_3 &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = \gamma_1 E - \gamma_2 I - \mu I - u_2 I + u_1 E \\
X_4 &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_4} = \gamma_2 I - \mu A - \delta A \\
X_5 &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_5} = u_2 I - \mu T
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Setelah ditemukan hasil dari persamaan state pada persamaan 4.6 maka langkah selanjutnya yakni mencari penurunan rumus dari persamaan *co-state*. pada penelitian ini persamaan umum dari persamaan *co-state* adalah hasil penurunan parsial dari fungsi *hamiltonian* dengan sistem. Sehingga persamaan umum *co-state* pada penelitian ini akan dipaparkan pada persamaan 4.7.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\partial H}{\partial S} \\
\lambda_2 &= \frac{\partial H}{\partial E} \\
\lambda_3 &= \frac{\partial H}{\partial I} \\
\lambda_4 &= \frac{\partial H}{\partial A} \\
\lambda_5 &= \frac{\partial H}{\partial T}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

setelah diperoleh persamaan umum pada persamaan *co-state* maka selanjutnya adalah mencari penurunan rumus persamaan *co-state* yang berdasarkan fungsi hamiltonian 4.4 beserta persamaan umum pada persamaan *co-state* 4.7. Sehingga didapatkan persamaan *co-state* pada persamaan 4.8 yang merupakan hasil akhir dari persamaan *co-state*.

$$\lambda_1 = \lambda_1(-\beta E - \mu) + \lambda_2(\beta E)$$

$$\lambda_2 = A_1 - \lambda_1\beta S + \lambda_2(\beta S - \gamma_1 - \mu - u_1) + \lambda_3(\gamma_1 + u_1)$$

$$\lambda_3 = A_2 + \lambda_3(\gamma_2 - \mu - u_2) + \lambda_4\gamma_2 + \lambda_5u_2$$

$$\lambda_4 = \lambda_4(-\mu - \delta)$$

$$\lambda_5 = -\lambda_5\mu \quad (4.8)$$

4.2.3. Hasil Kontrol Optimal

Setelah mendapatkan hasil fungsi *hamiltonian*, persamaan *state* beserta persamaan *co-state* maka langkah selanjutnya dalam penyelesaian kontrol optimal adalah mencari persamaan kontrol. Terdapat dua variabel kontrol yang digunakan sehingga dicari persamaan kontrol optimal u_* pada kedua variabel kontrol dengan menggunakan rumus persamaan umum pada kontrol optimal sehingga diperoleh persamaan 4.9 sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_1} &= -(2C_1u_1 - E\lambda_2 + E\lambda_3) \\ \frac{\partial H}{\partial u_2} &= -(2C_2u_2 - I\lambda_3 + I\lambda_5) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sehingga telah diperoleh persamaan untuk variabel kontrol optimal u_1^* dan u_2^* berturut-turut layaknya pada persamaan 4.10 .

$$u_1 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)E}{2C_1}$$

$$u_2 = \frac{(\lambda_3 - \lambda_5)I}{2C_2} \quad (4.10)$$

Persamaan kontrol optimal u_1^* beserta u_2^* yang telah diperoleh memiliki memiliki batasan yang digunakan dengan skala 0 (0 persen) hingga skala 1 (100 persen). Berdasarkan batasan yang digunakan, maka persamaan 4.10 dapat ditulis secara sederhana layaknya persamaan 4.11

$$\begin{aligned} u_1^* &= \min(1, \max(0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)E}{2C_1})) \\ u_2^* &= \min(1, \max(0, \frac{(\lambda_3 - \lambda_5)I}{2C_2})) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Setelah memperoleh hasil persamaan variabel kontrol optimal u_1^* dan u_2^* yang telah dipaparkan pada persamaan 4.10 serta batasan yang digunakan pada penelitian dengan penyederhanaan hasil persamaan umum variabel kontrol yang telah dipaparkan pada 4.11, maka langkah selanjutnya ialah dengan hasil penyelesaian numerik yang menggunakan metode *Rungge Kutta* orde 4.

4.3. Penyelesaian Numerik

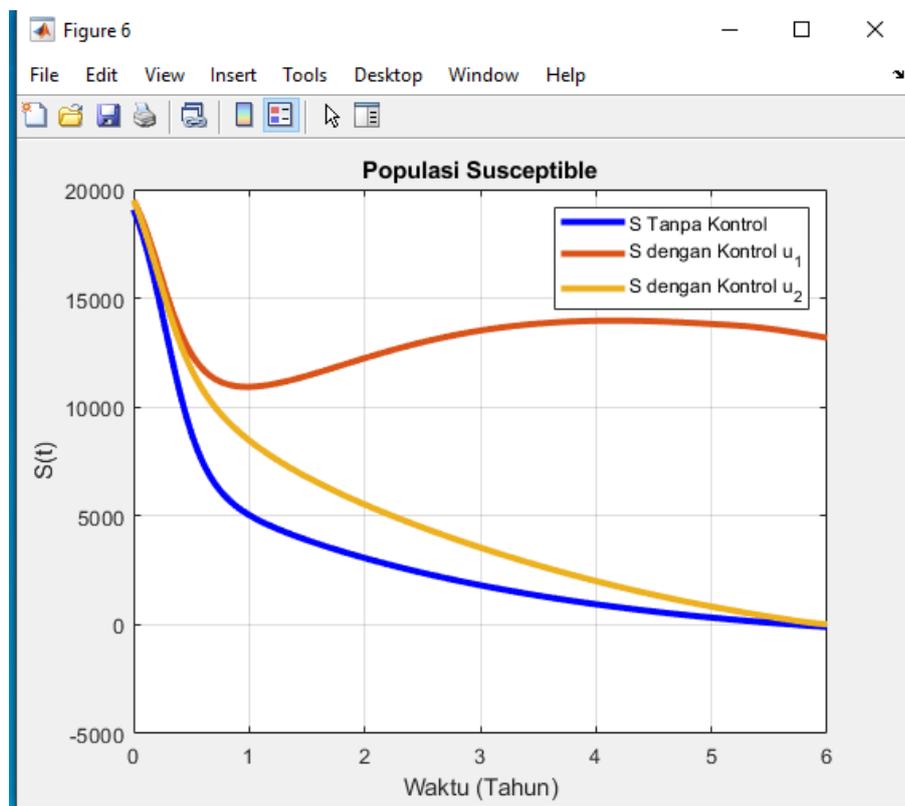
Penyelesaian numerik pada penelitian ini menggunakan metode *Rungge Kutta* orde 4, berdasarkan penyelesaian kontrol optimal didapatkan persamaan *state* dan persamaan *co-state* sehingga metode yang digunakan adalah metode *Rungge Kutta* orde 4 *forward sweep* untuk persamaan *state* serta metode *Rungge Kutta* orde 4 *backward sweep* untuk persamaan *co-state*. Berikut merupakan nilai parameter yang digunakan pada penelitian ini akan disajikan pada tabel 4.1. Adapun koefisien A_1 dan A_2 bernilai 1 sedangkan untuk koefisien C_1 dan C_2 masing-masing bernilai 50 dan 100.

No.	Variabel/Parameter	Nilai
1	S	19000
2	E	2200
3	I	3570
4	A	420
5	T	0
6	Λ	0.55
7	β	0.0003
8	γ_1	0.5
9	γ_2	0.4
10	μ	0.025
11	δ	0.47

Tabel 4.1 Tabel nilai parameter

a. Kelas Populasi Rentan (*Susceptible*)

Berdasarkan gambar 4.3 maka dapat diketahui bahwa pada kelas populasi S (*Susceptible*) tanpa kontrol, mengalami penurunan. Hal ini dikarenakan faktor kematian alami serta beralihnya individu kelas populasi S (*Susceptible*) ke kelas populasi yang lain akan tetapi dengan penggunaan kontrol u_1 mempengaruhi perubahan pada kelas populasi rentan (S) mengalami kenaikan secara signifikan menjadi 13000 individu setelah mengalami penurunan sebanyak 6000 individu hal ini disebabkan karena kontrol berupa penyuluhan kepada populasi E (*Exposed*) yang telah dilakukan. Sedangkan pemberian kontrol u_2 yang berupa kontrol pengobatan terhadap individu terinfeksi HIV (*Infected*) cenderung mengalami penurunan secara konstan yang diakibatkan beralihnya individu ke kelas populasi lain.

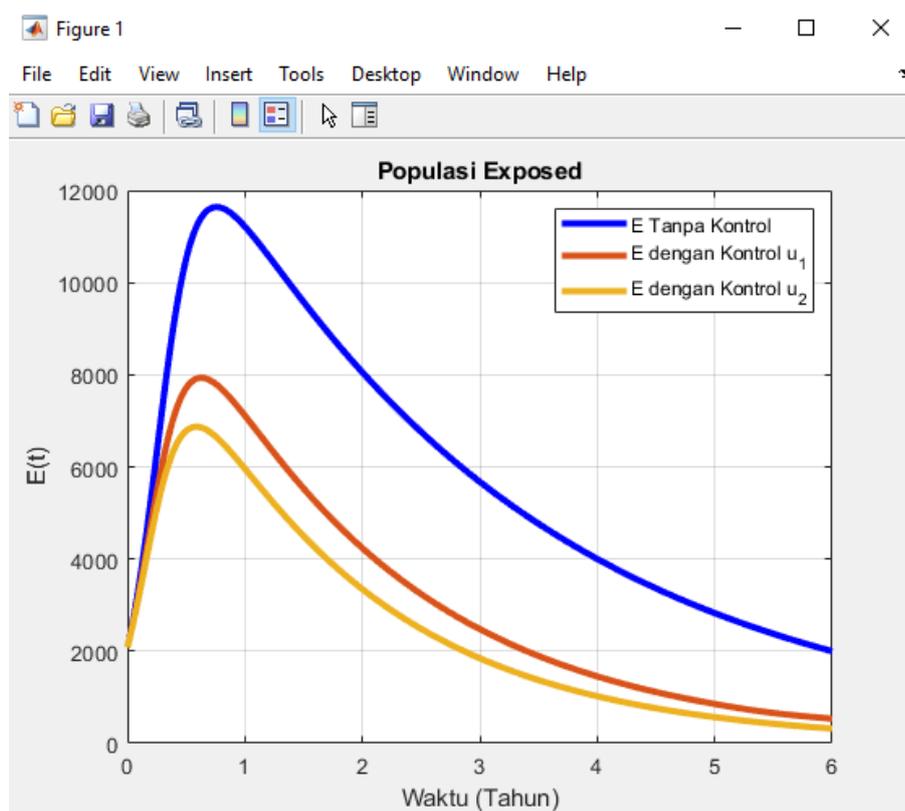


Gambar 4.3 Hasil Grafik Pemodelan pada Populasi *Susceptible*

b. Kelas Populasi Terekspos (*Exposed*)

Berdasarkan gambar 4.4 diketahui bahwa hasil simulasi pada individu E (*Exposed*) tanpa kontrol mengalami kenaikan secara signifikan hingga puncaknya pada tahun pertama di angka 6000 dan akan turun pada tahun kedua hingga seterusnya dan menyentuh angka sekitar 1100. Akan tetapi jika diberikan kontrol u_1 berupa penyuluhan maka simulasi pada individu E (*Exposed*) akan naik pada beberapa bulan di tahun pertama dengan angka tertinggi 4900 dan akan turun secara konstan hingga tahun kelima pada kisaran angka 200 yang disebabkan oleh variabel kontrol u_1 serta kematian alami pada kelas populasi E . Sedangkan pada pemberian kontrol pengobatan pada individu terinfeksi (*Infected*) hampir memiliki kesamaan pada pemberian kontrol u_1 yang mengalami kenaikan pada beberapa bulan di tahun pertama dengan nilai puncak 3300 dan mengalami penurunan se-

cara konstan yang disebabkan variabel kontrol u_2 serta kematian alami hingga mencapai angka kisaran 100.

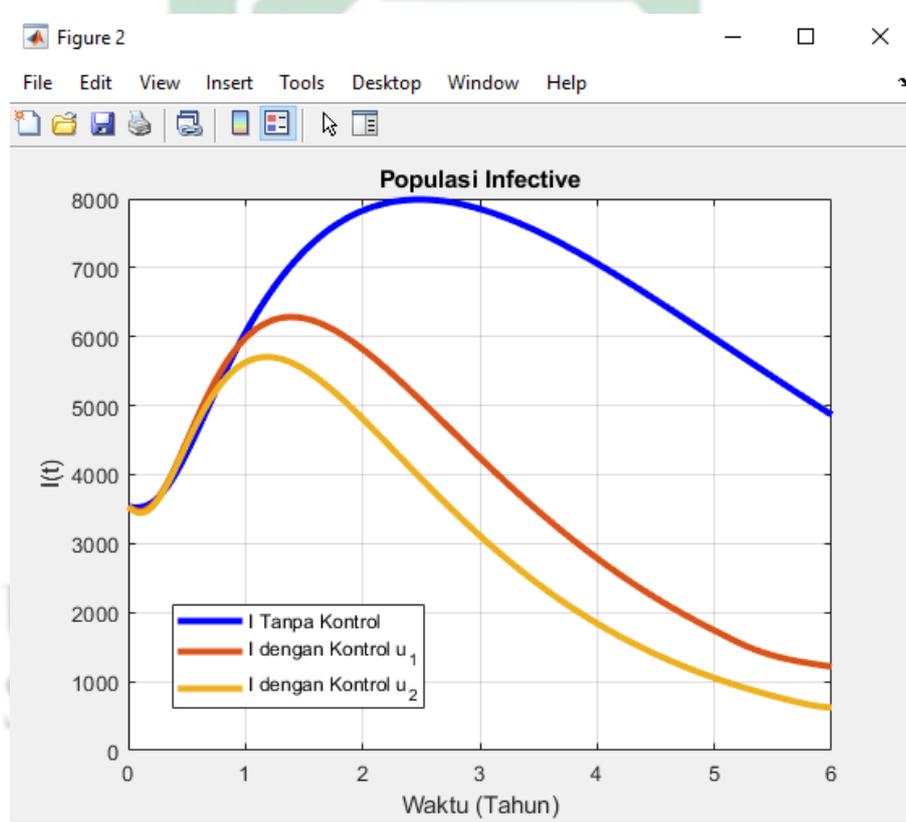


Gambar 4.4 Hasil Grafik Pemodelan pada Populasi *Exposed*

c. Kelas Populasi Terinfeksi (*Infected*)

Berdasarkan pada gambar 4.5 diketahui bahwa hasil simulasi pada kelas populasi I (*Infected*) didapatkan hasil individu pada kelas populasi terinfeksi (*Infective*) tanpa kontrol mengalami kenaikan secara drastis pada tahun pertama hingga tahun ketiga yang mencapai angka 4800 individu dan berkurang seiring waktu hingga mencapai angka 3000 yang diakrenakan peralihan individu ke kelas populasi AIDS serta kematian alami pada populasi terinfeksi HIV (*Infective*). Akan tetapi pada hasil dengan pemberian kontrol u_1 menghasilkan pengurangan yang stabil di iringi dengan kenaikan di beberapa bulan di tahun pertama, jumlah indi-

vidu terinfeksi yang berkurang sebanyak sekitar 2000 individu. Sedangkan jika diberi kontrol u_2 jumlah individu terinfeksi meningkat di tahun pertama pada angka 3200 dan mengalami penurunan secara berkala di tahun berikutnya dikarenakan adanya variabel kontrol pengobatan u_2 , dengan menggunakan variabel kontrol u_2 populasi terinfeksi mengalami penurunan sebanyak 3000 individu. dalam hal ini kontrol pengobatan pada populasi terinfeksi u_2 mengakibatkan pengurangan jumlah individu terinfeksi yang lebih efektif dibandingkan kontrol penyuluhan pada populasi terekspos u_1 .

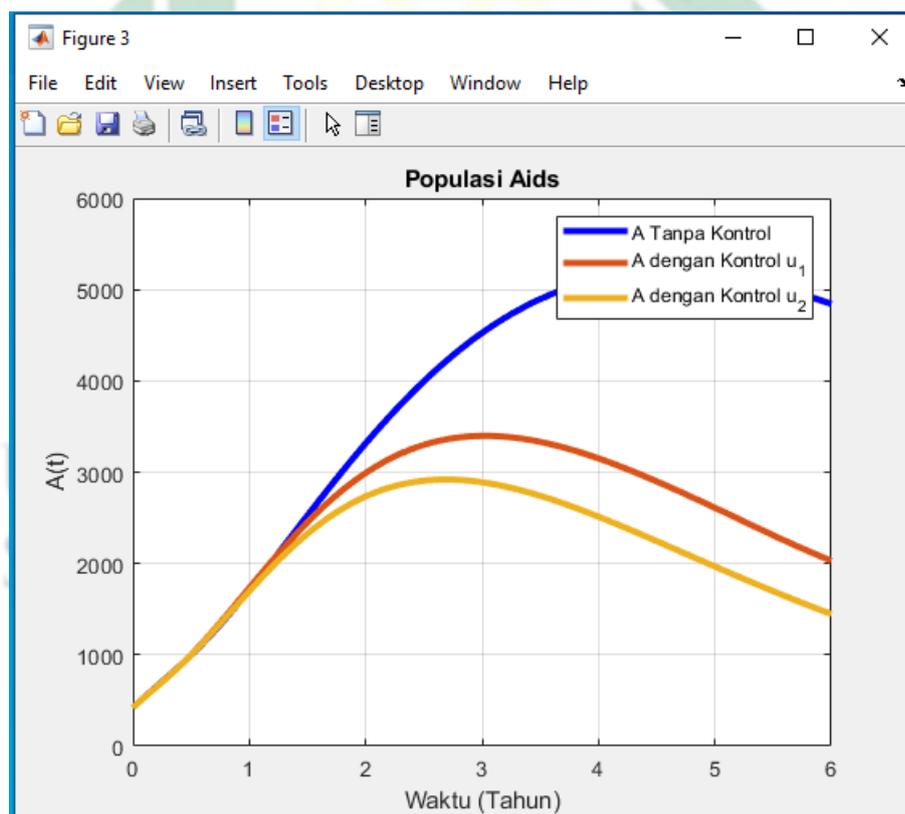


Gambar 4.5 Hasil Grafik Pemodelan pada Populasi *Infected*

d. Kelas Populasi AIDS

Berdasarkan pada gambar 4.6 diketahui bahwa populasi yang tidak diberi kontrol mengalami kenaikan secara konstan sejak tahun pertama dan mengalami puncaknya pada tahun ke empat dengan nilai 3300 dan menurun di 2 tahun tera-

akhir di angka 3000. hal ini dikarenakan banyaknya individu terinfeksi HIV yang tidak diberi obat sehingga menyebabkan kenaikan individu AIDS yang sangat tinggi dan menurun di tahun terakhir dikarenakan faktor kematian alami serta faktor kematian dikarenakan infeksi AIDS yang telah parah. Tetapi pemberian kontrol penyuluhan individu terekspos u_1 dapat memberikan pengurangan individu terinfeksi AIDS sebesar 1300 individu. Sedangkan pada pemberian kontrol pengobatan terhadap individu terinfeksi HIV memberikan dampak pengurangan individu yang signifikan sebesar 2000 individu. dalam hal ini pemberian kontrol pengobatan (u_2) memberikan dampak yang lebih besar dibandingkan dengan pemberian kontrol penyuluhan (u_1).

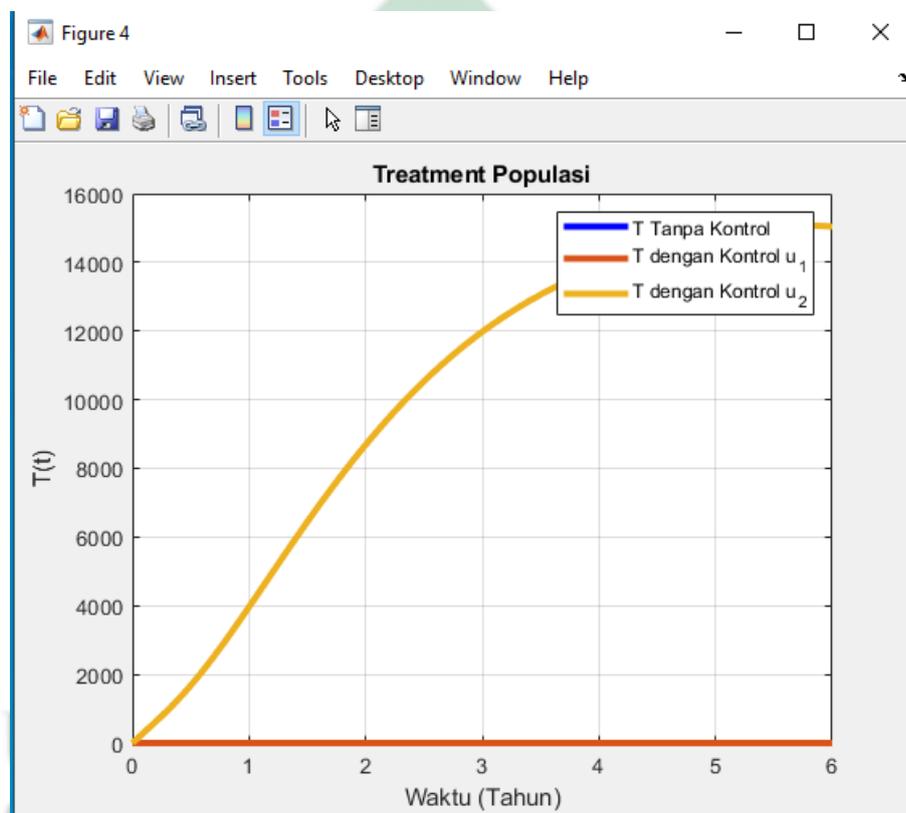


Gambar 4.6 Hasil Grafik Pemodelan pada Populasi AIDS

e. Kelas Populasi Pengobatan (*Treatment*)

Berdasarkan pada gambar 4.7 dikarenakan tidak terdapat kontrol maka tidak ada

populasi treatment pada model tanpa kontrol serta pada model dengan kontrol u_1 juga tidak terdapat populasi pada model treatment dikarenakan pada model dengan kontrol u_1 hanya memberikan penyuluhan pada kelas populasi terekspos (E), sehingga hasil model akan bernilai 0. Sedangkan pada model dengan kontrol pengobatan u_2 , individu pada kelas populasi *Treatment* meningkat secara konstan pada tahun pertama hingga tahun berikutnya.



Gambar 4.7 Hasil Grafik Pemodelan pada Populasi *Treatment*

- f. Hasil Perbandingan Kontrol Penyuluhan (u_1) dengan Kontrol Pengobatan (u_2)
 Berdasarkan hasil simulasi yang telah dipaparkan pada gambar 4.3,4.4,4.5,4.6 dan 4.7. Maka didapatkan fungsi tujuan yang telah dipaparkan pada persamaan 4.3, pada penelitian ini menggunakan prinsip minimum pontryagin dimana tujuan dari penelitian ini adalah meminimumkan fungsi tujuan yang sesuai persamaan 4.3. Sehingga semakin kecil nilai fungsi tujuan yang didapat maka akan

memberikan hasil kontrol yang terbaik. Berikut merupakan hasil fungsi tujuan dengan dua kontrol yang berbeda yakni u_1 dan u_2 yang akan dipaparkan pada tabel 4.2.

No.	Variabel Kontrol	Nilai fungsi tujuan
1	u_1	2939.6
2	u_2	1873

Tabel 4.2 Tabel Hasil Fungsi Tujuan

Berdasarkan hasil nilai fungsi objektif yang telah diapaparkan pada tabel 4.2, maka dapat diambil kesimpulan bahwa variabel kontrol u_2 merupakan kontrol yang lebih baik dibandingkan dengan u_1 . Dikarenakan nilai fungsi objektif u_2 memiliki nilai yang lebih kecil dibandingkan dengan nilai fungsi objektif u_1 , hal ini sesuai dengan tujuan dari penelitian ini yakni meminimumkan fungsi tujuan pada persamaan 4.3.

4.4. Integrasi Keilmuan

Berdasarkan hasil yang telah dipaparkan sebelumnya, bahwa upaya pemberian kontrol menggunakan prinsip minimum pontryagin dapat bekerja dengan baik pada model epidemi HIV/AIDS secara optimal. Pemberian kontrol optimal ini merupakan salah satu upaya yang dilakukan oleh peneliti dalam menangani permasalahan HIV/AIDS. Allah SWT juga telah menjelaskan pentingnya berusaha serta berikhtiar agar mendapatkan sesuatu yang baik. Sebagaimana yang dijelaskan potongan surat az-Zumar;39 berikut ini.

قُلْ يٰٓقَوْمِ اَعْمَلُوا عَلٰى مَكَانَتِكُمْ اِنِّىْ عَمِلْتُ فَاَسُوْفَ تَعْلَمُوْنَ

Artinya : Katakanlah (Muhammad), Wahai kaumku! Berbuatlah menurut kedudukanmu, aku pun berbuat (demikian). Kelak kamu akan mengetahui””.

Ayat tersebut menjelaskan bahwa upaya yang maksimal sangat diperlukan. Karena Allah akan membalas sesuatu yang sudah kita upayakan dengan maksimal tersebut. Selain itu, melakukan suatu usaha dengan baik juga sesuai dengan potongan surat At-Taubah;105 berikut.

وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ وَسَتُرَدُّونَ إِلَىٰ عِلْمِ الْغَيْبِ
وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُم بِمَا كُنتُمْ تَعْمَلُونَ

Artinya : ”Bekerjalah kamu, maka Allah dan Rasul-Nya serta orang-orang mumin akan melihat pekerjaanmu itu, dan kamu akan dikembalikan kepada (Allah) Yang Mengetahui akan yang ghaib dan nyata, lalu diberitakan-Nya kepada kamu apa yang telah kamu kerjakan.”.

Berdasarkan ayat diatas, dijelaskan bahwa Allah menyuruh setiap manusia untuk selalu berusaha dan bekerja dalam hal apapun, seperti pada penelitian ini setiap orang harus selalu berusaha melakukan pengendalian dalam penyebaran HIV/AIDS sebagai salah satu usaha dalam pencegahan penyakit tersebut. Dengan melakukan pencegahan, maka kita juga dapat memberikan manfaat bagi banyak orang. Maka dapat dikatakan bahwa penelitian ini, memberikan banyak manfaat bagi banyak orang. Memberikan banyak manfaat bagi orang lain juga dianjurkan dalam hadist dibawah ini.

عن جابر قال : قال رسول الله صلى الله عليه وسلم : « المؤمن يألف ويؤلف ، ولا
« خير فيمن لا يألف ، ولا يؤلف ، وخير الناس أنفعهم للناس

Dari Jabir, Ia berkata: Rasulullah SAW bersabda, Orang beriman itu bersikap ramah dan tidak ada kebaikan bagi seorang yang tidak bersikap ramah. Dan sebaik-baik manusia adalah orang yang paling bermanfaat bagi manusia. (HR. Thabrani dan Daruquthni).

Dijelaskan dalam hadist diatas, bahwa kita sebagai manusia harus memberikan manfaat bagi orang lain. Seperti pada penelitian ini, bahwasannya peneliti melakukan upaya pencegahan HIV/AIDS dengan sangat baik. Sehingga penelitian ini juga memberikan manfaat bagi orang lain. Setelah kita berikhtiar/berusaha, melakukan pencegahan dan mengobati penyakit dapat dilakukan dengan selalu bertawakal kepada Allah seperti firman berikut.

فَإِذَا عَزَمْتَ فَتَوَكَّلْ عَلَى اللَّهِ إِنَّ اللَّهَ يُحِبُّ الْمُتَوَكِّلِينَ

Artinya : Kemudian apabila kamu telah membulatkan tekad, maka bertawakallah kepada Allah. Sesungguhnya Allah menyukai orang-orang yang bertawakal padaNya.. Setelah kita berusaha dan berikhtiar maka semua harus kita pasrahkan kepada Allah. Kita harus yakin bahwa seluruh ketentuan Allah adalah yang paling baik. Oleh sebab itu ayat diatas memerintahkan kepada kita untuk selalu bertawakal kepada Allah.

BAB V

PENUTUP

Setelah penjelasan materi yang telah dipaparkan oleh penulis sebelumnya, maka bab ini akan diberikan kesimpulan dan saran-saran.

5.1. Simpulan

1. Didapatkan model penyebaran HIV/AIDS tanpa menggunakan kontrol serta menggunakan kontrol adalah sebagai berikut:

- . Model Penyebaran HIV/AIDS tanpa kontrol

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SE - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SE - \gamma_1 E - \mu E - u_1 IS$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma_1 E - \gamma_2 I - \mu I - \mu_2 I$$

$$\frac{dA}{dt} = \gamma_2 I - \mu A - \delta A$$

- . Model Penyebaran HIV/AIDS dengan kontrol

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SE - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SE - \gamma_1 E - \mu E - u_1 IS$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma_1 E - \gamma_2 I - \mu I - \mu_2 I$$

$$\frac{dA}{dt} = \gamma_2 I - \mu A - \delta A$$

$$\frac{dR}{dt} = u_2 I - \mu T$$

2. Didapatkan penyelesaian kontrol optimal pada model penyebaran HIV/AIDS dengan menggunakan dua variabel kontrol yakni kontrol penyuluhan populasi terekspos(E) serta pengobatan pada populasi terinfeksi HIV(I) sebagai berikut:

- . Penyelesaian Kontrol Optimal dengan Kontrol Penyuluhan populasi terekspos(E)

$$u_1^* = \min(1, \max(0, \frac{E(\lambda_2 - \lambda_3)}{2C_1}))$$

- . Penyelesaian Kontrol Optimal dengan Kontrol Pengobatan populasi terinfeksi HIV(I)

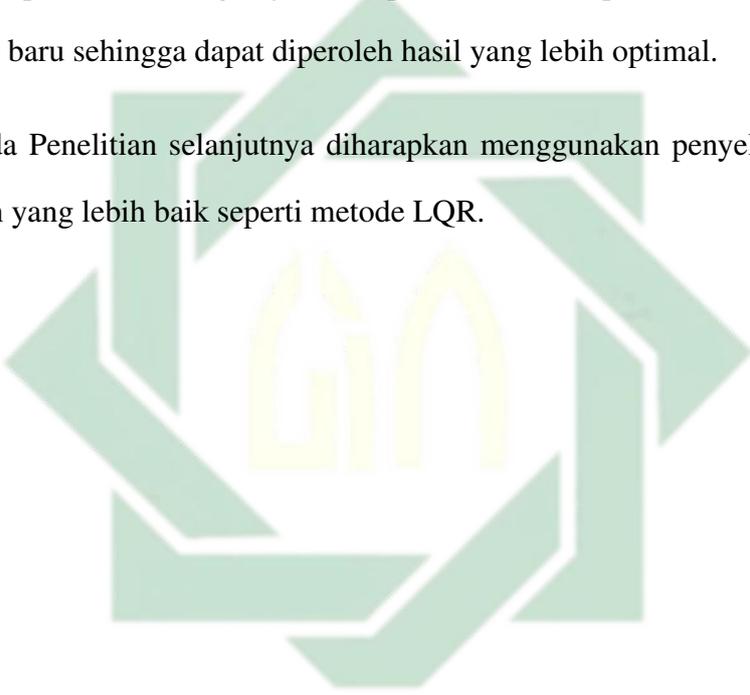
$$u_2^* = \min(1, \max(0, \frac{I(\lambda_3 - \lambda_5)}{2C_2}))$$

3. Hasil penyelesaian numerik yang telah dipaparkan pada bab sebelumnya maka diperoleh kesimpulan bahwa pemberian kontrol penyuluhan populasi terekspos (E) maupun pemberiaan pengobatan pada populasi terinfeksi HIV (I) terhadap model penyebaran HIV/AIDS sangat berpengaruh dengan hasil simulasi penyelesaian numerik. Pengaruh ini didapatkan pada semua kelas populasi, terutama pada kelas populasi terinfeksi HIV (I), terinfeksi AIDS (A) dan kelas populasi pengobatan (T). Pada kontrol dengan penyuluhan populasi terekspos didapatkan penurunan signifikan pada kelas populasi (E) dan (I), sedangkan pada kontrol dengan pengobatan didapatkan penurunan pada kelas populasi (I), (A) dan kenaikan populasi pengobatan (T). Fungsi objektif yang dihasilkan dari kontrol u_1 adalah 2939.6 sedangkan dari kon-

trol u_2 didapatkan hasil fungsi objektif senilai 1873, sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa kontrol pengobatan pada kelas populasi terinfeksi u_2 lebih optimal daripada penyuluhan pada kelas populasi terekspos u_1 .

5.2. Saran

1. Pada penelitian selanjutnya diharapkan melakukan penambahan skenario kontrol baru sehingga dapat diperoleh hasil yang lebih optimal.
2. Pada Penelitian selanjutnya diharapkan menggunakan penyelesaian kontrol lain yang lebih baik seperti metode LQR.



UIN SUNAN AMPEL
S U R A B A Y A

DAFTAR PUSTAKA

- Achdou, Y., Laurière, M., and Lions, P. L. (2020). Optimal control of conditioned processes with feedback controls. *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, 1:1–34.
- Adamu, H. A., Muhammad, M., M.Jingi, A. M., and Usman, M. A. (2019). Mathematical modelling using improved SIR model with more realistic assumptions. *International Journal of Engineering and Applied Sciences (IJEAS)*, 6(1).
- Agusto, F. B. and Adekunle, A. I. (2014). Optimal control of a two-strain tuberculosis-HIV/AIDS co-infection model. *BioSystems*, 119(1):20–44.
- Cai, L., Guo, S., and Wang, S. (2014). Analysis of an extended HIV/AIDS epidemic model with treatment. *Applied Mathematics and Computation*, 236:621–627.
- Cheng, Y., Abdelrazec, A., and Liu, H. A. O. (2014). MATHEMATICAL MODELLING OF THE HIV/AIDS EPIDEMIC IN CUBA.
- Darmadi, D. and Ruslie, R. H. (2012). Diagnosis Dan Tatalaksana Infeksi Hiv Pada Neonatus. *Majalah Kedokteran Andalas*, 36(1):11.
- Denysiuk, R., Silva, C. J., and Torres, D. F. M. (2018). Multiobjective optimization to a TB-HIV/AIDS coinfection optimal control problem. *Computational and Applied Mathematics*, 37(2):2112–2128.
- Di Giamberardino, P. and Iacoviello, D. (2020). Epidemic modeling and control of HIV/AIDS dynamics in populations under external interactions: A worldwide

- challenge. In *Control Applications for Biomedical Engineering Systems*, pages 197–249. Elsevier Inc.
- Fatmawati and Tasman, H. (2016). An Optimal Treatment Control of TB-HIV Coinfection. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2016.
- Fitria, V. A. (2011). Model Matematika Terhadap Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Rumah Sakit Paru Batu. *Jurnal Ilmiah Teknologi Informasi Asia*, 5(2):60–67.
- Ford, N., Meintjes, G., Vitoria, M., Greene, G., and Chiller, T. (2017). The evolving role of CD4 cell counts in HIV care. *Current Opinion in HIV and AIDS*, 12(2):123–128.
- Hidayat, T., ., J., and Rudianto, B. (2018). Aplikasi Prinsip Maksimum Pontryagin Dan Metode Runge-Kutta Dalam Masalah Kontrol Optimal. *Jurnal Matematika UNAND*, 7(2):212.
- Huo, H. F., Chen, R., and Wang, X. Y. (2016). Modelling and stability of HIV/AIDS epidemic model with treatment. *Applied Mathematical Modelling*, 40(13-14):6550–6559.
- Indrawati, I. (2012). *Analisis Dinamik Untuk Kestabilan dari Model SIR dengan Perlambatan Waktu*. PhD thesis.
- Joint United Nations Programme on HIV/AIDS (UNAIDS) (2019). *AIDS data 2019*, volume 268.
- Kemenkes (2014). Infodatin AIDS.pdf.
- Kementrian Kesehatan RI (2018). General situation of HIV/AIDS and HIV test.

- Kwon, H. D., Lee, J., and Yang, S. D. (2012). Optimal control of an age-structured model of HIV infection. *Applied Mathematics and Computation*, 219(5):2766–2779.
- Leleury, Z. A., Rumlawang, F. Y., and Naraha, A. G. (2020). Analisis Stabilitas dan Simulasi Model Penyebaran Penyakit HIV / AIDS Tipe SIA (Susceptible , Infected , Abstained). 1(April):31–40.
- Luckheeram, R. V., Zhou, R., Verma, A. D., and Xia, B. (2012). CD4 +T cells: Differentiation and functions. *Clinical and Developmental Immunology*, 2012(March).
- Mahmudah, D. E. and Naf'an, M. Z. (2014). Kontrol Optimal Model Epidemik Host-Vector Dengan Simulasi Menggunakan. *Jurnal Ilmiah Teknologi dan Informasi ASIA*, 8(2):1–9.
- Maimunah and Aldila, D. (2018). Mathematical model for HIV spreads control program with ART treatment. *Journal of Physics: Conference Series*, 974(1).
- Naik, P. A., Zu, J., and Owolabi, K. M. (2020). Global dynamics of a fractional order model for the transmission of HIV epidemic with optimal control. *Chaos, Solitons and Fractals*, 138:109826.
- Nainggolan, J. (2017). Kontrol Pengobatan Optimal Pada Model Penyebaran Tuberkulosis Tipe Seit. *E-Jurnal Matematika*, 6(2):137.
- Ogunlaran, O. M. and Oukouomi Noutchie, S. C. (2016). Mathematical model for an effective management of HIV infection. *BioMed Research International*, 2016.

- Purwanti, R. S. and Mardijah, M. (2019). Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal pada Model Dinamik Penyebaran Penyakit Malaria. *Jurnal Sains dan Seni ITS*, 8(1).
- Queena F, K., Bagus O, T., and Wipayana, I. (2012). Model Sir (Susceptible, Infectious, Recovered) Untuk Penyebaran Penyakit Tuberkulosis. *E-Jurnal Matematika*, 1(1):52–58.
- Roy, P. K., Saha, S., and Basir, F. A. (2015). Effect of awareness programs in controlling the disease HIV/AIDS: an optimal control theoretic approach. *Advances in Difference Equations*, 2015(1).
- Saraswati, P., Mardijah, M., and Kamiran, K. (2017). Analisis dan Kontrol Optimal Sistem Gerak Satelit Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. *Jurnal Sains dan Seni ITS*, 6(2).
- Shaiful, E. M. and Setiawan, A. (2017). ANALISIS KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT HIV. (2012):49–52.
- Shirazian, M. and Farahi, M. H. (2010). Optimal Control Strategy for a Fully Determined HIV Model. *Intelligent Control and Automation*, 01(01):15–19.
- Side, S., Sanusi, W., and Setiawan, N. F. (2016). Analisis dan Simulasi Model SITR pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar Analysis and Simulation Of SITR Model on Tuberculosis in Makassar City. V(2).
- Sri, T., Asih, N., and Waluya, S. B. (2018). Perbandingan Finite Difference Method dan Finite Element Method dalam Mencari Solusi Persamaan Diferensial Parsial. *Prisma 1*, 1:885–888.
- Subiono (2011). *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*.

- Sudiono, J. (2014). *Sistem Kekebalan Tubuh*. Number June.
- Suhaimi, D., Savira, M., and Krisnadi, S. R. (2009). Pencegahan Dan Penatalaksanaan Infeksi Hiv/AIDS Pada Kehamilan. *Majalah Kedokteran Bandung*, 41(2):1–7.
- Sukokarilinda, W. (2012). *Analisis dan Kontrol Optimal pada Model Penyebaran Virus HIV dalam Tubuh Manusia*. PhD thesis.
- Sun, C., Hsieh, Y. H., and Georgescu, P. (2018). A model for HIV transmission with two interacting high-risk groups. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 40:170–184.
- Sweilam, N. H., AL-Mekhlafi, S. M., Mohammed, Z. N., and Baleanu, D. (2020). Optimal control for variable order fractional HIV/AIDS and malaria mathematical models with multi-time delay. *Alexandria Engineering Journal*, 59(5):3149–3162.
- Syahril, E. (2002). Prinsip Maksimum Pontryagin Dalam Masalah Kontrol Optimum Stokastik. *Journal of Mathematics and Its Applications*, 1(2):23.
- Theses, M. and Rose, G. R. (2015). Trace: Tennessee Research and Creative Exchange Numerical Methods for Solving Optimal Control Problems.
- Toaha, S. (2014). Aplikasi Kontrol Pada Perubahan Perilaku Manusia. 11(1):17–27.
- Ulfa, M. and Sugiyanto, S. (2013). Model Matematika Untuk Kontrol Campak Menggunakan Vaksinasi. *Jurnal Fourier*, 2(2):81.
- uron Hurit, R. (2016). *Penyelesaian Model SEIR Untuk Penyebaran Penyakit Meningitis Menggunakan Metode Euler, Metode Heun, dan Metode Rungge-Kutta*

Orde Empat: Tinjauan Matematika dan Aspek Pendidikannya. PhD thesis, Universitas Sanata Dharma.

Venkateswarlu, A. (1996). *Optimal control*, volume 4.

Wang, F., Cao, S. M., and Liu, R. (2020). Study on the optimum model of drug control HIV with nonlinear value-added term. *Procedia Computer Science*, 166:21–25.

Weiss Sir Ronald Ross, H. (2013). The SIR model and the Foundations of Public Health. *MATerials MATemàtics Volum*, 17(3):1887–1097.

Yi, N., Zhang, Q., Mao, K., Yang, D., and Li, Q. (2009). Analysis and control of an SEIR epidemic system with nonlinear transmission rate. *Mathematical and Computer Modelling*, 50(9-10):1498–1513.

Yuniarsih, M. (2012). *KONTROL OPTIMAL PENYEBARAN TUBERKULOSIS DENGAN EXOGENOUS REINFECTION*. PhD thesis.

Zamzami, A. J., Waluya, S. B., and Kharis, M. (2018). Pemodelan Matematika Dan Analisis Kestabilan Model Penyebaran Hiv/Aids Dengan Treatment. *Unnes Journal of Mathematics*, 7(2):142–154.