***P-SEMISIMPLE* BCI-ALJABAR DAN 0-KOMUTATIF B-ALJABAR**

SKRIPSI

UIN SUNAN AMPEL
S U R A B A Y A

Disusun Oleh

AZIZATUL ILMI

H72217048

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL
SURABAYA

2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini,

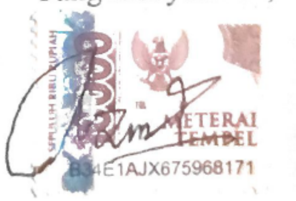
Nama	:	AZIZATUL ILMI
NIM	:	H72217048
Program Studi	:	Matematika
Angkatan	:	2017

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul ”*P-SEMISIMPLE* BCI-ALJABAR DAN 0-KOMUTATIF B-ALJABAR”. Apabila suatu saat nanti terbukti saya melakukan tindakan plagiat, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian pernyataan keaslian ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 28 Januari 2022

Yang menyatakan,



AZIZATUL ILMI

NIM. H72217048

LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

Skripsi oleh

Nama	:	AZIZATUL ILMI
NIM	:	H72217048
Judul Skripsi	:	*P-SEMISIMPLE* BCI-ALJABAR DAN 0-KOMUTATIF B-ALJABAR

telah diperiksa dan disetujui untuk diujikan.

Surabaya, 28 Januari 2022

Pembimbing I	Pembimbing II
Wika Dianita Utami,M.Sc	Dr. Abdulloh Hamid, M. Pd.
NIP. 199206102018012003	NIP. 198508282014031003

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika
UIN Sunan Ampel Surabaya

Aris Fanani, M.Kom
NIP. 198701272014031002

PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI

Skripsi oleh

Nama	:	AZIZATUL ILMI
NIM	:	H72217048
Judul Skripsi	:	*P-SEMISIMPLE* BCI-ALJABAR DAN 0-KOMUTATIF B-ALJABAR

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji
pada tanggal 2 Februari 2022

Mengesahkan,
Tim Penguji

Penguji I

Dr. Moh. Hafiyusholeh, M.Si, M.Pmat
NIP. 198002042014031001

Penguji II

Putroue Keumala Intan, M.Si
NIP. 198805282018012001

Penguji III

Wika Dianita Utami,M.Sc
NIP. 199206102018012003

Penguji IV

Dr. Abdulloh Hamid, M. Pd.
NIP. 198508282014031003

Mengetahui,
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Ampel Surabaya

Prof. Dr. Hj. Evi Fatimatur Rusydiyah, M.Ag
NIP. 197312272005012003

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL SURABAYA
PERPUSTAKAAN
Jl. Jend. A. Yani 117 Surabaya 60237 Telp. 031-8431972 Fax.031-8413300
E-Mail: perpus@uinsby.ac.id

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika UIN Sunan Ampel Surabaya, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama	:	AZIZATUL ILMI
NIM	:	H72217048
Fakultas/Jurusan	:	SAINTEK / MATEMATIKA
E-mail address	:	azizatul.ilmi123@gmail.com

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah :

☑ Sekripsi ☐ Tesis ☐ Desertasi ☐ Lain-lain (……………………………)

yang berjudul :

P-SEMISAMPLE BCI-ALJABAR DAN 0-KOMUTATIF B-ALJABAR

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan Hak Bebas Royalti Non-Ekslusif ini Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (database), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di Internet atau media lain secara ***fulltext*** untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Surabaya, 21 April 2022

Penulis

(AZIZATUL ILMI)

nama terang dan tanda tangan

ABSTRAK

P-SEMISIMPLE BCI-ALJABAR DAN 0-KOMUTATIF B-ALJABAR

Matematika adalah salah satu ilmu yang mengkaji abstraksi ruang, waktu dan angka. Salah satu yag dikaji oleh matematika adalah aljabar abstrak.Pada aljabar abstrak dapat dipelajari suatu himpunan. Selain himpunan, pada aljabar abstrak juga dipelajari beberapa jenis aljabar salah satunya adalah BCI-aljabar. BCI-aljabar merupakan sistem aljabar $(X; *, 0)$ yang memenuhi beberapa aksioma yang terdefisi pada BCI-Aljabar. Lalu jika pada BCI-aljabar berlaku $0 * (0 * e) = e$ untuk setiap $e \in X$, maka BCI-aljabar tersebut disebut dengan *p-semisimple* BCI-aljabar. Selain BCI-aljabar terdapat juga jenis aljabar lain seperti B-aljabar. B-aljabar adalah suatu sistem aljabar yang memenuhi beberapa aksioma yang terdefisi pada B-Aljabar. Adapun saat B-aljabar bersifat komutatif jika untuk setiap $e, g \in X$ berlaku $e * (0 * g) = g * (0 * e)$. Lebih lanjut B-aljabar komutatif juga biasa disebut dengan 0-komutatif B-aljabar. Dari pemaparan tersebut dapat diketahui pada struktur 0-komutatif B-aljabar, mensyaratkan bahwa adanya konstanta 0 dioperasikan dengan sebarang elemen di B-aljabar X. Kondisi ini analog dengan konsep pada *p-semisimpe* BCI-aljabar. Oleh karena itu, dibuat penelitian ini dengan tujuan mengkaji sifat antara antara 0-komutatif B-aljabar dengan *p-semisimple* BCI-aljabar di mana diperoleh pernyataan misalkan $(X; *, 0)$ adalah 0-komutatif B-aljabar jika dan hanya jika $(X; *, 0)$ adalah *p-semisimple* BCI-aljabar.

Kata kunci: BCI-aljabar, *p-semisimple* BCI-aljabar, B-aljabar, 0-komutatif B-aljabar.

ABSTRACT

P-SEMISIMPLE BCI-ALGEBRA AND 0-COMMUTATIVE B-ALGEBRA

Mathematics is one of the sciences that studies the abstraction of space, time and numbers. One that is studied by mathematics is abstract algebra. In abstract algebra, a set can be studied. In addition to sets, in abstract algebra, several types of algebra are also studied, one of which is BCI-algebra. BCI-algebra is an algebraic system $(X;*,0)$ which satisfies several axioms, that be in the BCI-algebra definition. Then if in BCI-algebra there is $0*(0*e)=e$ for each $e \in X$, then the BCI-algebra is called p-semisimple BCI-algebra. In addition to BCI-algebra there are also other types of algebra such as B-algebra. B-algebra is an algebraic that satisfies several axioms , that be in the B-algebra definition. Meanwhile, when B-algebra is commutative if for each $e, g \in X$, then $e*(0*g) = g*(0*e)$. Furthermore, commutative B-algebra is also commonly referred to as 0-commutative B-algebra. From this explanation, it can be seen that the structure of 0-commutative B-algebra requires that a constant 0 be operated with any element in B-algebra X. This condition is analogous to the concept in p-semisimple BCI-algebra. Therefore, this study was made with the aim of examining the properties between 0-commutative B-algebra and p-semisimple BCI-algebra and then known if there is $(X;*,0)$ is 0-commutative B-algebra if only if $(X;*,0)$ is p-semisimple BCI-algebra.

Keywords: BCI-algebra, p-semisimple BCI-algebra, B-algebra, 0-commutative B-algebra.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMBANG

$x \in A$	: x anggota A
$\mathbb{Z}$	: himpunan semua bilangan bulat
$\blacksquare$	: akhir suatu bukti
$\rightarrow$	: menuju
$p \Rightarrow q$	: jika p maka q
$\Leftrightarrow$	: jika dan hanya jika

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Perkembangan ilmu pengetahauan dan teknologi yang demikian pesat di era globalisasi tentunya akan membawa dampak terhadap seluruh aspek kehidupan manusia. Dampak yang dimaksud dapat bersifat positif, akan tetapi dapat pula besifat negatif. Hal ini akan tergantung pada kesiapan manusia yang bersangkutan dalam menerima pembaharuan dimaksud sebagai suatu dinamika, khususnya dibidang kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi (Nasution , 2015).

Dari pemaparan di atas dapat dikatakan apabila manusia ingin mendapatkan dampak positif dari perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi maka manusia memerlukan usaha untuk menjadi semakin baik dengan mempersiapkan diri mengikuti perkembangan ilmu pengetahuan secara berlanjut. Dengan ini dapat dikatakan manusia diharuskan untuk bersungguh-sungguh dalam menuntut ilmu. Orang yang menuntut ilmu baik ilmu agama maupun ilmu pengetahuan memiliki kedudukan penting dalam agama Islam. Hal ini dibuktikan dengan adanya beberapa ayat al-Qur'an dan hadis nabi yang memandang tinggi orang berilmu serta memberi dorongan semangat untuk senantiasa menuntut ilmu. Salah satunya dijelaskan pada Q.S. Al-Mujaadalah ayat 11 yaitu:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا قِيلَ لَكُمۡ تَفَسَّحُواْ فِي ٱلۡمَجَٰلِسِ فَٱفۡسَحُواْ يَفۡسَحِ ٱللَّهُ
لَكُمۡۖ وَإِذَا قِيلَ ٱنشُزُواْ فَٱنشُزُواْ يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ
ٱلۡعِلۡمَ دَرَجَٰتٖۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعۡمَلُونَ خَبِيرٞ

Artinya: ”Hai orang-orang beriman apabila dikatakan kepadamu: “Berlapang-lapanglah dalam majlis”, maka lapangkanlah niscaya Allah Swt. akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan: “Berdirilah kamu”, maka berdirilah, niscaya Allah Swt. akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Swt. Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan.”

Pada ayat di atas dijelaskan terdapat 2 macam orang beriman yaitu orang yang hanya beriman saja dan orang yang beriman serta memiliki ilmu pengetahuan. Dalam ayat tersebut tidak ditegaskan bahwa Allah Swt. akan meninggikan derajat orang yang hanya beriman atau orang yang hanya berilmu, namun menegaskan bahwa Allah Swt. akan meninggikan derajat orang yang beriman dan juga memiliki ilmu pengetahuan. Jika seseorang memiliki ilmu pengetahuan dan beriman maka dipastikan dia akan lebih mudah dalam menyelesaikan masalah yang ada.

Selain ayat di atas, keuatamaan orang menuntut ilmu juga disebutkan pada salah satu hadis yaitu:

حَدَّثَنَا يَحْيَى بْنُ أَيُّوبَ وَقُتَيْبَةُ يَعْنِي ابْنَ سَعِيدٍ وَابْنُ حُجْرٍ قَالُوا حَدَّثَنَا إِسْمَعِيلُ هُوَ ابْنُ جَعْفَرٍ عَنْ الْعَلَاءِ عَنْ أَبِيهِ عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ أَنَّ رَسُولَ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ قَالَ إِذَا مَاتَ الْإِنْسَانُ انْقَطَعَ عَنْهُ عَمَلُهُ إِلَّا مِنْ ثَلَاثَةٍ إِلَّا مِنْ صَدَقَةٍ جَارِيَةٍ أَوْ عِلْمٍ يُنْتَفَعُ بِهِ أَوْ وَلَدٍ صَالِحٍ يَدْعُو لَهُ

Artinya: ”Yahya bin Ayyub dan Qutaibah yaitu Ibnu Sa’id -dan Ibnu Hujr mereka berkata; telah menceritakan kepada kami Isma’il yaitu Ibnu Ja’far- dari Al’Ala’ dari Ayahnya dari Abu Hurairah, bahwa Rasulullah shallallahu ’alaihi wasallam bersabda: ”Jika seorang manusia meninggal dunia, maka terputuslah darinya semua amalnya kecuali dari tiga hal; dari sedekah jariyah, ilmu yang bermanfaat dan anak shalih yang mendoakannya.”” (HR. Muslim no. 3084)

Pada hadis tersebut, ketika manusia meninggal dunia maka semua amalnya akan terputus kecuali tiga hal yaitu sedekah jariah, ilmu yang dapat bermanfaat dan anak shalih yang mendoakan. Itu membuat hadis ini menunjukkan betapa pentingnya menunut ilmu dalam Islam. Dari ayat dan hadis di atas dapat diketahui jika menuntut ilmu merupakan suatu perbuatan yang mulia. Dan perbuatan ini dapat menjadi lebih mulia, jika mampu membagikan ilmu yang didapat, seperti yang dijelaskan pada kaidah berikut yang berbunyi:

اَلْمُتَعَدِّي أَفْضَلُ مِنَ الْقَاصِرِ

Artinya: ”Perbuatan yang mencakup orang lain, lebih utama daripada yang hanya terbatas untuk kepentingan sendiri.”

Dari kaidah di atas dijelaskan bahwa suatu perbuatan yang dapat menghasilkan kemanfaatan yang dapat mencakup orang lain, lebih diutamakan dari pada perbuatan yang manfaatnya hanya dapat dinikmati oleh diri sendiri. Salah satu perbuatan yang dimaksud dapat berupa menuntut ilmu yang memang merupakan kegiatan yang mulia, namun akan lebih mulia lagi jka ilmu yang telah diperoleh dibagikan kepada orang lain. Sehingga ilmu yang didapat tidak hanya bermanfaat untuk diri sendiri namun juga akan dapat dimanfaatkan oleh orang lain. Ilmu yang dimaksud disini tidak terbatas pada ilmu agama saja, namun berlaku untuk semua ilmu yang bermanfaat termasuk ilmu matematika.

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang mendasari cabang ilmu pengetahuan yang lain dan selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks. Hal ini disebabkan oleh kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi, serta matematika merupakan bahasa proses, teori dan aplikasi ilmu yang memberikan suatu bentuk dan kemanfaatan. Matematika adalah salah satu ilmu pasti yang mempelajari abstraksi ruang, waktu dan angka. Matematika juga mendekskripsikan realitas alam semesta dalam bahasa lambang, sehingga suatu permasalahan dalam realitas akan lebih mudah dipahami. Konsep dari disiplin ilmu matematika yang ada pada al-Qur'an diantaranya adalah bidang aljabar, matematika terapan, logika, analisis, statistik, dan lain-lain (Aziz dan Andussyakir , 2006).

Aljabar merupakan salah satu cabang ilmu yang terdapat di matematika. Aljabar diperkenalkan pertama kali oleh cendekiawan muslim yang bernama al-Khawarizmi. Al-Khawarizmi yang bernama lengkap Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khawarizmi dilahirkan di kota Baghdad, Iraq. Al-Khawarizmi adalah salah seorang ilmuwan Timur Tengah yang sangat populer. Beliau terkenal berkat karyanya: *Hisab al-Jabr wa'I Muqabalah*, Isi dari karya beliau tersebut adalah solusi analitis tentang persamaan linear dan kuadrat. Hal inilah yang mendasari beliau disebut sebagai pendiri ilmu aljabar, yaitu suatu ilmu yang mengajarkan bagaimana cara menyatakan suatu jumlah yang belum diketahui kuantitasnya.

Aljabar masih terbagi lagi menjadi beberapa cabang ilmu, satu di antaranya adalah aljabar abstrak. Salah satu yang dapat dipelajari di aljabar abstrak ada himpunan. Himpunan adalah sekumpulan objek yang terdefinisi dengan jelas dan memiliki karakteristik sama. Sekumpulan objek tersebut disebut sebagai anggota dari himpunan(Bhattacharya dkk. , 1995).

Dalam aljabar abstrak tidak hanya mempelajari himpunan, namun juga beberapa jenis aljabar. Salah satunya adalah BCI-aljabar dan BCK-aljabar. BCI-aljabar dan BCK-aljabar pertama kali diperkenalkan oleh Y. Imai dan K. Iseki. Dalam karya mereka dikatakan bahwa di mana BCI-Aljabar merupakan perumuman dari BCK-aljabar. (Neggers dan Kim , 2002). BCI-aljabar merupakan sistem aljabar $(X;*,0)$ yang memenuhi beberapa aksioma yaitu (1) $(e*g)*(e*m)*(m*g)=0$,

(2) $e*(e*g)*g=0$, (3) $e*e=0$ dan (4) $e*g=0$ dan $g*e=0$ menunjukkan $e=g$, untuk setiap $e,g,m \in X$ (Iseki , 1980). BCI-aljabar dapat dikatakan sebagai BCK-aljabar jika untuk setiap $e \in X$ memenuhi $0*e=0$ (Iseki dan Tanaka , 1978). Namun jika pada BCI-aljabar berlaku $0*(0*e)=e$ untuk setiap $e \in X$, maka BCI-aljabar tersebut disebut dengan *p-semisimple* BCI-Aljabar (Saeid, 2010).

Di lain pihak dalam aljabar terdapat sifat komutatif, sifat komutatif tersebut juga dapat dibawa pada BCI-aljabar dan BCK-aljabar. Meskipun BCI-aljabar merupakan perumuman dari BCK-aljabar, ternyata sifat komutuatif keduanya berbeda. Pada BCK-aljabar X didefinisikan komutatif jika $e*(e*g)=g*(g*e)$ untuk setiap $e,g \in X$, lebih lanjut penyebutan BCK-aljabar komutatif disingkat menjadi cBCK-aljabar (Jun , 2008). Sementara untuk BCI-aljabar X dikatakan komutatif jika $e*g=0$ berakibat $e=g*(g*e)$ untuk setiap $e.g \in X$ (Meng , 1990).

Pengkajian teori terkait BCI-aljabar tidak hanya terbatas pada BCI-aljabar komutatif. J. Neggers dan H. S. Kim memperkenalkan B-aljabar pada tulisan mereka yang berjudul "*On B-algebras*". Dapat dikatakan B-aljabar merupakan konsep perumuman dari BCI-aljabar. J. Neggers dan H.S Kim pada tulisan mereka didefinisikan B-aljabar adalah himpunan tak kosong X yang dilengkapi dengan suatu operasi biner "*" , ditulis $(X;*,0)$ yang memenuhi beberapa aksioma yaitu (1)$e*e=0$, (2)$e*0=e$ dan (3) $(e*g)*m=e*(m*(0*g))$ untuk setiap $e,g,m \in X$ (Neggers dan Kim , 2002) . Karena pada struktur BCI-aljabar didefinisi sifat komutatif, maka B-aljabar didefinisi komutatif jika untuk setiap $e,g,m \in X$ berlaku $e*(0*g)=g*(0*e)$. Lebih lanjut B-aljabar komutatif juga biasa disebut dengan 0-komutatif B-aljabar.

Dari pemaparan diketahui, pada struktur 0-komutatif B-aljabar, mensyaratkan bahwa adanya konstanta 0 dioperasikan dengan sebarang elemen di B-aljabar X.

Kondisi ini analog dengan konsep pada *p-semisimple* BCI-aljabar. Sehingga muncul pertanyaan mengenai sifat antara 0-komutatif B-aljabar dengan *p-semisimple* BCI-aljabar. Namun sebelum mengkaji sifat antara 0-komutatif B-aljabar dengan *p-semisimple* BCI-aljabar, perlu dikaji sifat 0-komutatif B-aljabar terlebih dahulu. Sehingga maka dari itu akan dikaji sifat di antara keduanya dalam penelitian ini menggunakan aksioma yang ada pada 0-komutatif B-aljabar dan *p-semisimple* BCI-aljabar.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang sebelumnya, maka rumusan masalah untuk penelitian ini adalah

1. Bagaimana sifat yang terdapat pada 0-komutatif B-aljabar?
2. Bagaimana sifat antara 0-komutatif B-aljabar dengan *p-semisimple* BCI-aljabar?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas didapat tujuan penelitian ini adalah

1. Untuk mengetahui sifat yang terdapat pada 0-komutatif B-aljabar.
2. Untuk mengetahui sifat antara 0-komutatif B-aljabar dengan *p-semisimple* BCI-aljabar.

1.4. Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan beberapa manfaat sebagai berikut:

1. Untuk Penulis

Menambah pengetahuan dan keilmuan mengenai bidang ilmu matematika khususnya analisis aljabar yang bekaitan dengan sifat antara 0-komutatif B-aljabar dengan *p-semisimple* BCI-aljabar.

2. Untuk Universitas

   Untuk Universitas Islam Negeri Sunan Ampel Surabaya, penelitian ini dapat menambah koleksi bahan pustaka yang bermanfaat bagi mahasiswa Universitas Sunan Ampel Surabaya khususnya mahasiswa Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi.

1.5. Sistematika Penulisan

Pada peneltian ini akan dibagi menjadi empat bagian yang masing-masing diuaraikan sebagai berikut:

1. **BAB I PENDAHULUAN**

   Bab ini berisi tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

2. **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

   Bab ini berisi tentang definisi dari BCI-aljabar, *p-semisimple* BCI-aljabar dan B-aljabar.

3. **BAB III METODE PENELITIAN**

   Bab ini berisi mengenai penjelasan mengeai metode penelitian baik dari segi materi dan waktu pengerjaannya.

4. **BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN**

   Bab ini memaparkan tentang penjelasan hasil dan pembahasan mengenai sifat yang terdapat pada 0-komutatif B-aljabar dan sifat antara *p-semisimple* BCI-aljabar dengan 0-komutatif B-aljabar.

5. BAB V PENUTUP

Bab ini berisi tentang simpulan dan saran dari hasil penelitian yang telah diperoleh.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab ini akan dijelaskan mengenai definisi, contoh dan sifat-sifat dari BCI-aljabar, *p-semisimple* BCI-aljabar B-aljabar.

2.1. BCI-aljabar

Berikut diberikan definisi, contoh dan sifat dari BCI-aljabar.

Definisi 2.1.1 *(Iseki , 1980)BCI-aljabar merupakan sistem aljabar* $(X;*,0)$ *yang memenuhi beberapa aksioma berikut untuk setiap* $e, g, m \in X$*:*

(BCI-1) $(e * g) * (e * m) * (m * g) = 0$*;*

(BCI-2) $(e * (e * g)) * g = 0$*;*

(BCI-3) $e * e = 0$*;*

(BCI-4) $e * g = 0$ *dan* $g * e = 0$ *maka* $e = g$*.*

Contoh 2.1.2 Diberikan himpunan $X = \{0, 1, a\}$.dengan operasi $*$ yang didefinisikan pada tabel berikut:

Tabel 2.1 Tabel Cayley Himpunan X Terhadap Operasi Biner *

*	0	1	a
0	0	0	a
1	1	0	a
a	a	a	0

Himpunan X termasuk BCI-aljabar karena X memenuhi semua aksioma dari BCI-aljabar, dengan pembuktian lengkapnya dapat dilihat pada Lampiran A.

Contoh 2.1.3 Misal X_p adalah himpunan tak kosong, di mana $X_p = \{0, p, q\}$.dengan operasi $*$ yang didefinisikan pada tabel berikut:

Tabel 2.2 Tabel Cayley Himpunan X_p Terhadap Operasi Biner *

*	0	p	q
0	0	q	p
p	p	0	q
q	q	p	0

Himpunan X_p termasuk dalam BCI-aljabar karena X_p memenuhi semua aksioma dari BCI-aljabar, dengan pembuktian lengkapnya dapat dilihat pada Lampiran B.

Selain dari aksioma pada BCI-aljabar, BCI-aljabar juga memiliki beberapa sifat tertentu di luar aksioma yang dapat digunakan untuk membantu dalam membuktikan beberapa teorema yang masih terkait dengan BCI-aljabar.

Teorema 2.1.4 *(Yang dan Ahn , 2014) Jika X adalah BCI-aljabar maka untuk setiap $e \in X$ berlaku:*

1. $e * 0 = e$;
2. $e * 0 = 0 \rightarrow e = 0$.

Bukti.

1. Akan ditunjukkan $e * 0 = e$ berlaku untuk setiap $g \in X$.

   Dengan memperhatikan Definisi 2.1.1 BCI-4 kondisi ini analog dengan menunjukkan:

a. $(e * 0) * e = 0.$

b. $e * (e * 0) = 0.$

Ambil sebarang $e \in X$. Diperhatikan:

a. Berdasarkan definisi BCI-3 diperoleh:

$(e * 0) * e$ = $(e * (e * e)) * e$ [Definisi 2.1.1 (BCI-2)]

= 0

b. Berdasarkan Definisi 2.1.1 BCI-4, kondisi $e*(e*0) = 0$ analog dengan $(e * (e * 0)) * 0 = 0$ dan $0 * (e * (e * 0)) = 0$.

i. Berdasarkan Definisi 2.1.1 BCI-2, jelas bahwa $e * (e * 0) * 0 = 0$.

ii. Berdasarkan Definisi 2.1.1 BCI-2 diperoleh:

$0 * e * (e * 0)$ = $e * (e * 0) * 0 * e * (e * 0)$ [Definisi 2.1.1 BCI-3]

= $e * (e * 0) * (e * e) * e * (e * 0)$ [Definisi 2.1.1 BCI-1]

= 0

Karena $(e * 0) * e = 0$ dan $e * (e * 0) = 0$, sehingga terbukti $e * 0 = e$ berlaku untuk setiap $e \in X$.

2. Akan ditunjukkan $e * 0 = 0 \to e = 0$ berlaku untuk setiap $e \in X$.

Diketahui $e * 0 = 0$

Ambil sebarang $e \in X$. Diperhatikan, berdasarkan diketahui diperoleh:

$0 * e$ = $(e * 0) * e$ [Definisi 2.1.1 BCI-3]

= $(e * (e * e)) * e$ [Definisi 2.1.1 BCI-2]

= 0

Karena $e * 0 = 0$ dan $0 * e = 0$, sehingga terbukti $e * 0 = 0 \to e = 0$ berlaku untuk setiap $e \in X$.

■

Definisi 2.1.5 *(Jun , 2001) Pada BCI-aljabar X didefinisikan suatu relasi terurut parsial, yaitu $\leq$. Di mana untuk setiap $e \leq g$ jika dan hanya jika $e * g = 0$, untuk sebarang $e, g \in X$.*

Teorema 2.1.6 *(Saeid, 2010) Diberikan BCI-aljabar $(X; *, 0)$. Maka himpunan $(X, \leq)$ merupakan partially ordered set.*

Bukti. Akan ditunjukkan $(X, \leq)$ memenuhi aksioma reflektif, antisimetris dan transitif.

1. Ambil sebarang $e \in X$. Akan ditunjukkan $(X, \leq)$ bersifat reflektif yaitu $e \leq e$ untuk setiap $e \in X$. Diperhatikan berdasarkan Definisi 2.1.1 BCI-3 diperoleh $e * e = 0$ yang berarti $e \leq e$ berdasarkan Definisi 2.1.5. Sehingga terbukti $(X, \leq)$ bersifat reflektif.

2. Ambil sebarang $e, g \in X$. Akan ditunjukkan $(X, \leq)$ bersifat antisimetris yaitu jika $e \leq g$ dan $g \leq e$ maka $e = g$ untuk setiap $e, g, m \in X$. Diperhatikan berdasarkan Definisi 2.1.5 diperoleh:

   $e \leq g$

   $$e * g = 0 \tag{2.1}$$

   $g \leq e$

   $$g * e = 0 \tag{2.2}$$

   Berdasarkan Definisi 2.1.1 BCI-4 dari Persamaan 2.1 dan 2.2 dapat disimpulkan $e = g$. Sehingga terbukti $(X, \leq)$ bersifat anti-simetris.

3. Ambil sebarang $e, g, m \in X$. Akan ditunjukkan $(X, \leq)$ bersifat transitif yaitu jika $e \leq g$ dan $g \leq m$, maka $e \leq m$. Jika dimisalkan $e \leq g$ maka berdasarkan

Definisi 2.1.5 diperoleh:

$$e * g = 0 \tag{2.3}$$

dan $g \leq m$ maka diperoleh:

$$g * m = 0 \tag{2.4}$$

Akan ditunjukkan jika $e \leq g$ dan $g \leq m$, maka $e \leq m.$ Karena akan ditunjukkan $e \leq m$ artinya $e * m = 0.$ Diperhatikan berdasarkan Teorema 2.1.4 poin 1 diperoleh:

$e * m$	$= (e * m) * 0$	[Teorema 2.1.4 poin 1]
	$= ((e * m) * 0) * 0$	[Substitusi Persamaan 2.3 dan 2.4]
	$= ((e * m) * (e * g)) * (g * m)$	[Definisi 2.1.1 (BCI-4)]
	$= 0$	

Sehingga terbukti $(X, \leq)$ bersifat transitif.

Karena $(X, \leq)$ memenuhi aksioma reflektif, antisimetris dan transitif, maka terbukti $(X, \leq)$ merupakan *partially ordered set*. ■

Teorema 2.1.7 *(Yang dan Ahn , 2014) Jika X adalah BCI-aljabar maka untuk setiap $e, g, m \in X$ berlaku:*

1. $e * g = 0 \rightarrow (e * m) * (g * m) = 0$ *dan* $(m * g) * (m * e) = 0$;
2. $(e * g) * m = (g * m) * e$;
3. $(e * m) * (g * m) \leq e * g$.

Bukti.

1. Akan ditunjukkan $e * g = 0 \rightarrow (e * m) * (g * m) = 0$ dan $(m * g) * (m * e) = 0$ berlaku untuk setiap $e, g, m \in X$.

   Ambil sebarang $e, g, m \in X$.

(a) Berdasarkan Definisi 2.1.1 BCI-1 diperoleh:

$$\begin{aligned} ((e*m)*(e*g))*(g*m) &= 0 && [\text{Diketahui } e*g=0] \\ ((e*m)*0)*(g*m) &= 0 && [\text{Teorema 2.1.4 poin 1}] \\ (e*m)*(g*m) &= 0 \end{aligned}$$

(b) Berdasarkan BCI-1 diperoleh:

$$\begin{aligned} ((m*g)*(m*e))*(e*g) &= 0 && [\text{Diketahui } e*g=0] \\ ((m*g)*(m*e))*0 &= 0 && [\text{Teorema 2.1.4 poin 2}] \\ (m*g)*(m*e) &= 0 \end{aligned}$$

2. Akan ditunjukkan $(e*g)*m=(e*m)*g$ berlaku untuk setiap $e,g,m \in X$.

   Ambil sebarang $e,g,m \in X$. Berdasarkan Definisi 2.1.1 BCI-2 diperoleh:

$$\begin{aligned} (e*(e*m))*m &= 0 && [\text{Teorema 2.1.7 poin 1}] \\ ((e*g)*m)*((e*g)*(e*(e*m))) &= 0 && [\text{Definisi 2.1.5}] \end{aligned}$$

$$(e*g)*m \leq (e*g)*(e*(e*m)) \tag{2.5}$$

   Di lain pihak berdasarkan Definisi 2.1.1 BCI-1 diperoleh:

$$((e*g)*(e*(e*m)))*((e*m)*g) \quad = 0 \quad [\text{Definisi 2.1.5}]$$

$$(e*g)*(e*(e*m)) \leq (e*m)*g \tag{2.6}$$

   Karena $\leq$ merupakan relasi terurut parsial, di mana $\leq$ berlaku sifat transitif, sehingga berdasarkan Pertidaksamaan 2.5 dan 2.6 dapat diperoleh:

$$(e*g)*m \leq ((e*m)*g \tag{2.7}$$

   Lalu jika pada Pertidaksamaan 2.7, untuk g maka akan diperoleh:

$$(e*m)*g \leq (e*g)*m \tag{2.8}$$

Karena $\leq$ merupakan relasi terurut parsial, di mana $\leq$ berlaku sifat transitif, sehingga berdasarkan Pertidaksamaan 2.7 dan 2.8 dapat diperoleh kesimpulan $(e * g) * m = (e * m) * g$.

3. Akan ditunjukkan $(e*m)*(g*m) \leq e*m$ berlaku untuk setiap $e, g, m \in X$.
   Ambil sebarang $e, g, m \in X$.
   Diperhatikan berdasarkan Definisi 2.1.5 $(e * m) * (g * m) \leq e * g$ artinya $(e * m) * (g * m) * (e * g) = 0$. Lalu berdasarkan Teorema 2.1.7 poin 2, diperoleh:

$((e * m) * (g * m)) * (e * g)$	= $((e * m) * (e * g)) * (g * m)$	[Definisi 2.1.1 (BCI-1)]
	= 0	[Definisi 2.1.5]
$(e * m) * (g * m)$	$\leq (e * g)$	

■

2.2. *p-semisimple* BCI-aljabar

Berikut diberikan definisi, contoh dan sifat dari *p-semisimple* BCI-aljabar.

Definisi 2.2.1 *(Saeid, 2010) Misalkan* $(X, *, 0)$ *adalah BCI-aljabar, maka* X *p-semisimple BCI-aljabar jika* $0 * (0 * e) = e$ *untuk setiap* $e \in X$.

Contoh 2.2.2 Didefinisikan X_p termasuk dalam BCI-aljabar dengan operasi biner $*$ dengan definisi mengikuti Tabel 2.2.

Himpunan X_p termasuk *p-semisimple* BCI-aljabar sebab:

Akan ditunjukkan jika untuk setiap $e \in X_p$ maka berlaku $0 * (0 * e) = e$

- Jika $e = 0$ maka diperoleh $0 * (0 * e) = 0 * (0 * 0) = 0 * 0 = 0$.
- Jika $e = p$ maka diperoleh $0 * (0 * e) = 0 * (0 * p) = 0 * q = p$.
- Jika $e = q$ maka diperoleh $0 * (0 * e) = 0 * (0 * q) = 0 * p = q$.

Sehingga terbukti bahwa jika untuk setiap $e \in X_p$ maka berlaku $0 * (0 * e) = e$. Karena X_p memenuhi semua aksioma dari *p-semisimple* BCI-aljabar, maka terbukti bahwa X_p termasuk dalam *p-semisimple* BCI-aljabar.

Teorema 2.2.3 *Jika X adalah p-semisimple BCI-Aljabar maka berlaku $e*(0*g) = g*(0*e)$ untuk setiap $e, g \in X$.*

Bukti. Akan ditunjukkan misal X adalah *p-semisimple* BCI-Aljabar maka berlaku $e*(0*g) = g*(0*e)$ untuk setiap $e, g \in X$. Ambil sebarang $e, g \in X$, berdasarkan Definisi 2.2.1 diperoleh:

$$\begin{aligned} e*(0*g) &= (0*(0*e))*(0*g) && \text{[Teorema 2.1.7 poin 2]} \\ &= (0*(0*g))*(0*e) && \text{[Definisi 2.2.1]} \\ &= g*(0*e) \end{aligned}$$

■

Sehingga terbukti jika X adalah *p-semisimple* BCI-Aljabar maka berlaku $e * (0 * g) = g * (0 * e)$ untuk setiap $e, g \in X$.

Teorema 2.2.4 *(Aslam dan Thaheem , 1991) Diketahui $(X; *, 0)$ adalah BCI-aljabar dengan kondisi $0 * e = e$ untuk setiap $e \in X$. Maka untuk setiap $e, g, m, s \in X$ berlaku kondisi ekuivalen sebagai berikut:*

1. $(e * g) * m = e * (g * m)$;
2. $(e * g) * g = e$;
3. $(e * g) * m = (m * e) * g$;
4. $(e * g) * (m * s) = (e * m) * (g * s)$;
5. $e * (e * g) = g$;
6. *X adalah p-semisimple.*

Bukti.

$1 \to 2$

Diketahui X adalah adalah BCI-aljabar dengan kondisi $0*e = e$ untuk setiap $e \in X$, $(e*g)*m = e*(g*m)$. Akan ditunjukkan $(e*g)*g = e$. Ambil sebarang $e, g \in X$. Berdasarkan diketahui diperoleh:

$$\begin{aligned} (e*g)*g &= e*(g*g) && \text{[Definisi 2.1.1 } (BCI\text{-3})] \\ &= e*0 && \text{[Teorema 2.1.4 poin 1]} \\ &= e \end{aligned}$$

$2 \to 3$

Diketahui X adalah adalah BCI-aljabar dengan kondisi $0 * e = e$ untuk setiap $e \in X$, $(e*g)*g = e$. Akan ditunjukkan $(e*g)*m = (m*g)*e$. Ambil sebarang $e, g, m \in X$. Berdasarkan Teorema 2.1.7 poin 2 diperoleh:

$$\begin{aligned} ((e*g)*m)*((m*e)*g) &= ((e*g)*((m*e)*g))*m && \text{[Teorema 2.1.7 poin 2]} \\ &= ((e*g)*((m*e)*g))*m && \text{[Teorema 2.1.7 poin 3]} \\ &\leq (e*(m*e))*m && \text{[Diketahui } 0*e=e] \\ &= ((0*e)*(m*e))*m && \text{[Teorema 2.1.7 poin 2]} \\ &= ((0*(m*e))*e)*m && \text{[Diketahui } 0*e=e] \\ &= ((m*e)*e)*m && \text{[Teorema 2.2.4 poin 2]} \\ &= m*m && \text{[Definisi 2.1.1 } (BCI\text{-2})] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lalu disisi lain, Berdasarkan Teorema 2.1.7 poin 2 diperoleh:

$$
\begin{aligned}
((m*g)*e)*((e*g)*m) &= ((m*g)*((e*g)*m))*e && \text{[Teorema 2.1.7 poin 2]}\\
&= ((m*g)*((e*m)*g))*e && \text{[Teorema 2.1.7 poin 3]}\\
&\leq (m*(e*m))*e && \text{[Diketahui } 0*e=e\text{]}\\
&= ((0*m)*(e*m))*e && \text{[Teorema 2.1.7 poin 2]}\\
&= ((0*(e*m))*m)*e && \text{[Diketahui } 0*e=e\text{]}\\
&= ((e*m)*m)*e && \text{[Teorema 2.2.4 poin 2]}\\
&= e*e && \text{[Definisi 2.1.1 (}BCI\text{-2)]}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Karena $((e*g)*m)*((m*g)*e) = 0$ dan $((m*g)*e)*((e*g)*m) = 0$, maka berdasarkan Definisi 2.1.1 (BCI-4)] diperoleh $((e*g)*m) = ((m*g)*e)$

$3 \to 4$

Diketahui X adalah adalah BCI-aljabar dengan kondisi $0*e = e$ untuk setiap $e \in X$, $(e*g)*m = (m*g)*e$. Akan ditunjukkan $(e*g)*(m*s) = (e*m)*(g*s)$.

Ambil sebarang $e, g, m, s \in X$. Berdasarkan Teorema 2.2.4 poin 3 diperoleh:

$$
\begin{aligned}
(e*g)*(m*s) &= ((m*s)*g)*e && \text{[Teorema 2.2.4 poin 3]}\\
&= ((g*s)*m)*e && \text{[Teorema 2.2.4 poin 3]}\\
&= (e*m)*(g*s)
\end{aligned}
$$

$4 \to 5$

Diketahui X adalah adalah BCI-aljabar dengan kondisi $0*e = e$ untuk setiap $e \in X$, $(e*g)*(m*s) = (e*m)*(g*s)$. Akan ditunjukkan $e*(e*g) = g$. Ambil sebarang $e, g, m \in X$. Berdasarkan Teorema 2.1.4 poin 1 diperoleh:

$$
\begin{aligned}
e*(e*g) &= (e*0)*(e*g) && \text{[Teorema 2.2.4 poin 4]}\\
&= (e*e)*(0*g) && \text{[Definisi 2.1.1 (}BCI\text{-2)]}\\
&= 0*(0*g) && \text{[Diketahui } 0*e=e\text{]}\\
&= 0*g && \text{[Diketahui } 0*e=e\text{]}\\
&= g
\end{aligned}
$$

$5 \rightarrow 6$

Diketahui X adalah BCI-aljabar dengan kondisi $0 * e = e$ untuk setiap $e \in X$, $e*(e*g) = g$. Akan ditunjukkan X adalah *p-semisimple*. Ambil sebarang $e, g \in X$. Berdasarkan Teorema 2.2.4 poin 5 dengan mengganti $e = 0$ dan $g = e$ diperoleh $0 * (0 * e) = e$.

$6 \rightarrow 1$

Diketahui X adalah adalah BCI-aljabar dengan kondisi $0*e = e$ untuk setiap $e \in X$ dan X adalah *p-semisimple*. Akan ditunjukkan $(e * g) * m = e * (g * m)$. Ambil sebarang $e, g \in X$. Berdasarkan Diketahui diperoleh:

$$
\begin{aligned}
(e * g) * m &= (e * (0 * g)) * m && \text{[Teorema 2.2.3]} \\
&= (g * (0 * e)) * m && \text{[Diketahui } 0 * e = e\text{]} \\
&= (g * e) * m && \text{[Teorema 2.1.7 poin 2]} \\
&= (g * m) * e && \text{[Diketahui } 0 * e = e\text{]} \\
&= (g * m) * (0 * e) && \text{[Teorema 2.2.3]} \\
&= e * (0 * (g * m)) && \text{[Diketahui } 0 * e = e\text{]} \\
&= e * (g * m)
\end{aligned}
$$

Karena semua pembuktian di atas berhasil dibuktikan, maka Teorema 2.2.4 terbukti ekuivalen. ■

2.3. B-aljabar

Berikut diberikan definisi, contoh dan sifat dari B-aljabar.

Definisi 2.3.1 *(Neggers dan Kim , 2002) B-aljabar adalah himpunan tak kosong X yang dilengkapi dengan suatu operasi biner "*" , ditulis $(X; *, 0)$ yang memenuhi beberapa aksioma berikut untuk setiap $e, g, m \in X$:*

(B1) $e * e = 0$;

(B2) $e * 0 = e$;

(B3) $(e * g) * m = e * (m * (0 * g))$.

Contoh 2.3.2 Diberikan $X_k = \{0, a, b\}$.dengan operasi $*$ yang didefinisikan pada tabel berikut:

Tabel 2.3 Tabel Cayley Himpunan X_k Terhadap Operasi Biner *

*	0	a	b
0	0	b	a
a	a	0	b
b	b	a	0

Himpunan X_k termasuk B-aljabar sebab:

1. Akan ditunjukkan untuk setiap $e \in X_k$ berlaku $e * e = 0$.
   - Jika $e = 0$, maka diperoleh $0 * 0 = 0$.
   - Jika $e = a$, maka diperoleh $a * a = 0$.
   - Jika $e = b$, maka diperoleh $b * b = 0$.

   Sehingga terbukti untuk setiap $e \in X_k$ berlaku $e * e = 0$.

2. Akan ditunjukkan untuk setiap $e \in X_k$ berlaku $e * 0 = e$.
   - Jika $e = 0$, maka diperoleh $0 * 0 = 0$.
   - Jika $e = a$, maka diperoleh $a * 0 = a$.
   - Jika $e = b$, maka diperoleh $b * 0 = b$.

   Sehingga terbukti untuk setiap $e \in X_k$ berlaku $e * 0 = e$.

3. Akan ditunjukkan untuk setiap $e, g, m \in X_k$ berlaku $(e * g) * m = e * (m * (0 * g))$.

- Misalkan $e = 0, g = 0, m = 0$. Diperoleh

  $(0 * 0) * 0 = 0 * (0 * (0 * 0)) = 0.$

Kondisi ini juga berlaku untuk setiap $e, g, m \in X_k$. Sehingga terbukti untuk setiap $e, g, m \in X_k$ berlaku $(e * g) * m = e * (m * (0 * g))$.

Karena semua aksioma bada B-aljabar terpenuhi, sehingga terbukti bahwa $(X_k, *, 0)$ merupakan B-aljabar.

Contoh 2.3.3 Diberikan $X_b = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.dengan operasi $*$ yang didefinisikan pada tabel berikut:

Tabel 2.4 Tabel Cayley Himpunan X_b Terhadap Operasi Biner *

*	0	1	2	3	4	5
0	0	2	1	3	4	5
1	1	0	2	4	5	3
2	2	1	0	5	3	4
3	3	4	5	0	2	1
4	4	5	3	1	0	2
5	5	3	4	2	1	0

Himpunan X_b termasuk B-aljabar sebab:

1. Akan ditunjukkan untuk setiap $e \in X_b$ berlaku $e * e = 0$.
   - Jika $e = 0$, maka diperoleh $0 * 0 = 0$.
   - Jika $e = 1$, maka diperoleh $1 * 1 = 0$.
   - Jika $e = 2$, maka diperoleh $2 * 2 = 0$.

- Jika $e = 3$, maka diperoleh $3 * 3 = 0$.
- Jika $e = 4$, maka diperoleh $4 * 4 = 0$.
- Jika $e = 5$, maka diperoleh $5 * 5 = 0$.

Sehingga terbukti untuk setiap $e \in X_b$ berlaku $e * e = 0$.

2. Akan ditunjukkan untuk setiap $e \in X_b$ berlaku $e * 0 = e$.
   - Jika $e = 0$, maka diperoleh $0 * 0 = 0$.
   - Jika $e = 1$, maka diperoleh $1 * 0 = 1$.
   - Jika $e = 2$, maka diperoleh $2 * 0 = 2$.
   - Jika $e = 3$, maka diperoleh $3 * 0 = 3$.
   - Jika $e = 4$, maka diperoleh $4 * 0 = 4$.
   - Jika $e = 5$, maka diperoleh $5 * 0 = 5$.

   Sehingga terbukti untuk setiap $e \in X_b$ berlaku $e * 0 = e$.

3. Akan ditunjukkan untuk setiap $e, g, m \in X_b$ berlaku $(e * g) * m = e * (m * (0 * g))$.
   - Misalkan $e = 0, g = 0, m = 0$. Diperoleh

     $(0 * 0) * 0 = 0 * (0 * (0 * 0)) = 0$.

   Kondisi ini juga berlaku untuk setiap $e, g, m \in X_b$. Sehingga terbukti untuk setiap $e, g, m \in X_b$ berlaku $(e * g) * m = e * (m * (0 * g))$.

Karena semua aksioma bada B-aljabar terpenuhi, sehingga terbukti bahwa $(X_b, *, 0)$ merupakan B-aljabar.

Contoh 2.3.4 Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi dengan operasi pengurangan bilangan '$-$'.Himpunan ($\mathbb{Z}$,-,0) merupakan B-aljabar sebab:

1. Akan ditunjukkan untuk setiap $e \in \mathbb{Z}$ berlaku $e - e = 0$.

   Ambil sebarang $e = 1$, maka diperoleh $e - e = 1 - 1 = 0$.

   Kondisi ini juga berlaku untuk setiap $e \in \mathbb{Z}$.

2. Akan ditunjukkan untuk setiap $e \in \mathbb{Z}$ berlaku $e - 0 = e$.

   Ambil sebarang $e = 1$, maka diperoleh $e - 0 = 1 - 0 = 1$.

   Kondisi ini juga berlaku untuk setiap $e \in \mathbb{Z}$.

3. Akan ditunjukkan untuk setiap $e, g, m \in \mathbb{Z}$ berlaku $(e - g) - m = e - (m - (0 - g))$.

   Ambil sebarang $e = 3, g = 2$ dan $m = 1$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}(e-g)-m &= (3-2)-1\\ &= 1-1\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e-(m-(0-g)) &= 3-(1-(0-2))\\ &= 3-(1-(-2))\\ &= 3-3\\ &= 0\end{aligned}$$

   Kondisi ini juga berlaku untuk setiap $e, g, m \in \mathbb{Z}$.

Karena semua aksioma bada B-aljabar terpenuhi, maka terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, -, 0)$ merupakan B-aljabar.

Teorema 2.3.5 *(Neggers dan Kim , 2002)* $(X; *, 0)$ *adalah B-aljabar jika dan hanya jika untuk setiap* $e, g, m \in X$ *berlaku:*

(B1) $e * e = 0$;

(C2) $0 * (0 * e) = e$;

(C3) $(e * m) * (g * m) = e * g$.

Bukti.

($\Rightarrow$) Diketahui $(X; *, 0)$ adalah B-aljabar, akan ditunjukkan untuk setiap $e, g, m \in X$ berlaku:

(B1) $e * e = 0$;

(C2) $0 * (0 * e) = e$;

(C3) $(e * m) * (g * m) = e * g$.

(a) Akan ditunjukkan untuk setiap $e \in X$ berlaku $e*e = 0$. Ambil sebarang $e \in X$.

Berdasarkan Definisi 2.3.1 (B1) jelas untuk setiap $e \in X$ berlaku $e*e = 0$. sebab $e \in X$ dan X adalah B-aljabar.

(b) Akan ditunjukkan untuk setiap $e \in X$ berlaku $0 * (0 * e) = e$. Ambil sebarang $e \in X$. Diperhatikan berdasarkan Definisi 2.3.1 (B1) diperoleh:

$$\begin{aligned} 0 * (0 * e) &= (e * e) * (0 * e) && \text{[Definisi 2.3.1 (B3)]} \\ &= e * ((0 * e) * (0 * e)) && \text{[Definisi 2.3.1 (B1)]} \\ &= e * 0 && \text{[Definisi 2.3.1 (B2)]} \\ &= e \end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa berlaku $0 * (0 * e) = e$ untuk setiap $e \in X$

(c) Akan ditunjukkan untuk setiap $e, g, m \in X$ berlaku $(e * m) * (g * m) = e * g$. Ambil sebarang $e, g, m \in X$. Diperhatikan berdasarkan Definisi 2.3.1 (B3) diperoleh:

$$\begin{aligned} (e * m) * (g * m) &= e * ((g * m) * (0 * m)) && \text{[Definisi 2.3.1 (B3)]} \\ &= e * (g * ((0 * m) * (0 * m))) && \text{[Definisi 2.3.1 (B1)]} \\ &= e * (g * 0) && \text{[Definisi 2.3.1 (B2)]} \\ &= e * g \end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa untuk setiap $e, g, m \in X$ berlaku $(e * m) * (g * m) = e * g$.

($\Leftarrow$) Diketahui untuk setiap $e, g, m \in X$ struktur aljabar X yang memenuhi:

(B1) $e * e = 0$;

(C2) $0 * (0 * e) = e$;

(C3) $(e * m) * (g * m) = e * g$;

akan ditunjukkan X termasuk B-aljabar.

(a) Akan ditunjukkan untuk setiap $e \in X$ berlaku $e*e = 0$. Ambil sebarang $e \in X$.

Aksioma ini ekuivalen dengan aksioma B-aljabar pada Definisi 2.3.1 (B1).

Sehingga terbukti bahwa untuk setiap $e \in X$ berlaku $e * e = 0$.

(b) Akan ditunjukkan untuk setiap $e, g, m \in X$ berlaku $e * 0 = e$. Ambil sebarang $e \in X$. Diperhatikan berdasarkan Teorema 2.3.5 (C2) diperoleh:

$$\begin{aligned} e &= 0 * (0 * e) && \text{[Teorema 2.3.5 (B1)]} \\ &= (e * e) * (0 * e) && \text{[Teorema 2.3.5 (C3)]} \\ &= e * 0 \end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa untuk setiap $e \in X$ berlaku $e * 0 = e$.

(c) Akan ditunjukkan untuk setiap $e, g, m \in X$ berlaku $(e * g) * m = e * (m * (0 * g))$. Ambil sebarang $e, g, m \in X$. Diperhatikan berdasarkan (B2) diperoleh:

$$\begin{aligned} (e * g) * m &= (e * g) * (m * 0) && \text{[Teorema 2.3.5 (B1)]} \\ &= (e * g) * (m * g * g) && \text{[Teorema 2.3.5 (C3)]} \\ &= e * (m * g) && \text{[Teorema 2.3.5 (C2)]} \\ &= e * (m * (0 * (0 * g))) && \text{[Definisi 2.3.1 (B2)]} \\ &= e * (m * (0 * g)) \end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa untuk setiap $e, g, m \in X$ berlaku $(e * g) * m = e * (m * (0 * g))$.

■

Proposisi 2.3.6 *(Neggers dan Kim , 2002) Jika* $(X;*,0)$ *adalah B-aljabar maka untuk setiap* $e,g,m \in X$ *berlaku:*

1. $(e*g)*(0*g)=e$;
2. $e*(g*m)=(e*(0*m))*g$;
3. $e*g=0$ *maka* $e=g$.

Bukti.

1. Akan ditunjukkan untuk setiap $e,g \in X$ berlaku $(e*g)*(0*g)=e$.Ambil sebarang $e,g \in X$. Berdasarkan Definisi 2.3.1 (B3) diperoleh:

$$\begin{aligned} (e*g)*(0*g) &= e*((0*g)*(0*g)) && \text{[Definisi 2.3.1 (B1)]} \\ &= e*0 && \text{[Definisi 2.3.1 (B2)]} \\ &= e \end{aligned}$$

   Sehingga terbukti bahwa berlaku $(e*g)*(0*g)=e$ untuk setiap $e,g \in X$.

2. Akan ditunjukkan untuk setiap $e,g,m \in X$ berlaku $b*(c*d)=(b*(0*d))*c$.Ambil sebarang $e,g,m \in X$. Berdasarkan Definisi 2.3.1(B3) diperoleh:

$$\begin{aligned} (e*(0*m))*g &= e*(g*(0*(0*m))) && \text{[Teorema 2.3.5 (C2)]} \\ &= e*(g*m) \end{aligned}$$

   Sehingga terbukti bahwa berlaku $e*(g*m)=(e*(0*m))*g$ untuk setiap $e,g,m \in X$.

3. Akan ditunjukkan untuk setiap $e,g \in X$ berlaku $e*g=0$ menunjukkan $e=g$. Ambil sebarang $e,g \in X$.

$$\begin{aligned}
e * g &= 0 && \text{[Definisi 2.3.1 (B1)]}\\
e * g &= g * g && \text{[Teorema 2.3.5 (C3)]}\\
(e * g) * (0 * g) &= (g * g) * (0 * g) && \text{[(Proposisi 2.3.6 poin 1)]}\\
e &= g
\end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa berlaku $e * g = 0$ menunjukkan $e = g$ untuk setiap $e, g \in X$.

■

Lemma 2.3.7 *(Neggers dan Kim , 2002) Jika* $(X; *, 0)$ *adalah B-aljabar maka untuk setiap* $e, g \in X$ *berlaku* $0 * (e * g) = g * e$ *untuk setiap* $e, g \in X$.

Bukti. Akan ditunjukkan untuk setiap $e, g, m \in X$ berlaku $0 * (e * g) = g * e$. Ambil sebarang $e, g \in X$. Berdasarkan Proposisi 2.3.6 poin 2 diperoleh:

$$\begin{aligned}
0 * (e * g) &= (0 * (0 * g)) * e && \text{[Teorema 2.3.5 (C2)]}\\
&= g * e
\end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa berlaku $0 * (e * g) = g * e$ untuk setiap $e, g \in X$. ■

2.4. Integrasi Keilmuan

Ilmu matematika adalah ilmu yang sering disebut sebagai *mother of science* (induk dari pengetahuan). Hal ini dikarenakan banyak cabang ilmu matematika yang berkaitan dengan matematika demi memudahkan dalam mempelajari cabang ilmu tersebut. Ilmu matematika sendiri merupakan ilmu yang mengkaji tentang cara berhitung atau mengukur sesuatu dengan angka, simbol atau jumlah (Aziz dan Andussyakir , 2006). Adanya ilmu matematika telah ditunjukkan Allah Swt. kepada manusia melalui salah satu firmannya dalam Q.S. Al-Furqon ayat 2 yaitu:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا

Artinya:"Yang memiliki kerajaan langit dan bumi, tidak mempunyai anak, tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan(-Nya), dan Dia menciptakan segala sesuatu, lalu menetapkan ukuran-ukurannya dengan tepat."

Pada ayat di atas dijelaskan bahwa ketika Allah Swt. menciptakan segala sesuatu, Allah Swt. menggunakan tetapan ukuran-ukuran dengan serapi mungkin. Ukuran yang digunakan menunjukkan adanya ilmu matematika. Selain itu dalam al-Qur'an juga memberikan motivasi untuk mempelajari ilmu matematika seperti yang tertera dalam Q.S. Yunus ayat 5 berikut:

هُوَ ٱلَّذِى جَعَلَ ٱلشَّمْسَ ضِيَآءً وَٱلْقَمَرَ نُورًا وَقَدَّرَهُۥ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا۟ عَدَدَ ٱلسِّنِينَ وَٱلْحِسَابَ ۚ مَا خَلَقَ ٱللَّهُ ذَٰلِكَ إِلَّا بِٱلْحَقِّ ۚ يُفَصِّلُ ٱلْءَايَٰتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ

Artinya: "Dialah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya dan ditetapkan-Nya manzilah-manzilah (tempat-tempat) bagi perjalanan bulan itu, supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu). Allah tidak menciptakan yang demikian itu melainkan dengan hak. Dia menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya) kepada orang-orang yang mengetahui."

Pada ayat tersebut, dikatakan bahwa Allah Swt. memberikan motivasi kepada manusia untuk mengetahui atau lebih tepatnya mempelajari bilangan dan perhitungan yang di mana akan didapatkan ketika mempelajari ilmu matematika.

Pada ilmu matematika masih terbagi beberapa cabang ilmu lagi salah satunya adalah ilmu aljabar. Penemu aljabar adalah Abu Abdullah Muhammad Ibn

Musa Al-Khawarizmi. Aljabar yang berasal dari bahasa Arab ”al-jabr” berarti ”pertemuan”, ”hubungan”, atau ”perampungan” adalah cabang matematika yang dapat dicirikan sebagai generalisasi dari bidang aritmatika. Beliau terkenal berkat karya beliau: *Hisab al-Jabr wa’I Muqabalah*, yaitu sebuah karya di bidang Matematika yang memaparkan cara termudah dan paling bermanfaat dari bentuk aritmatika. Di dalam karya beliau tersebut, beliau juga memaparkan mengenai dasar-dasar penggunaan al-Jabr dan sekaligus mempopulerkan istilah tersebut yang sekarang berubah menjadi aljabar. Dalam buku beliau yang lain Al-Khawarizmi memperkenalkan kepada dunia ilmu pengetahuan angka 0 (nol) yang dalam bahasa arab disebut *sifr*. Atas karya beliau yang populer tersebut, oleh dunia ilmu pengetahuan, beliau akhirnya diberi gelar “Bapak Aljabar”. Buku pertamanya, al-Jabar, adalah buku pertama yang membahas solusi sistematik dari linear dan notasi kuadrat. Sehingga beliau disebut sebagai Bapak Aljabar (Nasution , 2015).

Jika matematika merupakan induk dari ilmu pengetahuan, maka aljabar dapat dikatakan merupakan induk dari ilmu matematika. Ini dikarenakan ilmu aljabar mempelajari bilangan dan operasi bilangan itu sendiri serta himpunan, yang dimana bilangan merupakan dasar dari ilmu matematika. Ada beberapa ayat al-Qur’an yang memberi contoh mengenai operasi bilangan misalnya yang tertera pada Q.S. Al-Qashas ayat 27 sebagai berikut:

قَالَ إِنِّيٓ أُرِيدُ أَنْ أُنكِحَكَ إِحْدَى ٱبْنَتَيَّ هَٰتَيْنِ عَلَىٰٓ أَن تَأْجُرَنِي ثَمَٰنِيَ حِجَجٍۖ فَإِنْ أَتْمَمْتَ
عَشْرًا فَمِنْ عِندِكَۖ وَمَآ أُرِيدُ أَنْ أَشُقَّ عَلَيْكَۚ سَتَجِدُنِيٓ إِن شَآءَ ٱللَّهُ مِنَ ٱلصَّٰلِحِينَ

Artinya: ”Berkatalah dia (Syu’aib): ”Sesungguhnya aku bermaksud menikahkan kamu dengan salah seorang dari kedua anakku ini, atas dasar bahwa kamu bekerja denganku delapan tahun dan jika kamu cukupkan sepuluh tahun maka itu adalah (suatu kebaikan) dari kamu, maka aku tidak hendak memberati kamu. Dan kamu Insya Allah akan mendapatiku termasuk orang-orang yang baik.""

Ayat tersebut merupakan kalimat Nabi Syu'aib As. kepada Nabi Musa As. Pada ayat di atas terdapat kalimat "atas dasar bahwa kamu bekerja denganku delapan tahun dan jika kamu cukupkan sepuluh tahun maka itu" yang mengandung operasi pengurangan secara tersirat. Jika diperhatikan kalimat tersebut, maka dapat dikatan 8 (tahun) adalah bilangan yang akan ditambahkan dengan suatu bilangan yang lain sehingga memberikan bilangan hasil 10(tahun). Jika suatu bilangan yang akan ditambahkan dimisalkan e maka e akan didapat dari hasil pengurangan 10 tahun dengan 8 tahun yang sama dengan 2 tahun atau dapat dinotasikan sebagai berikut:

$8 + e = 10 \Rightarrow e = 10 - 8 = 2$

Jadi, dari ayat tersebut dapat disimpulkan 2 tahun adalah lama waktu bekerja Nabi Musa As. kepada Nabi Syu'aib As. yang mencukupkan agar Nabi Musa As. termasuk dalam orang-orang yang baik.

Selain pemaparan di atas, himpunan juga dipelajari dalam aljabar. Himpunan adalah sekumpulan objek yang terdefinisi dengan jelas dan memiliki karakteristik sama(Bhattacharya dkk. , 1995). Konsep himpunan juga pernah muncul dalam salah satu ayat al-Qur'an yaitu Q.S. Al-Lail ayat 3 sebagai berikut:

وَمَا خَلَقَ ٱلذَّكَرَ وَٱلْأُنثَىٰٓ

Artinya: "Dan penciptaan laki-laki dan perempuan."

Pada ayat tersebut menyebutkan contoh himpunan jenis kelamin manusia yang terdapat 2 himpunan, yaitu himpunan laki-laki dan himpunan perempuan. Selain dalam al-Qur'an, penerapan ilmu matematika juga terdapat pada hadis, seperti yang ada pada hadis berikut:

حَدَّثَنَا قُتَيْبَةُ بْنُ سَعِيدٍ حَدَّثَنَا سُفْيَانُ عَنْ عَمْرِو بْنِ دِينَارٍ عَنْ عَمْرِو بْنِ أَوْسٍ
الثَّقَفِيِّ سَمِعَ عَبْدَ اللَّهِ بْنَ عَمْرٍو قَالَ قَالَ لِي رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ أَحَبُّ
الصِّيَامِ إِلَى اللَّهِ صِيَامُ دَاوُدَ كَانَ يَصُومُ يَوْمًا وَيُفْطِرُ يَوْمًا وَأَحَبُّ الصَّلَاةِ إِلَى اللَّهِ
صَلَاةُ دَاوُدَ كَانَ يَنَامُ نِصْفَ اللَّيْلِ وَيَقُومُ ثُلُثَهُ وَيَنَامُ سُدُسَهُ

Artinya: Telah bercerita kepada kami Qutaibah bin Sa'id telah bercerita kepada kami Sufyan dari 'Amru bin Dinar dari 'Amru bin Aus ast-Tasaqafiy dia mendengar 'Abdullah bin 'Amru berkata; Rasulullah shallallahu 'alaihi wasallam berkata kepadaku: "Puasa yang paling Allah cintai adalah puasa Nabi Daud 'Alaihissalam, yaitu dia berpuasa satu hari dan berbuka satu hari dan shalat yang paling Allah sukai adalah shalatnya Nabi Daud 'Alaihissalam pula, yaitu dia tidur hingga pertengahan malam lalu bangun mendirikan shalat pada sepertiga malam dan tidur lagi di akhir seperenam malamnya".(HR. Bukhari no. 3176)

Pada hadis tersebut disebutkan puasa dan shalat yang paling Allah cintai. Di hadis ini dikatakan shalat yang paling Allah cintai adalah shalatnya Nabi Daud As. yang dijelaskan waktunya dalam bentuk pecahan yaitu sepertiga malam terakhir. Apabila hadis ini diterapkan di Indonesia bagian barat, dihitung secara matematis dengan memisalkan waktu setelah isya' adalah pukul 7 malam dan waktu shubuh dimulai pukul 4 pagi, maka akan ada selisih 9 jam diantaranya. Dari permisalan ini dapat dicari tahu waktu shalat Nabi Daud As., pada hadis disebutkan waktu shalatnya adalah sepertiga malam terakhir. Diperhatikan dari sini artinya 9 jam $\times \frac{1}{3} = 3$ jam. Jadi waktu sepertiga malam terakhir diperoleh dari 3 jam sebelum waktu subuh dimulai yaitu pukul 1 dini hari. Sehingga dari permisalan sebelumnya, dapat diambil kesimpulan shalat yang paling dicintai Allah adalah shalat malam yang dilakukan sekitar pukul 1 dini hari.

Dari pemaparan berbagai dalil di atas dapat diambil kesimpulan, bahwa sesungguhnya matematika merupakan ilmu yang pasti. Di mana ilmu matematika dapat dipelajari dari berbagai arah, salah satunya mempelajari cabang ilmunya yaitu aljabar yang mempelajari bilangan dan himpunan. Selain bilangan dan himpunan di aljabar juga terdapat teorema yang memerlukan logika untuk membuktikan kebenaran teorema tersebut. Membuktikan teorema pada aljabar tentu bukan hal yang mudah, di mana sering ditemukan kesulitan pada prosesnya. Dari sini perlu diketahui kesulitan tidak akan ada secara terus menerus, seperti yang diterangkan pada salah satu kaidah mengenai kesulitan. Kaidah tersebut berbunyi:

المَشَقَّةُ تَجْلِبُ التَّيسِيرَ

Artinya: ”Kesulitan menyebabkan kemudahan.”

Pada kaidah tersebut dijelaskan dari kesulitan yang dihadapi maka akan didapat suatu kemudahan setelahnya. Seperti halnya dalam pembuktian teorema di aljabar pada penelitian ini yang akan membuktikan sifat antara 0-komutatif B-aljabar dengan *p-semisimple* BCI-aljabar. Sebelum dilakukan penelitian mengenai hal tersebut diperlukan kajian pustaka terlebih dahulu yang terkait dengan penelitian. Pada pengumpulan kajian pustaka terdapat beberapa teorema yang perlu dibuktikan dahulu yang mungkin cukup sulit dibuktikan. Namun, setelah teorema yang ada di BCI-aljabar dengan B-aljabar telah dibuktikan ini akan memudahkan dilakukan penelitian yang lebih luas yaitu penelitian mengenai sifat antara 0-komutatif B-aljabar dengan *p-semisimple* BCI-aljabar.

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bab ini akan dijelaskan metode penelitian sedemikian sehingga penelitian ini dapat terarah dengan baik dalam hal materi dan waktu pengerjaannya.

3.1. Jenis Penelitian

Jenis penelitian ini termasuk pada jenis penelitian kulitatif. Penelitian kualitatif merupakan suatu cara yang digunakan untuk menjawab masalah penelitian yang berkaitan dengan data berupa narasi yang bersumber dari aktivitas wawancara, pengamatan atau penggalian dokumen (Wahidmurni , 2017).

Untuk penelitian ini, sumber data yang digunakan berupa penggalian dokumen khususnya dokumen yang berupa peneltian terdahulu yang terkait dengan 0-komutatif B-aljabar dan *p-semisimple* BCI-aljabar. Data yang diperoleh bisa dari jurnal, buku atau referensi lain yang terkait.

3.2. Metode Pengumpulan Data

Metode yang digunakan untuk pengumpulan data pada penelitian ini adalah melakukan studi literatur terhadap berbagai literatur baik berupa jurnal, buku atau referensi lain yang terkait dengan 0-komutatif B-aljabar dan *p-semisimple* BCI-aljabar. Dari berbagai literatur, kemudian diambil satu untuk dijadikan referensi utama. Untuk penelitian ini, yang digunakan sebagai referensi utama adalah jurnal dengan judul *On 0-Commutative B-Algebras* oleh Hee Sik Kim dan Hong Goo Park (Kim dan Park, 2005). Dari jurnal tersebut akan dikaji mengenai teorema terkait dengan 0-komutatif B-aljabar dan *p-semisimple* BCI-aljabar.

3.3. Prosedur Penelitian

Berikut adalah tahapan-tahapan yang dilakukan pada penelitian ini:

1. Melakukan studi literatur terhadap berbagai literatur baik berupa jurnal, buku atau referensi lain yang terkait dengan 0-komutatif B-aljabar dan *p-semisimple* BCI-aljabar.

2. Memiih salah satu literatur sebagai referensi utama yang akan dianalisis.

3. Menjelaskan definisi dan beberapa sifat dari BCI-Aljabar, *p-semisimple* BCI-aljabar dan B-aljabar. Serta memaparkan salah satu contoh dari struktur aljabar tersebut.

4. Menjelaskan definisi dan sifat dari 0-komutatif B-aljabar serta sifat antara 0-komutatif B-aljabar dan *p-semisimple* BCI-aljabar. Berikut sifat yang akan dijelaskan pada penelitian ini:

   Proposisi 3.3.1 *Jika* $(X; *, 0)$ *adalah 0-komutatif B-aljabar maka berlaku* $(0 * e) * (0 * g) = g * e$. *Untuk setiap* $e, g \in X$.

   Teorema 3.3.2 *Jika* $(X; *, 0)$ *adalah 0-komutatif B-aljabar maka berlaku* $(e * p) * (g * q) = (q * p) * (g * e)$. *Untuk setiap* $e, g, p, q \in X$.

   Akibat 3.3.3 *Jika* $(X; *, 0)$ *adalah 0-komutatif B-aljabar maka berlaku* $(e * m) * (g * m) = e * g$. *Untuk setiap* $e, g, m \in X$.

   Akibat 3.3.4 *Jika* $(X; *, 0)$ *adalah 0-komutatif B-aljabar maka berlaku* $(m * g) * (m * e) = e * g$. *Untuk setiap* $e, g, m \in X$.

Akibat 3.3.5 *Jika* $(X; *, 0)$ *adalah 0-komutatif B-aljabar maka berlaku* $(e * m) * g = (0 * m) * (g * e)$. *Untuk setiap* $e, g, m \in X$.

Akibat 3.3.6 *Jika* $(X; *, 0)$ *adalah 0-komutatif B-aljabar maka berlaku* $e * (g * m) = m * (g * e)$. *Untuk setiap* $e, g, m \in X$.

Akibat 3.3.7 *Jika* $(X; *, 0)$ *adalah 0-komutatif B-aljabar maka berlaku* $(e * g) * m = (e * m) * g$. *Untuk setiap* $e, g, m \in X$.

Proposisi 3.3.8 *Diberikan* $(X; *, 0)$ *0-komutatif B-aljabar. Maka* $(X, \leq)$ *bersifat partially ordered set.*

Teorema 3.3.9 *Setiap 0-komutatif B-aljabar merupakan BCI-aljabar.*

Teorema 3.3.10 *Misalkan* $(X; *, 0)$ *adalah 0-komutatif B-aljabar jika dan hanya jika* $(X; *, 0)$ *adalah p-semisimple BCI-aljabar.*

5. Menarik kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dilakukan.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai definisi dan sifat-sifat yang terdapat pada 0-komutatif B-aljabar. Selain itu, akan dibahas pula mengenai sifat antara 0-komutatif B-aljabar dengan *p-semisimple* BCI-aljabar.

4.1. 0-komutatif B-aljabar

Berikut diberikan definisi, dan sifat yang ada pada 0-komutatif B-aljabar.

Definisi 4.1.1 *(Kim dan Park, 2005) Misalkan* $(X; *, 0)$ *adalah B-aljabar, maka* X *dapat dikatakan 0-komutatif B-aljabar jika* $e * (0 * g) = g * (0 * e)$ *untuk setiap* $e, g \in X$.

Contoh 4.1.2 Didefinisikan X_k termasuk dalam BCI-aljabar dengan operasi biner $*$ dengan definisi mengikuti Tabel 2.3.

Himpunan X_k termasuk 0-komutatif B-aljabar sebab:

Akan ditunjukkan jika untuk setiap $e, g \in X_k$ maka berlaku $e * (0 * g) = g * (0 * e)$.

- Jika $e = 0$ dan $g = 0$ maka diperoleh

  $0 * (0 * 0) = 0 * 0 = 0$

  $0 * (0 * 0) = 0 * 0 = 0$

- Jika $e = 0$ dan $g = a$ maka diperoleh

  $0 * (0 * a) = 0 * b = a$

  $a * (0 * 0) = a * 0 = a$

- Jika $e = 0$ dan $e = b$ maka diperoleh

  $0 * (0 * b) = 0 * a = b$

  $b * (0 * 0) = b * 0 = b$

- Jika $e = a$ dan $g = 0$ maka diperoleh

  $a * (0 * 0) = a * 0 = a$

  $0 * (0 * a) = 0 * b = a$

- Jika $e = a$ dan $g = a$ maka diperoleh

  $a * (0 * a) = a * b = b$

  $a * (0 * a) = a * b = b$

- Jika $e = a$ dan $g = b$ maka diperoleh

  $a * (0 * b) = a * a = 0$

  $b * (0 * a) = b * b = 0$

- Jika $e = b$ dan $g = 0$ maka diperoleh

  $b * (0 * 0) = b * 0 = b$

  $0 * (0 * b) = 0 * a = b$

- Jika $e = b$ dan $g = a$ maka diperoleh

  $b * (0 * a) = b * b = 0$

  $a * (0 * b) = a * a = 0$

- Jika $e = b$ dan $g = b$ maka diperoleh

  $b * (0 * b) = b * a = a$

  $b * (0 * b) = b * a = b$

Sehingga terbukti bahwa jika untuk setiap $e \in X_k$ maka berlaku $e * (0 * g) = g * (0 * e)$. Karena X_k memenuhi semua aksioma dari 0-komutatif B-aljabar, maka terbukti bahwa X_k termasuk dalam 0-komutatif B-aljabar.

Proposisi 4.1.3 *Jika* $(X; *, 0)$ *adalah 0-komutatif B-aljabar, maka berlaku* $(0 * e) * (0 * g) = g * e$ *untuk setiap* $e, g \in X$.

Bukti. Diketahui $(X; *, 0)$ adalah 0-komutatif B-aljabar. Akan ditunjukkan $(0 * e) * (0 * g) = g * e$ berlaku untuk setiap $e, g \in X$. Ambil sebarang $e, g \in X$. Diperhatikan berdasarkan Definisi 4.1.1 diperoleh:

$$\begin{aligned} (0 * e) * (0 * g) &= g * (0 * (0 * e)) \quad \text{[Teorema 2.3.5 (C2)]} \\ &= g * e \end{aligned}$$

■

Teorema 4.1.4 *Jika* $(X;*,0)$ *adalah 0-komutatif B-aljabar, maka berlaku* $(e*p)*(g*q)=(q*p)*(g*e)$ *untuk setiap* $e,g,p,q \in X$.

Bukti. Diketahui $(X;*,0)$ adalah 0-komutatif B-aljabar. Akan ditunjukkan $(e*p)*(g*q)=(q*p)*(g*e)$ berlaku untuk setiap $e,g,p,q \in X$. Ambil sebarang $e,g,p,q \in X$. Diperhatikan berdasarkan Definisi 2.3.1 (B3) diperoleh:

$$\begin{aligned}
(e*p)*(g*q) &= e*((g*q)*(0*p)) && \text{[Teorema 2.3.1 (B3)]}\\
&= e*(g*((0*p)*(0*q))) && \text{[Proposisi 4.1.3]}\\
&= e*(g*(q*p)) && \text{[Proposisi 2.3.6 poin 2]}\\
&= (e*(0*(q*p)))*g && \text{[Definisi 4.1.1]}\\
&= ((q*p)*(0*e))*g && \text{[Definisi 2.3.1 (B3)]}\\
&= (q*p)*(g*(0*(0*e))) && \text{[Teorema 2.3.5 (C2)]}\\
&= (q*p)*(g*e)
\end{aligned}$$

■

Akibat 4.1.5 *Jika* $(X;*,0)$ *adalah 0-komutatif B-aljabar, maka berlaku* $(e*m)*(g*m)=e*g$ *untuk setiap* $e,g,m \in X$.

Bukti. Diketahui $(X;*,0)$ adalah 0-komutatif B-aljabar. Akan ditunjukkan $(e*m)*(g*m)=e*g$ berlaku untuk setiap $e,g,m \in X$. Ambil sebarang $e,g,m \in X$. Diperhatikan berdasarkan Teorema 4.1.4 diperoleh:

$$\begin{aligned}
(e*m)*(g*m) &= (m*m)*(g*e) && \text{[Definisi 2.3.1 (B1)]}\\
&= 0*(g*e) && \text{[Lemma 2.3.7]}\\
&= e*g
\end{aligned}$$

■

Akibat 4.1.6 *Jika* $(X;*,0)$ *adalah 0-komutatif B-aljabar, maka berlaku* $(m*g)*$

$(m * e) = e * g$ *untuk setiap* $e, g, m \in X$.

Bukti. Diketahui $(X; *, 0)$ adalah 0-komutatif B-aljabar. Akan ditunjukkan $(m * g) * (m * e) = e * g$ berlaku untuk setiap $e, g, m \in X$. Ambil sebarang $e, g, m \in X$. Diperhatikan berdasarkan Teorema 4.1.4 diperoleh:

$$
\begin{aligned}
(m * g) * (m * e) &= (e * g) * (m * m) && \text{[Definisi 2.3.1 (B1)]} \\
&= (e * g) * 0 && \text{[Definisi 2.3.1 (B2)]} \\
&= e * g
\end{aligned}
$$

■

Akibat 4.1.7 *Jika* $(X; *, 0)$ *adalah 0-komutatif B-aljabar, maka berlaku* $(e*m)*g = (0 * m) * (g * e)$ *untuk setiap* $e, g, m \in X$.

Bukti. Diketahui $(X; *, 0)$ adalah 0-komutatif B-aljabar. Akan ditunjukkan $(e * m) * g = (0 * m) * (g * e)$ berlaku untuk setiap $e, g, m \in X$. Ambil sebarang $e, g, m \in X$. Diperhatikan berdasarkan Definisi 2.3.1 (B2) diperoleh:

$$
\begin{aligned}
(e * m) * g &= (e * m) * (g * 0) && \text{[Teorema 4.1.4]} \\
&= (0 * m) * (g * e)
\end{aligned}
$$

■

Akibat 4.1.8 *Jika* $(X; *, 0)$ *adalah 0-komutatif B-aljabar, maka berlaku* $e*(g*m) = m * (g * e)$ *untuk setiap* $e, g, m \in X$.

Bukti. Diketahui $(X; *, 0)$ adalah 0-komutatif B-aljabar. Akan ditunjukkan $(e*m)* g = m * (g * e)$ berlaku untuk setiap $e, g, m \in X$. Ambil sebarang $e, g, m \in X$. Diperhatikan berdasarkan Definisi 2.3.1 (B1) diperoleh:

$$
\begin{aligned}
e*(m*g) &= (e*0)*(g*m) && \text{[Teorema 4.1.4]}\\
&= (m*0)*(g*e) && \text{[Definisi 2.3.1 (B2)]}\\
&= m*(g*e)
\end{aligned}
$$

■

Teorema 4.1.9 *Jika* $(X;*,0)$ *adalah 0-komutatif B-aljabar, maka berlaku* $(e*g)*m = (e*m)*g$ *untuk setiap* $e,g,m \in X$.

Bukti. Diketahui $(X;*,0)$ adalah 0-komutatif B-aljabar. Akan ditunjukkan $(e*g)*m = (e*m)*g$ berlaku untuk setiap $e,g,m \in X$. Ambil sebarang $e,g,m \in X$. Diperhatikan berdasarkan Definisi 2.3.1 (B3) diperoleh:

$$
\begin{aligned}
(e*g)*m &= e*(m*(0*g)) && \text{[Definisi 4.1.1]}\\
&= e*(g*(0*m)) && \text{[Definisi 2.3.1 (B3)]}\\
&= (e*m)*g
\end{aligned}
$$

■

Definisi 4.1.10 *(Kim dan Park, 2005) Pada B-aljabar* X *didefinisikan relasi terurut parsial, yaitu* $\leq$. *Di mana untuk setiap* $e \leq g$ *jika dan hanya jika* $e*g=0$ *, untuk sebarang* $e,g \in X$.

Proposisi 4.1.11 *Diberikan 0-komutatif B-aljabar* $(X;*,0)$. *Maka himpunan* $(X,\leq)$ *merupakan partially ordered set.*

Bukti. Akan ditunjukkan $(X,\leq)$ memenuhi aksioma reflektif, antisimetris dan transitif.

1. Ambil sebarang $e \in X$. Akan ditunjukkan $(X,\leq)$ bersifat reflektif yaitu $e \leq e$. Diperhatikan berdasarkan Definisi 2.3.1 (B1) berlaku $e*e=0$,

sehingga berdasarkan Definisi 4.1.10 diperoleh $e \leq e$. Sehingga terbukti $(X, \leq)$ bersifat reflektif.

2. Ambil sebarang $e, g \in X$. Akan ditunjukkan $(X, \leq)$ bersifat antisimetris yaitu jika $e \leq g$ dan $g \leq e$ maka $e = g$. Diperhatikan berdasarkan Definisi 4.1.10 diperoleh:

   $e \leq g$

   $$e * g = 0 \tag{4.1}$$

   $g \leq e$

   $$g * e = 0 \tag{4.2}$$

   Berdasarkan Proposisi 2.3.6 poin 3 dari Persamaan 4.1 diperoleh $e = g$ dan dari Persamaan 4.2 diperoleh $g = e$. Sehingga terbukti $(X, \leq)$ bersifat antisimetris.

3. Ambil sebarang $e, g, m \in X$. Akan ditunjukkan $(X, \leq)$ bersifat transitif yaitu jika $e \leq g$ dan $g \leq m$, maka $e \leq m$. Jika dimisalkan $e \leq g$ maka berdasarkan Definisi 4.1.10 diperoleh:

   $$e * g = 0 \tag{4.3}$$

   dan $g \leq m$ maka diperoleh:

   $$g * m = 0 \tag{4.4}$$

   Akan ditunjukkan jika $e \leq g$ dan $g \leq m$, maka $e \leq m$. Karena akan ditunjukkan $e \leq m$ artinya $e * m = 0$. Diperhatikan berdasarkan Definisi 2.3.1 (B2) diperoleh:

$$
\begin{aligned}
e * m &= (e * m) * 0 && \text{[Definisi 2.3.1 (B2)]}\\
&= ((e * m) * 0) * 0 && \text{[Substitusi Persamaan 4.3 dan 4.4]}\\
&= ((e * m) * (e * g)) * (g * m) && \text{[Akibat 4.1.6]}\\
&= (g * m) * (g * m) && \text{[Definisi 2.3.1 (B1)]}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Sehingga terbukti $(X, \leq)$ bersifat transitif.

Karena $(X, \leq)$ memenuhi aksioma reflektif, antisimetris dan transitif, maka terbukti $(X, \leq)$ merupakan *partially ordered set*. ■

4.2. 0-komutatif B-aljabar dan *p-semisimple* BCI-aljabar

Berikut diberikan pembahasan mengenai sifat antara 0-komutatif B-aljabar dengan *p-semisimple* BCI-aljabar.

Teorema 4.2.1 *Setiap 0-komutatif B-aljabar merupakan BCI-aljabar.*

Bukti. Misal X adalah 0-komutatif B-aljabar, artinya terpenuhi aksioma berikut untuk setiap $e, g, m \in X$:

1. (B1) $e * e = 0$;
2. (B2) $e * 0 = e$;
3. (B3) $(e * g) * m = e * (m * (0 * g))$;
4. $e * (0 * g) = g * (0 * e)$.

Akan ditunjukkan X merupakan BCI-aljabar yaitu terpenuhi aksioma berikut untuk setiap $e, g, m \in X$:

(BCI-1) $(e * g) * (e * m) * (m * g) = 0$;

(BCI-2) $(e * (e * m)) * m = 0$;

(BCI-3) $e * e = 0$;

(BCI-4) $e * m = 0$ dan $m * e = 0$ maka $e = m$.

Lebih lanjut, diperoleh pembuktian sebagai berikut:

1. Jika $(X; *, 0)$ adalah 0-komutatif B-aljabar, maka berlaku $(e * g) * (e * m) * (m * g) = 0$ untuk setiap $e, g, m \in X$ $(BCI$-1). Akan ditunjukkan $(e * g) * (e * m) * (m * g) = 0$. Ambil sebarang $e, g, m \in X$. Berdasarkan Teorema 4.1.4 diperoleh:

$(e * g) * (e * m) * (m * g)$	$= ((m * g) * (e * e)) * (m * g)$	[Definisi 2.3.1 (B1)]
	= $((m * g) * 0) * (m * g)$	[Definisi 2.3.1 (B2)]
	= $(m * g) * (m * g)$	[Definisi 2.3.1 (B1)]
	= 0	

2. Jika $(X; *, 0)$ adalah 0-komutatif B-aljabar, maka berlaku $(e * (e * g)) * g = 0$ untuk setiap $e, g \in X$ $(BCI$-2). Akan ditunjukkan $(e * (e * g)) * g = 0$. Ambil sebarang $e, g \in X$.Berdasarkan Teorema 4.1.9 diperoleh:

$(e * (e * g)) * g$	$= (e * g) * (e * g)$	[Definisi 2.3.1 (B1)]
	= 0	

3. Jika $(X; *, 0)$ adalah 0-komutatif B-aljabar, maka berlaku $e * e = 0$ untuk setiap $e \in X$ $(BCI$-3). Akan ditunjukkan $e * e = 0$. Ambil sebarang $e \in X$. Berdasarkan Definisi 2.3.1 (B1) jelas untuk setiap $e \in X$ berlaku $e * e = 0$ sebab $e \in X$ dan X adalah B-aljabar.

4. Jika $(X;*,0)$ adalah 0-komutatif B-aljabar, maka berlaku $e*g=0$ dan $g*e=0$ maka $e=g$ untuk setiap $e,g \in X$ (BCI-4). Akan ditunjukkan $e*g=0$ dan $g*e=0$ maka $e=g$. Ambil sebarang $e,g \in X$. Berdasarkan Proposisi 4.1.3 telah dijelaskan 0-komutatif B-aljabar bersifat *partially ordered set* sehingga berlaku juga sifat anti-simetris $e*g=0$ dan $g*e=0$ maka $e=g$ untuk setiap $e,g \in X$.

■

Teorema 4.2.2 *Misalkan* $(X;*,0)$ *adalah 0-komutatif B-aljabar jika dan hanya jika* $(X;*,0)$ *adalah p-semisimple BCI-aljabar.*

Bukti.

($\Rightarrow$) Karena setiap 0-komutatif B-aljabar merupakan BCI-aljabar sudah dibuktikan pada Teorema 4.2.1 maka cukup membuktikan aksioma dari *p-semisimple* BCI-aljabar yang terdapat pada Definisi 2.2.1. Diketahui X adalah 0-komutatif B-aljabar yang juga merupakan BCI-aljabar. Akan ditunjukkan $0*(0*e)=e$ berlaku untuk setiap $e \in X$. Berdasarkan Definisi 4.1.1 diperoleh:

$$\begin{aligned} 0*(0*e) &= e*(0*0) && \text{[Definisi 2.3.1 (B1)]} \\ &= e*0 && \text{[Definisi 2.3.1 (B2)]} \\ &= e \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Misal X adalah *p-semisimple* BCI-aljabar, artinya terpenuhi aksioma berikut untuk setiap $e,g,m \in X$:

(BCI-1) $(e*g)*(e*m)*(m*g)=0$;

(BCI-2) $(e*(e*m))*m=0$;

(BCI-3) $e*e=0$;

(BCI-4) $e * m = 0$ dan $m * e = 0$ maka $e = m$.

(a) $0 * (0 * e) = e$

Akan ditunjukkan X merupakan 0-komutatif B-aljabar yaitu terpenuhi aksioma berikut untuk setiap $e, g, m \in X$:

(a) (B1) $e * e = 0$;

(b) (B2) $e * 0 = e$;

(c) (B3) $(e * g) * m = e * (m * (0 * g))$;

(d) $e * (0 * g) = g * (0 * e)$.

Lebih lanjut, diperoleh pembuktian sebagai berikut:

(a) Jika $(X; *, 0)$ adalah *p-semisimple* BCI-aljabar, maka berlaku $e * e = 0$ untuk setiap $e \in X$ (B1). Akan ditunjukkan $e * e = 0$. Ambil sebarang $e \in X$. Berdasarkan Definisi 2.1.1 BCI-3 jelas untuk setiap $e \in X$ berlaku $e * e = 0$. sebab $e \in X$ dan X adalah BCI-aljabar.

(b) Jika $(X; *, 0)$ adalah *p-semisimple* BCI-aljabar, maka berlaku $e * 0 = e$ untuk setiap $e \in X$ (B2). Akan ditunjukkan $e * 0 = e$. Ambil sebarang $e \in X$. Berdasarkan Definisi 2.1.1 (BCI-3) diperoleh:

$e * 0 = e * (0 * 0)$ [Teorema 2.2.3]

$= 0 * (0 * e)$ [Definisi 2.2.1]

$= e$

(c) Jika $(X; *, 0)$ adalah *p-semisimple* BCI-aljabar, maka berlaku $(e * g) * m = e * (m * (0 * g))$ untuk setiap $e, g, m \in X$ (B3). Akan ditunjukkan $(e * g) * m = e * (m * (0 * g))$. Ambil sebarang $e, g, m \in X$. Berdasarkan Teorema 2.1.4 poin 1 diperoleh:

$$
\begin{aligned}
(e*g)*m &= (e*g)*(m*0) && \text{[Teorema 2.2.4 poin 4]}\\
&= (e*m)*(g*0) && \text{[Teorema 2.1.4 poin 1]}\\
&= (e*m)*g && \text{[Definisi 2.2.1]}\\
&= (e*m)*(0*(0*g)) && \text{[Teorema 2.2.4 poin 4]}\\
&= (e*0)*(m*(0*g)) && \text{[Teorema 2.1.4 poin 1]}\\
&= e*(m*(0*g))
\end{aligned}
$$

(d) Jika $(X;*,0)$ adalah *p-semisimple* BCI-aljabar, maka berlaku $e*(0*g) = g*(0*e)$ untuk setiap $e,g \in X$. Akan ditunjukkan $e*(0*g) = g*(0*e)$. Ambil sebarang $e,g \in X$. Berdasarkan Teorema 2.2.3 jelas untuk setiap $e,g \in X$ berlaku $e*(0*g) = g*(0*e)$. sebab $e,g \in X$ dan X adalah *p-semisimple* BCI-aljabar.

■

4.3. Integrasi Keilmuan

Pada ilmu aljabar memiliki beberapa pengertian konsep terkait dengan pembuktian teorema. Salah satu konsepnya adalah pernyataan pada sebuah kalimat di aljabar dapat bernilai benar atau salah, namun tidak dapat sekaligus bernilai keduanya (Fitria , 2018). Hal tersebut juga dijelaskan secara umum di al-Qur'an seperti yang tertera pada Q.S. Al-Baqarah ayat 42 berikut:

وَلَا تَلْبِسُوا الْحَقَّ بِالْبَاطِلِ وَتَكْتُمُوا الْحَقَّ وَأَنْتُمْ تَعْلَمُوْنَ

Artinya: ”Jangan kamu mencampuradukkan kebenaran dengan kebatilan dan (janganlah) kamu menyembunyikan kebenaran, sedangkan kamu mengetahuinya.”

Ayat di atas merupakan larangan untuk mencampuradukkan kebenaran dengan kebatilan dan menyembunyikan suatu kebenaran. Ayat ini jelas menunjukkan keharaman terhadap pencampuradukkan antara kebenaran dengan kebatilan. Hal tersebut juga berlaku untuk teorema mengenai *p-semisimple* BCI-aljabar dan 0-komutatif B-aljabar. Selain itu, dalam al-Qur'an juga memuat perintah untuk selalu menjukkan kebenaran seperti yang tertara pada Q.S. Al-Baqarah ayat 111 berikut:

وَقَالُوْا لَنْ يَّدْخُلَ الْجَنَّةَ اِلَّا مَنْ كَانَ هُوْدًا اَوْ نَصٰرٰى ۗ تِلْكَ
اَمَانِيُّهُمْ ۗ قُلْ هَاتُوْا بُرْهَانَكُمْ اِنْ كُنْتُمْ صٰدِقِيْنَ

Artinya: "Dan mereka (Yahudi dan Nasrani) berkata, "Tidak akan masuk surga kecuali orang Yahudi atau Nasrani." Itu (hanya) angan-angan mereka. Katakanlah, "Tunjukkan bukti kebenaranmu jika kamu orang yang benar.""

Dalam ayat tersebut diperintahkan bahwa jika sesuatu bersifat benar maka harus tunjukkan bukti kebenaran tersebut agar tahu jika kebenaran itu pasti adanya bukan hanya angan-angan. Selain memperlukan bukti, kebenaran juga membutuhkan suatu keyakinan seperti yang disebutkan pada hadis berikut:

حَدَّثَنَا عُبَيْدُ اللهِ بْنُ مُوسَى عَنْ إِسْمَاعِيلَ عَنْ قَيْسٍ عَنْ الْمُغِيرَةِ بْنِ شُعْبَةَ عَنْ النَّبِيِّ
صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ قَالَ لَا يَزَالُ طَائِفَةٌ مِنْ أُمَّتِي ظَاهِرِينَ حَتَّى يَأْتِيَهُمْ أَمْرُ اللهِ وَهُمْ
ظَاهِرُونَ

Artinya: Telah menceritakan kepada kami Ubaidullah bin Musa dari Ismail dari Qais dari Mughirah bin Syu'bah dari Nabi shallallahu 'alaihi wasallam, beliau bersabda: "Akan senantiasa ada sekelompok dari umatku yang tegar di jalan kebenaran hingga keputusan Allah datang kepada mereka, dan mereka selalu tegar dalam jalan kebenaran."(HR. Bukhari no. 6767)

Pada hadis tersebut dijelaskan jika terdapat suatu kelompok yang yakin dengan suatu kebenaran tanpa keraguan yang mengikuti serta. Dengan mencari bukti kebenaran yang mereka yakini juga doa dan usaha, untuk membuktikan bahwa apa yang mereka yakini benar. Hingga doa dan usaha terjawab dengan terbuktinya kebenaran tersebut. Perintah tersebut juga perlu diterapkan pada ilmu aljabar. Seperti halnya, pada pembuktian teorema di ilmu aljabar, suatu teorema tidak dapat ditelan secara langsung, namun diperlukan suatu pembuktian yang pasti untuk mengetahui adanya kebenaran pada teorema tersebut.

Hal ini dapat diterapkan salah satunya pada pembuktian Teorema 4.2.2 yaitu "Misalkan $(X; *, 0)$ adalah 0-komutatif B-aljabar jika dan hanya jika $(X; *, 0)$ adalah *p-semisimple* BCI-aljabar". Teorema ini belum pasti kebenarannya, sehingga diperlukan pembuktian yang runtut. Sebelum melakukan penelitian diperlukan studi literatur dahulu terhadap berbagai literatur baik berupa jurnal, buku atau referensi lain yang terkait dengan 0-komutatif B-aljabar dan *p-semisimple* BCI-aljabar. Setelah ditemukan literasi yang sesuai untuk membantu pembuktian teorema, maka pembuktian dapat dilakukan. Dari pembuktian tersebut, dapat diketahui Teorema 4.2.2 terbukti benar. Sehingga teorema ini dapat digunakan sebagai literatur baru untuk penelitian lebih lanjut. Hal ini berkesinambungan dengan salah satu kaidah:

اَلْأَمْرُ إِذَا ضَاقَ اتَّسَعَ

Artinya: "Sesuatu itu apabila sempit, maka menjadi luas."

Dalam kaidah tersebut dijelaskan sesuatu yang sempit maka dapat menjadi luas. Seperti halnya pada pembuktian teorema, di mana awalnya hanya membahas teorema pada *p-semisimple* BCI-aljabar dan 0-komutatif B-aljabar, kemudian ditemukan teorema mengenai hubungan keduanya. Di mana teorema hubungan antara *p-semisimple* BCI-aljabar dan 0-komutatif B-aljabar ini menjadi teorema baru yang dapat digunakan untuk penelitian lebih lanjut lagi.

BAB V

PENUTUP

Pada bab ini akan diberikan simpulan dan saran yang diambil berdasarkan materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

5.1. Simpulan

Berdasarkan pembahasan yang ada pada bab sebelumnya, berikut simpulan yang berhasil didapat oleh penulis:

1. Sifat-sifat pada 0-komutatif B-aljabar.

   (a) Jika $(X; *, 0)$ adalah 0-komutatif B-aljabar, maka untuk setiap $e, g, m, p, q \in X$ berlaku:

      i. $(0 * e) * (0 * g) = g * e$,

      ii. $(e * p) * (g * q) = (q * p) * (g * e)$,

      iii. $(e * m) * (g * m) = e * g$,

      iv. $(m * g) * (m * e) = e * g$,

      v. $(e * m) * g = (0 * m) * (g * e)$,

      vi. $e * (g * m) = m * (g * e)$ dan

      vii. $(e * g) * m = (e * m) * g$.

   (b) Jika $(X; *, 0)$ adalah 0-komutatif B-aljabar, maka $(X, \leq)$ bersifat *partially ordered set*.

2. Sifat antara 0-komutatif B-aljabar dengan *p-semisimple* BCI-aljabar.

   Misalkan $(X; *, 0)$ adalah 0-komutatif B-aljabar jika dan hanya jika $(X; *, 0)$ adalah *p-semisimple* BCI-aljabar.

5.2. Saran

Setelah membahas mengenai sifat yang terdapat pada 0-komutatif B-aljabar dan Sifat antara 0-komutatif B-aljabar dengan *p-semisimple* BCI-aljabar, penulis ingin menyampaikan saran. Dari penelitian ini membahas masih mengenai sifat komutatif pada B-aljabar belum sifat lain. Sehingga dari sini berharap bisa membahas tentang sifat lain pada B-aljabar juga keterkaitannya dengan jenis aljabar lain.