A-IDEAL PADA ALJABAR BCI DAN ALJABAR BCI ASSOSIATIF

SKRIPSI

Disusun Oleh

SAFITRI INDAH LESTARI

H72217038

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL

SURABAYA

2022

PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini,

Nama	:	SAFITRI INDAH LESTARI
NIM	:	H72217038
Program Studi	:	Matematika
Angkatan	:	2017

Menyatakan bahwa saya tidak melakukan plagiat dalam penulisan skripsi saya yang berjudul " *A*-IDEAL PADA ALJABAR BCI dan ALJABAR BCI ASSOSIATIF ". Apabila suatu saat nanti terbukti saya melakukan tindakan plagiat, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian pernyataan keaslian ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 12 Agustus 2022

SAFITRI INDAH LESTARI
NIM. H72217038

LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

Skripsi oleh

Nama	:	SAFITRI INDAH LESTARI
NIM	:	H72217038
Judul Skripsi	:	*A*-IDEAL PADA ALJABAR BCI dan ALJABAR BCI ASOSIATIF

telah diperiksa dan disetujui untuk diujikan.

Pembimbing I

Wika Dianita Utami, M.Sc
NIP. 199206102018012003

Pembimbing II

Lutfi Hakim, M.Ag
NIP. 197312252006041001

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika
UIN Sunan Ampel Surabaya

Yuniar Farida, M.T
NIP. 198511242014032001

PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI

Skripsi oleh

Nama	:	SAFITRI INDAH LESTARI
NIM	:	H72217038
Judul Skripsi	:	*A*-IDEAL PADA ALJABAR BCI dan ALJABAR BCI ASSOSIATIF

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji
pada tanggal 12 Agustus 2022

Mengesahkan,
Tim Penguji

Penguji I

Aris Fanani, M.Kom
NIP. 198701272014031002

Penguji II

Dian Yuliati, M.Si
NIP. 198707142020122015

Penguji III

Wika Dianita Utami, M.Sc
NIP. 199206102018012003

Penguji IV

Lutfi Hakim, M.Ag
NIP. 197312252006041001

Mengetahui,
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Ampel Surabaya

Dr. A. Saepul Hamdani, M.Pd
NIP. 196507312000031002

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL SURABAYA
PERPUSTAKAAN
Jl. Jend. A. Yani 117 Surabaya 60237 Telp. 031-8431972 Fax.031-8413300
E-Mail: perpus@uinsby.ac.id

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika UIN Sunan Ampel Surabaya, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama	: SAFITRI INDAH LESTARI
NIM	: H72217038
Fakultas/Jurusan	: FST / MATEMATIKA
E-mail address	: safitriindah444@gmail.com

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah :
☑ Sekripsi ☐ Tesis ☐ Desertasi ☐ Lain-lain (………………………………)
yang berjudul :

A-IDEAL PADA ALJABAR BCI DAN ALJABAR BCI ASSOSIATIF

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan Hak Bebas Royalti Non-Ekslusif ini Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (database), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di Internet atau media lain secara ***fulltext*** untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Surabaya, 12 Agustus 2022

Penulis

(SAFITRI INDAH . L.)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMBANG

$\in$	: Elemen keanggotaan
$\subseteq$	: Subset atau himpunan bagian
$\blacksquare$	: Akhir suatu bukti
$\Rightarrow$	: Jika, maka
$\Leftrightarrow$	: Jika dan hanya jika
$\leq$	: Kurang dari atau sama dengan
$(X, *, 0)$	: Operasi biner pada Aljabar BCI

ABSTRAK

A-IDEAL PADA ALJABAR BCI dan ALJABAR BCI ASSOSIATIF

Struktur Aljabar merupakan himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Salah satu himpunan tak kosong dengan operasi biner biner yaitu Aljabar BCI. Aljabar BCI merupakan suatu himpunan tak kosong dengan operasi biner "$*$" dengan elemen khusus 0 untuk setiap $m, n, o \in X$ yang memenuhi beberapa aksioma dari Aljabar BCI. Dalam suatu aljabar ada subaljabar yang merupakan subhimpunan dari suatu aljabar. Hal ini juga terdapat pada Aljabar BCI, himpunan bagian Aljabar BCI megenalkan konsep ideal. Secara umum, setiap ideal pasti merupakan subaljabar akan tetapi subaljabar belum tentu merupakan ideal. Dalam konsep ideal pada Aljabar BCI dikembangkan menjadi beberapa yaitu q-ideal, p-ideal, dan a-ideal. Dilain pihak, dapat didefinisikan suatu Aljabar BCI Assosiatif yaitu suatu Aljabar BCI yang bersifat Assosiatif. Dalam hal ini, peneliti mengkaji a-ideal pada Aljabar BCI dan Aljabar BCI Assosiatif. Hasil dari penelitian ini adalah (1) Setiap a-ideal merupakan ideal. (2) Himpunan tak kosong I dikatakan a-ideal pada Aljabar BCI X jika dan hanya jika keduanya p-ideal dan q-ideal. (3) Diberikan himpunan X merupakan Aljabar BCI, maka kondisi berikut ekuivalen: himpunan X merupakan Aljabar BCI Assosiatif, setiap ideal pada X merupakan a-ideal, ideal $\{0\}$ pada X merupakan a-ideal.

Kata kunci: Aljabar BCI, a-ideal, Aljabar BCI Assoiatif

ABSTRACT

A-IDEAL IN BCI ALGEBRA AND ASSOCIATIVE BCI ALGEBRA

Algebraic structure is a non-empty set which is equipped with a binary operation that satisfies certain axioms. One of the sets non-empty with binary operations i.e. BCI Algebra. BCI algebra is a non-empty set with binary operation "$*$ " with special element 0 for every $m, n, o \in X$ which satisfies some axioms of BCI Algebra. In a algebra there is a sub-algebra which is a subset of an algebra. This matter Also found in BCI Algebra, the BCI Algebra subset introduces the ideal concept. In general, every ideal must be a subalgebra but subalgebra not necessarily ideal. In the ideal concept of BCI Algebra developed into several, namely q-ideal, p-ideal, and a-ideal. On the other hand, it can be defined an Associative BCI Algebra is an Associative BCI Algebra. In this case, the researcher examines the a-ideal in BCI Algebra and Associative BCI Algebra. The results of this study are (1) Every a-ideal is an ideal. (2) The non-empty set I is said to be a-ideal in BCI X Algebra if and only if both p-ideal and q-ideal. (3) Given that the set X is a BCI Algebra, then the following conditions are equivalent: the set X is an Associative BCI Algebra, every ideal on X is an a-ideal, the ideal $\{0\}$ on X is an a-ideal.

Keywords: BCI Algebra, a-ideals, Assoociative BCI Algebra

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan ilmu yang sering kita temui dalam kehidupan sehari-hari (Nugraha and Dwiyana, 2007). Secara langsung atau tidak langsung dalam kehidupan sehari-hari kita selalu terapkan ilmu matematika tersebut. Contoh penerapan dalam kehidupan sehari-hari dalam jual beli. Dalam kegiatan jual beli sering dijumpai ditempat manapun. Salah satu contoh proses jual beli berlangsung didalam pasar, dalam proses tersebut para penjual menukarkan barangnya dengan sejumlah uang sesuai dengan barang yang diminta oleh pembeli dengan harga yang sudah ditetapkan oleh si penjual dan disepakati oleh si pembeli (Shobirin, 2016). Seperti yang dijelaskan dalam Q.S Al-Nisa' [4:29]

يَاأَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا لَا تَأْكُلُوا أَمْوَالَكُمْ بَيْنَكُمْ بِالْبَاطِلِ إِلَّا
أَنْ تَكُونَ تِجَارَةً عَنْ تَرَاضٍ مِنْكُمْ ۚ وَلَا تَقْتُلُوا أَنْفُسَكُمْ ۚ
إِنَّ اللَّهَ كَانَ بِكُمْ رَحِيمًا

Artinya : "*Hai orang-orang yang beriman, janganlah kamu saling memakan harta sesamamu dengan jalan yang batil, kecuali dengan jalan perniagaan yang berlaku dengan suka sama suka diantara kamu. Dan janganlah kamu membunuh dirimu; sesungguhnya Allah adalah Maha Penyayang kepadamu.*"

Dalam ayat tersebut menjelaskan bahwa janganlah kita memakan sesuatu yang bukan milik kita. Apalgi dengan cara yang batil (buruk). Sama halnya dengan kejujuran dalam berniaga atau jual beli. Sebagai penjual harus memeberikan hak pembeli sesuai dengan harga yang sudah ditentukan tanpa mengurangi dari hak tersebut. Karena sesungguhnya Allah mengetahui apa yang kita perbuat.

Dalam hal lain pun juga dijelaskan dalam Al-Qur'an seperti himpunan. Secara umum himpunan diartikan sebagai kumpulan objek-objek yang dapat didefinisikan dan dapat dibeda-bedakan. Jadi himpunan adalah sebuah koleksi dari objek-objek yang terdefinisi dengan baik (*well defined*). Terdefinisi dengan baik artinya bahwa untuk sebarang objek X yang diberikan maka kita selalu dapat menentukan apakah objek X itu termasuk dalam sebuah himpunan tertentu atau tidak. Mengapa perlu jelas pendefinisiannya? Maksudnya adalah agar orang dapat menentukan apakah suatu benda merupakan anggota himpunan yang dimaksudkan atau bukan. Yang dijelaskan dalam Q.S An-Nur [24:45]

وَاللّٰهُ خَلَقَ كُلَّ دَاۤبَّةٍ مِّنْ مَّاۤءٍۚ فَمِنْهُمْ مَّنْ يَّمْشِيْ عَلٰى بَطْنِهٖۚ
وَمِنْهُمْ مَّنْ يَّمْشِيْ عَلٰى رِجْلَيْنِۚ وَمِنْهُمْ مَّنْ يَّمْشِيْ عَلٰٓى اَرْبَعٍۗ
يَخْلُقُ اللّٰهُ مَا يَشَاۤءُۗ اِنَّ اللّٰهَ عَلٰى كُلِّ شَيْءٍ قَدِيْرٌ

Artinya : "*Dan Allah telah menciptakan semua jenis hewan dari air, maka sebagian dari hewan itu ada yang berjalan di atas perutnya dan sebagian berjalan dengan dua kaki sedang sebagian (yang lain) berjalan dengan empat kaki. Allah menciptakan apa yang dikehendaki-Nya, sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu.*"

Dalam ayat tersebut menjelaskan kelompok hewan berdasarkan cara berjalannya, seperti yang dijelaskan ada yang berjalan tanpa kaki atau menggunakan perutnya, ada yang berjalan menggunakan 2 kakinya, ada yang berjalan menggunakan 4 kakinya.

Pemaparan dua ayat Al-Qur'an tersebut sudah menjelaskan tentang sedikit dari ilmu matematika, bahwa matematka itu sangatlah luas wawasannya. Dalam aspek apapun matematika tidak luput ketinggalan didalamnya. Oleh karena itu matematika sangat berperan penting dalam segala ilmu apapun.

Salah satu ilmu yang dipelajari dalam matematika adalah aljabar. Dalam aljabar ada struktur aljabar yang merupakan himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu operasi yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu (Azura et al., 2019). Dalam sebuah, aljabar operasi yang digunakan adalah operasi biner. Operasi biner $*$ pada suatu himpunan X adalah suatu aturan yang memasangkan setiap pasangan terurut (m, n) dengan $m, n \in X$ ke suatu elemen di X (Azura et al., 2019). Salah satu himpunan tak kosong dengan satu operasi biner itu adalah Aljabar BCI. Aljabar BCI merupakan suatu himpunna tak kosong dengan operasi biner " $*$ " dengan elemen khusus 0 untuk setiap $m, n, o \in X$ yang memenuhi empat aksioma yang ada pada Aljabar BCI (Saeid, 2010).

Lebih lanjut Aljabar BCI di definisikan suatu relasi biner $\leq$. Dimana untuk setiap $m \leq n$ jika dan hanya jika $m * n = 0$, untuk sebarang $m, n \in X$ (Lin Liu, 2000). Dari definisi relasi aljabar BCI memiliki beberapa sifat. Salah satu sifat yang muncul adalah sifat asosiatif. Dikatakan aljabar BCI assosiatif jika $(m * n) * o = m * (n * o)$ (Lin Liu, 2000).

Dalam suatu aljabar ada subaljabar yang merupakan subhimpunan dari suatu aljabar yang mana subaljabar tersebut tertutup terhadap operasi yang sama dan mewarisi sifat-sifat yang sama dengan yang dimiliki oleh aljabar tersebut (Azura et al., 2019). Hal ini juga berlaku pada aljabar BCI yaitu himpunan bagian dari aljabar BCI yang memenuhi beberapa aksioma aljabar BCI disebut subaljabar BCI. Selain itu himpunan bagian dari aljabar BCI yang lain dikenalkan konsep ideal. Ideal dari aljabar BCI X yaitu himpunan bagian tak kosong A yang memenuhi $0 \in X$, $m * n \in X, y \in X$ maka $m \in A$ (Bhatti and Chaudhry, 1990). Secara umum, setiap ideal pasti merupakan subaljabar akan tetapi setiap subaljabar belum tentu merupakan ideal.

Dalam konsep ideal pada Aljabar BCI dikembangkan menjadi beberapa ideal yaitu q-ideal, p-ideal, dan a-ideal. Dari ideal-ideal tersebut memiliki beberapa definisi yang sama dengan ideal yaitu setiap elemen $\{0\}$ merupakan elemen dari ideal. Pembeda antara ketiganya yaitu: (i) untuk q-ideal memiliki definisi $m * (n * o) \in I$ dan $n \in I$ maka $m * o \in I$ untuk semua $m, n, o \in X$, (ii) untuk p-ideal memiliki definisi $(m * o) * (n * o) \in I$ dan $n \in I$ maka $m \in I$ untuk semua $m, n, o \in X$, (iii) untuk a-ideal memiliki definisi $(m * o) * (0 * n) \in I$ dan $o \in I$ maka $n * m \in I$ untuk semua $m, n, o \in X$ (Saeid, 2010).

Setiap q-ideal dan p-ideal merupakan ideal. Akibatnya memunculkan pertanyaan, apakah a-ideal juga merupakan ideal? Sehingga perlu dikaji sifat dari a-ideal terhadap ideal dan sekaligus sifat a-ideal yang berkaitan dengan q-ideal dan p-ideal. Lebih lanjut, karena pada Aljabar BCI didefinisikan suatu sifat Assosiatif maka juga memunculkan pertanyaan bagaimana sifat a-ideal pada Aljabar BCI Assosiatif. Sehingga pada penelitian ini akan dikaji sifat yang berkaitan dengan Aljabar BCI Assosiatif dengan a-ideal.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan paparan latar belakang masalah diatas, rumusan masalah yang akan dikaji yaitu,

1. Bagaimana pengertian dan sifat a-ideal dari aljabar BCI?
2. Bagaimana sifat keterkaitan antara a-ideal dengan aljabar BCI assosiatif?

1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan peneliti melakukan penelitian ini adalah :

1. Untuk menguraikan dan menjelaskan tentang pengertian dan sifat a-ideal dari aljabar BCI
2. Untuk menguraikan dan menjelaskan tentang sifat keterkaitan antara a-ideal dengan aljabar BCI assosiatif.

1.4. Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah sebgai berikut.

1. Bagi penulis untuk menambah pengetahuan dan wawasan mengenai a-ideal pada Aljabar BCI dan Aljabar BCI Assosiatif
2. Bagi pembaca untuk sarana informasi dan bahan referensi terkait tentang a-ideal pada Aljabar BCI dan Aljabar BCI Assosiatif.

1.5. Sistematika Penulisan

Pada penelitian ini akan disusun menjadi lima bagian yang masing-masing akan diuraikan sebagai berikut:

1. **BAB I PENDAHULUAN**

   Bab ini berisi latar belakang masalah, rumususan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

2. **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

   Bab ini berisi tentang penjelasan teori tentang Aljabar BCI, Ideal pada BCI, q-ideal, p-ideal, serta hubungan aljabar pada integrasi keislaman.

3. **BAB III METODE PENELITIAN**

   Bab ini berisi tentang pemaparan metode penelitian yang digunakan, sehingga peneliti dapat terarah dengan baik dalam hal waktu pengerjaan maupun materi.

4. **BAB IV HASIL DAN PEMBAHSAN**

   Bab ini berisi tentang penjelasan hasil dan pembahasan terkait definisi dan sifat-sifat a-ideal pada Aljabar BCI dan keterkaitan antara a-ideal dengan Aljabar BCI Assosiatif, serta menjelaskan mengenai integrasi keilmuan mengenai pembuktian kebenaran.

5. **BAB V PENUTUP**

   Bab ini akan dijelaskan mengenai simpulan dan saran yang berdasar dari hasil penelitian.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan diuraikan tentang dasar teori yang akan digunakan untuk membantu penelitian ini mengenai definisi dan contoh dari Aljabar BCI, Ideal pada aljabar BCI, q-ideal pada aljabar BCI, p-ideal pada aljabar BCI, serta menjelaskan integrasi keislaman yang berhubungan dengan alajabar BCI.

2.1. Aljabar BCI

Definisi 2.1.1 *(Azura et al., 2019) Misalakan* $X, *, 0)$ *suatu himpunan tak kosong* X *dengan operasi biner* $*$ *dan elemen khusus* 0 *disebut Aljabar BCI jika untuk setiap* $m, n, o \in X$ *memenuhi aksioma berikut:*

1. $((m * n) * (m * o)) * (o * n) = 0$;
2. $(m * (m * n)) * n = 0$;
3. $m * m = 0$;
4. $m * n = 0$ *dan* $n * m = 0$ *sehingga* $m = n$.

Contoh 2.1.2 Misalkan $M_3 = \{0, 1, 2\}$. Didefinisikan operasi $(*)$ pada M_3 di Tabel 2.1. Himpunan $(M_3, *)$ dikategorikan aljabar BCI, sebab:

Tabel 2.1 Tabel Cayley Himpunan M_3 Terhadap Operasi $*$

$*$	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

1. Terpenuhinya aksioma pertama yaitu, $\forall m, n, o \in X$, berlaku $((m * n) * (m * o)) * (o * n) = 0$.

   - Untuk $m = 0$, maka diperoleh

     $((0 * 1) * (0 * 2)) * (2 * 1) = 0$

   - Untuk $m = 1$, maka diperoleh

     $((1 * 1) * (1 * 2)) * (2 * 1) = 0$

   - Untuk $m = 2$, maka diperoleh

     $((2 * 1) * (2 * 2)) * (2 * 1) = 0$

   Jadi terbukti untuk setiap $m, n, o \in M_3$, berlaku $((m*n)(m*o))*(o*n) = 0$

2. Terpenuhinya aksioma kedua yaitu, $\forall m, n \in M_3$, berlaku $(m*(m*n))*n = 0$.

   Untuk $m = 1, n = 0$, maka diperoleh $(1 * (1 * 0)) * 0 = 0$

   Jadi terbukti bahwa untuk semua $m, n \in M_3$, berlaku $(m * (m * n)) * n = 0$

3. Terpenuhinya aksioma ketigan yaitu, dari Tabel 2.1, jelas bahwa $\forall m \in M_3$, berlaku $m * m = 0$

4. Terpenuhinya aksioma keempat yaitu, dari Tabel 2.1, jelas bahwa $\forall m \in M_3$, jika $m * m = 0$, maka $m = m$

Terbukti $(M_3, *, 0)$ dikategorikan sebagai Aljabar BCI.

Contoh 2.1.3 Diberikan himpunan $X = \{0, j, k, l\}$. Didefinisikan operasi $(*)$ pada X di Tabel 2.2. Himpunan X merupakan aljabar BCI, sebab:

Tabel 2.2 Tabel Cayley Himpunan X terhadap operasi $*$

$*$	0	j	k	l
0	0	l	k	j
j	j	0	l	k
k	k	j	0	l
l	l	k	j	0

1. Terpenuhinya aksioma pertama yaitu, $\forall m, n, o \in X$, berlaku $((m * n) * (m * o)) * (o * n) = 0$.

   - Untuk $m = 0, n = 0$, dan $o = j$ maka diperoleh
     $((0 * 0) * (0 * j)) * (j * 0) = 0$

   - Untuk $m = j, n = 0$, dan $o = j$ maka diperoleh
     $((j * 0) * (j * j)) * (j * 0) = 0$

   - Untuk $m = k, n = 0$, dan $o = j$ maka diperoleh
     $((k * 0) * (k * j)) * (j * 0) = 0$

   - Untuk $m = l, n = 0$, dan $o = j$ maka diperoleh
     $((l * 0) * (l * j)) * (j * 0) = 0$

Jadi, terbukti untuk setiap $m, n, o \in X$, berlaku $((m*n)(m*o))*(o*n) = 0$

2. Terpenuhinya aksioma kedua yaitu, $\forall m, n \in X$, berlaku $(m*(m*n))*n = 0$.

   Untuk $m = 0, n = l$, maka diperoleh $(0*(0*l))*l = 0$

   Untuk $m = j, n = 0$, maka diperoleh $(j*(j*0))*0 = 0$

   Jadi terbukti untuk setiap $m, n \in X$, berlaku $(m*(m*n))*n = 0$

3. Terpenuhinya aksioma ketigan yaitu, dari Tabel 2.1, jelas bahwa $\forall m \in X$, berlaku $m*m = 0$

4. Terpenuhinya aksioma keempat yaitu, dari Tabel 2.1, jelas bahwa $\forall m \in X$, jika $m*m = 0$, maka $m = m$

Terbukti $(X, *, 0)$ dikategorikan kedalam Aljabar BCI.

Contoh 2.1.4 Diberikan himpunan $C = \{0, d, e\}$. Didefinisikan operasi $*$ pada X di Tabel 2.4. Himpunan C merupakan aljabar BCI, sebab:

Tabel 2.3 Tabel Cayley Himpunan C terhadap operasi $*$

$*$	0	d	e
0	0	0	e
d	d	0	e
e	e	e	0

1. Terpenuhinya aksioma pertama yaitu, $\forall m, n, o \in X$, berlaku $((m*n)*(m*o))*(o*n) = 0$.

   - Untuk $m = 0, n = d, o = e$, maka diperoleh

     $((0*d)*(0*e))*(e*d) = 0$

- Untuk $m = d, n = 0, o = 0$, maka diperoleh

  $((d * 0) * (d * 0)) * (0 * 0) = 0$

- Untuk $m = e, n = 0, o = d$, maka diperoleh

  $((e * 0) * (e * d)) * (d * 0) = 0$

Jadi, terbukti $\forall m, n, o \in X$, berlaku $((m * n)(m * o)) * (o * n) = 0$

2. Terpenuhinya aksioma kedua yaitu, $\forall m, n \in X$, berlaku $(m*(m*n))*n = 0$.

   Untuk $m = 0$, $n = d$, maka diperoleh $(0 * (0 * d)) * d = 0$

   Untuk $m = 0$, $n = e$, maka diperoleh $(0 * (0 * e)) * e = 0$

   Untuk $m = e$, $n = d$, maka diperoleh $(e * (e * d)) * d = 0$

   Jadi terbukti $\forall m, n \in X$, berlaku $(m * (m * n)) * n = 0$

3. Terpenuhinya aksioma ketigan yaitu, dari Tabel 2.1, jelas bahwa $\forall m \in X$, berlaku $m * m = 0$

4. Terpenuhinya aksioma keempat yaitu, dari Tabel 2.1, jelas bahwa $\forall m \in X$, jika $m * m = 0$, maka $m = m$

Terbukti $(C, *, 0)$ dikategorikan Aljabar BCI.

Contoh 2.1.5 Diberikan himpunan $D = \{0, d, e\}$. Didefinisikan operasi $*$ pada X di Tabel 2.4. Himpunan D bukan merupakan aljabar BCI, sebab:

Tabel 2.4 Tabel Cayley Himpunan D terhadap operasi $*$

$*$	0	d	e
0	0	0	e
d	d	0	e
e	e	e	e

Tidak berlaku untuk aksioma ke (3) yaitu $e \in D$ dimana $e * e = e \neq 0$.

Definisi 2.1.6 *(Bae Jun et al., 1998) Didefinisikan relasi terurut parsial pada Aljabar BCI X, yaitu $\leq$. Dimana untuk setiap $m \leq n$, jika dan hanya jika $m * n = 0$, untuk sebarang $m, n \in X$.*

Teorema 2.1.7 *(Saeid, 2010) Diberikan Aljabar BCI $(X, *, 0)$. Didefinisikan $(X, \leq)$ merupakan partially ordered set*

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $(X, \leq)$ memenuhi dari aksioma-aksioma *refleksif*, *antisimetris*, dan *transitif*.

1. Ambil sebarang $m \in X$. Akan dibuktikan $(X, \leq)$ bersifat *reflektif* yaitu $m \leq m$ untuk setiap $m \in X$. Diperhatikan berdasarkan Definisi2.1.1 poin (3) diperoleh $m * m = 0$ yang berarti $m \leq m$ berdasarkan Definisi 2.1.6. Sehingga terbukti $(X, \leq)$ bersifat *reflektif*.

2. Ambil sebarang $m, n \in X$. Akan dibuktikan $(X, \leq)$ bersifat *antisimetris* yaitu jika $m \leq n$ dan $n \leq m$ maka $m = n$ untuk setiap $m, n, o \in X$. Diperhatikan berdasarkan Definisi 2.1.6 diperoleh:

   $m \leq n$

   $$m * n = 0 \tag{2.1}$$

   dan $n \leq m$

   $$n * m = 0 \tag{2.2}$$

   Berdasarkan Definisi 2.1.1 poin (4) dari Persamaan 4.1 dan 2.2 dapat disimpulkan $m = n$. Sehingga terbukti $(X, \leq)$ bersifat *anti-simetris*.

3. Ambil sebarang $m, n, o \in X$. Akan dibuktikan $(X, \leq)$ bersifat *transitif* yaitu jika $m \leq n$ dan $n \leq o$, maka $m \leq o$. Jika dimisalkan $m \leq o$ maka berdasarkan Definisi 2.1.6 diperoleh:

$$m * n = 0 \tag{2.3}$$

dan $n \leq o$ maka diperoleh:

$$n * o = 0 \tag{2.4}$$

Akan ditunjukkan jika $m \leq n$ dan $n \leq o$, maka $m \leq o$. Karena akan ditunjukkan $m \leq o$ artinya $m * o = 0$. Diperhatikan berdasarkan Teorema 2.1.8 poin (1) diperoleh:

$$\begin{aligned} m * o &= (m * o) * 0 && [\text{Teorema 2.1.8 poin } (1)] \\ &= ((m * o) * 0) * 0 && [\text{Substitusi Persamaan 2.3 dan 2.4}] \\ &= ((m * o) * (m * n)) * (n * o) && [\text{Definisi 2.1.1 poin } (4)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga $(X, \leq)$ terbukti bersifat *transitif*.

Karena $(X, \leq)$ dapat memenuhi aksioma-aksioma *refleksif*, *antisimetris*, dan *transitif*, maka $(X, \leq)$ terbukti terdefinisi *partially ordered set* ■

Selajutnya dari definisi Aljabar BCI X dapat diturunkan beberapa sifat dari Aljabar BCI X, yang akan digunakan untuk membantu membuktikan beberapa teorema dari konsep Aljabar BCI X.

Teorema 2.1.8 *(Winarsih and Suryoto, 2014) Jika* $(X, *0)$ *adalah aljabar BCI, maka:*

untuk semua $m, n, o \in X$

1. $m * 0 = m$;
2. $m \leq n$ *berakibat* $m * o \leq n * o$ *dan* $o * n \leq o * m$;
3. $(m * n) * o = (m * o) * n$;
4. $0 * (m * n) = 0 \longrightarrow (0 * m) * (0 * n) = 0$;
5. $m * (m * (m * n)) = m * n$;

Bukti.

1. Akan ditunjukkan $m * 0 = m$.

   Dengan menggunakan Definisi 2.1.1 poin (4), akan dibuktikan

   (a) $(m * 0) * m = 0$; dan

   (b) $m * (m * 0) = 0$;

   Ambil sebarang $m \in X$. Diperhatikan,

   (a) Berdasarkan Definisi 2.1.1 poin (3) yang menyatakan $m * m = 0$, diperoleh

   $$\begin{aligned}(m * 0) * m &= (m * (m * m)) * m && [\text{Definisi 2.1.1 poin } (2), \\ & && (m * (m * n) * n) = 0] \\ &= 0\end{aligned}$$

(b) Untuk menunjukkan $m * (m * 0) = 0$, menggunakan Definisi 2.1.1 poin (4), akan dibuktikan

$(m * (m * 0)) * 0 = 0$ dan $0 * (m * (m * 0)) = 0$.

i. Dari Definisi 2.1.1 poin (2), jelas bahwa $(m * (m * 0)) * 0 = 0$.

ii. Dari Definisi 2.1.1 poin (2), diperoleh

$$
\begin{aligned}
& 0 * (m * (m * 0)) \\
& = (m * (m * 0)) * 0 * (m * (m * 0)) && \text{[Definisi 2.1.1 poin } (3) \\
& && m * m = 0] \\
& = ((m * (m * 0)) * (m * m)) * (m * (m * 0)) && \text{[Definisi 2.1.1 poin } (1)] \\
& = 0
\end{aligned}
$$

Karena $(m * 0) * m = 0$ dan $m * (m * 0) = 0$. Jadi $m * 0 = m$.

2. Diketahui: $m \leq n$ artinya $m * n = 0$

Akan ditunjukkan:

(a) $(o * n) \leq (o * m)$ dengan kata lain $(o * n) * (o * m) = 0$;

(b) $(m * o) \leq (n * o)$ dengan kata lain $(m * o) \leq (n * o) = 0$;

Ambil sebarang $m, n, o \in X$.

(a) Diperhatikan, dari Definisi aljabar BCI 2.1.1 poin (1) diperoleh

$$((o * n) * (o * m)) * (m * n) = 0 \qquad [\text{karena } m * n = 0]$$

$$((o * n) * (0 * m)) * 0 = 0 \qquad [\text{Teorema 2.1.8 poin } (1)]$$

$$((o * n) * (o * m)) = 0$$

Jadi $((o * n) \leq (o * m))$.

(b) Diperhatikan, dari Definisi aljabar BCI 2.1.1 poin (1) diperoleh

$$((m * o) * (m * n)) * (o * n) = 0 \qquad [\text{karena } m * n = 0]$$

$$((m * o) * 0) * (o * n) = 0 \qquad [\text{Teorema 2.1.8 poin } (1)]$$

$$((m * o) * (o * n)) = 0$$

Jadi $((m * o) \leq (o * n))$.

3. Akan ditunjukkan $(m * n) * o = (m * o) * n$.

   Ambil sebarang $m, n, o \in X$. Dari Definisi aljabar BCI 2.1.1 poin (2), maka diperoleh

$$(m * (m * o)) * o = 0 \quad [\text{Definisi } 2.1.6, m \leq n \Rightarrow m * n = 0]$$

$$(m * (m * o)) \leq o \quad [\text{Teorema 2.1.8 poin } (2)$$

$$m \leq n \rightarrow (o * n) \leq (o * m) \text{dan} (m * o) \leq (n * o)]$$

$$(m * n) * o \leq (m * n) * m * (m * o) \tag{2.5}$$

Di lain pihak, dari Definisi aljabar BCI 2.1.1 poin (1), sehingga dipunyai

$((m*n)*(m*(m*o)))*((m*o)*n)=0$ [Definisi 2.1.6, $m \leq n \Rightarrow m*n=0$]

$$((m*n)*(m*(m*o))) \leq ((m*o)*n) \tag{2.6}$$

Karena $(\leq)$ didefinisikan relasi terurut parsial, di mana $\leq$ berlaku sifat transitif, maka dari Persamaan 2.5 dan Persamaan 2.6 diperoleh

$$((m*n)*o) \leq ((m*o)*n) \tag{2.7}$$

Dilain itu, jika ada pada Persamaan 2.7, untuk n diganti o dan o diganti n maka diperoleh

$$((m*o)*n) \leq ((m*n)*o) \tag{2.8}$$

Karena $\leq$ didefinisikan relasi terurut parsial, di mana $\leq$ berlaku sifat antisimetris, maka dari Persamaan 2.7 dan Persamaan 2.8 diperoleh $(m*n)*o=(m*o)*n$

4. Diketahui $0*(m*n)$

   Akan dibuktikan $(0*m)*(0*n)$.

Dengan menggunkana Definisi Aljabar BCI 2.1.1 poin (3), maka diperoleh :

$0 * (m * n)$	$[(0 * n) * (0 * n) = 0]$
$= ((0 * n) * (0 * n)) * (m * n)$	[Definisi Aljabar BCI 2.1.1 poin (3) $m * m = 0]$
$= (((m * m) * n) * (0 * n) * (m * n)$	[Teorema 2.1.8 poin (3)]
$= (((m * m) * n) * (m * n) * (0 * n)$	[Teorema 2.1.8 poin (3)]
$= (((m * m) * (m * n) * n) * (0 * n)$	[Teorema 2.1.8 poin (3)]
$= (((m * n) * (m * n) * m) * (0 * n)$	[Teorema 2.1.8 poin (3)]
$= (0 * m) * (0 * n)$	

5. Akan ditunjukkan $0 * (0 * (0 * m)) = 0 * m$.

   Berdasarkan Definisi Aljabar BCI 2.1.1 poin (4) analog ditunjukkan

   (a) $(0 * (0 * (0 * m))) * (0 * m) = 0$; dan

   (b) $(0 * m) * (0 * (0 * (0 * m))) = 0$;

   Ambil sebarang $m \in X$. Diperhatikan,

   (a) Dari Definisi aljabar BCI 2.1.1 poin (2), jelas bahwa $(0 * (0 * (0 * m))) * (0 * m) = 0$.

(b) Dari Definisi aljabar BCI 2.1.1 poin (1), maka diperoleh

$$((0*m)*(0*(0*(0*m))))*((0*(0*m))*m) = 0 \quad \text{[Definisi Aljabar BCI 2.1.1 poin (2)]}$$

$$((0*m)*(0*(0*(0*m))))*0 = 0 \quad \text{[Teorema 2.2.8 poin (1)]}$$

$$((0*m)*(0*(0*(0*m)))) = 0$$

Karena $(0*(0*(0*m)))*(0*m) = 0$ dan $(0*m)*(0*(0*(0*m))) = 0$. Jadi $0*(0*(0*m)) = 0*m$.

■

Definisi 2.1.9 *(Lin Liu, 2000) Diberikan Aljabar BCI $(X, *, 0)$ dengan $I \subseteq X$, dan I bukan himpunan tak kosong. Himpunan I disebut Aljabar BCI assosatif jika $(m*n)*o = m*(n*o)$.*

Contoh 2.1.10 Berdasarkan Contoh 2.1.4 himpunan C merupakan aljabar BCI assosiatif sebab:

- jika $m = 0$, $n = d$, dan $o = e$ maka:

$$(m*n)*o = m*(n*o)$$

$$(0*d)*e = 0*(d*e)$$

$$0*e = 0*e$$

$$e = e$$

- jika $m = d$, $n = e$, dan $o = 0$ maka:

$$(m * n) * o = m * (n * o)$$
$$(d * e) * 0 = d * (e * 0)$$
$$e * 0 = d * e$$
$$e = e$$

- jika $m = e$, $n = 0$, dan $o = d$ maka:

$$(m * n) * o = m * (n * o)$$
$$(e * 0) * d = e * (0 * d)$$
$$e * d = e * 0$$
$$e = e$$

2.2. Ideal Aljabar BCI

Misal dipunyai aljabar BCI X, maka dapat dibentuk himpunan bagian yang juga merupakan aljabar BCI. Selain itu, dapat didefinisikan suatu himpunan pada aljabar BCI yang memenuhi beberapa aksioma, dan disebut ideal. Berikut akan dipaparkan definisi ideal dari Aljabar BCI.

Definisi 2.2.1 *(Hao and Li, 2004) Diberikan suatu Aljabar BCI* $(X, *, 0)$ *dengan* $I \subseteq X$*, dan* I *bukan himpunan tak kosong. Himpunan* I *disebut ideal pada aljbar BCI* X *jika dapat memenuhi aksioma:*

1. $0 \in I$;
2. $m * n \in I$ *dan* $n \in I$ *berakibat* $m \in I$;

Contoh 2.2.2 Berdasarkan Contoh 2.1.3 didapatkan himpunan $I = \{0, b\}$ merupakan ideal terhadap aljabar BCI $X = \{0, j, k, l\}$ karena:

1. Karena $I = \{0, k\}$, maka terbukti bahwa 0 anggota di I.
2. Untuk $m * n \in I$ dan $n \in I$ maka diperoleh $m \in I$
   - $m * n = k * k = 0 \in I$ dan $n = k \in I \Rightarrow m = k \in I$

Karena aksioma (1) dan aksioma (2) terpenuhi. Maka himpunan $I = \{0, k\}$ terbukti ideal pada aljabar BCI X.

Berikut diberikan contoh himpunan yang bukan termasuk kategori ideal dari aljabar BCI X.

Contoh 2.2.3 Berdasarkan Contoh 2.1.2 didapatkan himpunan $I = \{0, 1\}$ bukan termasuk kategori ideal pada aljabar BCI $X = \{0, 1, 2\}$ sebab:

1. Karena $I = \{0, 1\}$, maka terbukti 0 anggota di I.
2. Untuk $m * n \in I$ dan $n \in I$ maka diperoleh $m \in I$
   - $m * n = 0 * 1 = 2 \notin I$ dan $n = 1 \in I \Rightarrow m = 0 \in I$

Karena aksioma (2) tidak memenuhi definisi ideal maka I bukan termasuk kategori ideal pada aljabar BCI X.

2.2.1. q-ideal

Ideal dari aljabar BCI memiliki beberapa jenis ideal, salah satunya q-ideal. Berikut diberikan definisi dari q-ideal.

Definisi 2.2.4 *(Yang, 2014) Diberikan Aljabar BCI* $(X, *, 0)$ *dengan* $I \subseteq X$*, dan* $I = \{\emptyset\}$ *. Himpunan* I *disebut q-ideal pada Aljabar BCI* X *jika dapat memenuhi aksioma berikut:*

1. $0 \in I$*;*
2. $m * (n * o) \in I$ *dan* $n \in I$ *maka* $m * o \in I$*,* $\forall m, n, o \in X$*;*

Contoh 2.2.5 Berdasarkan Contoh 2.1.4 himpunan $I = \{0, d\}$ merupakan q-ideal pada aljabar BCI $C = \{0, d, e\}$ sebab:

1. Karena $I = \{0, d\}$, maka jelas 0 anggota di I.
2. Untuk $m * (n * o) \in I$ dan $n \in I$ maka $m * o \in I$ untuk semua $m, n, o \in X$
   - $m * (n * o) = 0 * (0 * d) = 0 \in I$ dan $0 \in I$ maka $0 * d \in I$
   - $m * (n * o) = 0 * (d * d) = 0 \in I$ dan $d \in I$ maka $0 * d \in I$
   - $m * (n * o) = d * (0 * d) = d \in I$ dan $0 \in I$ maka $d * d \in I$
   - $m * (n * o) = d * (d * d) = d \in I$ dan $d \in I$ maka $d * d \in I$

Karena aksioma (1) dan aksioma (2) terpenuhi. Maka terbukti $I = \{0, d\}$ merupakan q-ideal pada Aljabar BCI X

Teorema 2.2.6 *(Yang, 2014) Setiap q-ideal pada aljabar BCI X merupakan ideal.*

Bukti. Misal I adalah q-ideal. Dengan kata lain terpenuhi

1. $0 \in I$;
2. $m * (n * o) \in I$ dan $n \in I$ maka $m * o \in I, \forall m, n, o \in X$.

Akan dibuktikan I adalah ideal, yaitu

1. Berdasarkan Definisi 2.2.4 merupakan definisi dari q-ideal pada aljabar BCI X jelas $0 \in I$.
2. Akan ditunjukan $m * n \in I$ dan $n \in I$, maka $m \in I$

   Berdasrakan Definisi q-ideal 2.2.4 poin (2), jika dimisalkan $o = 0$, maka diperoleh :

   $$\begin{aligned} m * (n * o) &= m * (n * 0) && \text{Teorema 2.1.8 poin } (1) \\ & && n * 0 = n \\ &= m * n \in I \end{aligned}$$

   Karena I adalah q-ideal, jika $m * n \in I$ dan $n \in I$, maka $m * o = m * 0 = m \in I$.

   Karena terpenuhi $m * n \in I$ da $n \in I$ maka $m \in I$.

Jadi berdasarkan pembuktian 1 dan 2 diperoleh I adalah ideal. ■

Teorema 2.2.7 *(Lin Liu, 2000) Jika I adalah ideal pada aljabar BCI X, maka pernyataan berikut ekuivalen:*

1. *I adalah $q-ideal$ pada aljabar BCI X;*
2. *Jika $m*(0*n) \in I$ maka $m*n \in I$ untuk semua $m,n \in X$;*
3. *Jika $m*(n*o) \in I$ maka $(m*n)*o \in I$ untuk semua $m,n,o \in X$.*

Bukti.

$(1) \Rightarrow (2)$

Diketahui I adalah q-ideal artinya $0 \in I$, dan $m*(n*o) \in I, n \in I$ maka $m*o \in I$, $\forall m,n,o \in X$.

Akan ditunjukkan $m*(0*n) \in I$ maka $m*n \in I, \forall m,n \in X$.

Ambil sembarang $m,n \in X$, dimana $m*(0*n) \in I$.

Akan ditunjukkan $m*n \in I$.

Karena $0 \in I$ dan berlaku $m*(0*n) \in I$, berdasarkan diketahui diperoleh $m*n \in I$.

$(2) \Rightarrow (3)$

Diketahui Jika $m*(0*n) \in I$ maka $m*n \in I, \forall m,n \in X$.

Akan ditunjukkan Jika $m*(n*o) \in I$ maka $(m*an)*o \in I, \forall m,n,o \in X$.

Ambil sembarang $m,n,o \in X$ dipunyai $m*(n*o) \in I$.

Akan ditunjukkan $(m*n)*o \in I$.

Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $(m*n)*(0*o) \in I$.

Diperhatikan berdasarkan Teorema 2.1.8 poin (3) diperoleh

$$((m*n)*(0*o))*(m*(n*o)) \qquad \text{[Teorema 2.1.8 poin (3)]}$$

$$= ((m*n)*(m*(n*o)))*(0*o) \tag{2.9}$$

Dilain pihak berdasarkan Definisi 2.1.1 poin (1)

$$((m * n) * (m * (n * o))) * ((n * (n * o) * n) = 0 \tag{2.10}$$

Berdasarkan Definisi 2.1.6 maka Persamaan 2.10 menjadi

$$((m * n) * (m * (n * o)) \leq (n * (n * o) * n) \tag{2.11}$$

Berdasarkan Teorema 2.1.8 poin (2) maka Pertidaksamaan 2.11 menjadi

$((m * n) * (m * (n * o)) * (0 * o) \leq (n * (n * o) * n) * (0 * o)$

Akibatnya Persamaan 2.9 dan Pertidaksamaan 2.11 diperoleh

$((m * n) * (0 * o)) * (m * (n * o))$	[Teorema 2.1.8 poin (3)]
$= ((m * n) * (m * (n * o)) * (0 * o))$	
$\leq ((n * o) * n) * (0 * o)$	[Teorema 2.1.8 poin (3)]
$= ((n * n) * o) * (0 * o)$	[Definisi 2.1.1 poin (3)
	$n * n = 0]$
$= (0 * o) * (0 * o)$	[Definisi 2.1.1 poin (3)
	$(0 * o) * (0 * o) = 0]$
$= 0$	

Karena I ideal, maka $((m * n) * (0 * o)) * (m * (n * o)) \in I$ dan karena berdasarkan diketahui $m * (n * o) \in I$, jadi $((m * n) * (0 * o)) \in I$.

Berdasarkan diketahui $(m * n) * (0 * o) \in I$ maka $(m * n) * o \in I$.

$(3) \Rightarrow (1)$

Diketahui Jika $m * (n * o) \in I$ maka $(m * n) * o \in I$, untuk semua $m, n, o \in$

X. Akan ditunjukkan I adalah q-ideal, dengan kata lain akan ditunjukkan $0 \in I$, $m * (n * o) \in I$ dan $n \in I$ maka $m * o \in I, \forall m, n, o \in X$

1. Karena I adalah ideal maka berdasarkan Definisi 2.2.1 poin (1) himpunan I merupakan ideal.

2. Diketahui $m * (n * o) \in I$ dan $n \in I$. Akan ditunjukkan $m * o \in I$

   Diperhatikan berdasarkan diketahui diperoleh

   $$\begin{aligned} & (m * n) * o \in I && \text{[Teorema 2.1.8 poin (3)]} \\ = & (m * o) * n \in I \end{aligned}$$

   Selanjutnya karena $n \in I$ maka $m * o \in I$ dan karena I adalah ideal, maka diperoleh $m * o \in I$.

■

Teorema 2.2.8 *(Lin Liu, 2000) Diberikan I merupakan ideal pada aljabar BCI X. Jika untuk setiap $m \in I$ dan $n \in X$ berlaku $m * n \in I$, maka I adalah q-ideal.*

Bukti. Dipunyai X merupakan aljabar BCI, I ideal dari X, untuk setiap $m \in I$ dan $n \in X$ berlaku $m * n \in I$.

Akan dibuktikan I merupakan q-ideal, dengan kata lain akan dibuktikan $0 \in I$, $m * (n * o) \in I$ dan $n \in X$ maka $m * o \in I, \forall m, n, o \in X$.

1. Berdasarkan Definisi ideal pada aljabar BCI X, jelas $0 \in I$.

2. Dipunyai $m * (n * o) \in I$ dan $n \in I$.

   Akan ditunjukkan $m * o \in I$.

   Ambil sembarang $m, n, o \in X$. Karena I ideal dan dipunyai $m * (n * o) \in I$

dan $o \in X$ maka berdasarkan diketahui diperoleh $(m * (n * o)) * o \in I$. Berdasarkan Teorema 2.5 poin (3) diperoleh:

$$(m * o) * (n * o) \in I \tag{2.12}$$

Karena I ideal dan dipunyai $n \in I$ dan $o \in X$ maka berdasarkan diketahui diperoleh

$$n * o \in I \tag{2.13}$$

Berdasarkan (2.12) dan (2.13) dan karena I ideal sehingga diperoleh $m * o \in I$.

■

2.2.2. p-ideal

Selain q-ideal, ideal dari aljabar BCI memiliki jenis lain yaitu p-ideal. Berikut diberikan definisi dari p-ideal

Definisi 2.2.9 *(Lele et al., 2008) Diberikan Aljabar BCI $(X, *, 0)$ dengan $I \subseteq X$, dan I bukan himpunan tak kosong. Himpunan I disebut p-ideal dari aljabar BCI X jika dapat memenuhi aksioma berikut:*

1. $0 \in I$;
2. $(m * o) * (n * o) \in I$ *dan* $n \in I$ *mengakibatkan* $m \in I$.

Contoh 2.2.10 Berdasarkan Contoh 2.1.4 terdapat himpunan $I = \{0, d\}$ merupakan p-ideal pada aljabar BCI $C = \{0, d, e\}$ sebab:

1. Karena $I = \{0, d\}$, maka jelas 0 anggota di I.

2. Untuk $(m * o) * (n * o) \in X$ dan $n \in X$ maka $m \in X$

   - $(m * o) * (n * o) = (0 * 0) * (0 * 0) = 0 \in X$ dan $n \in X$ maka $m \in X$
   - $(m * o) * (n * o) = (0 * 0) * (d * 0) = 0 \in X$ dan $n \in X$ maka $m \in X$
   - $(m * o) * (n * o) = (0 * d) * (d * d) = 0 \in X$ dan $n \in X$ maka $m \in X$
   - $(m * o) * (n * o) = (d * d) * (d * d) = 0 \in X$ dan $n \in X$ maka $m \in X$

Karena aksioma (1) dan aksioma (2) terpenuhi. Maka terbukti $I = \{0, m\}$ merupakan p-ideal dari aljabar BCI X

Teorema 2.2.11 *(Xiaohong et al., 1994) Setiap p-ideal merupakan ideal.*

Bukti. Misal I adalah p-ideal. Artinya terpenuhi $0 \in I$, dan $(m * o) * (n * o) \in I$ dan $n \in I$ mengakibatkan $m \in I$.

Akan dibuktikan I merupakan ideal, dengan kata lain akan dibuktikan $0 \in I$, dan $m * n \in I$ dan $n \in I$ maka $m \in I$.

1. Diperhatikan berdasarkan Definisi p-ideal pada aljabar BCI jelas $0 \in I$.

2. Akan dibuktikan $m * n \in I$ dan $n \in I$ maka $m \in I$

   Diperhatikan dari Definisi p-ideal 2.2.9 poin (2) misalkan $o = 0$, diperoleh :

$$\begin{aligned} (m * o) * (n * o) &= (m * 0) * (n * 0) && \text{[Teorema 2.1.8 poin } (1) \\ & && m * 0 = m \text{ dan } n * 0 = n] \\ &= m * n \in I \end{aligned}$$

   Berdasarkan diketahui $n \in I$. Karena $m * n \in I$ dan $n * m \in I$, maka diperoleh $m \in I$.

Karena poin (1) dan poin (2) terpenuhi jadi terbukti I ideal. ■

Lemma 2.2.12 *(Xiaohong et al., 1994) Misalkan I adalah ideal dari aljabar BCI X. Jika I merupakan p-ideal maka $0 * (0 * m) \in I$ mengakibatkan $m \in I$.*

Bukti. Diketahui I adalah p-ideal dan $0 * (0 * m) \in I$

Akan ditunjukkan $m \in I$, maka berdasarkan definisi aljabar BCI 2.1.1 poin (3) dipunyai

$$0 * (0 * m) = (m * m) * (0 * m) \in I$$

Karena $0 \in I$ dan berdasarkan Definisi p-ideal 2.2.9 poin (2) yaitu $(m * m) * (0 * m) \in I$ dan $0 \in I$ maka diperoleh $m \in I$. ■

2.3. Integrasi Keilmuan

Aljabar pertama kali dikemukakkan oleh matematikawan dari Persia bernama Al- Khawarizmi. Aljabar merupakan konsep dasar matematika dari konsep aljabar matematikawan mengemukakkan konsep-konsep baru yang membuat matematika semakin berkembang (Huda and Mutia, 2017).

Dalam kosep matematika setiap Aljabar memiliki ketentuan masing-masing, agar bisa dikategorikan dalam sebuah konsep matematika yang benar. Salah satu konsep aljabar yaitu pada Aljabar BCI yang merupakan suatu himpunan tak kosong yang dioperasikan dengan suatu operasi biner dan memenuhi empat aksioma (Yisheng, 2016). Aljabar BCI sudah mempunyai ketentuan tersendiri seperti aljabar yang lainnya. Oleh karena itu, sebuah himpunan dikatakan benar sebagai anggota Aljabar BCI apabila sudah memenuhi aksioma-aksioma aljabar BCI tersebut.

Matematika adalah ilmu pasti yang membutuhkan pembuktian kebenaran dan kesepakatan bersama untuk menghasilkan teori yang benar. Dalam hal ini ilmu matematika dengan islam memiliki keterkaitan, hampir setiap teori dalam matematika memilki nilai yang sama dengan teori yang ada di agama islam. Dalam Al-Qur'an juga dijelaskan tentang teori kebenaran yang dijelaskan dalam firman Allah pada surah An-Nisa' ayat 174, yang berbunyi:

يٰٓاَيُّهَا النَّاسُ قَدْ جَاۤءَكُمْ بُرْهَانٌ مِّنْ رَّبِّكُمْ وَاَنْزَلْنَآ اِلَيْكُمْ
نُوْرًا مُّبِيْنًا

Artinya : "*Wahai manusia! Sesungguhnya telah sampai kepadamu bukti kebenaran dari Tuhanmu, (Muhammad dengan mukjizatnya) dan telah Kami turunkan kepadamu cahaya yang terang benderang (Al-Qur'an).*"

Dari ayat tersebut menjelaskan seruan Allah kepada seluruh umat manusia, baik Ahli Kitab maupun orang-orang yang beriman dari umat Nabi Muhammad. Bahwasannya telah sampai bukti kebenaran yang amat jelas dari Allah SWT, yaitu dengan diutusnya Nabi Muhammad SAW dengan bukti kenabian yang amat nyata. Selain itu juga diturunkan pula kitab suci Al-Qur'an yang cahaya petunjuknya menerangi umat manusia. Dalam hal ini sebagai umat muslim wajib mengikuti ajaran yang sudah diajarkan oleh Rasulullah. Sebagaimana ditegaskan dalam surat An-Nisa' ayat 80.

Artinya : "*Barangsiapa yang mentaati Rasul itu, Sesungguhnya ia telah mentaati Allah. dan Barangsiapa yang brpaling (dari ketaatan itu), maka Kami tidak mengutusmu untuk menjadi pemelihara bagi mereka.*"

مَنْ يُّطِعِ الرَّسُوْلَ فَقَدْ اَطَاعَ اللّٰهَ ۚ وَمَنْ تَوَلّٰى فَمَآ اَرْسَلْنٰكَ
عَلَيْهِمْ حَفِيْظًا ۗ

Sebagai seorang muslim, kita hendaknya mengkaji lebih dalam kemudian diterapkan atau diamalkan dalam kehidupan sehari-hari. Adapun salah satu contoh ibadah yang disunnahkan adalah mengerjakan puasa sunnah (Rahmi, 2015).

Puasa Sunnat (nafal) adalah puasa yang apabila dikerjakan akan mendapatkan pahala dan apabila tidak dikerjakan tidak berdosa (Rahmi, 2015). Adapun puasa sunnat itu antara lain :

1. Puasa 6 (enam) hari di bulan Syawal
2. Puasa Tengah bulan (13, 14, 15) dan tiap-tiap bulan Qomariyah
3. Puasa hari senin dan hari kamis
4. Puasa hari Arafah (Tanggal 9 Dzulhijjah atau Haji)
5. Puasa tanggal 9 dan 10 Muharram
6. Puasa Nabi Daud a.s (satu hari berpuasa satu hari berbuka)
7. Puasa bulan Rajab, Sya'ban dan pada bulan-bulan suci (Rahmi, 2015)

Pada tiap-tiap puasa sunnat diatas memiliki syarat dan ketentuan masing-masing. Misalkan saat bertepatan dengan tanggal 9 Dzhulhijjah kita berpuasa sunnah hari Arafah, dari Abu Qatadah Nabi Muhammad SAW bersabda: *"Puasa hari Arafah itu menghapuskan dosa dua tahun, satu tahun yang telah lalu dan satu tahun* *yang akan datang"* (H. R. Muslim). Jadi puasa sunnat di atas memiliki ketentuan-ketentuan yang harus dipenuhi (dilakukan disaat waktu yang sudah ditentukan). Begitu pula dengan konsep Aljabar. Setiap Alajabar masing-masing memiliki kriteria yang khas.

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bab ini akan menjelaskan mengenai metode penelitian, sehingga penelitian ini dapat terarah dengan baik dalam hal materi dan waktu pengerjaannya.

3.1. Jenis dan Sumber Data

Penelitian ini dikategorikan ke dalam jenis penelitian kualitatif. Pengertian penelitian kualitatif adalah suatu penelitian yang ditujukan untuk mendeskripsikan dan menganilisis yang hasilnya akan digunakan untuk menemukan karakteristik dan penjelasan yang mengarah pada penarikan kesimpulan (Rahmat, 2019). Dengan kata lain, penelitian ini juga dapat dikategorikan sebagai penelitian kajian pustaka yang memiliki arti serangkaian proses yang berkenaan dengan metode pengumpulan kajian pustaka, membaca, mencatat serta mengolah bahan koleksi berupa buku maupun jurnal tanpa riset lapangan (Bachri, 2010). Penelitian ini menguraikan dan menggambarkan secara jelas a-ideal pada aljabar BCI dan hubungan antara a-ideal dengan aljabar BCI assosiatif serta menjabarkan secara terperinci teorema-teorema yang terkait. Selain itu, dalam penelitian ini akan membahas tebtang definisi dan sifat-sifat yang terkaitdari Ideal dan aljabar BCI.

Data yang digunakan dalam penelitian ini berasal dari jurnal, buku serta sumber referensi lain yang mendukung. Selain itu, digunakan pula data yang diperoleh dari referensi-referensi mengenai aljabar, khususnya konsep yang berkaitan dengan a-deal pada aljabar BCI dan aljabar BCI assosiatif.

3.2. Metode Pengumpulan Data

Pengumpulan data dilakukan dengan melakukan observasi secara tidak langsung, yaitu dengan mengumpulkan data berdasarkan refrensi yang berkaitan dengan aljabar BCI. Dari berbagai jurnal yang sudah terkumpul, kemudian mengambil satu jurnal sebagai refrensi utama. Sehingga diperoleh judul q-ideals and a-ideals in BCI-Algebras oleh Yong Lin Liu, Jie Meng, Xiao Hong Zhang dan Zhen Cai Yue. Dari jurnal tersebut, dilakukan analisa mengenai konsep a-ideal dari aljabar BCI dan aljabar BCI assosiatif serta sifat dan teorema yang terkait.

3.3. Tahapan Penelitian

Beberapa tahapan dan analisa pembahasan dalam penyelesaiannya sebagai berikut:

1. Melakukan studi literatur yang berkaitan dengan penelitian meliputi buku, jurnal dan sumber-sumber referensi lain yang mendukung.
2. Menjelaskan denisi dan membuktikan teorema yang berkaitan dengan Aljabar BCI, Aljabar BCI Assosiatif, Ideal pada Aljabar BCI, q-ideal dan p-ideal.
3. Menjelaskan definisi dan membuktikan teorema dari a-ideal pada aljabar BCI.
4. Menjelaskan keterkaitan antara a-ideal dengan alajabar BCI assosatif serta membuktikan teorema pada aljabar BCI Assosiatif.
5. Menyimpulkan hasil analisis yang telah dilakukan.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dijelakan tentang definisi dan sifat-sifat dari a-ideal pada Aljabar BCI dan keterkaitan antara a-ideal dengan Aljabar BCI Assosiatif, serta integrasi keilmuan mengenai pembuktian kebenaran.

4.1. a-ideal

Definisi 4.1.1 *(Lin Liu, 2000) Misalkan* $(X, *, 0)$ *suatu aljabar BCI dengan* $I \subseteq X$ *dan* $I \neq \varnothing$. *Himpunan* I *disebut a-ideal dari aljabar BCI* X *jika memenuhi beberapa kondisi yaitu untuk semua* $m, n, o \in X$*, berlaku*

1. $0 \in I$
2. $(m * o) * (0 * n) \in I$ *dan* $o \in I$ *yang berarti* $n * m \in I$ *untuk semua* $m, n, o \in X$.

Contoh 4.1.2 Berdasarkan Contoh 2.1.4 himpunan $I = \{0, d\}$ merupakan a-ideal pada Aljabar BCI $C = \{0, d, e\}$ sebab:

1. Karena $I = \{0, d\}$, maka jelas 0 anggota di I.
2. Untuk $(m * o) * (0 * n) \in I$ dan $o \in I$ yang berarti $n * m \in I$ untuk semua $m, n, o \in X$.
   - Untuk $m = d$ dan $n, o = 0 \longrightarrow (d * 0) * (0 * 0) \in I$ dan $o \in I$ yang berarti $n * m \in I$ untuk semua $m, n, o \in X$.

- Untuk $n = d$ dan $m, o = 0 \longrightarrow (0 * 0) * (0 * d) \in I$ dan $o \in I$ yang berarti $n * m \in I$ untuk semua $m, n, o \in X$.
- Untuk $o = d$ dan $m, n = 0 \longrightarrow (0 * d) * (0 * 0) \in I$ dan $o \in I$ yang berarti $n * m \in I$ untuk semua $m, n, o \in X$.

Contoh 4.1.3 Berdasarkan Contoh 2.1.4 himpunan $I = \{0, e\}$ merupakan a-ideal pada Aljabar BCI $C = \{0, d, e\}$ sebab:

1. Karena $I = \{0, e\}$, maka jelas 0 anggota di I.
2. Untuk $(m * o) * (0 * n) \in I$ dan $o \in I$ yang berarti $n * m \in I$ untuk semua $m, n, o \in X$.
    - Untuk $m = e$ dan $n, o = 0 \longrightarrow (e * 0) * (0 * 0) \in I$ dan $o \in I$ yang berarti $n * m \in I$ untuk semua $m, n, o \in X$.
    - Untuk $n = e$ dan $m, o = 0 \longrightarrow (0 * 0) * (0 * e) \in I$ dan $o \in I$ yang berarti $n * m \in I$ untuk semua $m, n, o \in X$.
    - Untuk $o = e$ dan $m, n = 0 \longrightarrow (0 * e) * (0 * 0) \in I$ dan $o \in I$ yang berarti $n * m \in I$ untuk semua $m, n, o \in X$.

Teorema 4.1.4 *(Lin Liu, 2000) Misalkan X adalah Aljabar BCI. Setiap a-ideal merupakan ideal.*

Bukti. Misalkan I adalah a-ideal, artinya $0 \in I$, dan $(m * o) * (0 * n) \in I$ dan $o \in I$ yang berarti $n * m \in I$ untuk setiap $m, n, o \in X$.
Akan dibuktikan I merupakan ideal. Atau dengan kata lain akan dibuktikan $0 \in I$ dan $m * n \in I$ dan $n \in I$ maka $m \in I$.

1. Karena I merupakan a-ideal maka jelas $0 \in I$.

2. Diketahui $m * n \in I$ dan $n \in I$. Akan ditunjukkan $m \in I$.

   Berdasarkan Teorema 2.1.8 poin (1) dan Definisi 2.1.1 poin (3) diperoleh $m * o = (m * o) * (0 * 0) \in I$. Karena $o \in I$ dan $(m * o) * (0 * 0) \in I$ maka berdasarkan diketahui

   $$0 * m \in I$$

   Lebih lanjut misalkan $o = n = 0$ diperoleh

   $$\begin{aligned}(m * o) * (0 * n) &= (m * 0) * (0 * 0)\\ &= (m * 0) * 0\\ &= (m * 0)\\ &= m \in I\end{aligned}$$

   Karena $0 \in I$, $m \in I$ dan I adalah a-ideal, maka $0 * m \in I$.

   Karena $0 \in I$ dan $0 * m \in I$, maka

   $$0 * (0 * m) \in I. \tag{4.1}$$

   Selanjutnya dimisalkan $m = o = 0$ diperoleh

   $$\begin{aligned}(m * o) * (0 * n) &= (0 * 0) * (0 * n)\\ &= 0 * (0 * n) \in I\end{aligned}$$

   Karena $0 \in I$, $0 * (0 * n) \in I$ dan I adalah a-ideal, maka $n * 0 = n \in I$

   Berdasarkan 4.1 dan Definisi 2.1.1 poin (3) diperoleh

   $$(0 * 0) * (0 * m) \in I$$

Karena I adalah a-ideal diperoleh $m * 0 = m \in I$.

Jadi berdasarkan poin (1) dan (2) terbukti I merupakan ideal. ■

Teorema 4.1.5 *(Lin Liu, 2000) Diberikan ideal I pada Aljabar BCI X, pernyataan berikut saling ekuivalen:*

1. *I adalah a-ideal pada X;*
2. *$(m * o) * (0 * n) \in I$ maka $n * (m * o) \in I$;*
3. *$m * (0 * n) \in I$ maka $n * m \in I$.*

Bukti.

$(1) \Rightarrow (2)$

Diketahui I merupakan ideal. Akan dibuktikan I adalah a-ideal.

Dipunyai $(m * o) * (0 * n) \in I$.

Akan ditunjukkan $n * (m * o) \in I$.

Diperhatikan berdasarkan dipunyai yaitu $(m * o) * (0 * n) \in I$.

Analogikan bahwa m adalah $(m*o)$, dan 0 adalah s dimana $s = (m*o)*(0*n) \in I$.

Maka berdasarkan Definisi a-ideal 4.1.1 poin (2) didapatkan

$$((m * 0) * s) * (0 * n)$$

$$= ((m * 0) * (0 * n)) * s$$

$$= ((m * 0) * (0 * n)) * ((m * 0) * (0 * n)$$

$$= 0 \in I$$

Karena I adalah ideal sehingga didapatkan $((m * o) * s) * (0 * n) \in I$, maka $n * (m * o) \in I$.

$(2) \Rightarrow (3)$

Diketahui $(m * o) * (0 * n) \in I$ maka $n * (m * o) \in I$.

Akan ditunjukkan $m * (0 * n) \in I$ maka $n * m \in I$.

Misalkan $o = 0$.

Diperoleh,

$$\begin{aligned}
&(m * o) * (0 * n) \\
&= (m * 0) * (0 * n) \\
&= m * (0 * n) \in I, \text{sehingga} \\
&= n * (m * 0) \\
&= n * m \in I
\end{aligned}$$

$(3) \Rightarrow (1)$

Diketahui $m * (0 * n) \in I$ maka $n * m \in I$

Akan dibuktikan I adalah a-ideal

1. Jelas $0 \in I$ sebab berdasarkan Definisi ideal 2.2.1 poin (1) I merupakan ideal.

2. Dipunyai $(m * o) * (0 * n) \in I$ dan $o \in I$

   Akan ditunjukkan bahwa $n * m \in I$

   Berdasarkan Teorema 4.1.5 poin (2) dan Definisi 4.1.1 poin (2) yang kemudian dioperasikan diperoleh

$$(m * (0 * n)) * ((m * o) * (0 * n))$$

$$\leq (m * (m * o)) \tag{4.2}$$

Dilain pihak

$$\begin{aligned}
&(m * (m * o)) * o && \text{[Teorema 2.1.8 poin (3)]}\\
&= (m * o) * (m * o) && \text{[Definisi 2.1.1 poin (3)]}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Artinya,

$$(m * (m * o)) \leq o \tag{4.3}$$

Berdasarkan Persamaan 4.2 dan Persamaan 4.3 diperoleh bahwa

$$(m * (m * o) \leq o \in I$$

Karena I ideal, $((m*(0*n))*((m*o)*(0*n)) \in I$ dan $(m*o)*(0*n) \in I$
Jadi diperoleh

$$(m * (0 * n)) \in I$$

Sehingga berdasarkan diperoleh didapatkan $n * m \in I$

$\blacksquare$

Teorema 4.1.6 *(Lin Liu, 2000) Setiap a-ideal adalah p-ideal.*

Bukti. Misal I adalah ideal. Berdasarkan Teorema 4.1.4 maka I merupaka ideal. Berdasarkan Teorema 4.1.5 poin (2), jika dipunyai $m = o = 0$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} (m * o) * (0 * n) &= (0 * 0) * (0 * n) && \text{[Definisi 2.1.1 poin (3)]} \\ &= 0 * (0 * n) \in I \end{aligned}$$

sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} n * (m * o) &= n * (0 * 0) && \text{[Definisi 2.1.1 poin (3)]} \\ &= n * 0 && \text{[Teorema 2.1.8poin (1)]} \\ &= n \in I \end{aligned}$$

Karea $0 * (0 * n) \in I$ maka $n \in I$, berdasarkan Lemma 2.2.12 diperoleh I adalah p-ideal. ■

Teorema 4.1.7 *(Lin Liu, 2000) Setiap a-ideal adalah q-ideal.*

Bukti. Misalkan I adalah a-ideal.

Akan dibuktikan I merupakan q-ideal.

Dengan Teorema 2.2.6 poin (2) cukup ditunjukkan jika $m * (o * n) \in I$ maka $m * n \in I$

Diketahui $m * (o * n) \in I$. Diperhatikan,

$$
\begin{aligned}
&0 * (0 * (n * (0 * m))) * (m * (0 * n)) && \text{[Teorema 2.1.8 poin (4)]}\\
&= 0 * ((0 * n) * (0 * (0 * m))) * (m * (0 * n)) && \text{[Teorema 2.1.8 poin (4)]}\\
&= (0 * (0 * n)) * (0 * (0 * (0 * m))) * (m * (0 * n)) && \text{[Teorema 2.1.8 poin (5)]}\\
&= (0 * (0 * n)) * (0 * m) * (m * (0 * n)) && \text{[Teorema 2.1.8 poin (2)]}\\
&\leq (m * (0 * n)) * (m * (0 * n)) && \text{[Definisi 2.1.1 poin (3)]}\\
&= 0 \in I
\end{aligned}
$$

Karena $0 * (0 * (n * (0 * m))) * (m * (0 * n)) \in I$ dan $m * (0 * n) \in I$ maka $0 * (0 * (n * (0 * m))) \in I$

Berdasarkan Teorema 4.1.6 dan Teorema 2.2.12, maka diperoleh $(n * (0 * m)) \in I$

Berdasarkan Teorema 4.1.5 poin (3), jika $n * (0 * m) \in I$ maka $m * n \in I$ ■

Teorema 4.1.8 *(Lin Liu, 2000) Himpunan tak kosong I dikatakan a-ideal pada aljabar BCI X jika dan hanya jika keduanya p-ideal dan q-ideal.*

Bukti.

$(\Rightarrow)$

Diketahui I adalah a-ideal. Akan dibuktikan I merupakan p-ideal dan q-ideal.

Berdasarkan Teorema 4.1.6 dan Teorema 4.1.7 jelas jika I adalah a-ideal maka I juga merupakan p-ideal dan q-ideal.

$(\Leftarrow)$

Diketahui I adalah p-ideal dan q-ideal. Akan dibuktikan I merupakan a-ideal.

Berdasarkan Teorema 4.1.5 poin (3) cukup ditunjukkan $m * (0 * n) \in I$ maka $n * m \in I$. Diperhatikan berdasarkan Teorema 2.2.7 poin (2) $m * (0 * n) \in I$ maka

$m * n \in I$. Lebih lanjut,

$$
\begin{aligned}
& (0 * (n * m)) * (m * n) && \text{[Teorema 2.1.8 poin (4)]} \\
& = ((0 * n)) * (0 * m)) * (m * n) && \text{[Teorema 2.1.8 poin (3)]} \\
& = ((0 * n) * (m * n)) * (0 * m) && \text{[Teorema 2.1.8 poin (3)]} \\
& = (0 * (m * n) * n) * (0 * m) && \text{[Teorema 2.1.8 poin (4)]} \\
& = (((0 * m) * (0 * m)) * n) * ((0 * m) && \text{[Teorema 2.1.8 poin (3)]} \\
& = (((0 * m) * (0 * n)) * (0 * m)) * n && \text{[Teorema 2.1.8 poin (3)]} \\
& = (((0 * m) * (0 * m)) * (0 * n)) * n && \text{[Definisi 2.1.1 poin (3)]} \\
& = (0 * (0 * n)) * n && \text{[Teorema 2.1.8 poin (3)]} \\
& = (0 * n) * (0 * n) && \text{[Definisi 2.1.1 poin (3)]} \\
& = 0 \in I
\end{aligned}
$$

Karena $(0 * (n * m)) * (m * n) \in I$ dan $m * n \in I$, dan karena I adalah ideal maka $0 * (0 * (n * m)) \in I$.

Berdasarkan diketahui I adalah p-ideal dan berdasarkan Teorema 2.2.12 diperoleh, jika $0 * (0 * (n * m)) \in I$ maka $n * m \in I$. ■

Contoh 4.1.9 Pada Teorema ini sudah terbukti dari contoh-contoh sebelumnya yaitu pada contoh 4.1.2 terbukti bahwa himpunan I merupakan a-ideal pada aljabar BCI, dan dibuktikan juga pada contoh 2.2.10 bahwa himpunan I merupakan p-ideal dan contoh 2.2.5 bahwa himpunan I merupakan q-ideal.

4.2. Ideal Aljabar BCI Assosiatif

Lemma 4.2.1 *(Liu et al., 2007) Jika X adalah Aljabar BCI X Assosiatif maka $0 * m = m$ untuk setiap $m \in X$.*

Bukti. Diketahui Aljabar BCI X assosiatif. Artinya $m * (n * o) = (m * n) * 0$ untuk setiap $m, n, o \in X$

Akan ditunjukkan $0 * m = m$ untuk setiap $m \in X$

Ambil sembarang $m \in X$. Karena X adalah aljabar assosiatif maka

$$
\begin{aligned}
(m * m) * m &= m * (m * m) && \text{[Definisi 2.1.1 poin 3]} \\
0 * m &= m * 0 && \text{[Teorema 2.1.8 poin (1)]} \\
0 * m &= m
\end{aligned}
$$

■

Teorema 4.2.2 *(Liu et al., 2007) Jika X adalah Aljabar BCI, maka pernyataan berikut ekuivalen:*

1. *X adalah Aljabar BCI assosiatif,*
2. *Setiap ideal dari X adalah a-ideal,*
3. *Ideal $\{0\}$ adalah a-ideal.*

Bukti.

$(1) \Rightarrow (2)$

Diketahui X adalah Aljabar BCI Assosiatif. Akan ditunjukkan seiap ideal dari X adalah a-ideal. Ambil sebarang ideal dari X, misalkan I. Akan dibuktikan I merupakan a-ideal.

Berdasarkan Teorema 4.2.2 poin (2) cukup ditunjukkan $m * (0 * n) \in I$ maka $n * m \in I$.

Diperhatikan, berdasarkan Lemma 4.2.1 dipunyai

$$\begin{aligned} n * m &= (0 * n) * m && \text{[Teorema 2.1.8 poin (3)]} \\ &= (0 * m) * n && \text{[Lemma 4.2.1]} \\ &= m * n && \text{[Lemma 4.2.1]} \\ &= m * (0 * n) \in I \end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh $n * m \in I$.

$(2) \Rightarrow (3)$

Diketahui setiap ideal dari X adalah a-ideal

Akan ditunjukkan ideal $\{0\}$ merupakan a-ideal

1. Jelas $0 \in \{0\}$.

2. Ambil sebarang $m, n, o \in X$ dimana berlaku $(m * o) * (0 * n) \in \{0\}$ dan $n \in \{0\}$.

   Akan ditunjukkan $n * m \in \{0\}$.

   Diperhatikan $n \in \{0\}$, akibatnya $n = 0$. Karena $n = 0$ maka

$$\begin{aligned} (m * o) * (0 * n) &= (m * o) * (0 * 0) && \text{[Definisi 2.1.1 poin (3)]} \\ &= (m * o) * 0 && \text{[Teorema 2.1.8 poin (1)]} \\ &= m * o \\ &\in \{0\} \end{aligned}$$

   Akibatnya $m * o = 0$ atau $m = o = 0$.

Jadi diperoleh $n * m = 0 * 0 \in \{0\}$

$(3) \Rightarrow (1)$

Diketahui ideal $\{0\}$ merupakan a-ideal. Akan ditunjukkan X adalah Aljabar BCI Assosiatif.

Ambil sebarang $m \in X$

Karena ideal $\{0\}$ merupakan a-ideal, maka berdasarkan Teorema 4.1.7 ideal $\{0\}$ merupakan q-ideal.

Karena ideal $\{0\}$ merupakan q-ideal maka berdasarkan Teorema 2.2.7 poin (3) diperoleh

$$m * (0 * m) \in I$$

$$\Leftrightarrow (m * 0) * m \in I$$

$$\Leftrightarrow (m * 0) * m = 0$$

Selanjutnya karena ideal $\{0\}$ merupakan a-ideal maka berdasarkan Teorema 4.1.5 poin (3) diperoleh $m * (0 * m) \in I \Leftrightarrow m * (0 * m) = 0$

Karena $(m * 0) * m = m * (0 * m)$, jadi X merupakan Aljabar BCI Assosiatif. ■

Definisi 4.2.3 *(Liu et al., 2007) Misalkan X adalah Aljabar BCI dan I adalah ideal dari X. Aljabar BCI faktor didefinisikan*

$$X/I = \{C_m | m \in I\}$$

Dimana untuk setiap $C_m, C_n \in X/I$ didefinisikan $C_m * C_n = C_{m*n}$

Teorema 4.2.4 *(Liu et al., 2007) Misalkan I adalah ideal dari Aljabar BCI X. Ideal I merupakan a-ideal jika dan hanya jika aljabar faktor $(X/I; *, C_0)$ merupakan Ajabar BCI assosiatif.*

Bukti.

$(\Rightarrow)$

Diketahui I adalah ideal. Akan dibuktikan X/I merupakan Aljabar BCI assosiatif. Berdasarkan Teorema 4.2.2 poin (3) cukup ditunjukkan ideal nol yaitu $\{C_0\}$ merupakan a-ideal atau dengan kata lain menggunakan Teorema 4.1.5 poin (3)

Akan ditunjukkan jika $C_m * (C_0 * C_n) \in C_0$ maka $C_n * C_x \in \{C_0\}$

Dipunyai

$$C_m * (C_0 * C_n) \in \{C_0\}$$

$$\Leftrightarrow C_{m*(0*n)} = C_0 \in \{C_0\}$$

$$\Leftrightarrow m * (0 * n) \in I$$

Karena I adalah a-ideal jika $m * (0 * n) \in I$ maka $n * m \in I$.

Karena I adalah a-ideal dimana $0 \in I)$ maka diperoleh $0 * (n * m) \in I$.

Lebih lanjut

$$C_n * C_m = C_{n*m}$$

$$= C_0 \in \{C_0\}$$

Karena $C_m * (C_0 * C_n) \in \{C_0\}$ berakibat $C_n * C_m \in \{C_0\}$ jadi $\{C_0\}$ merupakan a-ideal. Jadi $(X/I, *)$ adalah Aljabar BCI Assosiatif.

$(\Leftarrow)$

Diketahui (X/I) adalah aljabar Assosiatif.

Akan dibuktikan ideal I merupakan a-ideal atau dengan kata lain berdasarkan Teorema 4.2.2 poin (3) akan dibuktikan jika $m * (o * n) \in I$ maka $n * m \in I$.

Diperhatikan, $m * (o * n) \in I$

Karena I adalah ideal mengakibatkan $0 \in I$ maka

$$0 \in (m * (o * n)) \in I$$

Berdasarkan Teorema 4.2.2 poin (3) jika X Aljabar BCI Assosiatif maka ideal nol $\{C_0\}$ merupakan a-ideal, sedimikian sehingga

$$C_m * (C_0 * C_n) = C_{m*(o*n)} = C_0 \in \{C_0\}$$

Karena $\{C_0\}$ merupakan a-ideal maka berdasarkan Teorema 4.2.2 poin (3)

$$C_{n*m} = C_n * C_m = C_0 \in \{C_0\}$$

Hal tersebut berarti $n * m \in I$.
Jadi I adalah a-ideal. ■

4.3. Integrasi Keilmuan

Banyak ilmu pengetahuan yang dijelaskan dalam Al-Qur'an, salah satunya yaitu matematika (Nugraha and Dwiyana, 2007). Matematika merupakan ilmu dasar yang harus dipahami oleh setiap orang, karena dalam kehidupan sehari-hari manusia tidak luput dari sebuah perhitungan.

Dalam ilmu matematika banyak teori yang dikaji, salah satunya aljabar. Aljabar merupakan salah satu ilmu dasar matematika (Azura et al., 2019). Semakin bertambahnya zaman pada saat ini ilmu aljabar semakin banyak dikembangkan oleh ilmuwan matematika. Salah satu ilmu yang dikembangkan itu merupakan teori yang dibahas dalam penelitian ini.

Lebih lanjut, dari paragraf sebelumnya disini peniliti membahas tentang teori Aljabar BCI. Aljabar BCI merupakan salah satu dari aljabar yang ada di matematika. Didalam Aljabar BCI terdapat teori-teori yang didapatkan dari perkembangan teori dasar pada Aljabar BCI. Peneliti sudah membuktikan bahwa teori-teori yang dikembangkan tersebut bernilai benar.

Di dalam islam teori kebenaran juga ada. Sumber teori tersebut berasal dari Al-Qur'an, Hadist, dan lain sebagainya (Fuad Nasar, 2021). Akan tetapi manusia memiliki 2 kelompok dalam hal keyakinan, yaitu kelompok *Taqlid* dan *Ittiba'*. Kelompok *Taqlid* merupakan sekumpulan manusia yang menerima ajaran islam tanpa menegetahui sumber ajarannya. Sedangkan kelompok *Ittiba'* merupakan sekumpulan orang yang menerima ajaran dari sesama manusia akan tetapi orang tersebut tetap mencari kebenaran dengan mencari dalil di Al-Qur'an ataupun hadist (Fathul Ulum, 2005).

Ajaran di dalam Islam sudah banyak terbukti nyata bukan hanya teori saja. Sebelum zaman manusia saat ini sebelumnya Rasul juga melakukan ajaran tersebut yang didapat dari wahyu Allah berupa ayat suci Al-Qur'an, salah satunya adalah puasa. Dalam mempraktikan puasa Rasul mendapatkan kebenaran bahwa dengan berpuasa tubuh menjadi sehat. Seperti sabda Rasulullah yang tercantum dalam H.R Abi Nu'aim yang berbunyi:

صُوْمُوْا تَصِحُّوْا

Artinya: Berpuasalah kalian, niscaya kalian sehat

Dalam hadist tersebut manusia dianjurkan oleh Rasulullah untuk berpuasa, karena dengan berpuasa manusia bisa menjaga tubuhnya dari segala penyakit. Memang benar adanya jika berpuasa dapat menyehatkan tubuh. Buktinya sekarang banyak di dunia kedokteran pasien yang akan melakukan operasi diharuskan untuk berpuasa dahulu. Selain itu juga ada beberapa penyakit yang memang mengharuskan untuk berpuasa (akan tetapi puasa disini tidak seperti puasa pada umumnya, karena untuk menghindari makanan yang tidak baik untuk dikonsumsi oleh penderita).

Dalam hal ini apa yang dianjurkan oleh Allah memang ada maksud dan tujuan yang baik buat manusia. Oleh karena itu sebagai manusia harus mentatai peraturan-Nya. Sama halnya juga dalam matematika yang sudah dijelaskan diparagraf sebelumnya. Semua ketentuan dan ajaran yang yang ada memang benar adanya.

BAB V

PENUTUP

Pada bab ini merupakan akhir dari penelitian yang memaparkan mengenai kesimpulan yang didapatkan dari penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan penjelasan tentang sifat yang terdapat didalam konsep Aljabar BCI yaitu a-ideal dan keterkaitan antara a-ideal dengan Aljabar BCI Assosiatif dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Berikut definisi dan sifat-sifat a-ideal terhadap Aljabar BCI

   (a) Definisi a-ideal pada Aljabar BCI

   Misalkan $(X, *, 0)$ suatu aljabar BCI dengan $I \subseteq X$ dan $I \neq \varnothing$. Himpunan I disebut a-ideal dari aljabar BCI X jika memenuhi beberapa kondisi yaitu untuk semua $m, n, o \in X$, berlaku

      i. $0 \in I$

      ii. $(m * o) * (0 * n) \in I$ dan $o \in I$ yang berarti $n * m \in I$ untuk semua $m, n, o \in X$.

   (b) Berikut sifat dari a-ideal pada Aljabar BCI

   - Setiap a-ideal merupakan ideal.
   - Diberikan I ideal pada X, maka ekuivalen dengan:

      i. I adalah a-ideal pada X;

ii. $(m * o) * (0 * n) \in I$ maka $n * (m * o) \in I$;

iii. $m * (0 * n) \in I$ maka $n * m \in I$.

- Setiap a-ideal adalah p-ideal
- Setiap a-ideal adalah q-ideal
- Himpunan tak kosong I dikatakan a-ideal pada Aljabar BCI X jika dan hanya jika keduanya p-ideal dan q-ideal.

2. Berikut keterkaitan a-ideal dengan Aljabar BCI Assosiatif.

(a) Diberikan himpunan X merupakan aljabar BCI. Maka pernyataan berikut ekuivalen:

i. X adalah Aljabar BCI assosiatif,

ii. Setiap ideal dari X adalah a-ideal,

iii. Ideal $\{0\}$ adalah a-ideal.

(b) Misalkan I adalah ideal dari Aljabar BCI X. Ideal I merupakan a-ideal jika dan hanya jika aljabar faktor $(X/I; *, C_0)$ merupakan Ajabar BCI assosiatif.

5.2. Saran

Setelah membahas tentang definisi dan sifat a-ideal pada Aljabar BCI, dapat disarankan untuk dilakukan penelitian lebih lanjut tentang a-ideal Quasi pada Aljabar BCI Asosiatif.

DAFTAR PUSTAKA

Azura, R., Bakar, N. N., and Helmi, M. R. (2019). Q-Aljabar. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, VIII(1):1–8.

Bachri, B. S. (2010). Meyakinkan Validitas Data Melalui Triangulasi Pada Penelitian Kualitatif. *Teknologi Pendidikan*, 10:46–62.

Bae Jun, Y., Long Xin, X., and Hwan Roh, E. (1998). A Class of algebras Related To BCI Algebras And Semigroup. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 24(4):309–321.

Bhatti, S. A. and Chaudhry, M. A. (1990). Ideals in BCI-algebras. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 21(4):637–643.

Fathul Ulum, U. A. (2005). Antara Taqlid dan Ittiba'.

Fuad Nasar, M. (2021). Al-Qur'an dan Ilmu Pegetahuan.

Hao, J. and Li, C. X. (2004). On Ideals of an Ideal in a BCI-Algebra. *Scientiae Mathematicae Japonicae*, (10):493–500.

Huda, M. and Mutia (2017). Mengenal Matematika dalam Perspektif Islam. *FOKUS Jurnal Kajian Keislaman dan Kemasyarakatan*, 2(2):182.

Lele, C., Moutari, S., and Ndeffo Mbah, M. L. (2008). Algorithms and computations for foldedness of P-ideals in BCI-algebras. *Journal of Applied Logic*, 6(4):580–588.

Lin Liu, Y. (2000). q -Ideals and a -Ideals in BCI-Algebras. pages 243–253.

Liu, Y. L., Xu, Y., and Meng, J. (2007). BCI-implicative ideals of BCI-algebras. *Information Sciences*, 177(22):4987–4996.

Nugraha, A. and Dwiyana, A. S. D. (2007). *Dasar-Dasar Matematika dan Sains*.

Rahmat, P. S. (2019). Penelitian Kualitatif.

Rahmi, A. (2015). Puasa dan Hikmahnya Terhadap Kesehatan Fisik dan Mental Spiritual. *Jurnal Studi Penelitian, Riset dan Pengembangan Pendidikan Islam*, 3(1):89–106.

Saeid, A. B. (2010). Fantastic Ideals in BCI-Algebras. *Appl Math & Informatics*, 8(5):550–554.

Shobirin (2016). Jual Beli Dalam Pandangan Islam. *BISNIS : Jurnal Bisnis dan Manajemen Islam*, 3(2):239.

Winarsih and Suryoto (2014). Kelas-kelas BCI aljabar dan hubungannya satu dengan yang lain. *Jurnal Matematika*, 17(2):67–76.

Xiaohong, Z., Hao, J., and Bhatti, S. A. (1994). On p-ideal of a BCI-Algebra. *Journal of Mathematics*, XXVII:121–128.

Yang, K. S. (2014). Union Soft q -Ideals in BCI -Algebras. 8(58):2859–2869.

Yisheng, H. (2016). BCI-Algebra. *BCI-Algebra*.