

**KENDALI OPTIMAL MENGGUNAKAN PRINSIP MINIMUM  
PONTYAGIN PADA PENYEBARAN PENYAKIT COVID-19**

**SKRIPSI**



**UIN SUNAN AMPEL  
S U R A B A Y A**

Disusun Oleh  
**NAUFAL RIF'AT**  
**H92219053**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL  
SURABAYA**

**2023**

## PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini,

Nama : NAUFAL RIF'AT

NIM : H92219053

Program Studi : Matematika

Angkatan : 2019

Menyatakan bahwa Saya tidak melakukan plagiat dalam penulisan skripsi Saya yang berjudul "KENDALI OPTIMAL MENGGUNAKAN PRINSIP MINIMUM PONTRYAGIN PADA PENYEBARAN PENYAKIT COVID-19". Apabila suatu saat nanti terbukti Saya melakukan tindakan plagiat, maka Saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan.

Demikian pernyataan keaslian ini Saya buat dengan sebenar-benarnya.

Surabaya, 16 Januari 2023

Yang menandatangani

  
MATERAI  
TEMPEL  
10000  
9837EAJX116754168  
NAUFAL RIF'AT  
NIM. H92219053

## LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING

Skripsi oleh

Nama : NAUFAL RIF'AT  
NIM : H92219053  
Judul Skripsi : KENDALI OPTIMAL MENGGUNAKAN PRINSIP  
MINIMUM PONTRYAGIN PADA PENYEBARAN  
PENYAKIT COVID-19

telah diperiksa dan disetujui untuk diujikan.

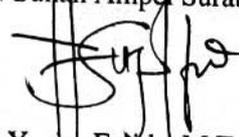
Pembimbing I

  
Ahmad Hanif Asyhar, M.Si.  
NIP. 198601232014031001

Pembimbing II

  
Wika Dianita Utami, M.Sc.  
NIP. 199206102018012003

Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika  
UIN Sunan Ampel Surabaya

  
Yuniar Farida, M.T.  
NIP. 197905272014032002

## PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI

Skripsi oleh

Nama : NAUFAL RIF'AT  
NIM : H92219053  
Judul Skripsi : KENDALI OPTIMAL MENGGUNAKAN PRINSIP  
MINIMUM PONTYAGIN PADA PENYEBARAN  
PENYAKIT COVID-19

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji  
pada tanggal 16 Januari 2023

Mengesahkan,  
Tim Penguji

Penguji I



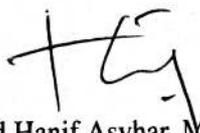
Yuniar Farida, M.T.  
NIP. 197905272014032002

Penguji II



Dian Yuliati, M.Si.  
NIP. 198707142020122015

Penguji III



Ahmad Hanif Asyhar, M.Si.  
NIP. 198601232014031001

Penguji IV



Wika Dianita Utami, M.Sc.  
NIP. 199206102018012003

Mengetahui,

Dekan Fakultas Sains dan Teknologi  
UIN Sunan Ampel Surabaya



Dr. Yacnul Hamdani, M.Pd.  
NIP. 196507312000031002



UIN SUNAN AMPEL  
SURABAYA

KEMENTERIAN AGAMA  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN AMPEL SURABAYA  
PERPUSTAKAAN

Jl. Jend. A. Yani 117 Surabaya 60237 Telp. 031-8431972 Fax.031-8413300  
E-Mail: perpus@uinsby.ac.id

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI  
KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika UIN Sunan Ampel Surabaya, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : NAUFAL RIF'AT  
NIM : H92219053  
Fakultas/Jurusan : SAINS DAN TEKNOLOGI / MATEMATIKA  
E-mail address : nrifat03@gmail.com

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah :  
 Skripsi  Tesis  Disertasi  Lain-lain (.....)  
yang berjudul :

KENDALI OPTIMAL MENGGUNAKAN PRINSIP MINIMUM PONTRYAGIN PADA  
PENYEBARAN PENYAKIT COVID-19

beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif ini Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya berhak menyimpan, mengalih-media/format-kan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (database), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di Internet atau media lain secara *fulltext* untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan UIN Sunan Ampel Surabaya, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini yang saya buat dengan sebenarnya.

Surabaya, 16 JANUARI 2023

Penulis

( NAUFAL RIF'AT )  
nama terang dan tanda tangan

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	i
<b>LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING</b>	ii
<b>PENGESAHAN TIM PENGUJI SKRIPSI</b>	iii
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN</b>	iv
<b>MOTTO</b>	v
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	vi
<b>KATA PENGANTAR</b>	vii
<b>DAFTAR ISI</b>	ix
<b>DAFTAR TABEL</b>	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	xiii
<b>ABSTRAK</b>	xiv
<b>ABSTRACT</b>	xv
<b>I PENDAHULUAN</b>	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Rumusan Masalah	9
1.3. Tujuan Penelitian	9
1.4. Manfaat Penelitian	10
1.5. Batasan Masalah	10
1.6. Sistematika Penulisan	11
<b>II TINJAUAN PUSTAKA</b>	13
2.1. COVID-19 di DKI Jakarta	13
2.2. Model Matematika Epidemiologi	15
2.3. Kendali Optimal	17
2.3.1. Fungsi Tujuan	18
2.3.2. Prinsip Minimum Pontryagin	19
2.4. Model Epidemiologi COVID-19	22
2.4.1. Model Epidemiologi COVID-19 Tanpa Kendali	22

2.4.2. Model Epidemiologi COVID-19 Dengan Kendali	25
2.5. Runge-Kutta Orde Empat	26
2.6. Integrasi Keislaman	29
<b>III METODE PENELITIAN</b>	<b>33</b>
3.1. Jenis Penelitian	33
3.2. Jenis dan Sumber Data	33
3.3. Tahapan Penelitian	35
<b>IV HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	<b>39</b>
4.1. Penyelesaian Kendali Optimal	39
4.1.1. Pembentukan Fungsi Hamiltonian	40
4.1.2. Penentuan Kandidat Parameter Kendali	41
4.1.3. Pembentukan Persamaan <i>State</i> dan Persamaan <i>Co-State</i>	42
4.1.4. Penentuan Kendali Optimal	43
4.2. Nilai Parameter Model	45
4.3. Penyelesaian Numerik Model Epidemiologi COVID-19	46
4.3.1. Penyelesaian Numerik Model Epidemiologi COVID-19 Tanpa Kendali	47
4.3.2. Penyelesaian Numerik Model Epidemiologi COVID-19 Dengan Kendali	49
4.4. Analisis Hasil Simulasi	55
4.4.1. Subpopulasi Rentan ( <i>Susceptible</i> )	55
4.4.2. Subpopulasi Terpapar ( <i>Exposed</i> )	57
4.4.3. Subpopulasi Terinfeksi ( <i>Infected</i> )	59
4.4.4. Subpopulasi Sembuh ( <i>Recovery</i> )	61
4.5. Integrasi Keislaman	62
4.5.1. Integrasi Keislaman Terkait Hasil Simulasi Dengan Kendali Optimal	62
4.5.2. Integrasi Keislaman Terkait Pentingnya Vaksinasi	64
4.5.3. Integrasi Keislaman Terkait Pentingnya Menjaga Jarak Dengan Orang Sakit, Menggunakan Masker, dan Mencuci Tangan	65

4.5.4. Integrasi Keislaman Terkait Pentingnya Isolasi COVID-19	67
<b>V PENUTUP</b>	<b>70</b>
5.1. Kesimpulan	70
5.2. Saran	71
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>72</b>

## DAFTAR TABEL

3.1 Sampel Data COVID-19 DKI Jakarta . . . . .	34
4.1 Nilai Parameter COVID-19 . . . . .	45
4.2 Nilai Parameter Fungsi Tujuan . . . . .	46
4.3 Nilai Awal ( <i>Initial Condition</i> ) Masing-Masing Variabel	
Subpopulasi (Kompartemen) . . . . .	46

## DAFTAR GAMBAR

1.1	<i>Trend</i> Harian Kasus Konfirmasi COVID-19 di Indonesia	2
1.2	Kasus Konfirmasi COVID-19 di Indonesia Dalam 34 Provinsi	3
2.1	Peta Sebaran Kasus Aktif COVID-19 Provinsi DKI Jakarta	14
2.2	Diagram Kompartemen Model Penyakit SIR	16
2.3	Model SEIR COVID-19 Tanpa Kendali	23
2.4	Model SEIQR COVID-19 Dengan Kendali	25
3.1	Diagram Alir ( <i>Flowchart</i> ) Model Penyebaran COVID-19	35
4.1	Grafik Hasil Simulasi Subpopulasi Rentan	55
4.2	Grafik Hasil Simulasi Subpopulasi Terpapar	57
4.3	Grafik Hasil Simulasi Subpopulasi Terinfeksi	59
4.4	Grafik Hasil Simulasi Subpopulasi Sembuh	61

## ABSTRAK

### KENDALI OPTIMAL MENGGUNAKAN PRINSIP MINIMUM PONTRYAGIN PADA PENYEBARAN PENYAKIT COVID-19

Penyakit COVID-19 muncul pertama kali pada akhir bulan Desember 2019 hingga saat ini. Penularan penyakit COVID-19 dapat melalui *droplet*, *airbone*, maupun kontak langsung antar individu. Salah satu langkah yang dapat digunakan dalam menekan laju penyebaran COVID-19 di DKI Jakarta dalam penelitian ini, yaitu analisis dinamika model penyebaran penyakit COVID-19 dengan kondisi tanpa kendali yaitu model SEIR, dan dengan kendali yaitu model SEIQR yang disertai 3 kendali, diantaranya kendali pencegahan, kendali isolasi, dan juga kendali vaksin. Adapun penyelesaian kendali optimal yang digunakan adalah prinsip minimum pontryagin dengan fungsi tujuan yaitu mengurangi subpopulasi terpapar dan terinfeksi dengan meminimumkan biaya pengeluaran untuk tindakan pencegahan COVID-19, serta metode numerik yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan metode Runge-Kutta Orde Empat. Hasil simulasi menunjukkan bahwa dengan adanya kendali optimal dapat mempercepat terjadinya wabah, terutama pada subpopulasi terpapar menurun 6 hari lebih cepat dan subpopulasi terinfeksi dapat menurun 2 hari lebih cepat.

**Kata kunci:** COVID-19, Kendali Optimal, Prinsip Minimum Pontryagin, Runge-Kutta Orde Empat.

UIN SUNAN AMPEL  
S U R A B A Y A

## ABSTRACT

### OPTIMAL CONTROL USING PONTRYAGIN MINIMUM PRINCIPLE THE SPREAD OF COVID-19

COVID-19 disease first appeared at the end of December 2019 until now. Transmission of COVID-19 can be through *droplet*, *airbone*, as well as direct contact between individuals. One of the steps that can be used to reduce the rate of spread of COVID-19 in DKI Jakarta in this research is the analysis of the dynamics of the model of the spread of the COVID-19 disease with uncontrolled conditions, namely the SEIR model, and with control, namely the SEIQR model which is accompanied by 3 controls, including control prevention, isolation control, and vaccine control. The optimal control solution used is the minimum pontryagin principle with the objective function of reducing exposed and infected subpopulations by minimizing expenditure costs for COVID-19 prevention measures, and the numerical method used in this study is the Fourth Order Runge-Kutta method approach. The simulation results show that with optimal control it can accelerate the occurrence of outbreaks, especially in exposed subpopulations it can decrease 6 days faster and infected subpopulations can decrease 2 days faster.

**Keywords:** COVID-19, Optimal Control, Pontryagin Minimum Principle, Fourth Order Runge-Kutta.

UIN SUNAN AMPEL  
S U R A B A Y A

# BAB I

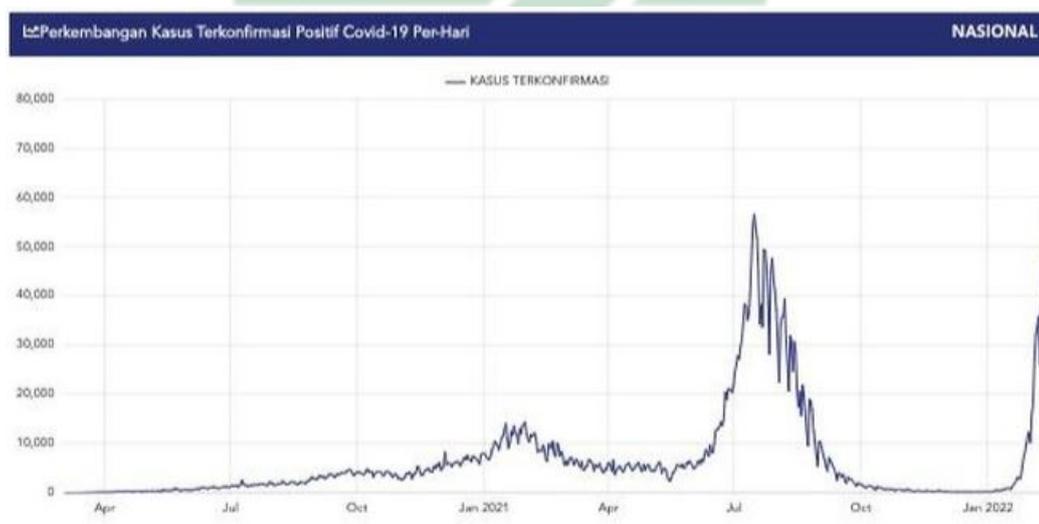
## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang Masalah

Penyakit COVID-19 atau biasa dikenal dengan *Corona Virus Disease 19* adalah penyakit menular yang disebabkan oleh SARS-CoV-2 (*Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2*) (Jason et al., 2021; Wintachai and Prathom, 2021; Pájaro et al., 2022). SARS-CoV-2 sendiri adalah anggota subfamili *Orthocoronavirinae* (atau juga bernama *Coronavirinae*) dalam *genus* atau famili dari *Coronaviridae* (Wu and Zhao, 2021). Virus COVID-19 ini pertama kali menyebar di Wuhan, Tiongkok pada akhir bulan Desember 2019, dan menyebar secara cepat hingga ke seluruh dunia (Ika et al., 2021). Penyebaran penyakit COVID-19 ini dapat melalui berbagai cara, yaitu melalui *droplet*, melalui *airborne*, dan ada juga yang melalui kontak langsung (transmisi) antar individu. Virus COVID-19 memiliki masa inkubasi rata-rata selama 10 hingga 11 hari sebelum virus menyebar (Cimolai, 2021). Penderita yang terjangkit penyakit COVID-19 memiliki gejala demam dengan suhu tubuh berada diatas 37°C, batuk kering, kesulitan dalam bernapas atau biasa disebut dengan asma, kelelahan, kehilangan rasa pada lidah maupun penciuman pada hidung, mual, diare, *pneumonia*, maupun gejala-gejala lain pada pernapasan (Abbas et al., 2022). Selain itu, orang yang mempunyai komorbid (penyakit penyerta) dapat menyebabkan kematian atau gejala yang semakin parah jika terinfeksi penyakit COVID-19 (Amalia, 2021).

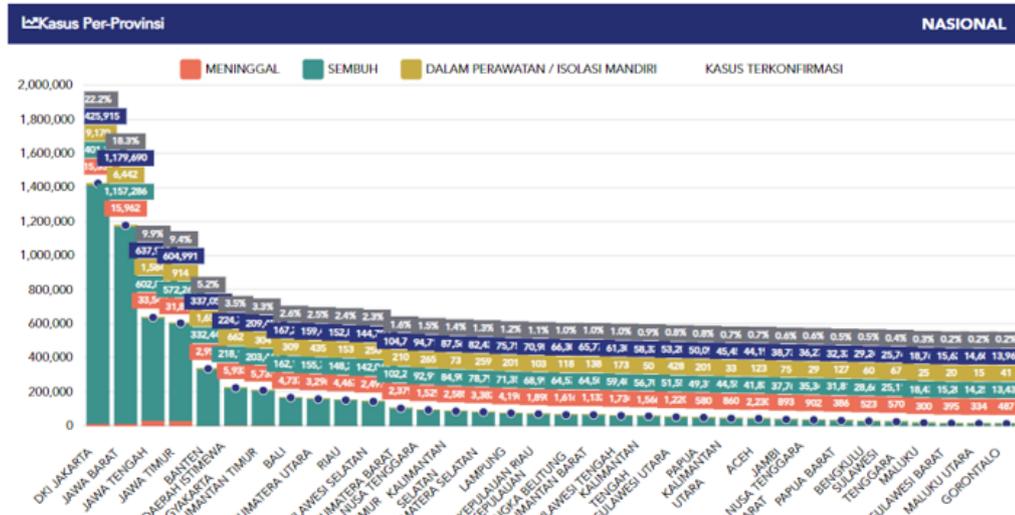
WHO (*World Health Organization*) menyatakan bahwa pada tanggal 31

Januari 2020 ditemukan kasus konfirmasi terjangkit penyakit COVID-19 secara global yaitu sebanyak 9.776 jiwa, dan kasus meninggal sebanyak 213 jiwa. Dengan kata lain, WHO menyimpulkan wabah penyakit COVID-19 sebagai masalah utama kesehatan masyarakat darurat (Roda et al., 2020; World Health Organization, 2020). Lebih dari 215 negara, termasuk Indonesia, penyakit COVID-19 telah mewabah, dan menjadikan COVID-19 sebagai pandemi COVID-19 tercatat bahwa kasus COVID-19 di Indonesia mencapai 310 juta jiwa kasus konfirmasi, dengan kasus kematian akibat penyakit ini sebanyak 5,51 juta jiwa hingga bulan Januari 2022 (Susilo et al., 2022; Wirawan and Herihadi, 2021). Oleh karena itu, WHO memberikan instruksi kepada seluruh negara di dunia untuk melindungi diri dari penyakit COVID-19. Selain itu, COVID-19 berdampak pada berbagai aspek global, seperti pendidikan, ekonomi, sosial, politik dunia, dan aspek-aspek global lainnya (Kamrujjaman et al., 2022).



Gambar 1.1 *Trend Harian Kasus Konfirmasi COVID-19 di Indonesia*

Sumber: (Satuan Tugas Penanganan COVID-19, 2021)



Gambar 1.2 Kasus Konfirmasi COVID-19 di Indonesia Dalam 34 Provinsi

Sumber: (Satuan Tugas Penanganan COVID-19, 2021)

Pandemi COVID-19 di Indonesia dapat dikelompokkan menjadi 3 gelombang, yaitu gelombang pertama tepatnya pada bulan April 2020 hingga pertengahan tahun 2021, kemudian gelombang kedua tepatnya pada pertengahan 2021 hingga bulan Desember 2021, dan gelombang ketiga tepatnya pada bulan Januari 2022. Berdasarkan Gambar (1.1), dapat disimpulkan bahwa gelombang kedua merupakan kasus COVID-19 tertinggi di Indonesia. Kemudian berdasarkan Gambar (1.2), kasus tertinggi COVID-19 di Indonesia terletak pada Provinsi DKI Jakarta dengan persentase sebesar 22,2%, dikarenakan Provinsi DKI Jakarta sebagai ibukota Negara Indonesia.

Awal mula kemunculan penyakit COVID-19 di Indonesia pada bulan April 2020 (pada gelombang pertama) masih belum ditemukan vaksin ataupun obat yang ampuh untuk menekan penularan COVID-19. Oleh karena itu, pemerintah menerapkan kebijakan karantina (*quarantine*) dan *lockdown*. Selain itu, kebijakan pembatasan aktivitas saat jam malam juga diterapkan, serta kebijakan 3M

(menjaga jarak, menggunakan masker, dan mencuci tangan) (Khedher et al., 2021).

Kebijakan tersebut diterapkan sebagai penghambat penularan COVID-19.

Kemunculan wabah juga dijelaskan dalam riwayat hadis yaitu:

حَدَّثَنَا عَبْدُ اللَّهِ بْنُ مَسْلَمَةَ بْنِ قَعْنَبٍ وَقُتَيْبَةُ بْنُ سَعِيدٍ قَالَا أَخْبَرَنَا الْمُغِيرَةُ وَنَسَبَهُ ابْنُ قَعْنَبٍ  
فَقَالَ ابْنُ عَبْدِ الرَّحْمَنِ الْقُرَشِيُّ عَنْ أَبِي النَّضْرِ عَنْ عَامِرِ بْنِ سَعْدِ بْنِ أَبِي وَقَّاصٍ عَنْ  
أَسَامَةَ بْنِ زَيْدٍ قَالَ قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ الطَّاعُونَ آيَةُ الرَّجْزِ ابْتَلَى اللَّهُ  
عَزَّ وَجَلَّ بِهِ نَاسًا مِنْ عِبَادِهِ فَإِذَا سَمِعْتُمْ بِهِ فَلَا تَدْخُلُوا عَلَيْهِ وَإِذَا وَقَعَ بِأَرْضِ وَأَنْتُمْ بِهَا  
فَلَا تَفِرُّوا مِنْهُ هَذَا حَدِيثٌ الْقَعْنَبِيِّ وَقُتَيْبَةَ نَحْوُهُ (صحيح مسلم : ٤١٠٩)

**Terjemahan:** "Telah menceritakan kepada kami 'Abdullah bin Maslamah bin Qa'nab dan Qutaibah bin Sa'id keduanya berkata: Telah mengabarkan kepada kami Al Mughir dan dia nasabkan dengan Ibnu Qa'nab. Ibnu 'Abdur Rahman Al Quraisy berkata: dari Abu An Nadhr dari 'Amir bin Sa'd bin Abu Waqqash dari Usamah bin Zaid dia berkata: Rasulullah shallallahu 'alaihi wa sallam bersabda: "Tha'un (penyakit menular/wabah kolera) adalah suatu peringatan dari Allah Subhanahu Wa Ta'ala untuk menguji hamba-hamba-Nya dari kalangan manusia. Maka apabila kamu mendengar penyakit itu berjangkit di suatu negeri, janganlah kamu masuk ke negeri itu. Dan apabila wabah itu berjangkit di negeri tempat kamu berada, jangan pula kamu lari daripadanya." Dan Hadits Qutaibah seperti itu juga" (H.R. Imam Muslim, Nomer 4109).

Hadis tersebut dapat dikaitkan dalam konteks wabah COVID-19, bahwa manusia harus senantiasa mencegah dari COVID-19, seperti penerapan kebijakan *lockdown* dan karantina dengan membatasi populasi penduduk yang masuk dan keluar daerah yang belum berpotensi hingga mewabah, sesuai yang dijelaskan dalam hadis tersebut (Kurniawan, 2020). Pemerintah tentunya mengutamakan kebijakan dalam memutus rantai penyebaran COVID-19 diantaranya adalah penerapan kebijakan *lockdown* dan karantina, serta menerapkan kebijakan 3M (menjaga jarak, menggunakan masker, dan mencuci tangan) daripada meningkatkan ekonomi. Hal tersebut juga dapat dikaitkan dalam kaidah fiqih,

yaitu:

دَرْءُ الْمَفَاسِدِ أَوْلَىٰ مِنْ جَلْبِ الْمَصَالِحِ

**Terjemahan:** "Menolak kerusakan lebih baik daripada mengambil kemaslahatan".

Kaidah tersebut menjelaskan bahwa Islam mewajibkan seseorang untuk mengutamakan menolak kerusakan seperti dalam konteks wabah penyakit COVID-19 dengan menjaga kesehatan atau melindungi diri sendiri sebelum terserang penyakit menular seperti COVID-19, salah satunya dengan menjaga jarak dan menggunakan masker ketika berinteraksi dengan orang lain, demi mengurangi penularan penyakit yang menular, sehingga tidak menyebabkan terjadinya wabah daripada mengambil kemaslahatan seperti meningkatkan ekonomi (Ibrahim, 2022). Jika peningkatan ekonomi diutamakan, maka secara tidak langsung akan terjadi interaksi dalam bentuk kegiatan transaksi, yang mana hal tersebut akan menambah parah keadaan yaitu interaksi dengan manusia lain, hingga berakibat mendatangkan resiko penularan COVID-19.

Pada pertengahan tahun 2021 (gelombang kedua), banyak jiwa yang kehilangan nyawa akibat munculnya penyakit COVID-19 varian baru, yaitu varian *Delta*. Munculnya COVID-19 varian *Delta* pertama kali dilaporkan di India, dan ditandai dengan kehilangan rasa pada indra perasa maupun indra penciuman, demam, kelelahan, sakit kepala, mual, sakit kepala, dan sakit tenggorokan (Kementerian Kesehatan, 2021). Selain itu, pada pertengahan tahun 2021 sudah ditemukan vaksin yang dapat mencegah penularan COVID-19 atau dengan kata lain sebagai upaya untuk menekan angka penularan COVID-19 yang sangat tinggi, diantaranya vaksin Sinovac yang berasal dari Tiongkok dengan efektivitas sebesar 50,1%, vaksin AstraZeneca yang berasal dari Inggris dengan efektivitas sebesar

62,1%, dan vaksin Moderna yang berasal dari Amerika Serikat dengan efektivitas sebesar 94,1% (Javier et al., 2022).

Pada bulan Januari 2022 (gelombang ketiga) muncul varian baru yang dikenal dengan varian *Omicron*. Munculnya COVID-19 varian *Omicron* pertama kali dilaporkan di Afrika Selatan, dan ditandai dengan gejala berupa gatal pada tenggorokan, kelelahan, batuk kering, dan demam (Kementerian Kesehatan, 2022). Kemunculan berbagai varian COVID-19 pada setiap gelombang menyebabkan meningkatnya angka mortalitas dan juga angka morbiditas. Selain itu, distribusi vaksin yang meningkat jumlahnya secara global, ketersediaan vaksin di berbagai negara yang terbatas, dan kegiatan pasca imunisasi yang semakin digalakkan (Khairani, 2021). Pada gelombang ketiga juga telah ditemukan vaksin baru yaitu vaksin Pfizer yang berasal dari Amerika Serikat, dimana vaksin ini dijadikan sebagai vaksin *booster*.

Berdasarkan paparan dari WHO, kasus konfirmasi COVID-19 perlu dilakukan analisis dinamika untuk mengetahui pola penyebaran penyakit COVID-19, agar hasil analisis yang diberikan dapat diketahui bahwa kapan pandemi COVID-19 akan berakhir maupun kapan kasus infeksi pandemi COVID-19 mewabah, sehingga dapat dijadikan sebagai pertimbangan oleh pemerintah dan pemangku kebijakan. Salah satu alat sebagai strategi terbaik untuk melakukan analisis dinamika pola penyebaran penyakit adalah dengan menggunakan model matematika (Motta et al., 2021). Terdapat berbagai jenis model matematika yang digunakan untuk menganalisis dinamika infeksi dari suatu epidemi, salah satunya adalah model epidemiologi SEIR, yang terbagi ke dalam empat kelas atau variabel, yaitu *susceptible* (S), *exposed* (E), *infected* (I), dan *recovery* (R), atau biasa dikenal dengan model SEIR (Chatterjee et al., 2020).

Model SEIR sangat cocok dalam menganalisis dinamika penyebaran penyakit (Hurint et al., 2017). Adapun kelas-kelas lainnya dalam berbagai penelitian mengenai pemodelan matematika epidemiologi dinamika penyebaran penyakit, seperti *carrier* (C), *quarantine* (Q), *hospitalize* (H), *treatment* (T), *vaccinated* (V), dan lain sebagainya. Selain kelas-kelas tersebut, terdapat sebagian penelitian yang menyertakan kendali optimal, yang mana diharapkan akan didapatkan hasil simulasi yang lebih optimal sesuai formulasi model SEIR dan sejenisnya (Liu et al., 2021). Adapun prinsip kendali optimal pada permasalahan pemodelan penyakit yang digunakan adalah prinsip minimum pontryagin yang merupakan prinsip untuk menentukan kendali terbaik, dengan memecahkan kondisi dan strategi kendali yang diperlukan sesuai permasalahan (fungsi kendala), dan fungsi tujuan yang meminimumkan biaya total serta mengurangi subpopulasi yang menyebabkan penyakit menjadi wabah (Andrés-Martínez et al., 2022; Mahardika, 2021).

Penelitian terdahulu yang meneliti tentang pemodelan COVID-19, diantaranya penelitian model epidemi menggunakan SEIR, tanpa parameter kendali (Annas et al., 2020b). Dua parameter utama yang digunakan adalah parameter vaksin dan isolasi. Data yang digunakan pada penelitian tersebut adalah data kasus COVID-19 di Indonesia. Penelitian selanjutnya adalah penelitian tentang model epidemi COVID-19 menggunakan SEIQR (Hussain et al., 2021). Pada penelitian tersebut diterapkan 2 kendali optimal, yaitu tindakan pencegahan, dan tindakan cepat isolasi, dengan studi kasus di Pakistan. Penelitian berikutnya yaitu model epidemi COVID-19 yang digunakan terdiri dari 9 persamaan diferensial (Li and Guo, 2022). Kendali optimal yang digunakan berupa kendali isolasi, kendali deteksi, dan kendali pengobatan, dengan studi kasus di Shanghai,

China. Penelitian selanjutnya adalah model epidemi COVID-19 berbentuk SVEAIR. Kendali optimal yang diterapkan pada penelitian ini berupa kendali isolasi, kendali vaksin, kendali *rapid test* pada individu terpapar, dan juga kendali pengobatan, dengan studi kasus di Pakistan (Shen et al., 2021). Prinsip kendali yang digunakan adalah prinsip minimum pontryagin, dengan tujuan meminimalkan fungsi tujuan berupa populasi terpapar dan terinfeksi. Hasil dari simulasi pada penelitian Hussain et al. (2021); Li and Guo (2022); Shen et al. (2021) menunjukkan bahwa dengan diterapkannya kendali optimal, maka jumlah individu rentan, terpapar, dan terinfeksi berkurang secara signifikan, dibandingkan dengan tidak diterapkan parameter kendali. Selain itu, hasil simulasi pada penelitian Annas et al. (2020b), memberi gambaran bahwa vaksin dapat mempercepat penyembuhan dan juga isolasi secara maksimal dapat menghambat penyebaran penyakit COVID-19 (Annas et al., 2020b).

Berdasarkan masalah yang dijelaskan sebelumnya dan penelitian terdahulu diatas, maka penelitian ini menggunakan model SEIR (tanpa kendali) dan SEIQR (dengan kendali). Model SEIR yang digunakan beracuan pada penelitian yang dilakukan oleh Annas et al. (2020b), sedangkan pada model SEIQR akan dilakukan penambahan kompartemen Q (*quarantine*) dengan disertai parameter tiga kendali yaitu tindakan pencegahan, seperti kendali 3M (menjaga jarak, mencuci tangan, menggunakan masker) pada individu rentan, kemudian kendali isolasi pada individu terkarantina, dan juga kendali vaksin pada individu yang rentan, dimana ketiga parameter kendali tersebut beracuan pada penelitian yang dilakukan oleh Hussain et al. (2021); Li and Guo (2022); Shen et al. (2021). Selain itu, analisis dinamika model penyebaran COVID-19 yang dilakukan dalam penelitian ini berfokus pada gelombang ketiga dengan studi kasus pada Provinsi

DKI Jakarta. Diharapkan dari penelitian ini dapat membantu pemerintah hingga masyarakat dalam memantau dan menurunkan angka penularan COVID-19. Oleh karena itu, judul penelitian ini adalah "Kendali Optimal Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin pada Penyebaran Penyakit COVID-19".

## **1.2. Rumusan Masalah**

Berdasarkan permasalahan yang dibahas pada bagian latar belakang, maka rumusan masalah yang dibahas dalam penelitian ini meliputi poin-poin sebagai berikut.

1. Bagaimana hasil penyelesaian model matematis pada penyebaran penyakit COVID-19 dengan kendali dan tanpa kendali?
2. Bagaimana hasil simulasi pemodelan matematis pada penyebaran penyakit COVID-19 dengan kendali dan tanpa kendali?

## **1.3. Tujuan Penelitian**

Sesuai dengan rumusan masalah yang ada, maka tujuan penelitian dari skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Untuk mengetahui penyelesaian model matematis pada penyebaran penyakit COVID-19 dalam dua kondisi, yaitu kondisi tanpa kendali, dan kondisi dengan kendali.
2. Untuk mengetahui hasil simulasi pemodelan matematis pada penyebaran penyakit COVID-19 dalam dua kondisi, yaitu kondisi tanpa kendali, dan kondisi dengan kendali.

#### **1.4. Manfaat Penelitian**

Manfaat penelitian dari skripsi ini terbagi menjadi dua aspek, yaitu bagi penulis dan bagi pembaca. Dari aspek penulis sendiri, penelitian ini diharapkan dapat menyalurkan pengetahuan mengenai model epidemi COVID-19, serta menganalisis model epidemi COVID-19, baik disertai kendali optimal maupun tanpa disertai kendali optimal sedemikian sehingga hasil simulasi yang ditunjukkan dari analisis model dapat dijadikan sebagai acuan untuk menerapkan kebijakan bagi pemerintah dan masyarakat dalam memutus rantai penyebaran COVID-19. Kemudian dari aspek pembaca, penelitian ini dapat menambah wawasan dan pengetahuan, serta menerapkan metode yang digunakan dalam analisis model COVID-19 pada bidang lain yang relevan, ataupun dapat diterapkan pada analisis model dinamika penyebaran penyakit menular yang lain.

#### **1.5. Batasan Masalah**

Batasan masalah perlu diberikan agar penelitian yang dikaji tidak terlalu bercabang. Adapun batasan masalah yang diberikan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Kendali yang diterapkan pada penelitian ini adalah kendali pencegahan, yang meliputi kendali 3M (menjaga jarak, mencuci tangan, menggunakan masker) pada individu rentan, kendali isolasi pada individu terkarantina, dan kendali vaksin pada individu rentan.
2. Individu yang telah dinyatakan sembuh dari COVID-19 masih dapat rentan kembali untuk terpapar maupun terinfeksi COVID-19, serta laju penularan COVID-19 dipengaruhi oleh interaksi antara individu rentan dan individu terpapar COVID-19.

3. Individu yang masuk ke dalam kompartemen karantina menimbulkan dua kemungkinan kondisi, yaitu individu yang meninggal karena COVID-19 saat terkarantina (*true positive*), dan individu yang meninggal secara alami karena komorbid saat terkarantina (*false positive*). Dalam penelitian ini diasumsikan kematian individu yang masuk ke dalam kompartemen karantina adalah karena terinfeksi COVID-19, sehingga di dalam kompartemen Q (*quarantine*) pada parameter kematian yang digunakan adalah parameter kematian karena COVID-19.
4. Prinsip kendali optimal yang diterapkan adalah prinsip minimum pontryagin.
5. Sampel data yang digunakan pada penelitian ini bersumber dari *website* <https://corona.jakarta.go.id>.
6. Metode numerik yang digunakan adalah metode Runge-Kutta Orde Empat.

## 1.6. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dirancang untuk mengetahui tahapan/gambaran atau skema penelitian. Dengan kata lain, secara sederhana sistematika penulisan adalah tata cara atau kerangka dari suatu penelitian. Sistematika penulisan pada proposal skripsi ini terbagi menjadi 3 bab, yaitu sebagai berikut.

### 1. BAB I

Bab I berisi mengenai paparan pendahuluan, dimana dalam pendahuluan terbagi menjadi beberapa subbab, yaitu latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, dan sistematika penulisan.

### 2. BAB II

Bab II berisi mengenai pemaparan tinjauan pustaka, dimana dalam tinjauan pustaka berisi pemaparan teori-teori yang relevan dengan topik utama dalam penelitian ini. Dalam penelitian ini, tinjauan pustaka terbagi menjadi 7 subbab, yaitu COVID-19 di DKI Jakarta, Model Matematika Epidemiologi, Kendali Optimal yang mana terbagi menjadi 2 subsubbab yaitu Fungsi Tujuan dan Prinsip Minimum Pontryagin, Model Matematika Penyebaran COVID-19 yang mana terbagi menjadi 2 subsubbab yaitu Model Penyebaran COVID-19 Tanpa Kendali dan Model Penyebaran COVID-19 Dengan Kendali, Runge-Kutta Orde Empat, dan Kajian Keislaman.

### 3. BAB III

Bab III berisi mengenai pemaparan metode penelitian, dimana dalam metode penelitian meliputi jenis penelitian yang digunakan, sumber data, dan tahapan penelitian.

### 4. BAB IV

Bab IV berisi mengenai pemaparan hasil dan pembahasan, yang meliputi deskripsi data, nilai parameter model, pemaparan perhitungan kendali optimal sesuai prinsip minimum pontryagin, dan penyelesaian pemodelan matematis penyebaran COVID-19 secara numerik dengan Runge-Kutta Orde Empat, serta pembahasan dari hasil simulasi dalam dua kondisi, yaitu kondisi tanpa kendali optimal maupun kondisi dengan kendali optimal, dan integrasi keislaman.

### 5. BAB V

Bab V berisi mengenai pemaparan penutup dari penelitian, yang meliputi kesimpulan dari hasil dan pembahasan penelitian yang telah dipaparkan, dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

## BAB II

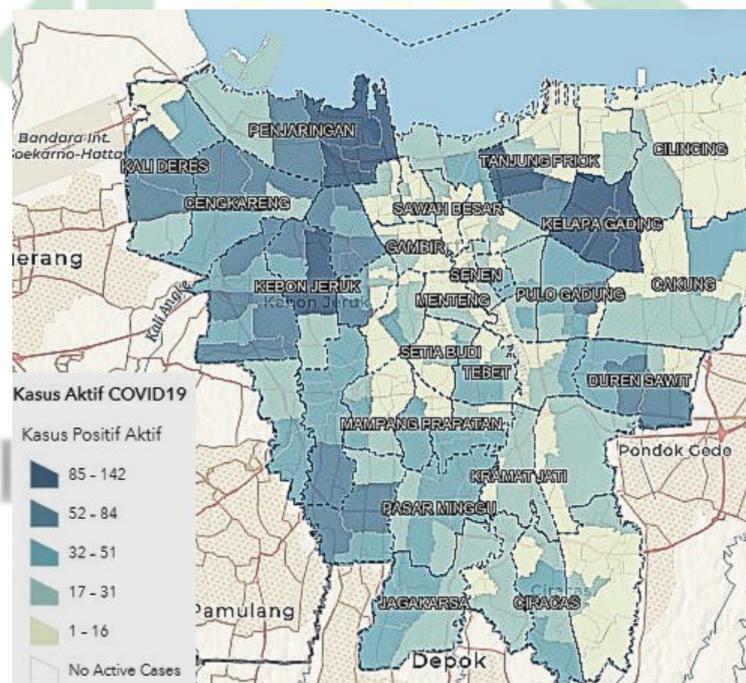
### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1. COVID-19 di DKI Jakarta

COVID-19 (*Corona Virus Disease-19*) adalah jenis penyakit menular yang menyerang sistem kekebalan tubuh manusia dan disebabkan oleh virus SARS-CoV-2 (*Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2*). COVID-19 mewakili *genus* atau famili besar dari virus, dan beberapa di antaranya merupakan penyakit parah, seperti MERS (*Middle East Respiratory Syndrome*) dan SARS (*Severe Acute Respiratory Syndrome*) (Saxena, 2021). Penyakit COVID-19 memiliki lima jenis varian yang teridentifikasi secara global, yaitu *Alfa*, *Beta*, *Gamma*, *Delta*, dan *Omicron* (Lubis et al., 2022).

Organisasi Kesehatan Dunia (WHO) mendeklarasikan sesuai tren kasus harian COVID-19 bahwa pengelolaan kasus COVID-19 baik secara global maupun secara nasional di Indonesia belum mengalami perbaikan secara total, hingga wabah COVID-19 ini menjadi perhatian internasional (Putera et al., 2022). Provinsi DKI Jakarta menempati urutan pertama dengan presentase sebesar 22.2% berdasarkan laporan Satgas COVID-19 DKI Jakarta dan Gambar (1.2), yang menjadikan DKI Jakarta sebagai provinsi penyumbang kasus positif COVID-19 terbanyak di Indonesia, atau dengan kata lain Provinsi DKI Jakarta menjadi episentrum kasus infeksi epidemi COVID-19 Indonesia, yang kemudian menyebar secara merata ke seluruh pulau di Indonesia (Triana, 2021; Kementerian Perencanaan Pembangunan Nasional (Bappenas) Republik Indonesia, 2020).

Sesuai data Badan Pusat Statistik sampai akhir tahun 2021, luas wilayah daratan Provinsi DKI Jakarta adalah 662.33 km<sup>2</sup>. Provinsi DKI Jakarta berbatasan dengan provinsi Jawa Barat di sebelah Selatan dan Timur, dan terbagi menjadi 6 daerah, yaitu Kepulauan Seribu, Jakarta Barat, Jakarta Timur, Jakarta Utara, Jakarta Selatan, dan Jakarta Pusat. Kabupaten/Kota yang luas wilayahnya terkecil di Provinsi DKI Jakarta adalah Kepulauan Seribu dengan luas wilayah 10.18 km<sup>2</sup>, dan luas wilayah terbesar adalah Jakarta Timur dengan luas wilayah 182.70 km<sup>2</sup>. Sesuai hasil sensus penduduk 2021, provinsi DKI Jakarta sebanyak 10,609,681 juta jiwa (Badan Pusat Statistik (BPS), 2022). Dengan demikian, provinsi DKI Jakarta menempati urutan kelima sebagai provinsi terpadat penduduk.



Gambar 2.1 Peta Sebaran Kasus Aktif COVID-19 Provinsi DKI Jakarta

Sumber: (Satuan Tugas Penanganan COVID-19 DKI Jakarta, 2021)

Berdasarkan Gambar (2.1), daerah yang masuk ke dalam potensi penularan COVID-19 tinggi adalah Penjaringan bagian Timur, Tanjung Priok bagian Selatan,

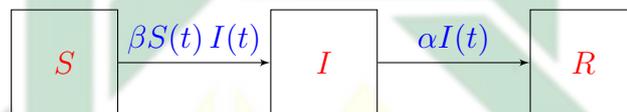
Kali Deres bagian Utara, Kelapa Gading bagian Timur, dan Cilandak (berbatasan dengan Pasar Minggu bagian Barat). Selain itu, Provinsi DKI Jakarta juga merupakan inti dari kota wilayah metropolitan Jabodetabek, yang mana total keseluruhan penduduk wilayah Jabodetabek hampir mencapai 35 juta jiwa (Pribadi et al., 2021). Hal tersebut menyebabkan tingginya kasus penularan COVID-19 di DKI Jakarta, serta tingginya angka kematian akibat terinfeksi COVID-19. Penyebaran kasus konfirmasi COVID-19 yang sangat tinggi di provinsi DKI Jakarta perlu dilakukan analisis dinamika berupa pemodelan matematika disertai penambahan kendali optimal agar dapat menekan angka laju penyebaran COVID-19.

## 2.2. Model Matematika Epidemiologi

Model matematika epidemiologi merupakan model yang memberikan pemahaman mengenai mekanisme yang mempengaruhi suatu penyakit dapat menyebar, dan pemrosesannya menunjukkan strategi dalam pengendalian wabah penyakit (Müller and Kuttler, 2014; Brauer and Castillo-Chavez, 2011). Model matematika epidemiologi yang diformulasikan tentunya harus mendeskripsikan jumlah kumulatif kasus baik rentan, terpapar, terinfeksi, sembuh, dan lain sebagainya yang diamati selama periode waktu tertentu, sehingga fungsi matematika yang digunakan adalah fungsi *non-linear* dalam variabel waktu ( $t$ ), serta disesuaikan dengan cara penyakit tersebut menular (Krämer et al., 2010).

Model matematika epidemiologi pertama kali ditemukan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927. Model dasar epidemiologi yang dirumuskan oleh Kermack dan McKendrick pada saat itu adalah SIR, dimana *S* (*susceptible*) menyatakan kelas individu yang rentan, *I* (*infected*) menyatakan kelas individu yang terinfeksi, dan *R* (*recovery*) menyatakan kelas individu yang telah pulih dari

penyakit, dengan studi kasus di Bombay (1905-1906) (Basnarkov et al., 2022). Model SIR yang dirumuskan secara matematis berbentuk sistem persamaan diferensial *non-linear*, dan menggunakan berbagai asumsi, salah satunya adalah proses epidemi merupakan proses deterministik, yaitu proses dimana suatu populasi ditentukan oleh aturan-aturan yang menggambarkan model (Brauer and Castillo-Chavez, 2011). Diagram kompartemen model SIR yang dirumuskan oleh Kermack dan McKendrick adalah sebagai berikut.



**Gambar 2.2 Diagram Kompartemen Model Penyakit SIR**

Sumber: (Müller and Kuttler, 2014)

Sistem persamaan diferensial yang tersusun sesuai gambar diagram kompartemen (2.2) sebagai berikut (Zhu and Shen, 2021).

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -\beta S(t) I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t) I(t) - \alpha I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \alpha I(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

dimana:

$S(t)$  : Banyak individu rentan dalam waktu tertentu

$I(t)$  : Banyak individu terinfeksi dalam waktu tertentu

$R(t)$  : Banyak individu sembuh dalam waktu tertentu

$\beta$  : Tingkat penularan (transmisi),  $\beta \in [0, 1]$

$\alpha$  : Tingkat infeksi,  $\alpha \in [0, 1]$

Selain itu, model matematika SIR pada sistem Persamaan (2.1) juga

diasumsikan untuk individu yang homogen, atau dengan kata lain bernilai konstan, tanpa ada individu yang meninggal secara alami dan individu yang meninggal akibat infeksi penyakit (Müller and Kuttler, 2014; Zhu and Shen, 2021). Jika sejumlah  $N$  populasi pada suatu daerah yang terdampak wabah penyakit, maka  $N$  ditentukan oleh:

$$N = S(t) + I(t) + R(t) \quad (2.2)$$

dan juga dengan kondisi awal pada masing-masing variabel sebagai berikut.

$$S(0) = S_0 \geq 0; I(0) = I_0 \geq 0; \text{ dan } R(0) = R_0 \geq 0$$

### 2.3. Kendali Optimal

Kendali optimal memiliki pengertian secara sederhana sebagai proses optimasi dinamis sistem kendali dari berbagai jenis metode analisis yang digunakan untuk mendapatkan bentuk parameter dari sistem yang dapat diterima, atau dengan kata lain didapatkan nilai parameter yang lebih optimal sedemikian sehingga sistem yang dihasilkan semakin menghasilkan performansi akurasi yang cukup tinggi pada suatu sistem dinamik (persamaan diferensial) kontinu (Kirk, 2004). Sistem kendali banyak diaplikasikan pada berbagai bidang, seperti pada desain sistem kendali pada pesawat ruang angkasa yang meminimalkan pengeluaran bahan bakar, kemudian pada bidang medis ataupun kesehatan khususnya dalam bidang pembangkitan gerak dan analisis rehabilitasi (Hiriart-Urruty et al., 2016).

Pada dasarnya, permasalahan optimasi kendali optimal identik dengan optimasi pada bidang riset operasi, salah satunya seperti optimasi pada program linier (*linear programming*) (Skormin, 2016). Kendali optimal termasuk

permasalahan optimasi *non-linear* bahkan permasalahan optimasi kompleks. Teori kendali optimal didasarkan pada dua ide teori mendasar, yaitu teori yang membahas mengenai pemrograman dinamis (*dynamic programming*) dan prinsip optimasi, yang mana teori mendasar tersebut diperkenalkan oleh Bellman, seorang matematikawan berkebangsaan Amerika Serikat (Todorov, 2006). Notasi kendali optimal yang biasanya digunakan adalah  $u(t)$ , merupakan suatu entitas perilaku dimana didapatkan dari persamaan *state* awal hingga pada *state* akhir (Roy, 2015; Roy and Datta, 2019). Oleh karena itu, formulasi dalam permasalahan optimasi terdiri atas dua bentuk fungsi, yaitu fungsi tujuan dan fungsi kendala. Persamaan diferensial atau sistem dinamik dengan kendali optimal secara umum sebagai berikut.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t) \quad (2.3)$$

Dengan:

$x(t)$  : variabel *state*

$u(t)$  : variabel kendali optimal

$t$  : dimensi waktu,  $t \in [t_0, t_f]$

### 2.3.1. Fungsi Tujuan

Fungsi tujuan atau biasa disebut juga dengan fungsi objektif merupakan fungsi utama yang harus dicapai untuk mendapatkan nilai optimal sesuai yang ditargetkan, atau nilai-nilai yang telah memenuhi kriteria fungsi kendala, sedangkan fungsi kendala merupakan suatu fungsi yang dibatasi oleh variabel-variabel atau suatu sistem pengelolaan (Poler et al., 2014). Fungsi tujuan terdiri dari dua kasus, yaitu kasus maksimasi dan kasus minimasi. Kasus maksimasi mencari nilai terbesar dari nilai-nilai yang ditemukan berdasarkan

fungsi kendala, sedangkan kasus minimasi mencari nilai terkecil dari nilai-nilai yang ditemukan berdasarkan fungsi kendala. Contoh permasalahan optimasi dalam kehidupan sehari-hari adalah memaksimalkan keuntungan suatu perusahaan, dan juga meminimalkan biaya pengeluaran suatu perusahaan (Skormin, 2016). Pada permasalahan optimasi pemodelan penyakit biasanya memaksimalkan jumlah individu sembuh, terobati, dan tervaksin, dan juga meminimumkan jumlah individu yang terpapar dan terinfeksi. Fungsi tujuan dalam kendali optimal biasanya dinotasikan dengan  $J$ , dimana  $J$  dinyatakan dengan:

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (2.4)$$

dengan  $u(t) \in U$  yang merupakan himpunan semua fungsi kendali yang diperbolehkan,  $V(x(t), u(t), t)$  merupakan persamaan objektif, kondisi awal  $x(t_0) = x_0$  dan kondisi transversalitas (kondisi batas)  $x(t_f)$  bebas atau dengan kata lain  $\lambda(t_f) = 0$ , serta  $t \in [t_0, t_f]$ ,  $t_0$  merupakan waktu awal dan  $t_f$  merupakan waktu akhir. Nilai  $J$  pada Persamaan (2.4) merupakan nilai optimum (maksimum atau minimum), disesuaikan dengan permasalahan optimasi. Secara umum, bentuk optimasi dalam kendali optimal adalah menentukan nilai optimum pada fungsi tujuan (2.4) dengan fungsi kendala (2.3), serta dengan kondisi awal dan kondisi batas yang ditentukan.

### 2.3.2. Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip minimum pontryagin pertama kali dikenalkan pada tahun 1962 oleh Lev Semyonovich Pontryagin, yang merupakan bentuk satu *set* (himpunan) kondisi yang diperlukan untuk optimasi dari permasalahan kendali optimal yang diturunkan menggunakan kalkulus variasi, dan fungsi tujuan minimasi biaya (Geering, 2007).

Prinsip minimum pontryagin menyatakan kondisi yang dibutuhkan dalam optimasi setelah permasalahan kendali optimal dirumuskan sebagai sistem Hamilton (van Dooren et al., 2022). Secara matematis, sistem Hamilton yang merupakan sistem dinamik yang dibentuk dari suatu Fungsi Hamiltonian dinyatakan dengan:

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda(t) f(x(t), u(t), t) \quad (2.5)$$

Dengan:

$\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t)$	: Fungsi Hamiltonian
$V(x(t), u(t), t)$	: Persamaan objektif
$\lambda(t)$	: Persamaan <i>co-state</i>
$f(x(t), u(t), t)$	: Persamaan <i>state</i>

Kondisi yang diperlukan dalam prinsip minimum pontryagin yaitu menentukan kandidat kendali  $u(t)$  yang optimal, yang mana kandidat kendali optimal tersebut dapat dikatakan sebagai kendali ekstrim. Prinsip minimum pontryagin memastikan bahwa jika terdapat kendali optimal, maka kendali tersebut haruslah menjadi kendali ekstrim. Jika masalah kendali optimal mempunyai solusi, dan hanya terdapat satu kendali ekstrim maka kendali ekstrim tersebut merupakan solusi dari kendali optimal. Jika beberapa kendali optimal ditemukan, akan relatif mudah dalam menerapkan secara satu-satu kemudian mengidentifikasi kendali optimal sebagai nilai ekstrim yang memberikan total biaya terendah (Onori et al., 2016). Adapun langkah-langkah matematis dalam menentukan solusi kendali optimal menggunakan prinsip minimum pontryagin, yaitu sebagai berikut.

1. Membentuk atau memformulasikan fungsi Hamiltonian yang bersesuaian dengan Persamaan (2.5).

2. Menentukan nilai minimum dari fungsi Hamiltonian terhadap sistem kendali  $u(t)$ , yaitu dengan  $\frac{\partial \mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t)}{\partial u(t)} = 0$ , sedemikian sehingga diperoleh nilai  $u^*(t) = u^*(x(t), \lambda(t), t)$ , dan disubstitusikan ke dalam Persamaan (2.5) untuk mendapatkan fungsi Hamiltonian baru dimana:

$$\mathcal{H}^*(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \min_{u(t) \in U} \{ \mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t) \} \quad (2.6)$$

3. Menyelesaikan persamaan *state* dan *co-state*, yaitu dengan menggunakan persamaan-persamaan berikut.

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &:= \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}^*(x(t), u^*(t), \lambda(t), t)}{\partial \lambda(t)} \\ \dot{\lambda}^*(t) &:= \frac{d\lambda(t)}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}^*(x(t), u^*(t), \lambda(t), t)}{\partial x(t)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dengan kondisi awal  $x(t_0) = x_0$  dan kondisi transversalitas (kondisi batas)  $\lambda(t_f) = 0$ .

4. Mensubstitusikan solusi Persamaan (2.7) ke dalam  $u^*(t)$  pada Langkah (2) untuk mendapatkan kendali optimal.

Adapun persamaan *state* yaitu persamaan keadaan dari sistem dinamik (persamaan diferensial) yang mencakup fungsi kendali, sedangkan persamaan *co-state* atau biasa dikenal dengan proporsional Lagrange (pengali Lagrange) merupakan persamaan yang menggambarkan biaya marginal sebagai pengoptimalan persamaan *state* (Khajji et al., 2021). Persamaan *state* diselesaikan menggunakan kondisi awal dan secara maju (*forward*) yaitu dari waktu awal menuju waktu akhir, sebaliknya pada persamaan *co-state* diselesaikan secara mundur (*backward*) yaitu dari waktu akhir menuju waktu awal dan memenuhi kondisi transversalitas (kondisi batas atau syarat batas) (Visser et al., 1999).

## 2.4. Model Epidemiologi COVID-19

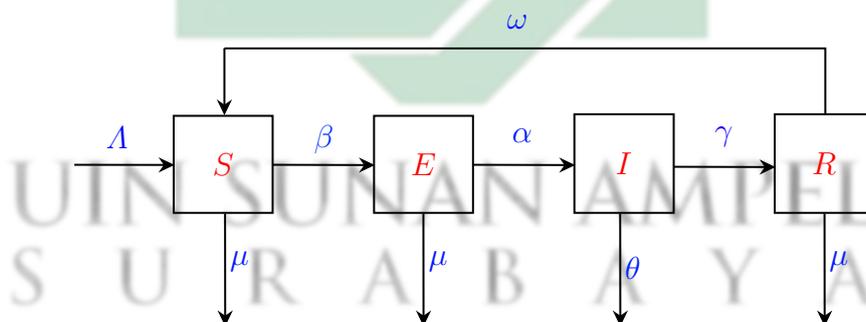
Model epidemiologi COVID-19 yang diformulasikan atau dibentuk adalah model matematika epidemiologi yang berbentuk sistem persamaan diferensial yang tentunya memiliki kondisi awal, dan juga variabel-variabel yang digunakan dari berbagai penelitian-penelitian yang telah dilakukan berdasarkan jenis penyakit dan cara penyebaran penyakit tersebut, diantaranya model SIR (*Susceptible Infected Recovery*), SEIR (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovery*), SEIQR (*Susceptible, Exposed, Infected, Quarantine, Recovery*), model SEITR (*Susceptible, Exposed, Infected, Treatment, Recovery*), model SCEAIR (*Susceptible, Carrier, Exposed, Asymptomatic, Infected, Recovery*), dan lain sebagainya (Anderson Luiz Pena da et al., 2021). Selain itu, dari berbagai model matematika epidemiologi juga disertai parameter kendali optimal sebagai optimasi untuk menghasilkan simulasi yang jauh lebih signifikan.

### 2.4.1. Model Epidemiologi COVID-19 Tanpa Kendali

Dalam kondisi tanpa kendali, model COVID-19 yang digunakan adalah model SEIR, yang merupakan model pengembangan dari SIR, dengan penambahan kompartemen E (*exposed*) yang berarti individu benar-benar dinyatakan terinfeksi penyakit jika individu tersebut kontak dengan individu lain (baik yang sehat maupun yang terinfeksi penyakit), dan penyebaran penyakit dapat melalui *droplet* maupun *airbone* (Nenchev, 2020). Model SEIR yang digunakan dalam penelitian ini memodifikasi dari penelitian Annas et al. (2020a), dimana asumsi yang digunakan yaitu tingkat kelahiran dan tingkat kematian alami bernilai sama, individu yang telah sembuh dapat terinfeksi kembali, terdapat individu yang mati secara alami (karena penyakit lain ataupun faktor usia) maupun karena

penyakit COVID-19 pada kompartemen I (*infected*), dan tingkat transmisi (penularan) dipengaruhi oleh interaksi antara individu rentan dan individu terinfeksi.

Model SEIR dalam penelitian ini dimodifikasi dengan asumsi bahwa individu yang telah sembuh dapat terinfeksi atau terjangkit COVID-19 kembali, kemudian individu yang terinfeksi atau terjangkit COVID-19 disebabkan oleh berbagai faktor seperti kontak langsung dengan individu lain (manusia dengan manusia) yang dicurigai terinfeksi COVID-19 dan tidak langsung terinfeksi, tingkat kelahiran dan tingkat kematian alami yang berbeda, tingkat kematian alami pada individu rentan, terpapar, dan sembuh bernilai sama hanya terdapat perbedaan pada individu yang mati akibat penyakit COVID-19 pada individu terinfeksi, dan juga tingkat transmisi (penularan) dipengaruhi oleh interaksi antara individu rentan dan individu terpapar. Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, berikut merupakan gambar diagram kompartemen model SEIR.



**Gambar 2.3 Model SEIR COVID-19 Tanpa Kendali**

Model matematika epidemiologi SEIR penyebaran penyakit COVID-19 tanpa kendali optimal pada penelitian ini yang mewakili diagram kompartemen (2.3) berbentuk sistem persamaan diferensial *non-linear* yang dimensional (satuan dalam banyaknya individu) diformulasikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
S^\bullet(t) &:= \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \frac{\beta S(t) E(t)}{N} - \mu S(t) + \omega R(t) \\
E^\bullet(t) &:= \frac{dE(t)}{dt} = \frac{\beta S(t) E(t)}{N} - \mu E(t) - \alpha E(t) \\
I^\bullet(t) &:= \frac{dI(t)}{dt} = \alpha E(t) - \gamma I(t) - \theta I(t) \\
R^\bullet(t) &:= \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) - \omega R(t)
\end{aligned}
\tag{2.8}$$

dimana:

$S(t)$  : Banyak individu rentan dalam waktu tertentu

$E(t)$  : Banyak individu terpapar dalam waktu tertentu

$I(t)$  : Banyak individu terinfeksi dalam waktu tertentu

$R(t)$  : Banyak individu sembuh dalam waktu tertentu

$\Lambda$  : Tingkat kelahiran

$\beta$  : Tingkat transmisi (penularan)

$\mu$  : Tingkat kematian alami

$\omega$  : Tingkat rentan kembali

$\alpha$  : Tingkat terinfeksi

$\gamma$  : Tingkat kesembuhan

$\theta$  : Tingkat kematian karena COVID-19

Dengan total populasi penduduk  $N$  ditentukan oleh:

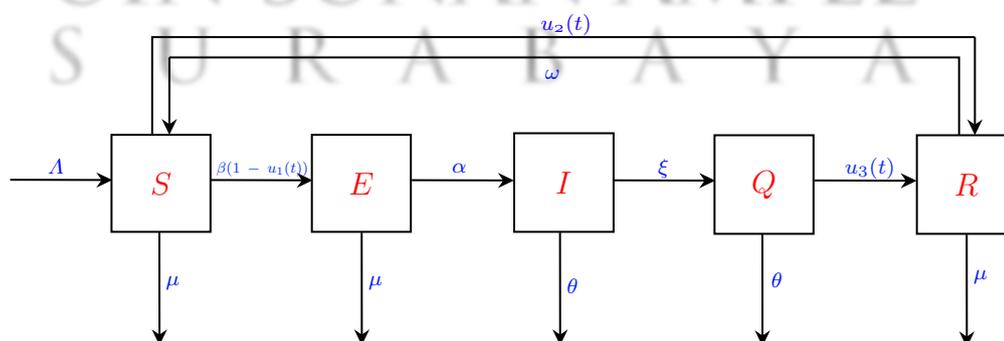
$$N = S(t) + E(t) + I(t) + R(t) \tag{2.9}$$

Dan juga kondisi awal (*initial condition*) yang didefinisikan dengan:

$$S(0) = S_0 \geq 0; E(0) = E_0 \geq 0; I(0) = I_0 \geq 0; R(0) = R_0 \geq 0$$

## 2.4.2. Model Epidemiologi COVID-19 Dengan Kendali

Pada diagram kompartemen sesuai Gambar (2.3) akan dimodifikasi dengan menambahkan parameter kendali. Asumsi-asumsi yang digunakan sama seperti pada model tanpa kendali, hanya saja terdapat tambahan pada parameter kendali. Sesuai batasan masalah pada penelitian ini, maka parameter kendali yang digunakan meliputi kendali isolasi ( $u_3(t)$ ), kendali vaksin ( $u_2(t)$ ), dan juga kendali tindakan pencegahan, seperti kendali 3M (menjaga jarak, mencuci tangan, menggunakan masker) ( $u_1(t)$ ), serta penambahan parameter tingkat individu terinfeksi yang kemudian dikarantina, atau tingkat terinfeksi yang masuk dalam karantina ( $\xi$ ). Parameter kendali tindakan pencegahan seperti 3M dan isolasi mengambil dari penelitian Hussain et al. (2021), sedangkan parameter kendali vaksin merupakan modifikasi atau penambahan parameter baru. Dengan demikian, model COVID-19 yang digunakan adalah model SEIQR, karena terdapat kendali isolasi (karantina), dan perlu penambahan kompartemen Q (*quarantine*) pada model SEIR yang diterapkan sesuai Gambar (2.3). Berikut merupakan diagram kompartemen model penyebaran COVID-19 dengan kendali sesuai Gambar (2.4).



Gambar 2.4 Model SEIQR COVID-19 Dengan Kendali

Model matematika epidemiologi SEIQR penyebaran penyakit COVID-19

dengan kendali pada penelitian ini yang mewakili diagram kompartemen (2.4) berbentuk sistem persamaan diferensial *non-linear* yang dimensional (satuan dalam banyaknya individu) diformulasikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 S^*(t) &:= \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \frac{\beta(1-u_1(t))S(t)E(t)}{N} - \mu S(t) \\
 &\quad + \omega R(t) - u_2(t)S(t) \\
 E^*(t) &:= \frac{dE(t)}{dt} = \frac{\beta(1-u_1(t))S(t)E(t)}{N} - \mu E(t) - \alpha E(t) \\
 I^*(t) &:= \frac{dI(t)}{dt} = \alpha E(t) - \xi I(t) - \theta I(t) \\
 Q^*(t) &:= \frac{dQ(t)}{dt} = \xi I(t) - u_3(t)Q(t) - \theta Q(t) \\
 R^*(t) &:= \frac{dR(t)}{dt} = u_3(t)Q(t) + u_2(t)S(t) - \mu R(t) - \omega R(t)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

dimana total populasi penduduk  $N$  ditentukan oleh:

$$N = S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t) \tag{2.11}$$

Kondisi awal (*initial condition*) dari sistem persamaan (2.10) adalah:

$$S(0) = S_0 \geq 0; E(0) = E_0 \geq 0; I(0) = I_0 \geq 0; Q(0) = Q_0 \geq 0; R(0) = R_0 \geq 0$$

## 2.5. Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta pertama kali ditemukan oleh dua orang matematikawan Jerman yaitu Carl Runge dan Wilhelm Kutta pada tahun 1900 (Butcher, 1996). Metode Runge-Kutta merupakan salah satu jenis metode numerik yang digunakan untuk menentukan solusi dari suatu persamaan maupun sistem persamaan diferensial, dimana persamaan maupun sistem persamaan diferensial tersebut memenuhi kondisi ketika penyelesaiannya tidak dapat ditentukan secara

analitik maupun eksak. Metode Runge-Kutta juga dapat dinyatakan sebagai metode perbaikan dari metode numerik lainnya, seperti metode Euler dan metode Heun, dimana kedua metode tersebut juga digunakan untuk menentukan solusi pendekatan numerik secara *linear* dari persamaan maupun sistem persamaan diferensial (Griffiths and Higham, 2010). Semakin besar orde yang digunakan, semakin kecil galat yang dihasilkan sedemikian sehingga berakibat pula pada tingkat keakuratan yang dihasilkan juga semakin tinggi mendekati solusi eksaknya. Proses numerik yang digunakan adalah proses linierisasi yang berasal dari deret Taylor (Hermann and Saravi, 2014; Holmes, 2006) sebagai berikut.

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x_{n+1} - x_n)^2 + \dots + \frac{f^{(p)}(x_n)}{p!}(x_{n+1} - x_n)^p \quad (2.12)$$

dengan:

$p$  : derajat turunan,  $p = 0, 1, 2, \dots$

$f^{(p)}(x_n)$  : nilai turunan fungsi ke- $p$  di sekitar  $x_n$

Berdasarkan deret Taylor pada Persamaan (2.12), maka didapatkan bentuk umum solusi numerik dari bentuk persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

dimana kondisi awal (*initial condition*) yaitu  $y(x_0) = y_0$  menggunakan pendekatan metode runge-kutta orde- $n$  adalah sebagai berikut.

$$y_{r+1} = y_r + h(c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 + c_4k_4 + \dots + c_nk_n) \quad (2.13)$$

dimana:

$y_{r+1}$  : solusi pendekatan numerik pada urutan ke- $(r + 1)$

$y_r$  : solusi pendekatan numerik pada urutan ke- $r$

$h$  : *length-step* (ukuran langkah)

$c_1, c_2, \dots, c_n$  : koefisien pembobot dalam koefisien evaluasi

$k_1, k_2, \dots, k_n$  : koefisien evaluasi

Adapun koefisien evaluasi masing-masing ditentukan oleh:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_r, y_r) \\
 k_2 &= f(x_r + g_1 h, y_r + j_1 k_1) \\
 k_3 &= f(x_r + g_2 h, y_r + j_2 k_1 + j_3 k_2) \\
 k_4 &= f(x_r + g_3 h, y_r + j_4 k_1 + j_5 k_2 + j_6 k_3) \\
 &\vdots \\
 k_n &= f(x_r + g_r h, y_r + j_{n-1} k_1 + j_{n-2} k_2 + \dots + j_{n-1} k_{n-1})
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

dimana  $r = 0, 1, 2, \dots, n$  atau  $r \in \mathbb{W}$ , dan juga nilai  $h$  ditentukan dengan  $h = x_{r+1} - x_r$ . Masing-masing koefisien evaluasi pada Persamaan (2.14) dapat dideskripsikan sebagai berikut.

- Koefisien  $k_1$  adalah kemiringan (*slope*) pada langkah pertama
- Koefisien  $k_2$  adalah kemiringan (*slope*) pada titik tengah dengan akurasi lebih baik dari koefisien  $k_1$
- ⋮
- Koefisien  $k_n$  adalah kemiringan (*slope*) pada langkah terakhir dengan akurasi lebih baik dari koefisien  $k_{n-1}$

Untuk penentuan koefisien pembobot dalam koefisien evaluasi pada metode runge-kutta orde empat ( $n = 4$ ), didapatkan nilai-nilai koefisien dari  $c_r$ ,  $g_r$ , dan  $j_r$  untuk  $r = 0, 1, 2, \dots, n$ , yang mengacu pada (Hermann and Saravi, 2014) yaitu sebagai berikut.

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{2}, g_2 = \frac{1}{2}, g_3 = 1 \\ j_1 &= \frac{1}{2}, j_2 = 0, j_3 = \frac{1}{2}, j_4 = 0, j_5 = 0, j_6 = 1 \\ c_1 &= \frac{1}{6}, c_2 = \frac{1}{3}, c_3 = \frac{1}{3}, c_4 = \frac{1}{6} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai yang telah diperoleh pada (2.15) ke dalam persamaan (2.13) dan (2.14), maka didapatkan solusi numerik dengan pendekatan metode runge-kutta orde empat sebagai berikut.

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.16)$$

Dengan koefisien evaluasi masing-masing yaitu:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_r, y_r) \\ k_2 &= f\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(x_r + h, y_r + k_3) \end{aligned} \quad (2.17)$$

## 2.6. Integrasi Keislaman

Wabah penyakit merupakan musibah besar yang dapat terjadi kapanpun dan dimanapun, tidak membeda-bedakan golongan orang apapun, baik jabatan/kedudukan, keshalehan, dan lain-lain. Suatu wabah penyakit dapat

dimungkinkan terjadi dalam waktu yang sangat lama, seperti halnya penyakit COVID-19 yang muncul pada akhir tahun 2019 (bulan Desember 2019) sampai saat ini. Hal tersebut telah tercantum dalam Al-Qur'an pada Surah At-Thaghabun Ayat 11 yang berbunyi:

مَا أَصَابَ مِنْ مُصِيبَةٍ إِلَّا بِإِذْنِ اللَّهِ وَمَنْ يُؤْمِنْ بِاللَّهِ يَهْدِ اللَّهُ قَلْبَهُ وَاللَّهُ بِكُلِّ شَيْءٍ عَلِيمٌ ﴿١١﴾

**Terjemahan:** *"Tidak ada suatu musibah pun yang menimpa (seseorang), kecuali dengan izin Allah. Siapa yang beriman kepada Allah, niscaya Dia akan memberi petunjuk kepada hatinya. Allah Maha Mengetahui segala sesuatu" (QS. At-Thaghabun/64:11).*

Ayat tersebut erat kaitannya dengan wabah COVID-19 yang melanda lebih dari 2 tahun. Terjadinya wabah COVID-19 yang sangat lama merupakan pengingat atau ujian dari Allah SWT bagi hambanya yaitu manusia untuk senantiasa bersabar dan selalu mengingat Allah di setiap keadaan baik keadaan senang maupun keadaan susah, bahkan dalam keadaan genting sekalipun.

Wabah penyakit yang menular tentu juga dapat diatasi dengan pengobatan sebagai upaya penanganan dalam meminimalisir penularan COVID-19, salah satunya pemberian vaksin. Pemberian vaksin ditujukan agar resiko terpapar dapat diminimalisir atau dengan kata lain kemungkinan untuk resiko terpapar dan terinfeksi COVID-19 semakin kecil, dan juga dapat mendorong terbentuknya *herd immunity*. Perihal pentingnya vaksin sebagai obat dalam mencegah penularan wabah penyakit COVID-19 tercantum dalam Hadis Riwayat oleh Imam Muslim Nomor 2204 yang berbunyi:

حَدَّثَنَا هَارُونُ بْنُ مَعْرُوفٍ وَأَبُو الطَّاهِرِ وَأَحْمَدُ بْنُ عَيْسَى قَالُوا حَدَّثَنَا ابْنُ وَهْبٍ أَخْبَرَنِي  
عَمْرُو وَهُوَ ابْنُ الْحَارِثِ عَنْ عَبْدِ رَبِّهِ بْنِ سَعِيدٍ عَنْ أَبِي الزُّبَيْرِ عَنْ جَابِرٍ عَنْ رَسُولِ  
اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ أَنَّهُ قَالَ لِكُلِّ دَاءٍ دَوَاءٌ فَإِذَا أُصِيبَ دَوَاءُ الدَّاءِ بَرَأَ بِإِذْنِ اللَّهِ عَزَّ  
وَجَلَّ (صحيح مسلم : ٤٠٨٤)

**Terjemahan:** *Telah menceritakan kepada kami Harun bin Ma'ruf dan Abu Ath Thahir serta Ahmad bin 'Isa mereka berkata: Telah menceritakan kepada kami Ibnu Wahb: Telah mengabarkan kepadaku 'Amru yaitu Ibnu Al Harits dari 'Abdu Rabbih bin Sa'id dari Abu Az Zubair dari Jabir dari Rasulullah shallallahu 'alaihi wa sallam, beliau bersabda: "Setiap penyakit ada obatnya. Apabila ditemukan obat yang tepat untuk suatu penyakit, maka akan sembuhlah penyakit itu dengan izin Allah 'azza wajalla."* (H.R. Imam Muslim, Nomer 4084).

Manusia juga diharuskan memiliki persiapan dalam menghadapi wabah penyakit, karena wabah penyakit dapat dikatakan juga sebagai bencana. Secara sederhana, persiapan yang harus dimiliki dalam menghadapi bencana disebut sebagai mitigasi bencana. Hal tersebut tercantum dalam Al-Qur'an pada Surah Ali 'Imran Ayat 200 yang berbunyi:

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا اصْبِرُوا وَصَابِرُوا وَرَابِطُوا وَاتَّقُوا اللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُفْلِحُونَ ﴿٢٠٠﴾  
S U R A H A L I ' I M R A N

**Terjemahan:** *"Wahai orang-orang yang beriman, bersabarlah kamu, kuatkanlah kesabaranmu, tetaplah bersiap siaga di perbatasan (negerimu), dan bertakwalah kepada Allah agar kamu beruntung"* (QS. Ali 'Imran/3:200).

Ayat tersebut menegaskan betapa pentingnya kesiapsiagaan dalam menghadapi suatu bencana atau musibah yang berat termasuk wabah penyakit COVID-19, serta pentingnya kesabaran dan ketakwaan kepada Allah SWT, karena Allah SWT memberikan musibah berupa bencana wabah penyakit sebagai

peringat untuk muhasabah diri dan bersabar serta memikirkan strategi atau jalan keluar sebagai bentuk kesiapsiagaan dalam mengurangi penularan COVID-19 secara berkala.

Selain itu, bentuk mitigasi dalam menghadapi wabah penyakit menular juga dapat dilakukan dengan prediksi. Prediksi sebagai rencana ataupun strategi untuk menghadapi semua kemungkinan yang terjadi pada masa mendatang. Prediksi erat kaitannya dengan kisah Nabi Yusuf AS, yang bermimpi masalah kejadian-kejadian di masa mendatang sebagai bentuk mitigasi, dan telah tercantum dalam Al-Qur'an Surah Yusuf Ayat 48 yang berbunyi:

ثُمَّ يَأْتِي مِنْ بَعْدِ ذَلِكَ سَبْعٌ شِدَادٌ يَأْكُلْنَ مَا قَدَّمْتُمْ لَهُنَّ إِلَّا قَلِيلًا تَمَّا تُحْصِنُونَ ﴿٤٨﴾

**Terjemahan:** *"Kemudian, sesudah itu akan datang tujuh (tahun) yang sangat sulit (paceklik) yang menghabiskan apa yang kamu simpan untuk menghadapinya, kecuali sedikit dari apa (bibit gandum) yang kamu simpan"* (QS. Yusuf/12:48).

Secara sederhana, ayat tersebut menjelaskan bahwa sesudah mengalami masa kesulitan akan muncul kemudahan (Cahyono, 2019). Prediksi sangat diperlukan dalam bidang matematika, seperti wabah penyakit COVID-19 diperlukan prediksi sebagai mitigasi untuk menghadapi kemungkinan yang terjadi selama pandemi COVID-19 mewabah, serta strategi dalam menurunkan angka penularan COVID-19.

## BAB III

### METODE PENELITIAN

#### 3.1. Jenis Penelitian

Jenis penelitian pada skripsi ini termasuk ke dalam penelitian kuantitatif. Penelitian kuantitatif adalah penelitian yang menekankan pada proses umum yang melibatkan penetapan hipotesis berdasarkan temuan-temuan dari penelitian sebelumnya (McVilly et al., 2008). Tipe data yang digunakan adalah tipe data numerik pada rentang waktu tertentu, yaitu menggunakan satuan waktu harian.

#### 3.2. Jenis dan Sumber Data

Sampel data pada penelitian ini adalah jenis data sekunder, dengan variabel-variabel data sesuai diagram kompartemen pada Gambar (2.3) dan Gambar (2.4) yang meliputi jumlah individu rentan, terpapar, terinfeksi, terkarantina, dan sembuh dari penyakit COVID-19 Provinsi DKI Jakarta, dengan periode waktu antara 13 Januari 2022 hingga 13 Maret 2022, serta satuan yang dinyatakan dalam banyak individu. Data diambil dari situs resmi <https://corona.jakarta.go.id> yang dikelola langsung oleh (Satuan Tugas Penanganan COVID-19 DKI Jakarta, 2021), dan data populasi penduduk diambil dari situs resmi (Badan Pusat Statistik (BPS), 2022). Berikut merupakan sampel data yang digunakan dalam penelitian ini, sebagaimana ditunjukkan pada Tabel (3.1).

Tabel 3.1 Sampel Data COVID-19 DKI Jakarta

NO	Date	Susceptible	Exposed	Infected	Quarantine	Recovery
1	2022/01/13	6.869.075	2.882.572	3.118	2.353	852.563
2	2022/01/14	6.851.789	2.898.984	3.525	2.656	852.727
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
89	2022/03/12	5.396.971	3.992.196	23.105	19.285	1.178.124
90	2022/03/13	5.389.725	3.998.184	22.489	18.707	1.180.576

Dari data-data yang telah terkumpul diatas, maka dapat dideskripsikan sebagai berikut.

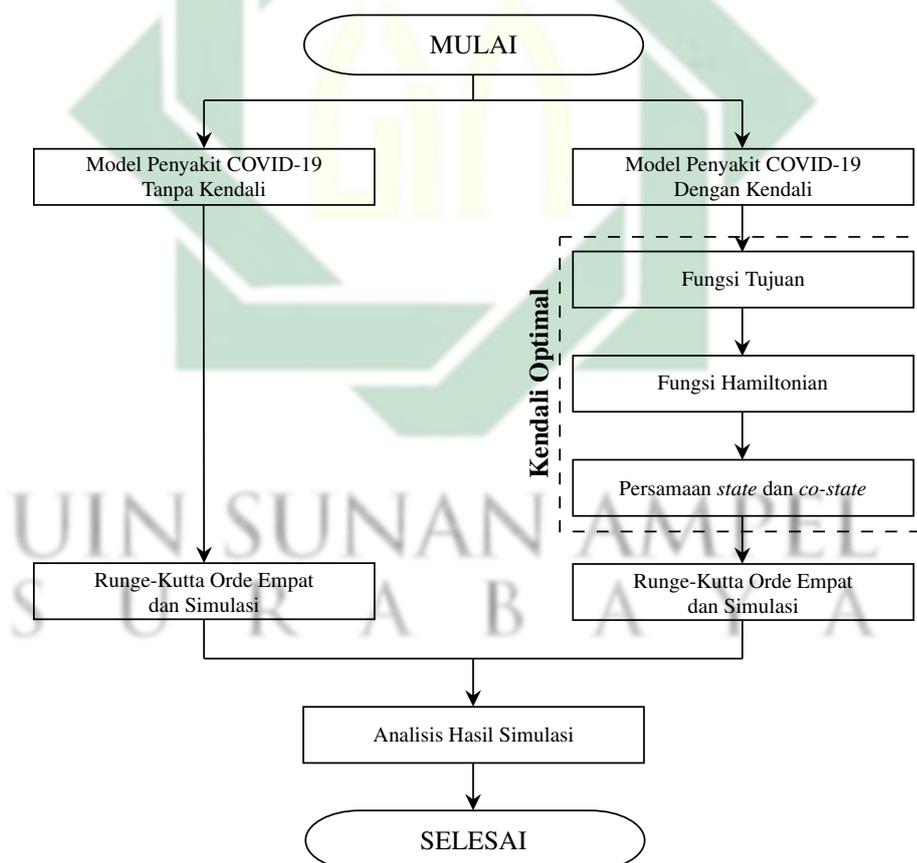
1. Data jumlah populasi penduduk Provinsi DKI Jakarta pada periode 2021 hingga bulan Maret 2022 adalah sebesar 10.609.681 jiwa.
2. Data jumlah individu yang rentan atau yang pernah melakukan kontak langsung dengan individu lain pada tanggal 13 Januari 2022 adalah sebesar 6.869.075 jiwa.
3. Data jumlah individu yang probabel, *discarded*, dan pernah melakukan perjalanan keluar masuk daerah Provinsi DKI Jakarta pada tanggal 13 Januari 2022 adalah sebesar 2.882.572 jiwa.
4. Data jumlah individu yang terinfeksi COVID-19 baik yang terindikasi dengan gejala dan tanpa gejala Provinsi DKI Jakarta pada tanggal 13 Januari 2022 adalah sebesar 3.118 jiwa.
5. Data jumlah individu yang terkarantina karena telah dinyatakan terinfeksi COVID-19 maupun masih dalam kategori probabel, *discarded*, dan telah

melakukan perjalanan keluar masuk daerah Provinsi DKI Jakarta pada tanggal 13 Januari 2022 adalah sebesar 2.353 jiwa.

6. Data jumlah individu yang dinyatakan telah sembuh atau pulih dari penyakit COVID-19 Provinsi DKI Jakarta pada tanggal 13 Januari 2022 adalah sebesar 852.563 jiwa.

### 3.3. Tahapan Penelitian

Adapun tahapan penelitian ini digambarkan melalui diagram alir (*flowchart*) sesuai Gambar (3.1) berikut.



**Gambar 3.1 Diagram Alir (*Flowchart*) Model Penyebaran COVID-19**

Sesuai pada diagram alir (*flowchart*) yaitu Gambar (3.1), maka penelitian ini dapat dijelaskan secara terperinci ke dalam langkah-langkah sebagai berikut.

### 1. Memodifikasi Model dari Penelitian Acuan (Penelitian Terdahulu)

Formulasi atau pembentukan model penyebaran penyakit COVID-19 yang digunakan pada penelitian ini merupakan modifikasi dari penelitian [Annas et al. \(2020b\)](#) untuk model tanpa parameter kendali, dengan kombinasi 3 parameter kendali pencegahan dari penelitian oleh [Hussain et al. \(2021\)](#); [Li and Guo \(2022\)](#); [Shen et al. \(2021\)](#), yaitu kendali 3M (menjaga jarak, mencuci tangan, dan menggunakan masker), kendali isolasi, dan kendali vaksin untuk model dengan parameter kendali.

### 2. Penyelesaian kendali optimal

Penyelesaian kendali optimal yang diterapkan pada penelitian ini adalah prinsip minimum pontryagin, dengan langkah-langkah sebagai berikut.

- (a) Penentuan fungsi tujuan yang bersesuaian dengan Persamaan [\(2.4\)](#), dimana fungsi tujuan yang diformulasikan yaitu sebagai berikut.

$$J(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) = \int_0^{t_f} (A_1 E(t) + A_2 I(t) + C_1 u_1^2(t) + C_2 u_2^2(t) + C_3 u_3^2(t)) dt \quad (3.1)$$

dimana  $A_1$  merupakan koefisien laju terpapar dan  $A_2$  merupakan koefisien laju terinfeksi yang mana akan diminimumkan, serta  $C_1$ ,  $C_2$  dan  $C_3$  merupakan bobot biaya pada masing-masing variabel kendali  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  dan  $u_3(t)$  yang mana dalam hal ini sebagai biaya pengeluaran untuk parameter kendali tindakan pencegahan, serta  $t_0 = 0$  (waktu awal). Dengan pemisalan fungsi biaya berbentuk non-linier yang mana dalam hal ini dipilih fungsi kuadrat karena tidak terdapat korelasi linier antara biaya pengeluaran untuk tindakan

pengecahan COVID-19 (3M, vaksinasi, dan isolasi) dengan banyaknya subpopulasi terpapar maupun subpopulasi terinfeksi, sedemikian sehingga dapat meminimumkan total biaya bersamaan dengan jumlah populasi terpapar dan terinfeksi (Mahardika, 2021).

(b) Penentuan fungsi Hamiltonian yang bersesuaian dengan Persamaan (2.5).

(c) Menentukan nilai  $u^*(t)$  dengan meminimumkan fungsi Hamiltonian pada langkah pertama dan didapatkan fungsi Hamiltonian baru sesuai pada Persamaan (2.6).

(d) Penentuan persamaan *state* dan *co-state* sesuai dengan kondisi awal dan kondisi transversal (kondisi batas), yang bersesuaian dengan Persamaan (2.7).

(e) Penentuan variabel kendali  $u^*(t)$  sebagai kendali optimal dengan mensubstitusikan solusi persamaan *state* dan *co-state* ke dalam Persamaan (2.5) sesuai pada Langkah (2c).

3. Mensimulasikan secara numerik model penyebaran COVID-19 dengan kendali optimal menggunakan Runge-Kutta Orde Empat. Pada tahap penyelesaian persamaan *state* solusi numerik yang digunakan adalah kombinasi antara Runge-Kutta Orde Empat dengan urutan maju (*forward sweep*), dan pada tahap penyelesaian persamaan *co-state* solusi numerik yang digunakan adalah kombinasi antara Runge-Kutta Orde Empat dengan urutan mundur (*backward sweep*).

4. Analisis hasil simulasi

Analisis hasil dilakukan dengan perbandingan dari berbagai simulasi

numerik yang dihasilkan oleh masing-masing kompartemen berdasarkan model penyebaran COVID-19 tanpa parameter kendali dan dengan parameter kendali untuk mengetahui skenario kondisi simulasi yang optimal dan signifikan sebagai strategi terbaik dalam menurunkan angka penyebaran COVID-19.



UIN SUNAN AMPEL  
S U R A B A Y A

## BAB IV

### HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 4.1. Penyelesaian Kendali Optimal

Penyelesaian kendali optimal yang digunakan adalah fungsi tujuan yang bersesuaian pada Persamaan (3.1), persamaan diferensial model penyebaran COVID-19 yang disertai dengan parameter kendali sesuai pada Persamaan (2.10) sebagai fungsi kendala. Selain itu, setiap parameter kendali  $u(t)$  yang diterapkan memiliki batasan nilai dalam satuan % (persen), yaitu dari 0% hingga 100% atau secara desimal batasan nilai parameter kendali tersebut berada pada rentang antara 0 hingga 1. Secara matematis, perumusan fungsi tujuan dan fungsi kendala untuk penyelesaian masalah kendali optimal pada penelitian ini dapat dinyatakan dengan:

Fungsi tujuan:

$$J(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) = \int_0^{t_f} (A_1 E(t) + A_2 I(t) + C_1 u_1^2(t) + C_2 u_2^2(t) + C_3 u_3^2(t)) dt$$

Fungsi kendala:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \frac{\beta(1 - u_1(t))S(t) E(t)}{N} - \mu S(t) + \omega R(t) - u_2(t) S(t)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\beta(1 - u_1(t))S(t) E(t)}{N} - \mu E(t) - \alpha E(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \alpha E(t) - \xi I(t) - \theta I(t)$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \xi I(t) - u_3(t) Q(t) - \theta Q(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = u_3(t) Q(t) + u_2(t) S(t) - \mu R(t) - \omega R(t)$$

(4.1)

dan batasan parameter kendali optimal:

$$0 \leq u_i(t) \leq 1, \forall i = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

Untuk menyelesaikan masalah optimasi dinamis pada kendali optimal sesuai bentuk (4.1) dengan menggunakan prinsip minimum pontryagin, maka langkah-langkah yang dilakukan adalah pembentukan Fungsi Hamiltonian, minimasi fungsi Hamiltonian terhadap parameter kendali  $u(t)$ , penyelesaian persamaan *state* dan *co-state*, dan penentuan kendali optimal  $u^*(t)$ , dengan rincian sebagai berikut.

#### 4.1.1. Pembentukan Fungsi Hamiltonian

Berdasarkan bentuk umum Fungsi Hamiltonian seperti pada Persamaan (2.5) dapat dideskripsikan secara umum bahwa Fungsi Hamiltonian merupakan kombinasi dua suku penjumlahan, antara persamaan objektif dan perkalian antara fungsi pengali Lagrange beserta ruas kanan pada fungsi kendala. Berdasarkan fungsi tujuan dan fungsi kendala yang telah dirumuskan sebelumnya pada bentuk (4.1) sebagai pemecahan masalah kendali optimal pada sistem dinamik (2.10), maka dapat dibentuk fungsi Hamiltonian yaitu sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}(S(t), E(t), I(t), Q(t), R(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t), \lambda_5(t), t) \\ &= A_1 E(t) + A_2 I(t) + C_1 u_1^2(t) + C_2 u_2^2(t) + C_3 u_3^2(t) + \lambda_1(t) \left( \Lambda - \frac{\beta(1-u_1(t))S(t)E(t)}{N} \right. \\ & \left. - \mu S(t) + \omega R(t) - u_2(t)S(t) \right) + \lambda_2(t) \left( \frac{\beta(1-u_1(t))S(t)E(t)}{N} - \mu E(t) - \alpha E(t) \right) \\ & + \lambda_3(t) \left( \alpha E(t) - \xi I(t) - \theta I(t) \right) + \lambda_4(t) \left( \xi I(t) - u_3(t)Q(t) - \theta Q(t) \right) + \lambda_5(t) \left( u_3(t)Q(t) \right. \\ & \left. + u_2(t)S(t) - \mu R(t) - \omega R(t) \right) \quad (4.3) \end{aligned}$$

#### 4.1.2. Penentuan Kandidat Parameter Kendali

Selanjutnya, fungsi Hamiltonian yang telah dibentuk atau diformulasikan sesuai Persamaan (4.3) akan diminimumkan dengan menggunakan turunan (derivatif) parsial terhadap masing-masing parameter kendali untuk mendapatkan masing-masing kandidat nilai parameter kendali  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , dan  $u_3(t)$ , atau secara matematis menggunakan syarat stasioner dari fungsi Hamiltonian terhadap masing-masing parameter kendali berdasarkan formulasi model penyebaran COVID-19 dengan parameter kendali yaitu sebagai berikut.

- Meminimumkan fungsi Hamiltonian terhadap parameter kendali  $u_1(t)$ .

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1(t)} = 0 \quad (4.4)$$

$$2C_1 u_1(t) + \frac{\beta \lambda_1(t) S(t) E(t) - \beta \lambda_2(t) S(t) E(t)}{N} = 0$$

Dengan menggunakan sifat dasar aljabar untuk menyelesaikan bentuk (4.4) diperoleh:

$$u_1(t) = \frac{1}{2C_1} \left( \frac{\beta \lambda_1(t) S(t) E(t) - \beta \lambda_2(t) S(t) E(t)}{N} \right) \quad (4.5)$$

- Meminimumkan fungsi Hamiltonian terhadap parameter kendali  $u_2(t)$ .

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2(t)} = 0 \quad (4.6)$$

$$2C_2 u_2(t) - \lambda_1(t) S(t) + \lambda_5(t) S(t) = 0$$

Dengan menggunakan sifat dasar aljabar untuk menyelesaikan bentuk (4.6) diperoleh:

$$u_2(t) = \frac{1}{2C_2} (\lambda_1(t) S(t) - \lambda_5(t) S(t)) \quad (4.7)$$

- Meminimumkan fungsi Hamiltonian terhadap parameter kendali  $u_3(t)$ .

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_3(t)} = 0 \quad (4.8)$$

$$2C_3 u_3(t) - \lambda_4(t) Q(t) + \lambda_5(t) Q(t) = 0$$

Dengan menggunakan sifat dasar aljabar untuk menyelesaikan bentuk (4.8)

diperoleh:

$$u_3(t) = \frac{1}{2C_3} (\lambda_4(t) Q(t) - \lambda_5(t) Q(t)) \quad (4.9)$$

#### 4.1.3. Pembentukan Persamaan State dan Persamaan Co-State

Berdasarkan fungsi Hamiltonian yang telah dibentuk atau diformulasikan sesuai Persamaan (4.3) juga terbentuk persamaan *state* dinotasikan dengan  $X^\bullet(t) := \frac{dX(t)}{dt}$  yang merupakan turunan parsial fungsi Hamiltonian terhadap pengali Lagrange, dan persamaan *co-state* dinotasikan dengan  $\lambda^\bullet(t) := \frac{d\lambda(t)}{dt}$  yang merupakan negatif turunan parsial fungsi Hamiltonian terhadap sistem sesuai bentuk (2.7) berdasarkan formulasi model penyebaran COVID-19 dengan parameter kendali yaitu sebagai berikut.

- Persamaan *state*

$$\begin{aligned} X_1^\bullet(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_1(t)} = \Lambda - \frac{\beta(1 - u_1(t))S(t)E(t)}{N} - \mu S(t) \\ &\quad + \omega R(t) - u_2(t)S(t) \\ X_2^\bullet(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_2(t)} = \frac{\beta(1 - u_1(t))S(t)E(t)}{N} - \mu E(t) - \alpha E(t) \\ X_3^\bullet(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_3(t)} = \alpha E(t) - \xi I(t) - \theta I(t) \\ X_4^\bullet(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_4(t)} = \xi I(t) - u_3(t)Q(t) - \theta Q(t) \\ X_5^\bullet(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_5(t)} = u_3(t)Q(t) + u_2(t)S(t) - \mu R(t) - \omega R(t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

- Persamaan *co-state*

$$\begin{aligned}
 \lambda_1^\bullet(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S(t)} = -\left( \lambda_1(t) \left( -\frac{\beta(1-u_1(t))E(t)}{N} - \mu - u_2(t) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\beta\lambda_2(t)(1-u_1(t))E(t)}{N} + \lambda_5(t)u_2(t) \right) \\
 \lambda_2^\bullet(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E(t)} = -\left( A_1 - \frac{\beta\lambda_1(t)(1-u_1(t))S(t)}{N} \right. \\
 &\quad \left. + \lambda_2(t) \left( \frac{\beta(1-u_1(t))S(t)}{N} - \mu - \alpha \right) + \alpha\lambda_3(t) \right) \\
 \lambda_3^\bullet(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I(t)} = -\left( A_2 + \lambda_3(t)(-\xi - \theta) + \xi\lambda_4(t) \right) \\
 \lambda_4^\bullet(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q(t)} = -\left( \lambda_4(t)(-u_3(t) - \theta) + \lambda_5(t)u_3(t) \right) \\
 \lambda_5^\bullet(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R(t)} = -\left( \omega\lambda_1(t) + \lambda_5(t)(-\mu - \omega) \right)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Dengan masing-masing kondisi awal pada persamaan *state* yaitu:

$$X(t_n) = X_n \geq 0, n = 1, 2, 3, 4, 5$$

dan juga kondisi transversalitas (kondisi batas) pada persamaan *co-state* yaitu:

$$\lambda(t_f) = \lambda_f = 0, f = 1, 2, 3, 4, 5$$

#### 4.1.4. Penentuan Kendali Optimal

Didefinisikan bahwa suatu parameter kendali  $u_i^*(t), i = 1, 2, 3$  adalah parameter kendali optimal dari berbagai parameter kendali  $u_i(t)$  yang telah ditentukan. Dengan menggabungkan bentuk (4.2) serta masing-masing bentuk pada Persamaan (4.5), (4.7) dan (4.9) sedemikian sehingga fungsi parameter kendali optimal dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 u_1^*(t) &= \begin{cases} 1 & , u_1(t) \geq 1 \\ -\frac{1}{2C_1} \left( \frac{\beta\lambda_1(t) S(t) E(t) - \beta\lambda_2(t) S(t) E(t)}{N} \right) & , 0 \leq u_1(t) < 1 \\ 0 & , u_1(t) < 0 \end{cases} \\
 u_2^*(t) &= \begin{cases} 1 & , u_2(t) \geq 1 \\ \frac{1}{2C_2} (\lambda_1(t) S(t) - \lambda_5(t) S(t)) & , 0 \leq u_2(t) < 1 \\ 0 & , u_2(t) < 0 \end{cases} \\
 u_3^*(t) &= \begin{cases} 1 & , u_3(t) \geq 1 \\ \frac{1}{2C_3} (\lambda_4(t) Q(t) - \lambda_5(t) Q(t)) & , 0 \leq u_3(t) < 1 \\ 0 & , u_3(t) < 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

dengan syarat bahwa  $C_1, C_2, C_3 > 0$ , serta kondisi transversalitas  $\lambda(t_f) = 0$ .

Dengan kata lain, agar nilai parameter kendali optimal  $u_i^*(t), i = 1, 2, 3$  menghasilkan bobot biaya minimum maka nilai parameter kendali optimal haruslah merupakan nilai terkecil (minimum) dalam rentang antara 0 hingga 1 sesuai pada bentuk (4.2), sedemikian sehingga berakibat bentuk (4.12) dapat pula dinyatakan secara matematis dalam bentuk satu *set* (himpunan) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 u_1^*(t) &= \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, -\frac{1}{2C_1} \left( \frac{\beta\lambda_1(t) S(t) E(t) - \beta\lambda_2(t) S(t) E(t)}{N} \right) \right\} \right\} \\
 u_2^*(t) &= \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{1}{2C_2} (\lambda_1(t) S(t) - \lambda_5(t) S(t)) \right\} \right\} \\
 u_3^*(t) &= \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{1}{2C_3} (\lambda_4(t) Q(t) - \lambda_5(t) Q(t)) \right\} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

## 4.2. Nilai Parameter Model

Adapun nilai-nilai parameter model penyebaran COVID-19 di Provinsi DKI Jakarta untuk menjalankan simulasi sebagai analisis dinamik model sesuai pada diagram kompartemen (2.3) dan (2.4) diperoleh dari sumber-sumber terkait atau dengan kata lain mengutip pada berbagai sumber referensi, yaitu jurnal pada penelitian oleh Aldila et al. (2020, 2021); Fitri and Bakhtiar (2021); Li et al. (2021), dan juga pada data resmi (Badan Pusat Statistik (BPS), 2022) Provinsi DKI Jakarta dengan rincian yang disajikan dalam Tabel (4.1) berikut.

**Tabel 4.1 Nilai Parameter COVID-19**

Parameter	Nilai	Sumber
$\lambda$	0.012	(Badan Pusat Statistik (BPS), 2022)
$\beta$	$1.44 \times 10^{-7}$	(Aldila et al., 2020)
$\mu$	$4.21 \times 10^{-5}$	(Aldila et al., 2021)
$\theta$	0.018	(Fitri and Bakhtiar, 2021)
$\alpha$	0.4	(Aldila et al., 2021)
$\xi$	0.7	(Fitri and Bakhtiar, 2021)
$\gamma$	0.319	(Fitri and Bakhtiar, 2021)
$\omega$	0.4	(Li et al., 2021)

Selain nilai-nilai parameter di atas, terdapat pula parameter-parameter yang berkaitan dengan kendali optimal yaitu pada fungsi tujuan yang telah dirumuskan sesuai Persamaan (3.1). Nilai-nilai parameter pada fungsi tujuan dikutip dari jurnal penelitian oleh Nana-Kyere et al. (2020); Gatyeni et al. (2022); Adi et al. (2022); Song et al. (2022), dengan rincian nilai parameter yang disajikan dalam Tabel (4.2) berikut.

Tabel 4.2 Nilai Parameter Fungsi Tujuan

Parameter	Nilai	Sumber
$A_1$	10	(Nana-Kyere et al., 2020)
$A_2$	10	(Nana-Kyere et al., 2020)
$C_1$	9	(Gatyeni et al., 2022)
$C_2$	2	(Adi et al., 2022)
$C_3$	15	(Song et al., 2022)

Berdasarkan sampel data yang telah dipaparkan, nilai awal (*initial condition*) pada masing-masing variabel subpopulasi (kompartemen) dapat dinyatakan ke dalam Tabel (4.3) berikut.

Tabel 4.3 Nilai Awal (*Initial Condition*) Masing-Masing Variabel Subpopulasi (Kompartemen)

Subpopulasi	Nilai Awal
$S(0)$	6.869.075
$E(0)$	2.882.572
$I(0)$	3.118
$Q(0)$	2.353
$R(0)$	852.563

### 4.3. Penyelesaian Numerik Model Epidemiologi COVID-19

Penyelesaian model penyebaran COVID-19 yang telah diformulasikan dalam penelitian ini menggunakan pendekatan metode numerik Runge-Kutta Orde Empat. Penelitian ini mensimulasikan dua kondisi pada model epidemiologi COVID-19, yaitu kondisi pertama ketika tidak ada parameter kendali, kemudian

kondisi yang kedua ketika adanya 3 parameter kendali pencegahan seperti kendali 3M (menjaga jarak, menggunakan masker, mencuci tangan), kendali vaksin, dan kendali isolasi, dengan penjabaran solusi secara numerik menggunakan Runge-Kutta Orde Empat yaitu sebagai berikut.

#### 4.3.1. Penyelesaian Numerik Model Epidemiologi COVID-19 Tanpa Kendali

Pada kondisi tanpa kendali, sistem persamaan yang akan dinyatakan dalam bentuk linear dengan metode numerik Runge-Kutta Orde Empat adalah Persamaan (2.8) serta dengan masing-masing kondisi awal yang telah didefinisikan. Dengan menggunakan bentuk (2.16) dan (2.17), maka pada Persamaan (2.8) didapatkan bentuk numerik Runge-Kutta Orde Empat sebagai berikut.

- Koefisien evaluasi pertama ( $k_1$ ):

$$\begin{aligned} k_{1S} &= \Lambda - \frac{\beta S_n E_n}{N} - \mu S_n + \omega R_n \\ k_{1E} &= \frac{\beta S_n E_n}{N} - \mu E_n - \alpha E_n \\ k_{1I} &= \alpha E_n - \gamma I_n - \theta I_n \\ k_{1R} &= \gamma I_n - \mu R_n - \omega R_n \end{aligned} \quad (4.14)$$

- Koefisien evaluasi kedua ( $k_2$ ):

$$\begin{aligned} k_{2S} &= \Lambda - \frac{\beta \left(S_n + \frac{1}{2}k_{1S}\right) \left(E_n + \frac{1}{2}k_{1E}\right)}{N} - \mu \left(S_n + \frac{1}{2}k_{1S}\right) + \omega \left(R_n + \frac{1}{2}k_{1R}\right) \\ k_{2E} &= \frac{\beta \left(S_n + \frac{1}{2}k_{1S}\right) \left(E_n + \frac{1}{2}k_{1E}\right)}{N} - \mu \left(E_n + \frac{1}{2}k_{1E}\right) - \alpha \left(E_n + \frac{1}{2}k_{1E}\right) \\ k_{2I} &= \alpha \left(E_n + \frac{1}{2}k_{1E}\right) - \gamma \left(I_n + \frac{1}{2}k_{1I}\right) - \theta \left(I_n + \frac{1}{2}k_{1I}\right) \\ k_{2R} &= \gamma \left(I_n + \frac{1}{2}k_{1I}\right) - \mu \left(R_n + \frac{1}{2}k_{1R}\right) - \omega \left(R_n + \frac{1}{2}k_{1R}\right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

- Koefisien evaluasi ketiga ( $k_3$ ):

$$\begin{aligned}
 k_{3S} &= \Lambda - \frac{\beta (S_n + \frac{1}{2}k_{2S}) (E_n + \frac{1}{2}k_{2E})}{N} - \mu \left( S_n + \frac{1}{2}k_{2S} \right) + \omega \left( R_n + \frac{1}{2}k_{2R} \right) \\
 k_{3E} &= \frac{\beta (S_n + \frac{1}{2}k_{2S}) (E_n + \frac{1}{2}k_{2E})}{N} - \mu \left( E_n + \frac{1}{2}k_{2E} \right) - \alpha \left( E_n + \frac{1}{2}k_{2E} \right) \\
 k_{3I} &= \alpha \left( E_n + \frac{1}{2}k_{2E} \right) - \gamma \left( I_n + \frac{1}{2}k_{2I} \right) - \theta \left( I_n + \frac{1}{2}k_{2I} \right) \\
 k_{3R} &= \gamma \left( I_n + \frac{1}{2}k_{2I} \right) - \mu \left( R_n + \frac{1}{2}k_{2R} \right) - \omega \left( R_n + \frac{1}{2}k_{2R} \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

- Koefisien evaluasi keempat ( $k_4$ ):

$$\begin{aligned}
 k_{4S} &= \Lambda - \frac{\beta (S_n + k_{3S}) (E_n + k_{3E})}{N} - \mu (S_n + k_{3S}) + \omega (R_n + k_{3R}) \\
 k_{4E} &= \frac{\beta (S_n + k_{3S}) (E_n + k_{3E})}{N} - \mu (E_n + k_{3E}) - \alpha (E_n + k_{3E}) \\
 k_{4I} &= \alpha (E_n + k_{3E}) - \gamma (I_n + k_{3I}) - \theta (I_n + k_{3I}) \\
 k_{4R} &= \gamma (I_n + k_{3I}) - \mu (R_n + k_{3R}) - \omega (R_n + k_{3R})
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

Setelah menentukan Persamaan (4.14), (4.15), (4.16), dan (4.17), maka solusi numerik Persamaan (2.8) yang menggambarkan masing-masing subpopulasi penyebaran COVID-19 ditentukan oleh:

$$\begin{aligned}
 S_{n+1} &= S_n + \frac{h}{6} (k_{1S} + 2k_{2S} + 2k_{3S} + k_{4S}) \\
 E_{n+1} &= E_n + \frac{h}{6} (k_{1E} + 2k_{2E} + 2k_{3E} + k_{4E}) \\
 I_{n+1} &= I_n + \frac{h}{6} (k_{1I} + 2k_{2I} + 2k_{3I} + k_{4I}) \\
 R_{n+1} &= R_n + \frac{h}{6} (k_{1R} + 2k_{2R} + 2k_{3R} + k_{4R})
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

### 4.3.2. Penyelesaian Numerik Model Epidemiologi COVID-19 Dengan Kendali

Pada kondisi dengan kendali terdapat dua jenis sistem persamaan diferensial sebagai fondasi dalam penentuan sekaligus simulasi secara numerik model penyebaran COVID-19 yang disertai kendali optimal, yaitu persamaan *state* dan persamaan *co-state*. Oleh karena kedua persamaan diferensial tersebut terlihat rumit untuk diselesaikan secara eksak apabila ditinjau dari bentuknya, maka kedua persamaan tersebut juga diselesaikan secara numerik. Penyelesaian numerik yang digunakan adalah Runge-Kutta Orde Empat dan dikombinasikan berdasarkan urutan sapuan maju-mundur (*forward-backward sweep*) serta masing-masing persamaan tersebut telah diketahui pula bahwa masing-masing kondisi awal dan kondisi transversalitas (kondisi batas) yang telah didefinisikan, dengan rincian sebagai berikut.

#### 1. Persamaan *state*

Penyelesaian numerik persamaan *state* yang digunakan adalah metode Runge-Kutta Orde Empat dengan kombinasi urutan *forward sweep* atau beda maju. Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.10) ke dalam bentuk (2.16) dan (2.17) diperoleh bentuk numerik dari persamaan *state* sebagai berikut.

- Koefisien evaluasi pertama ( $k_1$ ):

$$\begin{aligned}
 k_{1x_1} &= \Lambda - \frac{\beta(1-u_{1n})S_n E_n}{N} - \mu S_n + \omega R_n - u_{2n} S_n \\
 k_{1x_2} &= \frac{\beta(1-u_{1n})S_n E_n}{N} - \mu E_n - \alpha E_n \\
 k_{1x_3} &= \alpha E_n - \xi I_n - \theta I_n \\
 k_{1x_4} &= \xi I_n - u_{3n} Q_n - \theta Q_n \\
 k_{1x_5} &= u_{3n} Q_n + u_{2n} S_n - \mu R_n - \omega R_n
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

- Koefisien evaluasi kedua ( $k_2$ ):

$$\begin{aligned}
k_{2x_1} &= \Lambda - \frac{\beta \left(1 - \frac{1}{2} (u_{1n} + u_{1n+1})\right) \left(S_n + \frac{1}{2} k_{1x_1}\right) \left(E_n + \frac{1}{2} k_{1x_2}\right)}{N} \\
&\quad - \mu \left(S_n + \frac{1}{2} k_{1x_1}\right) + \omega \left(R_n + \frac{1}{2} k_{1x_5}\right) - \frac{1}{2} (u_{2n} + u_{2n+1}) \\
&\quad \left(S_n + \frac{1}{2} k_{1x_1}\right) \\
k_{2x_2} &= \frac{\beta \left(1 - \frac{1}{2} (u_{1n} + u_{1n+1})\right) \left(S_n + \frac{1}{2} k_{1x_1}\right) \left(E_n + \frac{1}{2} k_{1x_2}\right)}{N} \\
&\quad - \mu \left(E_n + \frac{1}{2} k_{1x_2}\right) - \alpha \left(E_n + \frac{1}{2} k_{1x_2}\right) \\
k_{2x_3} &= \alpha \left(E_n + \frac{1}{2} k_{1x_2}\right) - \xi \left(I_n + \frac{1}{2} k_{1x_3}\right) - \theta \left(I_n + \frac{1}{2} k_{1x_3}\right) \\
k_{2x_4} &= \xi \left(I_n + \frac{1}{2} k_{1x_3}\right) - \frac{1}{2} (u_{3n} + u_{3n+1}) \left(Q_n + \frac{1}{2} k_{1x_4}\right) \\
&\quad - \theta \left(Q_n + \frac{1}{2} k_{1x_4}\right) \\
k_{2x_5} &= \frac{1}{2} (u_{3n} + u_{3n+1}) \left(Q_n + \frac{1}{2} k_{1x_4}\right) + \frac{1}{2} (u_{2n} + u_{2n+1}) \\
&\quad \left(S_n + \frac{1}{2} k_{1x_1}\right) - \mu \left(R_n + \frac{1}{2} k_{1x_5}\right) - \omega \left(R_n + \frac{1}{2} k_{1x_5}\right)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

- Koefisien evaluasi ketiga ( $k_3$ ):

$$\begin{aligned}
k_{3x_1} &= \Lambda - \frac{\beta \left(1 - \frac{1}{2} (u_{1n} + u_{1n+1})\right) \left(S_n + \frac{1}{2} k_{2x_1}\right) \left(E_n + \frac{1}{2} k_{2x_2}\right)}{N} \\
&\quad - \mu \left(S_n + \frac{1}{2} k_{2x_1}\right) + \omega \left(R_n + \frac{1}{2} k_{2x_5}\right) - \frac{1}{2} (u_{2n} + u_{2n+1}) \\
&\quad \left(S_n + \frac{1}{2} k_{2x_1}\right) \\
k_{3x_2} &= \frac{\beta \left(1 - \frac{1}{2} (u_{1n} + u_{1n+1})\right) \left(S_n + \frac{1}{2} k_{2x_1}\right) \left(E_n + \frac{1}{2} k_{2x_2}\right)}{N} \\
&\quad - \mu \left(E_n + \frac{1}{2} k_{2x_2}\right) - \alpha \left(E_n + \frac{1}{2} k_{2x_2}\right) \\
k_{3x_3} &= \alpha \left(E_n + \frac{1}{2} k_{2x_2}\right) - \xi \left(I_n + \frac{1}{2} k_{2x_3}\right) - \theta \left(I_n + \frac{1}{2} k_{2x_3}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3_{X_4}} &= \xi \left( I_n + \frac{1}{2} k_{2_{X_3}} \right) - \frac{1}{2} (u_{3_n} + u_{3_{n+1}}) \left( Q_n + \frac{1}{2} k_{2_{X_4}} \right) \\
&\quad - \theta \left( Q_n + \frac{1}{2} k_{2_{X_4}} \right) \\
k_{3_{X_5}} &= \frac{1}{2} (u_{3_n} + u_{3_{n+1}}) \left( Q_n + \frac{1}{2} k_{2_{X_4}} \right) + \frac{1}{2} (u_{2_n} + u_{2_{n+1}}) \\
&\quad \left( S_n + \frac{1}{2} k_{2_{X_1}} \right) - \mu \left( R_n + \frac{1}{2} k_{2_{X_5}} \right) - \omega \left( R_n + \frac{1}{2} k_{2_{X_5}} \right)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

- Koefisien evaluasi keempat ( $k_4$ ):

$$\begin{aligned}
k_{4_{X_1}} &= \Lambda - \frac{\beta (1 - u_{1_{n+1}}) (S_n + k_{3_{X_1}}) (E_n + k_{3_{X_2}})}{N} - \mu (S_n + k_{3_{X_1}}) \\
&\quad + \omega (R_n + k_{3_{X_5}}) - u_{2_{n+1}} (S_n + k_{3_{X_1}}) \\
k_{4_{X_2}} &= \frac{\beta (1 - u_{1_{n+1}}) (S_n + k_{3_{X_1}}) (E_n + k_{3_{X_2}})}{N} - \mu (E_n + k_{3_{X_2}}) \\
&\quad - \alpha (E_n + k_{3_{X_2}}) \\
k_{4_{X_3}} &= \alpha (E_n + k_{3_{X_2}}) - \xi (I_n + k_{3_{X_3}}) - \theta (I_n + k_{3_{X_3}}) \\
k_{4_{X_4}} &= \xi (I_n + k_{3_{X_3}}) - u_{3_{n+1}} (Q_n + k_{3_{X_4}}) - \theta (Q_n + k_{3_{X_4}}) \\
k_{4_{X_5}} &= u_{3_{n+1}} (Q_n + k_{3_{X_4}}) + u_{2_{n+1}} (S_n + k_{3_{X_1}}) - \mu (R_n + k_{3_{X_5}}) \\
&\quad - \omega (R_n + k_{3_{X_5}})
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Setelah menentukan Persamaan (4.19), (4.20), (4.21), dan (4.22), maka solusi numerik Persamaan (4.10) yang merupakan persamaan *state* ditentukan oleh:

$$\begin{aligned}
X_{1_{n+1}} &= X_{1_n} + \frac{h}{6} (k_{1_{X_1}} + 2k_{2_{X_1}} + 2k_{3_{X_1}} + k_{4_{X_1}}) \\
X_{2_{n+1}} &= X_{2_n} + \frac{h}{6} (k_{1_{X_2}} + 2k_{2_{X_2}} + 2k_{3_{X_2}} + k_{4_{X_2}}) \\
X_{3_{n+1}} &= X_{3_n} + \frac{h}{6} (k_{1_{X_3}} + 2k_{2_{X_3}} + 2k_{3_{X_3}} + k_{4_{X_3}}) \\
X_{4_{n+1}} &= X_{4_n} + \frac{h}{6} (k_{1_{X_4}} + 2k_{2_{X_4}} + 2k_{3_{X_4}} + k_{4_{X_4}})
\end{aligned}$$

$$X_{5_{n+1}} = X_{5_n} + \frac{h}{6} (k_{1_{X_5}} + 2k_{2_{X_5}} + 2k_{3_{X_5}} + k_{4_{X_5}}) \quad (4.23)$$

## 2. Persamaan *co-state*

Penyelesaian numerik persamaan *co-state* yang digunakan adalah metode Runge-Kutta Orde Empat dengan kombinasi urutan *backward sweep* atau beda mundur. Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.11) ke dalam bentuk (2.16) dan (2.17) diperoleh bentuk numerik dari persamaan *co-state* sebagai berikut.

- Koefisien evaluasi pertama ( $k_1$ ):

$$k_{1_{\lambda_1}} = - \left( \lambda_{1_n} \left( - \frac{\beta (1 - u_{1_n}) E_n}{N} - \mu - u_{2_n} \right) + \frac{\beta \lambda_{2_n} (1 - u_{1_n}) E_n}{n} + \lambda_{5_n} u_{2_n} \right)$$

$$k_{1_{\lambda_2}} = - \left( A_1 - \frac{\beta \lambda_{1_n} (1 - u_{1_n}) S_n}{N} + \lambda_{2_n} \left( \frac{\beta (1 - u_{1_n}) S_n}{N} - \mu - \alpha \right) + \alpha \lambda_{3_n} \right)$$

$$k_{1_{\lambda_3}} = - \left( A_2 + \lambda_{3_n} (-\xi - \theta) + \xi \lambda_{4_n} \right)$$

$$k_{1_{\lambda_4}} = - \left( \lambda_{4_n} (-u_{3_n} - \theta) + \lambda_{5_n} u_{3_n} \right)$$

$$k_{1_{\lambda_5}} = - \left( \omega \lambda_{1_n} + \lambda_{5_n} (-\mu - \omega) \right)$$

(4.24)

- Koefisien evaluasi kedua ( $k_2$ ):

$$k_{2_{\lambda_1}} = - \left( \left( \lambda_{1_n} - \frac{1}{2} k_{1_{\lambda_1}} \right) \left( - \frac{\beta (1 - u_{1_n}) \frac{1}{2} (E_n + E_{n-1})}{N} - \mu - u_{2_n} \right) + \frac{\beta \left( \lambda_{2_n} - \frac{1}{2} k_{1_{\lambda_2}} \right) (1 - u_{1_n})}{N} + \left( \lambda_{5_n} - \frac{1}{2} k_{1_{\lambda_5}} \right) u_{2_n} \right)$$

$$\begin{aligned}
k_{2\lambda_2} &= - \left( A_1 - \frac{\beta \left( \lambda_{1n} - \frac{1}{2} k_{1\lambda_1} \right) (1 - u_{1n}) \frac{1}{2} (S_n + S_{n-1})}{N} \right. \\
&\quad + \left( \lambda_{2n} - \frac{1}{2} k_{1\lambda_2} \right) \left( \frac{\beta (1 - u_{1n}) \frac{1}{2} (S_n + S_{n-1})}{N} - \mu - \alpha \right) \\
&\quad \left. + \alpha \left( \lambda_{3n} - \frac{1}{2} k_{1\lambda_3} \right) \right) \\
k_{2\lambda_3} &= - \left( A_2 + \left( \lambda_{3n} - \frac{1}{2} k_{1\lambda_3} \right) (-\xi - \theta) + \xi \left( \lambda_{4n} - \frac{1}{2} k_{1\lambda_4} \right) \right) \\
k_{2\lambda_4} &= - \left( \left( \lambda_{4n} - \frac{1}{2} k_{1\lambda_4} \right) (-u_{3n} - \theta) + \left( \lambda_{5n} - \frac{1}{2} k_{1\lambda_5} \right) u_{3n} \right) \\
k_{2\lambda_5} &= - \left( \omega \left( \lambda_{1n} - \frac{1}{2} k_{1\lambda_1} \right) + \left( \lambda_{5n} - \frac{1}{2} k_{1\lambda_5} \right) (-\mu - \omega) \right)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

• Koefisien evaluasi ketiga ( $k_3$ ):

$$\begin{aligned}
k_{3\lambda_1} &= - \left( \left( \lambda_{1n} - \frac{1}{2} k_{2\lambda_1} \right) \left( - \frac{\beta (1 - u_{1n}) \frac{1}{2} (E_n + E_{n-1})}{N} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \mu - u_{2n} \right) + \frac{\beta \left( \lambda_{2n} - \frac{1}{2} k_{2\lambda_2} \right) (1 - u_{1n})}{N} + \left( \lambda_{5n} - \frac{1}{2} k_{2\lambda_5} \right) u_{2n} \right) \\
k_{3\lambda_2} &= - \left( A_1 - \frac{\beta \left( \lambda_{1n} - \frac{1}{2} k_{2\lambda_1} \right) (1 - u_{1n}) \frac{1}{2} (S_n + S_{n-1})}{N} \right. \\
&\quad + \left( \lambda_{2n} - \frac{1}{2} k_{2\lambda_2} \right) \left( \frac{\beta (1 - u_{1n}) \frac{1}{2} (S_n + S_{n-1})}{N} - \mu - \alpha \right) \\
&\quad \left. + \alpha \left( \lambda_{3n} - \frac{1}{2} k_{2\lambda_3} \right) \right) \\
k_{3\lambda_3} &= - \left( A_2 + \left( \lambda_{3n} - \frac{1}{2} k_{2\lambda_3} \right) (-\xi - \theta) + \xi \left( \lambda_{4n} - \frac{1}{2} k_{2\lambda_4} \right) \right) \\
k_{3\lambda_4} &= - \left( \left( \lambda_{4n} - \frac{1}{2} k_{2\lambda_4} \right) (-u_{3n} - \theta) + \left( \lambda_{5n} - \frac{1}{2} k_{2\lambda_5} \right) u_{3n} \right) \\
k_{3\lambda_5} &= - \left( \omega \left( \lambda_{1n} - \frac{1}{2} k_{2\lambda_1} \right) + \left( \lambda_{5n} - \frac{1}{2} k_{2\lambda_5} \right) (-\mu - \omega) \right)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

- Koefisien evaluasi keempat ( $k_4$ ):

$$\begin{aligned}
k_{4\lambda_1} &= -\left( (\lambda_{1n} - k_{3\lambda_1}) \left( -\frac{\beta(1-u_{1n})E_{n-1}}{N} - \mu - u_{2n} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta(\lambda_{2n} - k_{3\lambda_2})(1-u_{1n})}{N} + (\lambda_{5n} - k_{3\lambda_5})u_{2n} \right) \\
k_{4\lambda_2} &= -\left( A_1 - \frac{\beta(\lambda_{1n} - k_{3\lambda_1})(1-u_{1n})S_{n-1}}{N} + (\lambda_{2n} - k_{3\lambda_2}) \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{\beta(1-u_{1n})S_{n-1}}{N} - \mu - \alpha \right) + \alpha(\lambda_{3n} - k_{3\lambda_3}) \right) \\
k_{4\lambda_3} &= -\left( A_2 + (\lambda_{3n} - k_{3\lambda_3})(-\xi - \theta) + \xi(\lambda_{4n} - k_{3\lambda_4}) \right) \\
k_{4\lambda_4} &= -\left( (\lambda_{4n} - k_{3\lambda_4})(-u_{3n} - \theta) + (\lambda_{5n} - k_{3\lambda_5})u_{3n} \right) \\
k_{4\lambda_5} &= -\left( \omega(\lambda_{1n} - k_{3\lambda_1}) + (\lambda_{5n} - k_{3\lambda_5})(-\mu - \omega) \right)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

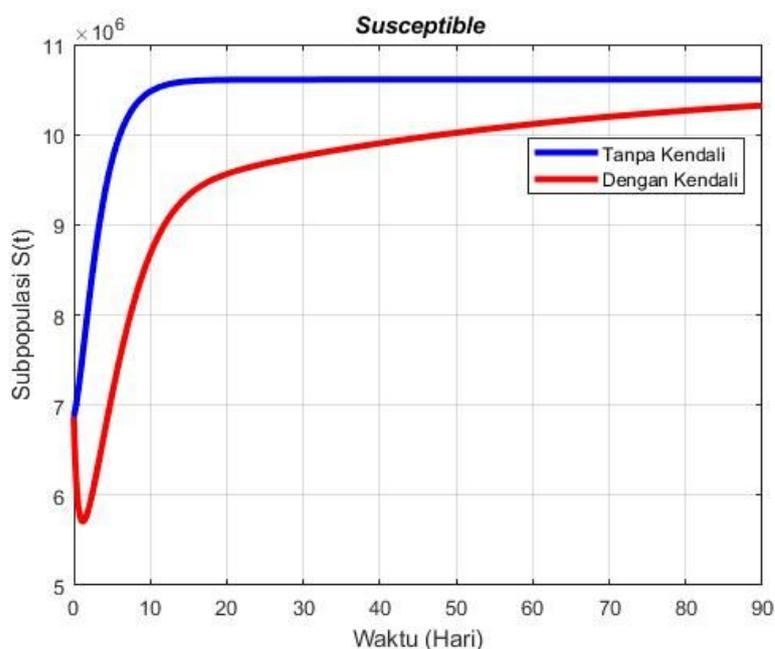
Setelah menentukan Persamaan (4.24), (4.25), (4.26), dan (4.27), maka solusi numerik Persamaan (4.11) yang merupakan persamaan *co-state* ditentukan oleh:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1n-1} &= \lambda_{1n} - \frac{h}{6} (k_{1\lambda_1} + 2k_{2\lambda_1} + 2k_{3\lambda_1} + k_{4\lambda_1}) \\
\lambda_{2n-1} &= \lambda_{2n} - \frac{h}{6} (k_{1\lambda_2} + 2k_{2\lambda_2} + 2k_{3\lambda_2} + k_{4\lambda_2}) \\
\lambda_{3n-1} &= \lambda_{3n} - \frac{h}{6} (k_{1\lambda_3} + 2k_{2\lambda_3} + 2k_{3\lambda_3} + k_{4\lambda_3}) \\
\lambda_{4n-1} &= \lambda_{4n} - \frac{h}{6} (k_{1\lambda_4} + 2k_{2\lambda_4} + 2k_{3\lambda_4} + k_{4\lambda_4}) \\
\lambda_{5n-1} &= \lambda_{5n} - \frac{h}{6} (k_{1\lambda_5} + 2k_{2\lambda_5} + 2k_{3\lambda_5} + k_{4\lambda_5})
\end{aligned} \tag{4.28}$$

#### 4.4. Analisis Hasil Simulasi

Setelah ditentukan masing-masing bentuk numerik untuk masing-masing kondisi tanpa kendali yaitu menggunakan bentuk solusi numerik pada Persamaan (4.18) dengan koefisien evaluasi pada Persamaan (4.14), (4.15), (4.16) dan (4.17), kemudian untuk kondisi dengan kendali yaitu terdapat dua persamaan diferensial yaitu persamaan *state* dengan bentuk solusi numerik sesuai pada Persamaan (4.23) dengan koefisien evaluasi pada Persamaan (4.19), (4.20), (4.21) dan (4.22), kemudian persamaan *co-state* dengan bentuk solusi numerik sesuai pada Persamaan (4.28) dengan koefisien evaluasi sesuai Persamaan (4.24), (4.25), (4.26) dan (4.27) bersamaan dengan nilai parameter dan nilai awal sebagaimana disajikan dalam Tabel (4.1), (4.2) dan (4.3), maka dapat dihasilkan simulasi dari masing-masing subpopulasi sebagai berikut.

##### 4.4.1. Subpopulasi Rentan (*Susceptible*)



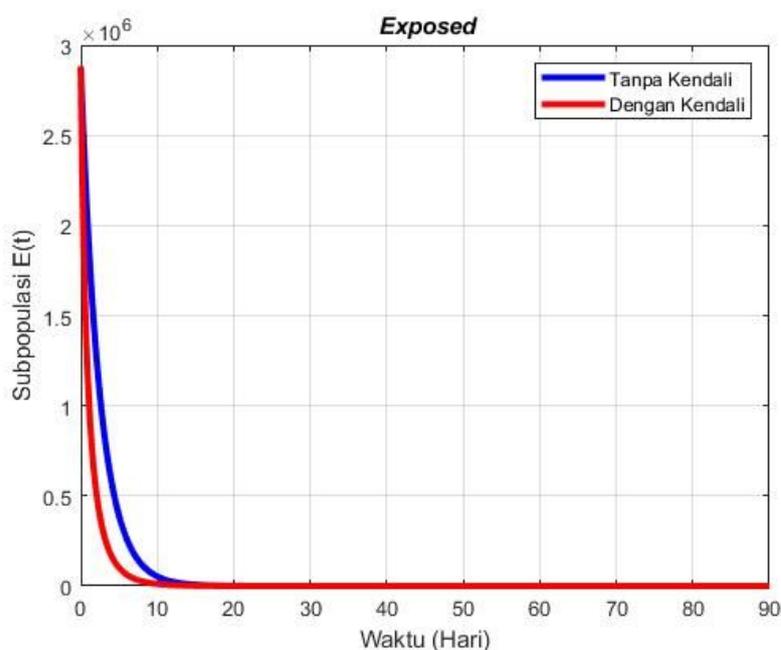
Gambar 4.1 Grafik Hasil Simulasi Subpopulasi Rentan

Gambar (4.1) menunjukkan laju perubahan subpopulasi rentan yang disertai dengan dua kondisi, yaitu ketika tidak diterapkan parameter kendali, dan ketika diterapkan parameter kendali. Ketika tidak diterapkan parameter kendali atau secara notasi matematika dinyatakan dengan  $u_i(t) = 0, \forall i = 1, 2, 3$ , jumlah subpopulasi rentan terhadap penyakit COVID-19 mengalami lonjakan pada hari pertama hingga pada hari ke-11, dengan jumlah yang awalnya 6.869.075 bertambah menjadi 10.480.000. Kemudian setelah hari ke-11, jumlah subpopulasi yang rentan meningkat secara konstan (selisih peningkatan yang tidak terlalu signifikan) hingga pada hari ke-90 yaitu sebanyak 10.610.000. Hal tersebut dikarenakan seluruh penduduk Provinsi DKI Jakarta yang dinyatakan rentan terhadap penyakit COVID-19, kemudian tidak ada subpopulasi rentan yang meninggal karena COVID-19 namun meninggal secara alami (karena faktor selain COVID-19), serta tidak dilakukan tindakan pencegahan 3M, tindakan vaksinasi, dan juga tindakan isolasi sebagai penyebab kenaikan jumlah pada subpopulasi rentan.

Berbeda halnya dengan ketika diterapkan parameter kendali atau secara notasi matematika dinyatakan dengan  $u_i(t) \neq 0, \forall i = 1, 2, 3$ . Pada kondisi ini terjadi penurunan jumlah subpopulasi secara signifikan jumlah subpopulasi rentan dari hari pertama hingga pada hari ke-2, dengan jumlah yang awalnya 6.869.075 berkurang menjadi 5.721.000. Kemudian di hari ke-2 hingga pada hari ke-16 mengalami peningkatan subpopulasi rentan secara signifikan, dengan jumlah yaitu sebanyak 9.328.000. Hal tersebut disebabkan karena tindakan isolasi yang diterapkan tidak terlalu berpengaruh pada penurunan jumlah subpopulasi rentan, sehingga pada hari ke-17 masih mengalami peningkatan jumlah subpopulasi rentan yang tidak terlalu signifikan hingga pada hari ke-90 dengan jumlah subpopulasi

pada hari ke-90 yaitu sebanyak 10.320.000. Apabila dibandingkan dengan kondisi tanpa kendali, maka kondisi dengan kendali yang merupakan solusi efektif pada subpopulasi rentan.

#### 4.4.2. Subpopulasi Terpapar (*Exposed*)

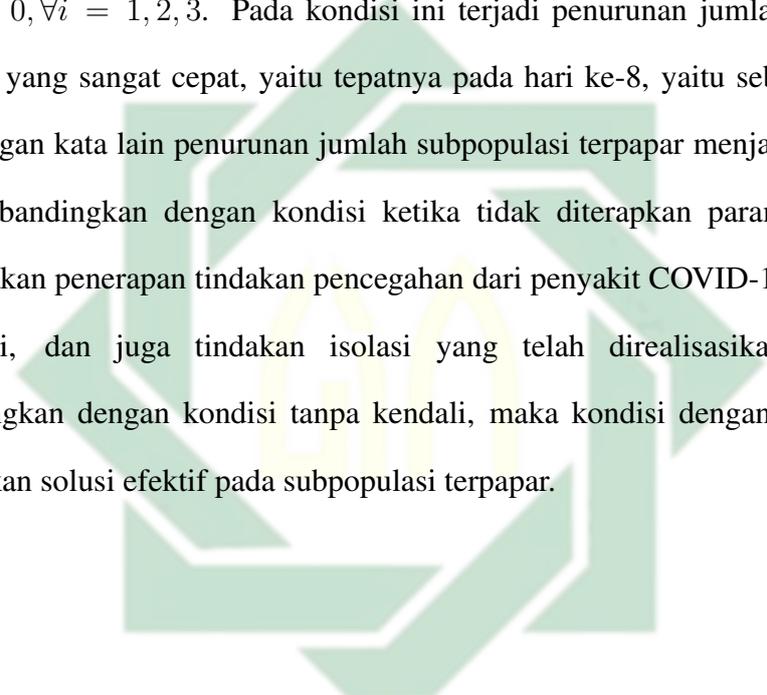


Gambar 4.2 Grafik Hasil Simulasi Subpopulasi Terpapar

Gambar (4.2) menunjukkan laju perubahan subpopulasi terpapar yang disertai dengan dua kondisi, yaitu ketika tidak diterapkan parameter kendali, dan ketika diterapkan parameter kendali. Ketika tidak diterapkan parameter kendali, atau  $u_i(t) = 0, \forall i = 1, 2, 3$  terjadi penurunan secara signifikan jumlah subpopulasi terpapar COVID-19 dari hari pertama hingga pada hari ke-14, dengan jumlah yang awalnya 2.882.572 menjadi berkurang sebanyak 15.890. Kemudian setelah hari ke-14, jumlah subpopulasi terpapar menurun secara konstan yang selisih peningkatannya tidak terlalu signifikan. Hal tersebut dikarenakan tidak ada

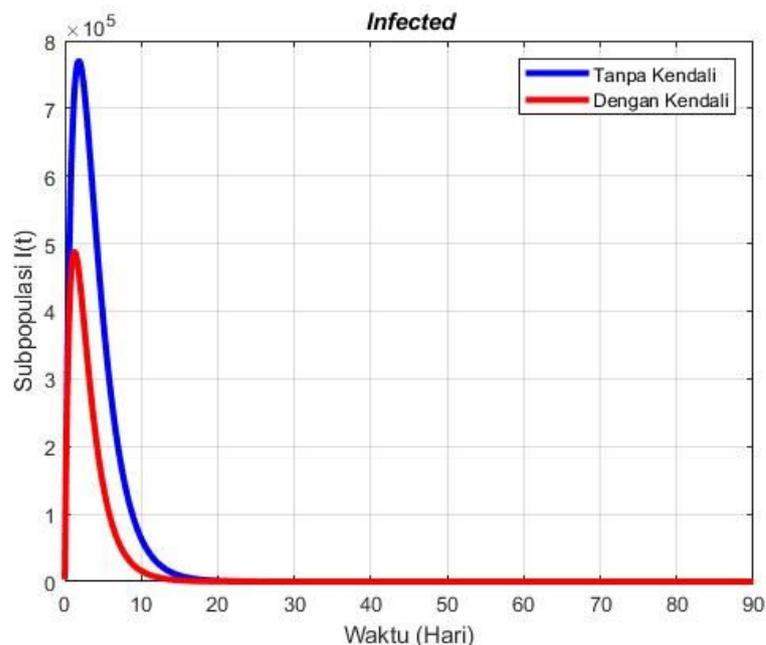
subpopulasi terpapar yang meninggal karena COVID-19 namun meninggal secara alami (karena faktor selain COVID-19), kemudian tidak dilakukan tindakan pencegahan seperti 3M, tindakan vaksinasi, dan juga tindakan isolasi sebagai penyebab penurunan jumlah subpopulasi terpapar yang terjadi sangat lama.

Berbeda halnya dengan ketika diterapkan parameter kendali atau  $u_i(t) \neq 0, \forall i = 1, 2, 3$ . Pada kondisi ini terjadi penurunan jumlah subpopulasi terpapar yang sangat cepat, yaitu tepatnya pada hari ke-8, yaitu sebanyak 40.140 atau dengan kata lain penurunan jumlah subpopulasi terpapar menjadi 6 hari lebih cepat dibandingkan dengan kondisi ketika tidak diterapkan parameter kendali, dikarenakan penerapan tindakan pencegahan dari penyakit COVID-19, seperti 3M, vaksinasi, dan juga tindakan isolasi yang telah direalisasikan. Apabila dibandingkan dengan kondisi tanpa kendali, maka kondisi dengan kendali yang merupakan solusi efektif pada subpopulasi terpapar.



UIN SUNAN AMPEL  
S U R A B A Y A

#### 4.4.3. Subpopulasi Terinfeksi (*Infected*)



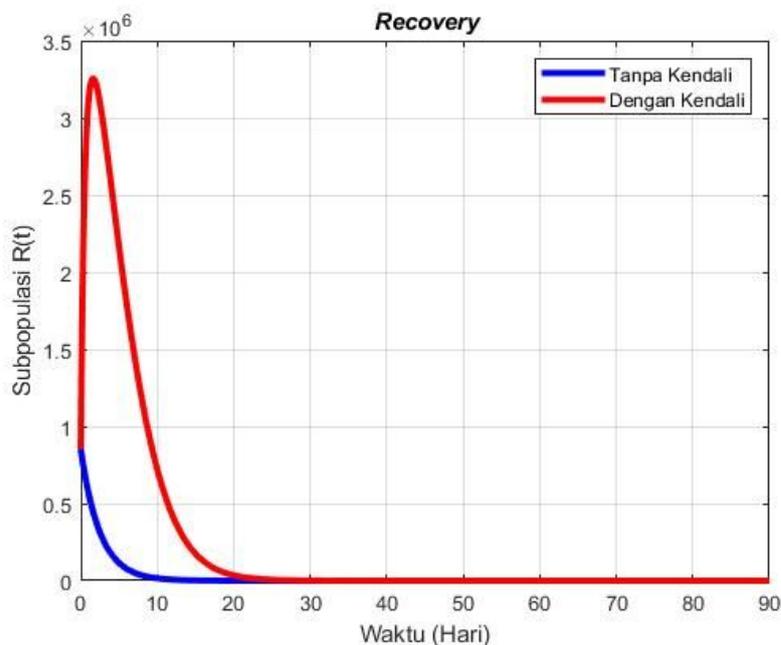
**Gambar 4.3** Grafik Hasil Simulasi Subpopulasi Terinfeksi

Gambar (4.3) menunjukkan laju perubahan subpopulasi terinfeksi yang disertai dengan dua kondisi, yaitu ketika tidak diterapkan parameter kendali, dan ketika diterapkan parameter kendali. Ketika tidak diterapkan parameter kendali atau  $u_i(t) = 0, \forall i = 1, 2, 3$  terjadi lonjakan kasus pada subpopulasi terinfeksi dari hari pertama yang awalnya berjumlah 3.118 menjadi 769.700 pada hari ke-3, dan pada hari ke-3 merupakan puncak wabah COVID-19 di Provinsi DKI Jakarta. Kemudian setelah hari ke-3 hingga hari ke-14 mengalami penurunan secara signifikan, yaitu pada hari ke-14 sebanyak 19.670. Hal tersebut dikarenakan tidak ada subpopulasi terinfeksi yang meninggal secara alami namun meninggal karena COVID-19, serta kebijakan-kebijakan pencegahan seperti 3M, vaksinasi, dan isolasi belum diterapkan sebagai akibat melambatnya penurunan angka infeksi COVID-19.

Berbeda halnya dengan ketika diterapkan parameter kendali atau  $u_i(t) \neq 0, \forall i = 1, 2, 3$ . Pada kondisi ini terjadi peningkatan secara signifikan dari hari pertama hingga hari ke-2, yang awalnya 3.118 meningkat menjadi 488.200 yang merupakan puncak wabah COVID-19 ketika tindakan pencegahan seperti 3M, tindakan vaksinasi, dan tindakan isolasi sudah mulai diterapkan, kemudian turun secara signifikan (sangat cepat) hingga pada hari ke-12 sebanyak 10.210. Dengan kata lain, penurunan subpopulasi terinfeksi terjadi 2 hari lebih cepat dibandingkan dengan kondisi ketika tidak diterapkan parameter kendali (belum adanya penerapan kebijakan pencegahan), dikarenakan kebijakan pencegahan seperti 3M, vaksinasi, dan isolasi sudah mulai diterapkan dan mempengaruhi secara signifikan dalam menekan angka lonjakan COVID-19 di Provinsi DKI Jakarta, serta perpindahan subpopulasi dari terinfeksi menjadi sembuh setelah dilakukan karantina selama 2 minggu (waktu normal karantina saat terinfeksi COVID-19), ataupun pada subpopulasi rentan dan juga subpopulasi terpapar telah divaksin sehingga memiliki antibodi atau imun yang kuat, atau dengan kata lain tidak mudah terinfeksi penyakit COVID-19. Apabila dibandingkan dengan kondisi tanpa kendali, maka kondisi dengan kendali yang merupakan solusi efektif pada subpopulasi terinfeksi.

UIN SUNAN AMPEL  
S U R A B A Y A

#### 4.4.4. Subpopulasi Sembuh (*Recovery*)



**Gambar 4.4 Grafik Hasil Simulasi Subpopulasi Sembuh**

Gambar (4.4) menunjukkan laju perubahan subpopulasi sembuh yang disertai dengan dua kondisi, yaitu ketika tidak diterapkan parameter kendali, dan ketika diterapkan parameter kendali. Ketika tidak diterapkan parameter kendali atau  $u_i(t) = 0, \forall i = 1, 2, 3$  terjadi penurunan angka kesembuhan dari hari pertama hingga pada hari ke-9, yaitu yang awalnya dari 852.563 berkurang menjadi 34.740. Hal tersebut dikarenakan belum diterapkannya tindakan pencegahan seperti 3M, tindakan vaksinasi, dan tindakan isolasi yang dapat meningkatkan angka kesembuhan. Selain itu juga dikarenakan perpindahan jumlah subpopulasi sembuh yang meninggal secara alami (karena faktor selain COVID-19).

Berbeda halnya dengan ketika diterapkan parameter kendali, atau secara notasi matematika dinyatakan dengan  $u_i(t) \neq 0, \forall i = 1, 2, 3$ . Pada kondisi ini angka kesembuhan mengalami peningkatan secara signifikan dari hari pertama

hingga pada hari ke-2, yang awalnya 852.563 bertambah menjadi 3.253.000. Kemudian setelah hari ke-2 menurun drastis hingga pada hari ke-18 dengan jumlah subpopulasi sembuh sebanyak 93.450. Hal tersebut dikarenakan tindakan pencegahan seperti tindakan 3M, tindakan vaksinasi, dan tindakan isolasi telah diterapkan dan sebagai akibatnya, pada subpopulasi terpapar dan terinfeksi dapat selesai 2 hari lebih cepat dalam menurunkan angka penularan COVID-19 di Provinsi DKI Jakarta. Apabila dibandingkan dengan kondisi tanpa kendali, maka kondisi dengan kendali yang merupakan solusi efektif pada subpopulasi sembuh.

#### 4.5. Integrasi Keislaman

##### 4.5.1. Integrasi Keislaman Terkait Hasil Simulasi Dengan Kendali Optimal

Sesuai dengan hasil simulasi penelitian yang telah dipaparkan, adanya kendali optimal dapat mempercepat penurunan angka terpapar dan terinfeksi COVID-19 sesuai dengan harapan, dan dapat menjadi upaya yang telah dilakukan peneliti dalam mengatasi masalah penyebaran penyakit COVID-19. Allah SWT telah memerintahkan untuk selalu berusaha disertai dengan ikhtiar dalam upaya mengatasi suatu permasalahan agar dapat terselesaikan dengan baik, sebagaimana telah tercantum dalam Al-Qur'an Surah Az-Zumar Ayat 39 yang berbunyi:

قُلْ يٰقَوْمِ اَعْمَلُوا عَلٰى مَا كُنْتُمْ اِنۡنٰى عَامِلٌ فَاَسُوۡفَ تَعْلَمُوۡنَ ﴿٣٩﴾

**Terjemahan:** Katakanlah, “Wahai kaumku, berbuatlah menurut kedudukanmu! Sesungguhnya aku pun berbuat (demikian). Kelak kamu akan mengetahui” (QS Az Zumar/39:39)

Surah di atas memberikan gambaran bahwa usaha maksimal yang telah dikerahkan dalam mengerjakan sesuatu, maka Allah SWT akan memberikan

balasan yang baik sesuai dengan yang telah dikerjakan, seperti halnya dalam konteks kendali optimal berupa penerapan tindakan pencegahan pada penelitian ini yang dapat mempercepat penurunan angka terpapar dan terinfeksi penyakit COVID-19 dalam 2 hari lebih cepat apabila dibandingkan dengan tidak diterapkan kendali optimal (tidak diterapkan tindakan pencegahan seperti 3M, vaksinasi, dan isolasi) sesuai dengan fungsi tujuan yang telah dirumuskan yaitu meminimumkan atau mengurangi jumlah subpopulasi terpapar dan subpopulasi terinfeksi. Dengan demikian, wabah penyakit COVID-19 dapat cepat selesai dalam kurun waktu yang cepat sehingga tidak ada lagi populasi yang terpapar dan terinfeksi hingga tidak lagi mendatangkan ketakutan luar biasa yang berdampak pada menurunnya imun, dalam menghadapi wabah penyakit COVID-19.

Selain itu, dengan berusaha secara maksimal juga dapat memberikan manfaat yang tentunya bagi diri sendiri dan juga orang lain. Seperti halnya yang dilakukan oleh peneliti dalam penelitian ini yaitu menambahkan parameter pencegahan untuk menurunkan angka penularan COVID-19, sebagaimana mengenai kebermanfaatan telah dijelaskan dalam riwayat hadis yang berbunyi:

UIN SUNAN AMPEL  
S U R A B A Y A

حَيْرُ النَّاسِ أَنْفَعُهُمْ لِلنَّاسِ

**Terjemahan:** “Sebaik-baik manusia adalah yang paling bermanfaat bagi manusia” (HR. Ahmad, ath-Thabrani, ad-Daruqutni. Hadits ini dihasankan oleh al-Albani di dalam *Shahihul Jami’* no:3289).

Hadis di atas memberikan amanat bahwa hendaknya sebagai manusia haruslah memberikan kebermanfaatan bagi manusia lain. Dalam konteks penelitian ini, pada skenario atau kondisi ketika tidak diterapkan tindakan pencegahan seperti 3M, vaksinasi, dan isolasi maka akibat dari hal tersebut beberapa diantaranya adalah melambatnya peningkatan angka kesembuhan,

melambatnya penurunan angka pada subpopulasi terpapar dan subpopulasi terinfeksi, serta meningkatnya angka subpopulasi rentan. Peneliti berupaya untuk memberikan parameter kendali atau menerapkan tindakan pencegahan dengan hasil yang diperoleh angka penurunan mengalami penurunan lebih cepat, dan tindakan pencegahan yang diterapkan oleh peneliti dapat menjadi manfaat bagi seluruh masyarakat agar lebih waspada dan menerapkan kebijakan pencegahan agar terhindar dari penyakit COVID-19.

#### 4.5.2. Integrasi Keislaman Terkait Pentingnya Vaksinasi

Vaksinasi merupakan komponen penting agar tubuh semakin terlindungi dari penyakit menular, termasuk pada penelitian ini yaitu penyakit COVID-19. Vaksinasi juga dapat diartikan sebagai upaya penanganan dalam mencegah suatu individu terinfeksi COVID-19. Vaksin yang digunakan berisi bakteri atau virus yang telah dijinakkan atau dimatikan, dan tentunya telah mencapai tahapan uji klinis oleh para pakar ahli kesehatan dan juga BPOM (Badan Pengawas Obat dan Makanan), serta telah dinyatakan secara resmi bahwa vaksin COVID-19 tidak berbahaya bagi tubuh dan merupakan pengobatan yang halal (Ningsih and Surur, 2022). Pentingnya untuk melakukan vaksinasi sebagai upaya penanganan dari penyakit COVID-19 terutama orang yang telah sembuh dari COVID-19 maupun orang yang dapat dikatakan masih rentan terhadap penyakit COVID-19 telah tercantum dalam Al-Qur'an Surah Yunus Ayat 57 yang berbunyi:

يَا أَيُّهَا النَّاسُ قَدْ جَاءَتْكُمْ مَوْعِظَةٌ مِنْ رَبِّكُمْ وَشِفَاءٌ لِمَا فِي الصُّدُورِ وَهُدًى وَرَحْمَةٌ لِلْمُؤْمِنِينَ ﴿٥٧﴾

**Terjemahan:** "Wahai manusia, sungguh telah datang kepadamu pelajaran (Al-Qur'an) dari Tuhanmu, penyembuh bagi sesuatu (penyakit) yang terdapat dalam dada, dan petunjuk serta rahmat bagi orang-orang mukmin". (QS Yunus/10:57)

Surah tersebut terdapat relevansinya dengan penyakit COVID-19 yang menyerang sistem pernapasan manusia hingga menyerang paru-paru (organ tubuh manusia yang letaknya berada di bagian dada lebih dalam), dan oleh karenanya perlu dilakukan pengobatan terutama pada subpopulasi rentan dan subpopulasi yang telah dinyatakan sembuh dari COVID-19 agar wabah penyakit COVID-19 dapat segera reda atau dengan kata lain berhenti mewabah. Pengobatan COVID-19 sejauh ini yang efektif adalah dengan pemberian vaksin. Jika penanganan vaksinasi COVID-19 tidak dilakukan, maka kegiatan seperti kuliah tatap muka, kerja di kantor akan dilakukan pembatasan dengan kuliah daring, kerja dari rumah, hingga kepada kerugian yang sangat besar, seperti halnya banyak pekerja yang di PHK dari kantornya, dan lain sebagainya.

#### **4.5.3. Integrasi Keislaman Terkait Pentingnya Menjaga Jarak Dengan Orang Sakit, Menggunakan Masker, dan Mencuci Tangan**

Tindakan pencegahan lain yang diterapkan peneliti dalam skenario dinamika model penyebaran penyakit pada penelitian ini adalah kebijakan 3M yang mana salah satu kebijakannya adalah menjaga jarak. Menjaga jarak atau *social distancing* merupakan salah satu cara yang dapat memutus rantai penyebaran COVID-19 yang menular melalui udara (*droplet*), seperti batuk, bersin, dan interaksi dengan jarak yang berdekatan maupun jarak penularan tertentu (Qian and Jiang, 2022). Perihal mengenai pentingnya menjaga jarak atau *social distancing* agar penyakit tidak semakin menular telah tercantum dalam riwayat hadis yang berbunyi:

حَدَّثَنَا أَبُو الْيَمَانِ أَخْبَرَنَا شُعَيْبٌ عَنْ الزُّهْرِيِّ قَالَ حَدَّثَنِي أَبُو سَلَمَةَ بْنُ عَبْدِ الرَّحْمَنِ أَنَّ  
 أَبَا هُرَيْرَةَ قَالَ سَمِعْتُ رَسُولَ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ يَقُولُ لَا عَدْوَى قَالَ أَبُو سَلَمَةَ  
 بْنُ عَبْدِ الرَّحْمَنِ سَمِعْتُ أَبَا هُرَيْرَةَ عَنِ النَّبِيِّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ قَالَ لَا تُورِدُوا  
 الْمُمْرِضَ عَلَى الْمُصِحِّ وَعَنِ الزُّهْرِيِّ (صحيح البخاري : ٥٣٣٠)

**Terjemahan:** "Telah menceritakan kepada kami Abu Al Yaman telah mengabarkan kepada kami Syu'aib dari Az Zuhri dia berkata: telah menceritakan kepadaku Abu Salamah bin Abdurrahman bahwa Abu Hurairah berkata: saya mendengar Rasulullah shallallahu 'alaihi wa sallam bersabda: "Tidak ada 'adwa (keyakinan adanya penularan penyakit)." Abu Salamah bin Abdurrahman berkata: saya mendengar Abu Hurairah dari Nabi shallallahu 'alaihi wa sallam beliau bersabda: "Janganlah kalian mencampurkan antara yang sakit dengan yang sehat." (H.R. Shahih Bukhari, Nomer 5330)

Hadis tersebut menjelaskan bahwa jangan bercampur dengan orang-orang yang dinyatakan terinfeksi penyakit menular, seperti halnya penyakit COVID-19 ini karena akan menimbulkan wabah yang meluas hingga menular ke daerah-daerah lain dan berakibat wabah penyakit dalam kurun waktu lama serta tingginya angka penularan. Untuk itu, perlu adanya *social distancing* atau menjaga jarak agar tidak terjadi penularan yang meluas hingga ke daerah lain dan wabah COVID-19 cepat mereda, seperti menghindari kerumunan, kemudian menutup mulut saat bersin dan batuk ketika interaksi dengan orang lain lalu mencuci tangan agar tercipta lingkungan yang bersih dan sehat serta membunuh bakteri atau kuman yang berada di tangan, atau juga menggunakan masker saat beraktivitas di luar rumah (Apriludianto, 2020; Zainul ali, 2020). Pentingnya menjaga kebersihan seperti salah satunya dengan mencuci tangan juga telah tercantum dalam riwayat hadis yang berbunyi:

حَدَّثَنَا مُحَمَّدُ بْنُ بَشَّارٍ حَدَّثَنَا أَبُو عَامِرٍ الْعَقَدِيُّ حَدَّثَنَا خَالِدُ بْنُ الْيَاسِ عَنْ صَالِحِ بْنِ أَبِي حَسَّانَ قَالَ سَمِعْتُ سَعِيدَ بْنَ الْمُسَيَّبِ يَقُولُ إِنَّ اللَّهَ طَيِّبٌ يُحِبُّ الطَّيِّبَ نَظِيفٌ يُحِبُّ النَّظَافَةَ كَرِيمٌ يُحِبُّ الْكِرَامَ جَوَادٌ يُحِبُّ الْجُودَ فَنَظِّفُوا أَرَاهُ قَالَ أَفْنَيْتَكُمْ وَلَا تَتَشَبَّهُوا بِالْيَهُودِ (سنن الترمذي: ٢٧٢٣)

**Terjemahan:** *Telah menceritakan kepada kami Muhammad bin Basyar telah menceritakan kepada kami Abu 'Amir Al 'Aqadi telah menceritakan kepada kami Khalid bin Ilyas dari Shalih bin Abu Hassan ia berkata: Aku mendengar Sa'id bin Al Musayyab berkata: "Sesungguhnya Allah Maha Baik, dan menyukai kepada yang baik, Maha Bersih dan menyukai kepada yang bersih, Maha Pemurah, dan menyukai kemurahan, dan Maha Mulia dan menyukai kemuliaan, karena itu bersihkanlah diri kalian." Aku mengirannya dia berkata: "Halaman kalian, dan janganlah kalian menyerupai orang-orang Yahudi." (H.R. Sunan Tirmidzi, Nomer 2723)*

Hadis di atas menjelaskan pentingnya menjaga kebersihan agar terciptanya lingkungan yang bersih dan sehat, karena faktor terinfeksi penyakit juga dapat disebabkan oleh kurangnya menjaga kebersihan. Oleh karena itu, sebagai umat muslim wajib hukumnya menjaga kebersihan lingkungan karena kebersihan sebagian dari iman dan dapat menjadi amalan mulia disisi Allah SWT.

#### 4.5.4. Integrasi Keislaman Terkait Pentingnya Isolasi COVID-19

Pada penelitian ini juga diterapkan tindakan pencegahan berupa isolasi pada analisis dinamika model penyebaran penyakit COVID-19 dengan kendali. Tindakan isolasi tentunya tindakan pencegahan yang diterapkan oleh Pemerintah dan dilakukan dengan tujuan penekanan angka infeksi COVID-19 agar tidak semakin tinggi, atau dengan kata lain secara sederhana untuk memutus rantai penyebaran COVID-19. Pada umumnya, penerapan isolasi secara mandiri diperuntukkan terutama bagi orang-orang yang dicurigai terinfeksi penyakit

menular yang tentunya ditandai dengan bergejala ataupun tanpa bergejala. Pentingnya melakukan isolasi telah dijelaskan sebagaimana telah tercantum dalam riwayat hadis yang berbunyi:

حَدَّثَنِي بِشْرُ بْنُ مُعَاذٍ الْعَقَدِيُّ، قَالَ: ثَنَا حَمَّادُ بْنُ  
وَأَقِدٍ، عَنْ أَبِي أَيُّوبَ الزِّنَادِيِّ، عَنِ الْأَوْزَاعِيِّ، قَالَ:  
“الْعَافِيَةُ عَشْرَةُ أَجْزَاءٍ: تِسْعَةٌ أَجْزَاءٍ مِنْهَا صَمْتُ،  
وَجُزْءٌ مِنْهَا اعْتِرَافُكَ عَنِ النَّاسِ

**Terjemahan:** “*Al-Auzā’ī* ia berkata, kesehatan itu memerlukan sepuluh hal, sembilan di antaranya berdiam dan satu yang lainnya menjauhkan diri dari kerumunan manusia.” (Abū al-Dunyā’ 2003, hlm. 37)

Dari hadis tersebut dapat ditarik suatu kesimpulan bahwa isolasi penting dilakukan ketika seseorang terinfeksi penyakit menular salah satunya dengan menghindari diri dari kerumunan dengan berdiam diri di rumah (isolasi mandiri) agar tetap terjaga kesehatan dan tidak terjadi penularan penyakit yang sangat tinggi. Selain itu, adapun hikmah dibalik kewajiban melakukan isolasi seperti yang dijelaskan dalam suatu riwayat hadis:

كَانَ عَذَابًا يَبْعَثُهُ اللَّهُ عَلَى مَنْ يَشَاءُ، فَجَعَلَهُ اللَّهُ رَحْمَةً لِلْمُؤْمِنِينَ، مَا مِنْ عَبْدٍ يَكُونُ فِي  
بَلَدٍ يَكُونُ فِيهِ، وَبِمَكَتُ فِيهِ، لَا يَخْرُجُ مِنَ الْبَلَدِ، صَابِرًا مُحْتَسِبًا، يَعْلَمُ أَنَّهُ لَا يُصِيبُهُ  
إِلَّا مَا كَتَبَ اللَّهُ لَهُ، إِلَّا كَانَ لَهُ مِثْلُ أَجْرِ شَهِيدٍ

**Terjemahan:** *“Dari Siti Aisyah RA, ia berkata, Aku bertanya kepada Rasulullah SAW perihal tha’un, lalu Rasulullah SAW memberitahukanku, dahulu, tha’un adalah azab yang Allah kirimkan kepada siapa saja yang Dia kehendaki, tetapi Allah menjadikannya sebagai rahmat bagi orang beriman. Maka tiada seorang pun yang tertimpa tha’un, kemudian ia menahan diri di rumah dengan sabar serta mengharapkan ridha-Nya seraya menyadari bahwa tha’un tidak akan menimpanya selain telah menjadi ketentuan Allah untuknya, niscaya ia akan memperoleh ganjaran seperti pahala orang yang mati syahid.” (HR al-Bukhari, Nasa’i dan Ahmad)*

Hadis tersebut menjelaskan bahwa penyakit menular (*tha’un*) seperti COVID-19 adalah bentuk ujian dari Allah SWT. Hikmah dengan melakukan isolasi secara mandiri baik di rumah maupun isolasi di rumah sakit dan diimbangi juga ikhtiar dan sabar yang maksimal dengan mengharapkan ridha Allah SWT meskipun dalam keadaan menjauhi kerumunan (isolasi) sekalipun, insyaallah dengan bersabar dan ikhtiar secara maksimal akan mendapatkan pahala seperti pahala orang yang mati syahid (orang yang berperang di jalan Allah) (Achyuniwati, 2021). Tidak dapat dipungkiri bahwa kebijakan isolasi atau karantina merupakan kemungkinan terburuk, karena tidak dapat bertemu langsung dengan orang lain, tidak dapat bersosialisasi, dan lain sebagainya. Namun jika kebijakan tersebut tidak diterapkan, maka menyebabkan penularan wabah penyakit COVID-19 yang sangat tinggi.

## BAB V

### PENUTUP

#### 5.1. Kesimpulan

Berdasarkan pemaparan hasil dan pembahasan, maka didapatkan kesimpulan pada penelitian ini yaitu sebagai berikut.

1. Penyelesaian model matematis pada penyebaran COVID-19 dengan kendali dimana kendali yang diterapkan meliputi kendali 3M (menjaga jarak, mencuci tangan, dan menggunakan masker), kendali vaksinasi, dan kendali isolasi didapatkan solusi kendali optimal secara berturut-turut dalam himpunan sebagai berikut.

- Kendali optimal 3M (menjaga jarak, mencuci tangan, dan menggunakan masker) pada individu rentan

$$u_1^*(t) = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, -\frac{1}{2C_1} \left( \frac{\beta\lambda_1(t) S(t) E(t) - \beta\lambda_2(t) S(t) E(t)}{N} \right) \right\} \right\}$$

- Kendali optimal vaksinasi pada individu rentan

$$u_2^*(t) = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{1}{2C_2} (\lambda_1(t) S(t) - \lambda_5(t) S(t)) \right\} \right\}$$

- Kendali optimal isolasi pada individu terkarantina

$$u_3^*(t) = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{1}{2C_2} (\lambda_4(t) Q(t) - \lambda_5(t) Q(t)) \right\} \right\}$$

2. Dengan diterapkannya kendali optimal, maka wabah penyakit COVID-19 dapat cepat selesai jika dibandingkan dengan tidak diterapkannya kendali optimal. Hal tersebut dapat dibuktikan dari hasil simulasi, yang pada pada subpopulasi terpapar pada kondisi tanpa kendali mengalami penurunan secara signifikan dari hari pertama hingga hari ke-14, dengan jumlah yang awalnya 2.882.572 turun menjadi 15.890, namun kondisi dengan kendali mengalami penurunan yang lebih cepat dalam 6 hari dari hari pertama hingga hari ke-8, dengan jumlah yang awalnya 2.882.572 turun menjadi 40.140. Begitu juga pada subpopulasi terinfeksi dengan kondisi tanpa kendali mengalami penurunan secara signifikan dari hari ke-3 yang merupakan puncak wabah hingga pada hari ke-14, yang awalnya 769.700 turun menjadi 19.670, namun kondisi dengan kendali mengalami penurunan yang lebih cepat dalam 2 hari setelah mencapai kasus infeksi tertinggi pada hari ke-2 hingga pada hari ke-12, yang awalnya 488.200 turun menjadi 10.210.

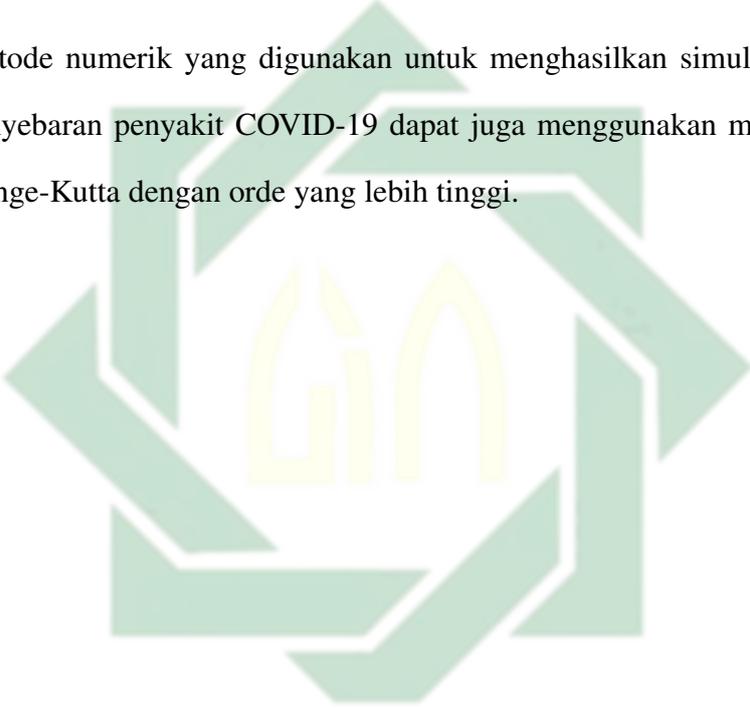
## 5.2. Saran

Sebagai pengembangan untuk penelitian selanjutnya, maka penulis menambahkan beberapa poin saran terkait dengan penelitian pada skripsi ini baik dari segi model, parameter, ataupun metode, yaitu sebagai berikut.

1. Formulasi model penyebaran COVID-19 pada penelitian ini dapat dilakukan perbaikan dengan penambahan beberapa variabel sedemikian sehingga dapat memberikan hasil simulasi yang semakin mendekati kondisi asli atau keadaan realitanya.
2. Pada penelitian selanjutnya diharapkan terdapat penambahan skenario

parameter kendali agar hasil simulasi yang didapatkan lebih optimal, serta semakin mendekati kondisi asli atau keadaan realitanya.

3. Pendekatan dalam penentuan kendali optimal dapat dilakukan dengan pendekatan lain seperti PID (*Proportional-Integral-Derivative*) Controller, LQR (*Linear Quadratic Regulator*), dan MPC (*Model Predictive Control*).
4. Metode numerik yang digunakan untuk menghasilkan simulasi dari model penyebaran penyakit COVID-19 dapat juga menggunakan metode numerik Runge-Kutta dengan orde yang lebih tinggi.



UIN SUNAN AMPEL  
S U R A B A Y A

## DAFTAR PUSTAKA

- Abbas, H., Takeuchi, K., Koyama, S., Osaka, K., and Tabuchi, T. (2022). Association between tooth brushing habits and COVID-19 symptoms. *International Dental Journal*, 0:1–9.
- Achyuniwati, S. (2021). Sabar, Syukur, Dan Ikhtiar Maksimal Dalam Menghadapi Pandemi. [https://dppai.uin.ac.id/sabar-syukur-dan-ikhtiar-maksimal-dalam-menghadapi-pandemi/?utm\\_source=rss&utm\\_medium=rss&utm\\_campaign=sabar-syukur-dan-ikhtiar-maksimal-dalam-menghadapi-pandemi](https://dppai.uin.ac.id/sabar-syukur-dan-ikhtiar-maksimal-dalam-menghadapi-pandemi/?utm_source=rss&utm_medium=rss&utm_campaign=sabar-syukur-dan-ikhtiar-maksimal-dalam-menghadapi-pandemi).
- Adi, Y. A., Irsalinda, N., and Ndi, M. Z. (2022). Optimal Control and Cost-Effectiveness Analysis in An Epidemic Model with Viral Mutation and Vaccine Intervention. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, 7(2):173–185.
- Aldila, D., Khoshnaw, S. H., Safitri, E., Anwar, Y. R., Bakry, A. R., Samiadji, B. M., Anugerah, D. A., GH, M. F. A., Ayulani, I. D., and Salim, S. N. (2020). A mathematical study on the spread of COVID-19 considering social distancing and rapid assessment: The case of Jakarta, Indonesia. *Chaos, Solitons and Fractals*, 139:110042.
- Aldila, D., Samiadji, B. M., Simorangkir, G. M., Khosnaw, S. H., and Shahzad, M. (2021). Impact of early detection and vaccination strategy in COVID-19 eradication program in Jakarta, Indonesia. *BMC Research Notes*, 14(1):1–7.
- Amalia, H. (2021). Omicron penyebab COVID-19 sebagai variant of concern. *Jurnal Biomedika dan Kesehatan*, 375(4):n2943.

Anderson Luiz Pena da, C., Marcelo Amanajas, P., Rafael Lima, R., and Sheylla Susan Moreira da Silva de, A. (2021). Mathematical Modeling of the Infectious Diseases: Key Concepts and Applications. *Journal of Infectious Diseases and Epidemiology*, 7(5).

Andrés-Martínez, O., Palma-Flores, O., and Ricardez-Sandoval, L. A. (2022). Optimal control and the Pontryagin's principle in chemical engineering: History, theory, and challenges. *AIChE Journal*, 68(8).

Annas, S., Isbar Pratama, M., Rifandi, M., Sanusi, W., and Side, S. (2020a). Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia. *Chaos, Solitons and Fractals*, 139:110072.

Annas, S., Pratama, M. I., Rifandi, M., Sanusi, W., and Side, S. (2020b). Stability Analysis and Numerical Simulation of SEIR Model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia. *Chaos, Solitons and Fractals: the interdisciplinary journal of Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena*, page 110072.

Apriludianto, D. (2020). Pandemi COVID-19 Dan Kondisi Darurat. *Jurnal Ilmu Al-Qur'an dan Tafsir*.

Badan Pusat Statistik (BPS) (2022). *Provinsi DKI Jakarta Dalam Angka 2022*. BPS Provinsi DKI Jakarta, Jakarta.

Basnarkov, L., Tomovski, I., Sandev, T., and Kocarev, L. (2022). Non-Markovian SIR epidemic spreading model of COVID-19. *Chaos, Solitons and Fractals*, 160:112286.

- Brauer, F. and Castillo-Chavez, C. (2011). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, volume 110. Springer, New York, second edition.
- Butcher, J. (1996). A history of Runge-Kutta methods. *Applied Numerical Mathematics*, 20:247–260.
- Cahyono, A. M. (2019). Metode Menabung Perspektif Zaman Nabi Yusuf AS. *Journal of Sharia Economics*, 1:129–145.
- Chatterjee, K., Chatterjee, K., and Kumar, A. (2020). ScienceDirect Healthcare impact of COVID-19 epidemic in India : A stochastic mathematical model. *Medical Journal Armed Forces India*, 76(2):147–155.
- Cimolai, N. (2021). In pursuit of the right tail for the COVID-19 incubation period. *Public Health*, 194:149–155.
- Fitri, I. R. and Bakhtiar, T. (2021). Controlling COVID-19 spread in Jakarta, Indonesia, using quarantine, testing and medical treatment. *Kuwait Journal of Science*, (Tobias):1–22.
- Gatyeni, S. P., Chukwu, C. W., Chirove, F., Fatmawati, and Nyabadza, F. (2022). Application of optimal control to the dynamics of COVID-19 disease in South Africa. *Scientific African*, 16:e01268.
- Geering, H. P. (2007). *Optimal Control with Engineering Applications*. Springer, Berlin, first edition.
- Griffiths, D. F. and Higham, D. J. (2010). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, volume 13. Springer, New York, 1st edition.

- Hermann, M. and Saravi, M. (2014). *A First Course in Ordinary Differential Equations (Analytical and Numerical Methods)*. Springer, New Delhi, first edition.
- Hiriart-Urruty, J.-B., Korytowski, A., Maurer, H., and Szymkat, M. (2016). *Advances in Mathematical Modeling, Optimization and Optimal Control*. Springer, Switzerland, 1st edition.
- Holmes, M. H. (2006). *Introduction to Numerical Methods in Differential Equations (Texts in Applied Mathematics, Vol. 52)*, volume 52. Springer, New York, first edition.
- Hurint, R. U., Ndi, M. Z., and Lobo, M. (2017). Analisis Sensitivitas Model Epidemi SEIR. *Natural Science: Journal of Science and Technology*, 6(1):22–28.
- Hussain, T., Ozair, M., Ali, F., ur Rehman, S., Assiri, T. A., and Mahmoud, E. E. (2021). Sensitivity analysis and optimal control of COVID-19 dynamics based on SEIQR model. *Results in Physics*, 22:103956.
- Ibrahim, R. (2022). *Pencegahan COVID-19 Dalam Perspektif Islam*. Dinas Syariat Islam Kota Banda Aceh, Banda Aceh.
- Ika, D., Hari, S., and Kurniajati, S. (2021). Attitudes and Knowledge about The Covid-19 Pandemic of Members of The Gbi Bukit Pengharapan Kediri Congregation. 3(1):373–378.
- Jason, Roslynlia, and Gunawan, A. A. (2021). Forecasting Social Distancing impact on COVID-19 in Jakarta using SIRD Model. *Procedia Computer Science*, 179(2019):662–669.

Javier, S.-v., Percy, S.-b., Stefan, E.-a., Manuel, F.-n., Antonio, E.-r. O., Edward, M.-h., and Lely, S. (2022). Relative vaccine effectiveness of the booster dose of COVID-19 vaccine for preventing death in individuals with a primary regimen based on the BBIBP-CorV, ChAdOx1-S, or BNT162b2 vaccines during the Omicron wave in Peru: A nested case-control study. *Pre-proofs*.

Kamrujjaman, M., Saha, P., Islam, M. S., and Ghosh, U. (2022). Dynamics of SEIR model: A case study of COVID-19 in Italy. *Results in Control and Optimization*, 7(January):100119.

Kementerian Kesehatan (2021). Cegah Penyebaran Varian Baru COVID-19, Kemenkes Perketat Pintu Masuk Negara. <https://sehatnegeriku.kemkes.go.id/baca/rilis-media/20210910/2038453/cegah-penyebaran-varian-baru-covid-19-kemenkes-perketat-pintu-masuk-negara/>.

Kementerian Kesehatan (2022). Waspada Penyebaran COVID-19 Varian Omicron. <http://p2p.kemkes.go.id/waspada-penyebaran-covid-19-varian-omicron/>.

Kementerian Perencanaan Pembangunan Nasional (Bappenas) Republik Indonesia (2020). Covid-19, New Normal, dan Perencanaan Pembangunan di Indonesia. *Jurnal Perencanaan Pembangunan: The Indonesian Journal of Development Planning*, 4(2):240–252.

Khairani, R. (2021). Strategi mix-and-match vaksin COVID-19, seberapa efektifkah? *Jurnal Biomedika dan Kesehatan*, 4(3):87–89.

Khajji, B., Kouidere, A., Elhia, M., Balatif, O., and Rachik, M. (2021). Fractional optimal control problem for an age-structured model of COVID-19 transmission. *Chaos, Solitons and Fractals*, 143:110625.

- Khedher, N. B., Kolsi, L., and Alsaif, H. (2021). A multi-stage SEIR model to predict the potential of a new COVID-19 wave in KSA after lifting all travel restrictions. *Alexandria Engineering Journal*, 60(4):3965–3974.
- Kirk, D. E. (2004). *Optimal Control Theory An Introduction*. Dover Publications, New York, first edition.
- Krämer, A., Kretzschmar, M., and Krickeberg, K. (2010). *Modern Infectious Disease Epidemiology. Concepts, Methods, Mathematical Models, and Public Health*. Springer, New York, first edition.
- Kurniawan, A. (2020). Ini Hadits Rasulullah Seputar Wabah Penyakit, Thaun, atau COVID-19. <https://islam.nu.or.id/ilmu-hadits/ini-hadits-rasulullah-seputar-wabah-penyakit-thaun-atau-covid-19-yfSfu>.
- Li, T. and Guo, Y. (2022). Optimal control and cost-effectiveness analysis of a new COVID-19 model for Omicron strain. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 606:128134.
- Li, W., Fu, X., Sun, Y., and Liu, M. (2021). Dynamical Analysis of a Mathematical Model of COVID-19 Spreading on Networks. *Frontiers in Physics*, 8(January):1–8.
- Liu, X.-x., Fong, S. J., Dey, N., and Crespo, R. G. (2021). A new SEAIRD pandemic prediction model with clinical and epidemiological data analysis on COVID-19 outbreak. pages 4162–4198.
- Lubis, R., Satria, F. B., Zaki, R. A., Nurjazuli, N., and Hendrati, L. Y. (2022). Factors influencing the COVID-19 pandemic situation in Indonesia, Malaysia and Taiwan in 2021. *Public Health in Practice*, 4(August):100311.

- Mahardika, Y. D. (2021). Dynamical Modeling of COVID-19 and Use of Optimal Control to Reduce the Infected Population and Minimize the Cost of Vaccination and Treatment. *ComTech: Computer, Mathematics and Engineering Applications*, 12(2):65–73.
- McVilly, K. R., Stancliffe, R. J., Parmenter, T. R., and Burton-Smith, R. M. (2008). Remaining Open to Quantitative, Qualitative, and Mixed-Method Designs: An Unscientific Compromise, or Good Research Practice? Author note: This paper is based on the Doctoral Research of Keith R. McVilly, which was recognized with Australian Psychological Society's 2005 Thesis Award for a thesis in the field of human relationships... *International Review of Research in Mental Retardation*, 35(07):151–203.
- Motta, A. A. E. d. A., de Castro, M. C. S., Silva, D., and Cortez, C. M. (2021). A mathematical model to estimate binding sites for ligands in HSA and BSA based on spectrofluorimetry. *Journal of Molecular Structure*, 1223.
- Müller, J. and Kuttler, C. (2014). *Methods and Models in Mathematical Biology Deterministic and Stochastic Approaches*. Springer, New York, 1st edition.
- Nana-Kyere, S., Okyere, E., and Ankamah, J. D. G. (2020). Compartmental SEIRW COVID-19 optimal control model. *Communications in Mathematical Biology and Neuroscience*, 2020:1–30.
- Nenchev, V. (2020). Optimal quarantine control of an infectious outbreak. *Chaos, Solitons and Fractals*, 138(June):110139.
- Ningsih, S. and Surur, A. M. (2022). Ekuivalensi Vaksinasi COVID-19 Dalam Prespektif Maqashid Asy-Syariah. *Proceedings of Islamic Economics, Business, and Philanthropy*, 1(1).

- Onori, S., Serrao, L., and Rizzoni, G. (2016). *Hybrid Electric Vehicles Energy Management Strategies*. Springer, London, first edition.
- Pájaro, M., Fajar, N., Alonso, A. A., and Otero-Muras, I. (2022). Stochastic SIR Model Predicts the Evolution of COVID-19 Epidemics from Public Health and Wastewater Data in Small and Medium-Sized Municipalities: A One Year Study. *SSRN Electronic Journal*, 164(September):112671.
- Poler, R., Mula, J., and Díaz-Madroñero, M. (2014). *Operations Research Problems Statements and Solutions*. Springer, London, first edition.
- Pribadi, D. O., Saifullah, K., Putra, A. S., Nurdin, M., Iman, L. O. S., and Rustiadi, E. (2021). Spatial analysis of COVID-19 outbreak to assess the effectiveness of social restriction policy in dealing with the pandemic in Jakarta. *Spatial and Spatio-temporal Epidemiology*, 39(May):100454.
- Putera, P. B., Widianingsih, I., Ningrum, S., Suryanto, S., and Rianto, Y. (2022). Overcoming the COVID-19 Pandemic in Indonesia: A Science, technology, and innovation (STI) policy perspective. *Health Policy and Technology*, 11(3):100650.
- Qian, M. and Jiang, J. (2022). COVID-19 and social distancing. *Journal of Public Health (Germany)*, 30(1):259–261.
- Roda, W. C., Varughese, M. B., Han, D., and Li, M. Y. (2020). Why is it difficult to accurately predict the COVID-19 epidemic? *Infectious Disease Modelling*, 5:271–281.
- Roy, P. K. (2015). *Mathematical Models for Therapeutic Approaches to Control HIV Disease Transmission*. Springer, Singapore, first edition.

- Roy, P. K. and Datta, A. (2019). *Mathematical Models for Therapeutic Approaches to Control Psoriasis*. Springer, Singapore, first edition.
- Satuan Tugas Penanganan COVID-19 (2021). Peta Sebaran COVID-19. <https://covid19.go.id/id/peta-sebaran>.
- Satuan Tugas Penanganan COVID-19 DKI Jakarta (2021). Peta Sebaran COVID-19 Provinsi DKI Jakarta. <https://corona.jakarta.go.id/id/peta-persebaran>.
- Saxena, S. K. (2021). *Coronavirus Disease 2019 Epidemiology, Pathogenesis, Diagnosis, and Therapeutics*, volume 37. Springer, Singapore, 1st edition.
- Shen, Z. H., Chu, Y. M., Khan, M. A., Muhammad, S., Al-Hartomy, O. A., and Higazy, M. (2021). Mathematical modeling and optimal control of the COVID-19 dynamics. *Results in Physics*, 31:105028.
- Skormin, V. A. (2016). *Introduction to Process Control Analysis, Mathematical Modeling, Control and Optimization*. Springer, Singapore, first edition.
- Song, H., Wang, R., Liu, S., Jin, Z., and He, D. (2022). Global stability and optimal control for a COVID-19 model with vaccination and isolation delays. *Results in Physics*, 42(September):106011.
- Susilo, A., Olivia, C., Jasirwan, M., Wafa, S., Maria, S., Rajabto, W., Fachriza, I., Putri, M. Z., Gabriella, S., Penanganan, T., New, I., Pinere, R.-e. D., and Cipto, R. (2022). Review of Current Literatures Mutasi dan Varian Coronavirus Disease 2019 ( COVID-19 ): Tinjauan Literatur Terkini. 9(1):59–81.
- Todorov, E. (2006). Optimal Control Theory. *Environment & Planning C: Government & Policy*, 4(2):121–129.

- Triana, M. (2021). Kebijakan Pemerintah DKI Jakarta Menangani Pandemi Covid-19. *Jurnal Ilmu Pemerintahan*, 14(1):1–9.
- van Dooren, S., Amstutz, A., and Onder, C. H. (2022). A causal supervisory control strategy for optimal control of a heavy-duty Diesel engine with SCR aftertreatment. *Control Engineering Practice*, 119(November 2021):104982.
- Visser, E., Srinivasan, B., Bonvin, D., and Palanki, S. (1999). On-Line Optimization of Batch Processes by Tracking States and Costates. (X):6633–6638.
- Wintachai, P. and Prathom, K. (2021). Stability analysis of SEIR model related to efficiency of vaccines for COVID-19 situation. *Heliyon*, 7(4):e06812.
- Wirawan, N. C. and Herihadi, E. (2021). Epidemiology and Characteristics of Plastic Surgery Cases in Simpang Lima Gumul General Hospital, Kediri Regency During COVID-19 Pandemic. 8(2):68–75.
- World Health Organization (2020). Statement on the second meeting of the International Health Regulations (2005) Emergency Committee regarding the outbreak of novel coronavirus (2019-nCoV). [https://www.who.int/news/item/30-01-2020-statement-on-the-second-meeting-of-the-international-health-regulations-\(2005\)-emergency-committee-regarding-the-outbreak-of-novel-coronavirus-\(2019-ncov\)](https://www.who.int/news/item/30-01-2020-statement-on-the-second-meeting-of-the-international-health-regulations-(2005)-emergency-committee-regarding-the-outbreak-of-novel-coronavirus-(2019-ncov)).
- Wu, Y. and Zhao, S. (2021). Furin cleavage sites naturally occur in coronaviruses. *Stem Cell Research*, 50:102115.
- Zainul ali, Z. (2020). Social Distancing Upaya Pencegahan Penyebaran Covid-19 Perspektif Maqashid Al-Syariah. *Nizham Journal of Islamic Studies*, 8(01):125.

Zhu, W.-j. and Shen, S.-f. (2021). An improved SIR model describing the epidemic dynamics of the COVID-19 in China. *Results in Physics*, 25:104289.



UIN SUNAN AMPEL  
S U R A B A Y A