

BAB I

PENDAHULAN

A. Latar Belakang

Seorang matematikawan tidak akan mempercayai apapun tanpa ada bukti, sementara fisikawan akan mempercayai segalanya sebelum dibuktikan salah.¹ Ungkapan tersebut menggambarkan perbedaan antara bukti secara matematika dan bukti secara fisika. Perbedaan peran bukti tersebut menunjukkan perbedaan hakekat kedua ilmu pengetahuan. Namun, baik bukti fisika dan bukti matematika tak ubahnya merupakan pembahasan tentang filsafat yang menjadi induk dari segala ilmu pengetahuan.

Di dalam matematika, pembahasan mengenai bukti sangatlah diperlukan. Teorema-teorema matematik harus melalui sebuah prosedur pembuktian yang jelas. Griffiths menyatakan bahwa bukti matematik adalah suatu cara berpikir formal dan logis yang dimulai dengan aksioma dan bergerak maju melalui langkah-langkah logis sampai pada suatu kesimpulan.² Melalui proses pembuktian tersebut didapatkan perkembangan kemampuan berpikir matematik. Dengan demikian pembuktian matematika merupakan salah satu aspek yang harus diperhatikan dalam pembelajaran matematika.

Bukti merupakan serangkaian argumen logis yang menjelaskan kebenaran suatu pernyataan. Logis maksudnya setiap langkah dalam argumentasi

¹ Hardi Suyitno, *Bukti Matematika Menurut Wittgenstein*, (FMIPA UNS, 2007) 158

² Dadang Juandi.. *Pembuktian, penalaran, Dan komunikasi matematika*, (FMIPA-UPI, 2008), 3

dibenarkan oleh langkah-langkah sebelumnya.³ Argumen-argumen ini dapat berasal dari premis pernyataan itu sendiri, teorema-teorema lainnya, definisi, dan akhirnya dapat berasal dari postulat dimana sistem matematika tersebut berasal.

Bukti dan argumentasi dikembangkan dalam pembuktian dengan tujuan untuk meyakinkan diri sendiri atau orang lain tentang kebenaran suatu pernyataan⁴. Webber menyatakan bahwa salah satu tujuan dari pembuktian merupakan penjelasan (*explanation*).⁵ Seorang pembaca dapat memahami kebenaran suatu pernyataan bila ia mempunyai penjelasan. Ini diperlukan oleh siswa sebagai latihan membuat penjelasan dalam menyampaikan gagasannya.

Tujuan lainnya adalah menyediakan otonomi (*providing autonomy*). Maksudnya adalah mengajar siswa bagaimana cara membuktikan dapat memperkaya wawasannya untuk mengkonstruksi dan memvalidasi pengetahuan matematik secara bebas.⁶ Bebas dalam arti dilihat dari berbagai sudut pandang ilmu pengetahuan. Dengan mempelajari pembuktian matematik, siswa akan terbiasa menggunakan konsep ini dalam kehidupan sehari-hari.

Membuktikan merupakan tantangan tersendiri bagi para matematikawan, membuat penasaran dan begitu terselesaikan maka diperoleh kepuasan intelektual. Ibarat seni, matematika itu indah. Ini paling tidak pendapat para matematika. Bagi orang awam keindahan matematika terlihat dari pola dan

³ Ibid, 2

⁴ Artikel dalam internet :Pedemonte,B.. *How can the relationship between argumentation and proof be analysed?*, (Jurnal Springer Science + Business Media B.V, 2007) dapat diakses di <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-006-9057-x> diakses pada 24 Mei 2013

⁵ Op. Cit, 5

⁶ Ibid, 7

struktur objek matematika, seperti bilangan, bangun geometri, simulasi matematika pada komputer. Namun bagi mereka yang sudah ahli dalam ilmu matematika, keindahan sesungguhnya dari matematika (*the real beauty of mathematics*) terletak pada pola penalaran yang berupa interkoneksi argumen-argumen logis.⁷ Keberhasilan memformulasikan suatu konjektur, kemudian dapat membuktikannya maka satu masalah dalam matematika terselesaikan. Penelitian matematika pada level yang lebih lanjut menuntut dihasilkannya suatu teorema baru yang buktinya dapat diuji oleh orang lain.

Bukti dan argumentasi saling terkait dalam proses pembuktian. Diskusi ilmiah tentang bukti dan argumentasi (*proof and argumentation*) dilakukan sejak tahun 1970-an.⁸ Pembelajaran tentang bukti dan pembuktian dibahas dengan terperinci dan teliti. Pada awalnya pembelajaran ini dapat dilaksanakan pada level mahasiswa di perguruan tinggi. Pandangan ini dapat dilihat dalam *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) tahun 1989.⁹

Siswa sekolah dirasa belum mampu untuk mengkonstruksi berbagai bentuk penalaran tentang pembuktian. Namun, pendapat itu akhirnya diperbarui oleh NCTM tahun 2000. Rekomendasi tentang perlunya pembelajaran bukti di semua tingkatan pendidikan dijelaskan dalam NCTM bagian "*Reasoning and Proof*".¹⁰

Menurut jurnal tersebut siswa seharusnya dapat : (1) mengenal penalaran dan

⁷ Ibid, 4

⁸ Kusnandi dan Utari Sumarno, *Pembelajaran matematika dengan strategi abduktif-deduktif untuk menumbuhkembangkan kemampuan Membuktikan pada mahasiswa* (Bandung : Universitas Pendidikan Indonesia, 2008), 1

⁹ Ibid, 1

¹⁰ Ibid, 2

pembuktian sebagai aspek-aspek fundamental matematika, (2) membuat konjektur dan memeriksa kebenaran dari konjektur itu, (3) mengembangkan dan mengevaluasi argumen dan pembuktian matematika, (4) memilih dan menggunakan bermacam-macam jenis penalaran dan metode pembuktian

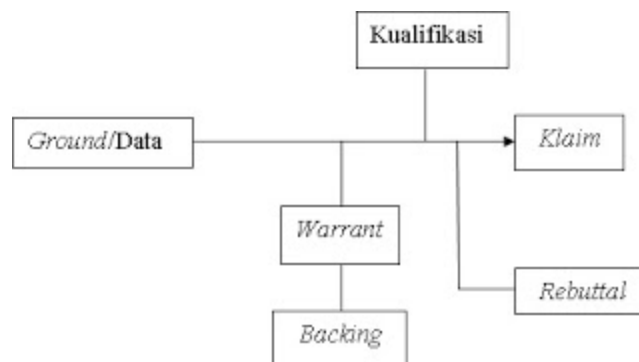
Rekomendasi NCTM tersebut memberikan petunjuk bahwa pembuktian matematika merupakan salah satu aspek yang harus diperhatikan dalam pembelajaran matematika di sekolah. Pengalaman siswa di sekolah menengah atas dalam menyusun pembuktian akan berdampak pada kemampuan membuktikan ketika mereka mengikuti kuliah di perguruan tinggi. Hal ini sesuai dengan yang diungkapkan oleh Moore bahwa salah satu alasan mengapa mahasiswa menemui kesulitan di dalam pembuktian adalah pengalaman mereka dalam mengkonstruksi bukti terbatas pada pembuktian geometri sekolah.¹¹

Di samping itu, jika ditinjau dari tahap perkembangan anak menurut teori Piaget bahwa siswa sekolah menengah tahap berpikirnya dikategorikan pada tahap IV. Pada tahap ini siswa sudah mampu berpikir secara abstrak menurut logika-logika tertentu. Hudoyo menyatakan bahwa dalam periode ini siswa sudah dapat memberikan alasan dengan menggunakan lebih banyak simbol atau gagasan dalam cara berpikirnya.¹² Dengan demikian pembelajaran tentang bukti matematika dirasa perlu untuk diterapkan di tingkat sekolah, dalam hal ini sekolah menengah atas.

¹¹ Ibid, 2

¹² Teddy Machmud, *Bukti dan Pembuktian dalam Pengajaran Matematika di Sekolah Menengah*, (Gorontalo : FMIPA Universitas Negeri Gorontalo), 184

Dalam kaitannya tentang bukti dan argumentasi, Toulmin telah menemukan bentuk keterkaitan antara keduanya yang digambarkan dalam sebuah bagan yang disebut dengan model pembuktian Toulmin. Model ini digunakan untuk membandingkan dan menganalisis struktur argumentasi dan struktur bukti dari sudut pandang kognitif.¹³ Model ini telah juga digunakan untuk membandingkan dan menganalisa isi dari argumentasi dan isi bukti dari sudut pandang kognitif. Model ini dikenal dengan *Toulmin Argument Pattern* (TAP).



Gambar. 1.1 Skema komponen utama TAP (diadaptasi dari Toulmin)¹⁴

Model dasar Toulmin terdiri dari tiga unsur : C (*claim*/klaim) berupa pernyataan pembicara, D (*data*/data) berupa data yang membenarkan klaim (C), W (*warrant*/perintah) berupa aturan inferensi, yang memungkinkan data (D) terhubung pada klaim (C) dan B (*backing*/dukungan). Kerja dari komponen itu dapat dijelaskan secara ringkas seperti berikut.

¹³ Artikel dalam internet :Pedemonte,B.. *How can the relationship between argumentation and proof be analysed?*, (Jurnal Springer Science + Business Media B.V, 2007) dapat diakses di <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-006-9057-x> diakses pada 24 Mei 2013

¹⁴ Kusnandi dan Utari Sumarno, *Pembelajaran matematika dengan strategi abduktif-deduktif untuk menumbuhkembangkan kemampuan Membuktikan pada mahasiswa* (Bandung : Universitas Pendidikan Indonesia, 2008), 9

langkah awal dalam konstruksi pembuktian menyatakan suatu gagasan mengenai sebuah pernyataan atau pendapat, yang dalam terminologi Tolmin disebut dengan klaim (C). Kemudian penggalian data (D) untuk mendukung klaim. Untuk mengaitkan antara C dan D terdapat aturan/*warrant* (W) yang berfungsi melakukan pembenaran terhadap data sehingga dapat dipahami untuk menunjukkan kaitan keduanya (C dan D). Jika terdapat aturan (W) yang belum diketahui maka dapat dicari aturan-aturan lain yang berkaitan atau biasa disebut dengan aturan dukungan.

Diagram skematik ini dapat digunakan untuk membaca suatu pernyataan matematika dan dengan sedikit modifikasi dapat digunakan untuk mengkonstruksi pembuktian matematika. Yang dimaksud dengan membaca di sini adalah serangkaian keterampilan untuk menyusun intisari informasi dari suatu teks. Sumarmo beranggapan bahwa seorang pembaca dikatakan memahami teks apabila ia dapat mengemukakan gagasan matematika dari suatu teks baik dalam bentuk lisan maupun tulisan dengan bahasanya sendiri.¹⁵ Dengan demikian, seorang pembaca tidak hanya sekedar melafalkan teks, melainkan mengemukakan makna yang terkandung di dalam teks yang bersangkutan.

Dalam hubungannya dengan membaca pembuktian dari suatu pernyataan matematika, pernyataan itu akan dinyatakan dalam bentuk “jika p maka q ”. Dimana p adalah D (*data*) dan q adalah C (*claim*). Seorang siswa dikatakan dapat

¹⁵ Kusnandi dan Utari Sumarno, *Pembelajaran matematika dengan strategi abduktif-deduktif untuk menumbuhkembangkan kemampuan Membuktikan pada mahasiswa* (Bandung : Universitas Pendidikan Indonesia, 2008), 10

membaca pembuktian suatu pernyataan matematika bentuk “jika p maka q ” apabila dapat mengidentifikasi apa yang menjadi data dari pernyataan itu; dapat mengidentifikasi apa yang menjadi *claim* dari pernyataan itu; dapat menyatakan keterkaitan di antara data, dan antara data dengan konklusi dengan menunjukkan suatu *warrant*.

Kesimpulan pada alur pembuktian sebagai *claim* perantara yang dilakukan di atas menggunakan penarikan kesimpulan secara deduktif. Argumentasi dengan cara seperti ini dinamakan *argumentasi deduktif*. Akan tetapi, sering ditemui bahwa antara *warrant* yang menjamin untuk menghasilkan suatu konklusi dari data yang ada belum terpikirkan. Salah satu cara untuk memunculkan gagasan ke arah *claim* perantara adalah dengan cara abduktif. Abduksi adalah suatu penarikan kesimpulan yang dimulai dari fakta yang diamati berupa *claim*, dan suatu aturan yang diberikan, membawa pada suatu kondisi yang harus dimiliki. Langkah abduktif dapat disajikan dengan cara sebagai berikut:

Q

$P \rightarrow Q$

\therefore Premis yang lebih memungkinkan adalah P

di mana Q sebagai fakta yang diamati (sebagai *claim*), $P \rightarrow Q$ sebagai aturan/*warrant*. Argumentasi dengan cara seperti ini dinamakan *argumentasi abduktif*.¹⁶

Di sekolah menengah pembuktian matematika banyak dijumpai pada materi logika dan geometri. Keduanya terasa kurang menarik karena banyak sekali hal abstrak sebagai bahan pembelajaran. Pekerjaan memahami bukti bukanlah sesuatu yang menarik karena lebih banyak bergelut dengan simbol dan pernyataan logika daripada berhadapan dengan angka-angka yang biasanya dianggap sebagai karakter matematika.¹⁷ Kenyataan inilah yang menjadikan salah satu alasan orang malas untuk memahami bukti dalam matematika. Alasan lainnya adalah pekerjaan membuktikan lebih sulit dan tidak penting.

Pembelajaran mengenai bukti geometri telah banyak dibahas dalam berbagai makalah ilmiah. Namun yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah struktur pembuktian dan struktur argumentasi dalam memahami bukti geometri. Lebih spesifiknya yakni struktur proses konjektur untuk konstruksi bukti dan bukti sebagai produk.

Berdasarkan uraian di atas, penulis bermaksud untuk meneliti tentang struktur bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti matematika siswa di sekolah menengah atas. Oleh karena itu, penelitian ini berjudul "*Analisis Struktur Argumentasi dan Kemampuan Mengkonstruksi Bukti Matematika Siswa Sekolah Menengah*".

¹⁶ Ibid, 11

¹⁷ Julan Hernadi, *Metoda Pembuktian Dalam Matematika*, (Jurnal Prodi Pendidikan Matematika FKIP UNSRI, 2008), 2

B. Pertanyaan Penelitian

Berdasarkan uraian dalam yang telah dipaparkan dalam latar belakang, maka rumusan masalah penelitian ini adalah :

- a. Bagaimana struktur argumentasi matematika siswa sekolah menengah pada materi geometri?
- b. Bagaimana kemampuan mengkonstruksi bukti matematika siswa sekolah menengah pada materi geometri?

C. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah :

- a. Mendeskripsikan struktur argumentasi matematika siswa sekolah menengah pada materi geometri.
- b. Mengetahui kemampuan mengkonstruksi bukti matematika siswa sekolah menengah pada materi geometri.

D. Manfaat Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan tujuan penelitian di atas, maka diharapkan hasil penelitian ini dapat bermanfaat sebagai berikut:

- a. Bagi Guru

Sebagai informasi mengenai struktur argumentasi dan kemampuan mengkonstruksi bukti siswa sekolah menengah yang dapat dijadikan bahan pertimbangan dalam pengajaran pembuktian matematika.

- b. Bagi Siswa

Melatih kemampuan berpikir logis (*logically thinking*) di SMA. Melalui kegiatan membuktikan masalah matematika, siswa juga mendapat

pengetahuan tentang penulisan struktur pembuktian sesuai dengan kaidah inferensi.

E. Definisi Operasional

a. Struktur Argumentasi Matematika

Struktur argumentasi matematika merupakan susunan/kerangka koneksi kognitif logis antara pernyataan-pernyataan matematika.

b. Kemampuan Mengkonstruksi Bukti Matematika

Kemampuan mengkonstruksi bukti adalah kemampuan menyusun suatu bukti pernyataan matematik berdasarkan definisi, prinsip, dan teorema serta menuliskannya dalam bentuk pembuktian lengkap.

F. Batasan Masalah

Untuk menjaga fokus penelitian ini, maka dirasa perlu membatasi masalah penelitian. Batasannya adalah sebagai berikut:

- a. Penelitian ini hanya membahas mengenai bukti dan argumentasi matematika pada materi geometri.
- b. Penelitian ini dilakukan pada level siswa Sekolah Menengah Atas (SMA) kelas X.

G. Sistematika Pembahasan

Untuk lebih memudahkan pembahasan pada judul skripsi ini, penulis mengatur secara sistematis untuk menghindari kerancuan pembahasan, maka penulis membuat sistematika pembahasan sebagai berikut:

- Bab I : Pendahuluan, merupakan bagian awal dari penulisan yang meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, definisi operasional, batasan masalah, dan sistematika pembahasan.
- Bab II : Kajian teori, merupakan bagian kedua dari penulisan skripsi yang meliputi: (1) pembahasan mengenai struktur argumentasi matematika, (2) pembahasan mengenai bukti matematika, (3) Kemampuan mengkonstruksi bukti matematika.
- Bab III : Metode penelitian, merupakan bagian ketiga dari penulisan skripsi yang meliputi: pendekatan dan jenis penelitian, lokasi penelitian, desain penelitian, sumber data, perangkat pembelajaran, metode pengumpulan data, instrumen pengumpulan data, dan analisis data.
- Bab IV : Deskripsi dan analisis data yang meliputi: (1) Data bukti matematika siswa sekolah menengah; (2) Data struktur argumentasi matematika siswa sekolah menengah.

- Bab V : Pembahasan dan hasil penelitian yang meliputi :
pembahasan hasil penelitian, diskusi hasil penelitian dan
kelemahan penelitian.
- Bab VI : Penutup yang meliputi: simpulan dan saran.