

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

A. Hakikat Matematika

Banyak sekali para ahli matematika berpendapat tentang hakikat matematika, karena banyaknya sudut pandang yang digunakan untuk mendefinisikan hakikat matematika atau dengan kata lain tidak terdapat satu definisi tentang matematika yang tunggal dan disepakati oleh semua tokoh atau pakar matematika. Di bawah ini ada beberapa definisi tentang matematika:⁸

1. Matematika adalah cabang ilmu pengetahuan eksak dan terorganisir secara sistematis.
2. Matematika adalah pengetahuan tentang bilangan dan kalkulasi.
3. Matematika adalah pengetahuan tentang penalaran logika dan berhubungan dengan bilangan.
4. Matematika adalah pengetahuan tentang fakta- fakta kuantitatif dan masalah tentang ruang dan bentuk.
5. Matematika adalah pengetahuan tentang struktur- struktur yang logis.
6. Matematika adalah pengetahuan tentang aturan aturan yang ketat.

⁸ Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia* (Jakarta Departemen pendidikan dan Kebudayaan. Direktorat Jendral Pendidikan Tinggi, 1998),hal 7-8.

Dari definisi- definisi di atas menunjukkan bahwa matematika merupakan ilmu pengetahuan yang kompleks dan berkembang sehingga terlalu sulit untuk dapat dikuasai seluruhnya oleh seorang pakar. Perlu adanya ketentuan khusus dalam memahami matematika secara mendalam.

B. Objek Matematika

Menurut Bell⁹, objek kajian matematika yang bersifat abstrak terbagi menjadi dua yaitu objek langsung dan objek tidak langsung. Objek tidak langsung adalah hal- hal yang mempengaruhi hasil belajar, misalnya kemampuan memecahkan masalah dan kemampuan mentransfer pengetahuan. Sedangkan objek langsung dikelompokkan menjadi empat kategori yaitu: fakta, keterampilan, konsep dan prinsip.

1. Fakta dalam matematika adalah suatu kesepakatan yang disajikan atau yang di ungkapkan dengan simbol tertentu. Misal simbol “ ° “, secara umum sudah dipahami bahwa symbol tersebut sebagai “ derajat (satuan ukuran sudut)”.
2. Konsep adalah ide abstrak yang dapat digunakan untuk menggolongkan atau mengklasifikasikan sekumpulan objek, apakah objek tertentu merupakan contoh konsep atau bukan. Misal “konsep sudut “.

⁹ Muhammad Fathur Rozi, *proses Berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah- masalah teorema phytagoras pada siswa kelas II SMP Negeri 1 Krian Sidoarjo*,(Skripsi,IAIN Sunan Ampel Surabaya), hal 6.

3. Operasi adalah pengerjaan hitung, pengerjaan aljabar dan pengerjaan matematika yang lain. Pada dasarnya operasi dalam matematika adalah suatu fungsi yaitu relasi khusus, karena operasi adalah aturan untuk memperoleh elemen tunggal dari satu atau lebih elemen yang diketahui. Contoh operasi dalam pengerjaan hitung adalah “penjumlahan”, “pengurangan”, “perkalian” dan “pembagian”.
4. Prinsip adalah objek matematika yang lebih kompleks. Prinsip menyatakan keterkaitan antara dua atau lebih objek matematika. Objek yang dihubungkan itu bisa berupa fakta, operasi, konsep atau prinsip. Prinsip dapat berupa “aksioma”, ”teorema”, “sifat” dan sebagainya.

C. Teori Perkembangan Kognitif

1. Teori Vygotsky

Teori Vygotsky didasarkan pada dua ide kunci.¹⁰ Pertama, ia mengemukakan bahwa perkembangan intelektual dapat dipahami hanya bila ditinjau dari konteks historis dan budaya pengalaman anak. Kedua, ia yakin bahwa perkembangan bergantung kepada sistem- sistem isyarat, dengan sistem isyarat itulah individu- individu tumbuh. Sistem – sistem isyarat mengacu kepada simbol- simbol yang diciptakan oleh budaya untuk membantu orang berpikir, berkomunikasi dan memecahkan masalah, misal bahasa budaya,

¹⁰ Prof.Dr.Mohammad Nur,Teori- teori Perkembangan,(Surabaya:Institut Keguruan dan ilmu Pendidikan 1998),hal 44

sistem penulisan atau sistem perhitungan. Vygotsky juga mengemukakan teori bahwa perkembangan kognitif sangat erat berkaitan dengan masukan dari orang lain. Teori Vygotsky menyatakan bahwa pembelajaran mendahului perkembangan. Perkembangan termasuk internalisasi atau penyerapan isyarat-isyarat ini sehingga anak dapat berpikir dan memecahkan masalah tanpa bantuan orang lain atau yang disebut pengaturan diri atau *self regulation*.¹¹

Langkah pertama dalam pengembangan pengaturan diri dan pemikiran mandiri adalah mempelajari bahwa segala sesuatu memiliki makna. Langkah kedua dalam pengembangan struktur- struktur internal dan pengaturan diri termasuk latihan. Langkah terakhir termasuk penggunaan isyarat dan memecahkan masalah- masalah tanpa bantuan orang lain.

Suatu mekanisme yang ditekankan Vygotsky untuk mengalihkan pengetahuan milik bersama menjadi pengetahuan pribadi adalah bercakap cakap sendiri atau bergumam. Percakapan anak pada diri sendiri yang memandu pemikiran dan tindakan mereka. Akhirnya percakapan verbal ini dilakukan sebagai percakapan di dalam hati. Teori Vygotsky secara tidak langsung menyatakan bahwa perkembangan kognitif dan kemampuan untuk menggunakan pikiran untuk mengendalikan tindakan- tindakan diri sendiri pertama- tama mensyaratkan suatu penuntasan sistem- sistem komunikasi budaya dan kemudian belajar menggunakan sistem - sistem ini untuk menyesuaikan proses- proses berpikir diri sendiri. Paling penting dari teori

¹¹ Ibid,hal 45

Vygotsky adalah penekanan pada hakikat sosiokultural dan pembelajaran, bahwa belajar terjadi pada saat anak- anak sedang bekerja di dalam zona perkembangan terdekat mereka (*zone of proximal development*). Tugas – tugas di dalam zona perkembangan terdekat adalah tugas – tugas yang seseorang anak tidak melakukannya sendiri namun dapat melakukannya dengan bantuan teman sebaya atau orang dewasa yang lebih kompeten. Vygotsky menjelaskan bahwa pemfungsian mental lebih tinggi umumnya terjadi dalam percakapan dan kolaborasi antara individu sebelum fungsi mental lebih tinggi itu ada di dalam individu itu.

Anak dalam belajar serta apabila anak tersebut dihadapkan pada suatu masalah memerlukan dukungan dari orang yang lebih pengalaman atau yang disebut pencacahan (*scaffolding*). Dukungan yang diberikan kepada anak dapat berupa petunjuk, peringatan, dorongan, memerinci masalah ke dalam langkah- langkah, pemberian contoh atau tindakan lain yang memungkinkan siswa tumbuh mandiri sebagai pelajar. Dukungan yang diberikan kepada anak selama bertahap pada awal pembelajarannya dan kemudian mengurangi bantuan dan memberikan kesempatan kepada anak itu mengambil tanggung jawab yang semakin besar segera setelah ia mampu melakukan sendiri.¹²

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa anak atau siswa dalam belajar apabila dihadapkan ke dalam suatu masalah memerlukan dukungan dari

¹² Prof.Dr.Mohammad Nur,Teori- teori Perkembangan,(Surabaya:Institut Keguruan dan ilmu Pendidikan 1998),hal 48.

orang lain yang lebih berpengalaman. Misal memberikan petunjuk atau isyarat yang diperlukan dalam pemecahan masalah ataupun bisa juga dengan memberikan dukungan. Dukungan yang diberikan sedikit demi sedikit bisa dikurangi untuk menumbuhkan rasa tanggung jawab terhadap anak.

2. Teori Piaget

Menurut teori Piaget tentang perkembangan kognitif dapat dipahami dari sudut mengapa dan bagaimana kemampuan- kemampuan mental yang berubah dari waktu ke waktu. Piaget, menjelaskan bahwa perkembangan kognitif anak sebagian besar ditentukan oleh manipulasi dan interaksi aktif anak dengan lingkungan. Piaget memandang perkembangan intelektual anak atau kemampuan kognitif terjadi melalui empat tahap yang berbeda, yaitu tahap sensorimotor, tahap praoperasi, tahap operasi kongkrit dan tahap operasi formal. Berikut adalah penjelasan dari berbagai tahapan perkembangan anak yang dikemukakan oleh Piaget.¹³

a. Tahap sensorimotor

Piaget mengatakan bahwa tahap sensorimotor ini terjadi pada bayi yang baru lahir pada usia 2 tahun. Pada awalnya, seluruh bayi memiliki perilaku yang dibawa sejak lahir yang disebut refleks. Bayi segera belajar dengan menggunakan refleks ini untuk menghasilkan pola perilaku yang lebih menarik dan lebih disengaja. Ini terjadi melalui pembelajaran secara kebetulan dan kemudian melalui pembelajaran *trial and error*, (proses

¹³ Ibid,hal 15

belajar yang ditandai oleh berbagai uji coba terhadap suatu situasi, sampai berhasil dan mencapai tujuan). Pada akhir tahap sensorimotor, anak-anak telah maju dari pendekatan yang lebih terencana. Untuk pertama kalinya mereka secara mental dapat menggambarkan obyek-obyek dan kejadian-kejadian, yaitu apa yang disebut dari sebagian besar dari diri manusia sebagai “berpikir” sekarang muncul. Dalam hal ini berarti bahwa anak itu dapat berpikir dan merencanakan perilaku.

Tanda lain dari periode sensorimotor yang dikemukakan oleh Piaget adalah perkembangan permanen objek. Piaget mengemukakan bahwa anak harus belajar bahwa objek-objek itu tidak tampak secara fisik oleh anak-anak tersebut. Saat mendekati usia 2 tahun, anak-anak memahami bahwa objek-objek itu ada meskipun apabila objek tersebut tidak dapat dilihat. Sekali mereka menyadari bahwa benda-benda itu ada meskipun tidak tampak, mereka mulai dapat menggunakan simbol-simbol untuk menggambarkan benda-benda itu di dalam benak mereka sehingga mereka dapat berpikir tentang benda-benda itu.

b. Tahap Praoperasi

Tahap praoperasi ini terjadi pada anak usia 2 sampai 7 tahun. Menurut Piaget anak-anak prasekolah memiliki kemampuan lebih besar untuk berpikir tentang benda-benda dan dapat menggunakan simbol-simbol untuk menggambarkan obyek-obyek secara mental. Selama tahap praoperasi tersebut, bahasa dan konsep anak berkembang dengan suatu

kecepatan yang luar biasa. Anak memiliki kekurangan dalam penguasaan prinsip konservasi, yaitu konsep bahwa sifat- sifat tertentu dari suatu objek. Beberapa aspek pemikiran praoperasi membantu menjelaskan kekeliruan pada tugas- tugas konservasi. Salah satu karakteristik adalah sentrasi, yaitu menaruh perhatian hanya kepada satu aspek dari suatu objek atau suatu situasi.

Pemikiran anak- anak prasekolah juga dapat bercirikan sebagai tak dapat-balik (*irreversible*). Piaget menyatakan bahwa reversibilitas merupakan aspek sangat penting dari berpikir, reversibilitas berarti kemampuan seseorang mengubah arah berpikir sehingga orang itu dapat kembali ke titik awal. Karakteristik lain dari pemikiran anak praoperasi adalah memusatkan pada keadaan- keadaan statis yang teramati. Tidak seperti orang dewasa, anak prasekolah membentuk konsep yang berubah-ubah definisinya dari satu situasi ke situasi yang lain dan tidak selalu logis. Jenis pemikiran praoperasi yang terakhir adalah egosentris, di mana dalam tahap ini anak yakin setiap orang melihat dunia tepat sama seperti yang mereka lihat, namun jenis pemikiran egosentris semakin lama semakin hilang bersamaan dengan berjalannya waktu.

c. Tahap operasi kongkrit

Tahap operasi kongkrit ini terjadi pada usia 7 sampai 11 tahun. Anak pada tahap operasi kongkrit masih belum berpikir seperti orang dewasa. Piaget menjelaskan bahwa tahap operasi kongkrit adalah tahap

saat anak- anak mengembangkan keterampilan- keterampilan penalaran logis dan konservasi namun dapat menggunakan keterampilan- keterampilan hanya saat berhadapan dengan situasi yang dikenal. Kemampuan kognitif anak mengalami perubahan yang luar biasa, anak tidak lagi mengalami kesulitan dengan masalah- masalah konservasi karena mereka telah menguasai konsep reversibilitas. Anak pada tahap operasi kongkrit mampu untuk merespon pada realitas yang disimpulkan dari data hasil pengamatan. Satu tugas penting yang harus dipelajari oleh anak- anak selama tahap operasi kongkrit adalah seriasi, yaitu menyusun obyek- obyek dalam tatanan berurutan menurut satu aspek, misalnya ukuran, berat, atau volume. Setelah anak- anak mampu menguasai seriasi, anak akan langsung menuju tahap yang lebih lanjut yaitu transitivitas, yaitu suatu keterampilan yang dipelajari selama tahap perkembangan kognitif operasi kongkrit di mana individu dapat secara mental menyusun dan membandingkan obyek - obyek. Kemampuan akhir yang dicapai anak selama tahap operasi kongkrit adalah inklusi kelas, yaitu suatu keterampilan yang dipelajari selama tahap perkembangan kognitif operasi kongkrit di mana individu dapat berpikir secara serentak tentang keseluruhan kelas objek dan hubungan antara kelas- kelas subordinatnya.

d. Tahap operasi formal

Tahap operasi formal terjadi pada usia 11 sampai dewasa. Anak pada usia praremaja mulai dapat berpikir secara abstrak dan melihat

kemungkinan- kemungkinan melampaui yang ada sekarang ini. Kemampuan ini terus berkembang sampai masa dewasa. Menurut Piaget, kondisi lain yang terjadi pada remaja muda adalah kemampuan menalar situasi- situasi dan kondisi- kondisi yang belum dialami. Remaja dapat menerima atas dasar argumentasi dan diskusi, kondisi- kondisi yang berubah rubah yang tidak diketahui keberadaannya atau malah yang diketahui bertentangan dengan fakta. Remaja tidak terikat dengan pengalaman- pengalaman nyata mereka sendiri, sehingga mereka dapat menerapkan logika pada setiap himpunan kondisi tertentu.

Menurut Piaget tahap operasi formal menandai akhir dari perkembangan kognitif. Piaget juga menambahkan bahwa fondasi yang telah diletakkan dan tidak ada struktur baru yang perlu dikembangkan, apa yang diperlukan tinggal menambahkan pengetahuan dan pengembangan skema- skema yang lebih kompleks.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa anak dalam perkembangan kognitifnya, melalui empat tahap yang berbeda. Dalam perkembangan kognitif anak berkembang sesuai dengan usia yang dilalui oleh setiap anak, dan interaksi aktif anak dengan lingkungan.

Belajar matematika melibatkan kegiatan mental yang tinggi karena matematika berkenaan dengan ide – ide abstrak yang dinyatakan dengan simbol-simbol yang tersusun secara hierarki serta penalarannya deduktif. Karena itu belajar matematika akan menyangkut struktur mental.

Di dalam penelitian ini struktur mental yang diteliti adalah proses berpikir yang dilakukan subjek dalam menyelesaikan soal – soal pembuktian trigonometri. Subjek pada penelitian ini adalah siswa kelas XII yang berada pada taraf umur 11 ke atas sehingga sudah berada pada tahap operasi kongkrit menurut Piaget, yaitu anak dapat membentuk konsep, melihat hubungan dan menyelesaikan suatu masalah.

D. Proses Berpikir Siswa Terhadap Materi Ajar

Dalam menyelesaikan suatu masalah, setiap orang pasti mengambil keputusan untuk memproses informasi yang didapat. Proses pengolahan informasi tersebut berkaitan dengan proses berpikir seseorang. Dalam hal ini peneliti mengemukakan beberapa definisi berpikir dan proses berpikir.

Jhon Chaffe¹⁴ mendefinisikan berpikir adalah aktivitas yang bertujuan tertentu serta proses pengorganisasian yang digunakan untuk menguasai dunia. Sedangkan menurut Jhon Dewey¹⁵ mengatakan bahwa sekolah adalah tempat mengajarkan anak bahwa berpikir adalah merupakan segala aktivitas mental dalam usaha memecahkan masalah, membuat keputusan, memaknai sesuatu, pencarian jawaban dalam mendapatkan suatu makna.

¹⁴ (<http://www.sman1teladan-yog.sch.id>).diakses tanggal 5 Juli 2011

¹⁵ (<http://www.sman1teladan-yog.sch.id>).diakses tanggal 5 Juli 2011

Kamus Besar Bahasa Indonesia¹⁶ mendefinisikan berpikir adalah menggunakan akal budi untuk mempertimbangkan dan memutuskan sesuatu, atau berpikir juga bisa didefinisikan sebagai menimbang-nimbang ingatan.

Di bawah ini mengenai berpikir menurut pendapat para ahli sebagai berikut :¹⁷

1. Plato berpendapat bahwa berpikir adalah aktivitas ideasional. Berdasarkan pendapat ini dikemukakan dua kenyataan yaitu :
 - a. Berpikir itu adalah aktivitas, jadi subjek yang berpikir aktif
 - b. Aktifitas yang dimaksud di atas bersifat ideasional, jadi bukan sensoris maupun motoris, walaupun data disertai oleh kedua hal itu;berpikir itu mempergunakan abstraksi – abstraksi atau “ideas”.
2. Bigot berpendapat bahwa berpikir adalah meletakkan hubungan antara bagian – bagian pengetahuan seseorang. Bagian – bagian pengetahuan tersebut merupakan segala sesuatu yang telah dimiliki orang yang bersangkutan, berupa pengertian-pengertian dan dalam batas tertentu juga tanggapan – tanggapan.
3. Selz berpendapat bahwa berpikir adalah aktivitas yang abstrak dengan arah yang ditentukan oleh soal yang harus dipecahkan.

¹⁶ Departemen Pendidikan dan Kebudayaan. *Kamus Besar Bahasa Indonesia*. (Jakarta: Balai Pustaka 1995), hal 53

¹⁷ Sumadi Suryabrata, *Psikologi Pendidikan* (Jakarta :Raja Grafindo Persada 2002),hal 54.

Berdasarkan penjelasan- penjelasan tentang definisi berpikir dan beberapa pendapat di atas, maka definisi berpikir dalam penelitian ini adalah suatu aktivitas yang menggunakan akal budi untuk mempertimbangkan, memecahkan masalah, memutuskan, memaknai sesuatu dan pencarian jawaban dalam mendapatkan suatu makna.

Dalam suatu media elektronik menjelaskan tentang definisi dari proses berpikir sebagai berikut. “ *The Thinking Process is an intriguing collection of logic-based tool that promise to help people diagnose problem, find solution, and draw up successful implementation plans. It is quit general and can be applied to many kinds of problems from the shop floor to the executive suite.*”¹⁸

Maksud dari kalimat tersebut adalah proses berpikir merupakan suatu hal yang membangkitkan minat dalam mengumpulkan bahan-bahan mulai dari pemikiran dasar yang bahwasanya mampu untuk membantu masyarakat dalam mendiagnosis masalah, menemukan solusi dan menggambarkan keberhasilan dari suatu rencana pelaksanaan. Ini merupakan suatu hal yang umum dan bisa diaplikasikan pada berbagai macam persoalan mulai dari tingkat dasar hingga pada tingkat yang lebih rumit.

¹⁸ ([http:// www.saigon.com](http://www.saigon.com)). diakses tanggal 5 Juli 2011

Menurut Marpaung¹⁹ menyatakan bahwa proses berpikir adalah proses yang terdiri atas penerimaan informasi (dari luar atau dari dalam diri siswa), pengolahan, penyimpulan dan pemanggilan kembali informasi itu dari ingatan siswa.

Berdasarkan penjelasan-penjelasan tentang definisi proses berpikir dari berbagai sumber, maka proses berpikir dalam penelitian ini adalah penerimaan informasi yang kemudian dari informasi tersebut diolah untuk dicari kesimpulannya dan kesimpulan tersebut bisa dipanggil kembali dari informasi yang telah didapat tadi bila diperlukan.

Menurut Marpaung²⁰ proses berpikir itu dibedakan menjadi dua proses, yaitu proses berpikir konseptual dan proses berpikir sekuensial. Proses berpikir konseptual adalah cara berpikir yang mementingkan pengertian atau konsep- konsep dan hubungan diantara mereka dan penggunaannya dalam pemecahan masalah. Suatu masalah tidak dipandang terlepas dari masalah lain. Masalah- masalah lebih banyak diolah secara mental didalam pikiran daripada dalam tindakan. Menurut Kaune²¹ ciri- ciri berpikir konseptual adalah sebagai berikut:

¹⁹ Ahmad Hatip, *Proses Berpikir siswa SMP dalam menyelesaikan soal- soal faktorisasi suku aljabar ditinjau dari perbedaan kemampuan matematika dan perbedaan gender*, (Tesis:Unesa 2008), hal 9.

²⁰ Muhammad Fathur Rozi, *proses Berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah- masalah teorema pythagoras pada siswa kelas II SMP Negeri 1 Krian Sidoarjo*, (Skripsi, IAIN Sunan Ampel Surabaya), hal 12.

²¹ Kharisma Eka Maulana, *Proses berpikir siswa dalam menyelesaikan soal cerita di SMU kelas X*, (Skripsi:Unesa 2008), hal 31.

- a. Pada awal proses penyelesaian, yaitu sesudah mereka membaca soal siswa mencoba merumuskan kembali soal itu dalam bentuk yang lebih sederhana dengan menggunakan kalimat matematika.
- b. Siswa mencoba memecah soal itu atas bagian- bagian, lalu mencari hubungan diantara bagian- bagian itu atau antara suatu bagian dengan konsep atau soal lain yang sudah pernah dikerjakan.
- c. Siswa cenderung untuk memulai pelaksanaan pemecahan soal kalau sudah mendapat ide yang jadi dan jelas. Jika penyelesaian sementara salah, maka soal kembali diuraikan atas struktur- struktur yang lebih sederhana
- d. Komentar terhadap pengulangan menggunakan bahasa yang menunjukkan adanya pengertian antara lain “.... dan proses situ diulangi sampai....”.

Proses berpikir sekuensial cenderung langsung menyelesaikan masalah tanpa banyak memberi perhatian terhadap hubungan konsep- konsep dan dimulai dengan ide yang belum jelas. Penyelesaian masalah yang dilakukan dengan cara sekuensial dengan berorientasi pada tujuan, mencari sepotong penyelesaian antara yang menjadi dasar tindakan selanjutnya untuk mencapai hasil akhir. Strategi yang digunakan antara lain:

- a. Berorientasi pada tindakan.
- b. Ingin memulai langkah penyelesaian walaupun ide yang jelas belum diperoleh.

- c. Cenderung menyelesaikan soal secara lepas, artinya terlepas dari hubungannya dengan konsep atau bagian lain dari masalah yang sudah dikenalnya.
- d. Pada fase tertentu dari proses pemecahan soal hasil antara dibandingkan dengan tujuan. Bila dengan hasil itu tidak puas, maka dia kembali pada hasila antara sebelumnya dan dari sana menyusun rencana baru.
- e. Pengetahuan disimpan tidak dalam struktur yang jelas.

Berpedoman pada deskripsi yang dikemukakan sebelumnya, (khususnya yang dikemukakan Marpaung), Zuhri²² mengelompokkan proses berpikir siswa atas tiga jenis yakni :

1) Proses Berpikir Konseptual

Proses berpikir konseptual adalah proses berpikir yang selalu memecahkan suatu masalah menggunakan konsep yang telah dia miliki berdasarkan hasil penilaiannya selama ini. Ciri- cirinya adalah:

a. Memahami soal

Dalam hal ini siswa mampu mengungkapkan dengan kata- kata apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan dalam soal.

b. Menyusun rencana penyelesaian

c. Melaksanakan rencana penyelesaian

²² Zuhri D, *Proses berpikir siswa kelas II SMPN 16 Pekan Baru Dalam Menyelesaikan Soal- soal perbandingan Senilai dan Perbandingan berbalik Nilai*, (Tesis, Unesa: 1998), hal 31.

Dalam melaksanakan rencana penyelesaian, siswa memulai pelaksanaan setelah mendapat ide yang jelas, dengan kata lain setiap langkah yang dibuatnya dapat dijelaskan dengan benar. siswa dalam hal ini cenderung menyelesaikan soal dengan menggunakan konsep- konsep yang telah dipelajarinya. Jika terjadi kesalahan dalam penyelesaian soal maka proses penyelesaian kembali diulang sehingga diperoleh hasil yang benar.

2) Proses berpikir semi konseptual

Proses berpikir semi konseptual adalah proses berpikir yang cenderung menyelesaikan suatu masalah dengan menggunakan konsep tersebut belum sepenuhnya lengkap maka penyelesaian yang menggunakan intuisi. Ciri- cirinya adalah :

a. Memahami soal

Dalam hal ini siswa mampu mengungkapkan dengan kata- kata apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan dalam soal.

b. Menyusun rencana penyelesaian

c. Melaksanakan rencana penyelesaian

Dalam melaksanakan rencana penyelesaian, siswa cenderung menyelesaikan soal dengan menggunakan konsep- konsep tetapi sering gagal karena konsep itu belum dipahami dengan baik.

3) Proses berpikir komputasional

Proses berpikir komputasional adalah proses berpikir yang pada umumnya menyelesaikan suatu masalah tidak menggunakan konsep tetapi lebih mengandalkan intuisi, akibatnya siswa sering melakukan kesalahan dalam menyelesaikan masalah. Ciri- cirinya adalah:

a. Memahami soal

Siswa tidak memahami soal

b. Menyusun rencana penyelesaian

c. Melaksanakan rencana penyelesaian

Dalam melaksanakan rencana penyelesaian, siswa cenderung memulai langkah penyelesaian walaupun ide yang jelas belum diperoleh, dengan kata lain setiap langkah yang dibuatnya tidak dapat dijelaskan dengan benar. Serta cenderung menyelesaikan soal terlepas dari konsep- konsep yang telah dimiliki. Jika terjadi kesalahan penyelesaian, maka kesalahannya tidak dapat diperbaiki dengan betul.

Berpedoman berdasarkan ciri-ciri yang dikemukakan Zuhri, Berikut akan diuraikan indikator ketiga proses berpikir yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1) Proses berpikir konseptual

i. Mampu memahami soal

- a. Siswa mampu memahami soal ditanyakan dengan baik (K1.11)
 - b. Siswa mampu menjelaskan konsep- konsep trigonometri yang ada pada soal (K1.12)
 - ii. Merencanakan Penyelesaian
 - a. Siswa mampu mengkaitkan konsep yang pernah diterima sebelumnya (K1.21)
 - b. Siswa mampu menjelaskan langkah- langkah yang ditempuh untuk menyelesaikan soal (K1.22)
 - iii. Melaksanakan perencanaan
 - a. Siswa memulai penyelesaian setelah mendapat ide yang jelas (K1.31)
 - b. Siswa menyelesaikan soal dengan menggunakan konsep- konsep yang telah dipelajari (K1.32)
- 2) Proses berpikir semi konseptual
- i. Memahami Soal
 - a. Siswa mampu memahami soal yang ditanyakan dengan baik (K2.11)
 - b. Siswa tidak sepenuhnya mampu menjelaskan konsep- konsep trigonometri yang ada pada soal (K2.12)
 - ii. Merencanakan Penyelesaian
 - a. Siswa tidak sepenuhnya mampu mengkaitkan konsep yang pernah diterima sebelumnya (K2.21)

- b. Siswa tidak sepenuhnya mampu menjelaskan langkah- langkah yang ditempuh untuk menyelesaikan soal (K2.22)
 - iii. Melaksanakan perencanaan
 - a. Siswa memulai penyelesaian setelah mendapat ide yang jelas (K2.31)
 - b. Siswa menyelesaikan soal dengan menggunakan konsep- konsep yang telah dipelajari (K2.32)
- 3) Proses berpikir komputasional
 - i. Memahami Soal
 - a. Siswa tidak mampu memahami soal yang ditanyakan dengan baik (K3.11)
 - b. Siswa tidak mampu menjelaskan konsep- konsep trigonometri yang ada pada soal (K3.12)
 - ii. Merencanakan Penyelesaian
 - a. Siswa tidak mampu mengkaitkan konsep yang pernah diterima sebelumnya (K3.21)
 - b. Siswa tidak mampu menjelaskan langkah- langkah yang ditempuh untuk menyelesaikan soal (K3.22)
 - iii. Melaksanakan perencanaan
 - a. Siswa memulai penyelesaian belum mendapat ide yang jelas (K3.31)

- b. Siswa menyelesaikan soal tidak menggunakan konsep- konsep yang telah dipelajari (K3.32)

Adapun contoh dari masing- masing ciri- ciri proses berpikir di atas, apabila siswa mengerjakan dengan bentuk jawaban sebagai berikut:

Contoh : Buktikan $\cos (240^\circ + \beta) - \sin (210^\circ - \beta) = 0$

Konseptual

$$\begin{aligned} & \cos (240^\circ + \beta) - \sin (210^\circ - \beta) \\ &= (\cos 240^\circ \cos \beta - \sin 240^\circ \sin \beta) - (\sin 210^\circ \cos \beta - \cos 210^\circ \sin \beta) \\ &= \cos (180^\circ + 60^\circ) \cos \beta - \sin (180^\circ + 60^\circ) \sin \beta - [\sin (180^\circ - 30^\circ) \cos \beta - \cos (180^\circ - 60^\circ) \sin \beta] \\ &= - \cos 60^\circ \cos \beta - (- \sin 60^\circ) \sin \beta - [- \sin 30^\circ \cos \beta - (- \cos 30^\circ) \sin \beta] \\ &= (- \frac{1}{2} \cos \beta + \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin \beta) - (- \frac{1}{2} \cos \beta + \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin \beta) \\ &= - \frac{1}{2} \cos \beta + \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin \beta + \frac{1}{2} \cos \beta - \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin \beta) \\ &= 0 (terbukti) \end{aligned}$$

Keterangan :

Berikut ini penjelasan dari proses berpikir diatas berdasarkan indikator konseptual.

Langkah 1. Memahami soal

Dikatakan siswa memahami soal apabila siswa mengetahui tentang konsep rumus trigonometri untuk jumlah dan selisih dua sudut.

Langkah 2. Menyusun rencana penyelesaian

Dikatakan siswa dapat menyusun rencana penyelesaian apabila siswa tersebut dapat mengkaitkan dengan konsep – konsep yang pernah diterima sebelumnya seperti konsep rumus perbandingan trigonometri untuk dua sudut berkomplemen dan sudut pelurus. contohnya seperti yang terlihat pada baris kedua.

Langkah 3. Melaksanakan rencana penyelesaian

Dikatakan siswa dapat melaksanakan penyelesaian apabila siswa dapat menyelesaikannya dengan menggunakan langkah – langkah yang ditempuh untuk mendapatkan jawaban yang benar. Contohnya seperti yang terlihat pada baris ketiga dan keempat. Setelah merencanakan penyelesaian dengan menggunakan konsep dua sudut berkomplemen dan sudut pelurus, siswa dengan mudah mencari nilai sudut istimewa yang angkanya besar. Kemudian setelah mengetahui dari nilai sudut tersebut dengan cara operasi penjumlahan dan pengurangan sehingga diperoleh jawaban yang benar.

Semi Konseptual

$$\begin{aligned}
 & \cos (240^\circ + \beta) - \sin (210^\circ - \beta) \\
 &= (\cos 240^\circ \cos \beta - \sin 240^\circ \sin \beta) - (\sin 210^\circ \cos \beta - \cos 210^\circ \sin \beta) \\
 &= \left(-\frac{1}{2} \cos \beta + \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin \beta \right) - \left(-\frac{1}{2} \cos \beta + \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin \beta \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \cos \beta + \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin \beta + \frac{1}{2} \cos \beta - \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin \beta \\
 &= 0 \text{ (terbukti)}
 \end{aligned}$$

Keterangan :

Berikut ini penjelasan dari proses berpikir diatas berdasarkan indikator semi konseptual.

Langkah 1. Memahami soal

Dikatakan siswa memahami soal apabila siswa mengetahui tentang konsep rumus trigonometri untuk jumlah dan selisih dua sudut.

Langkah 2. Menyusun rencana penyelesaian

Dikatakan siswa dapat menyusun rencana penyelesaian apabila siswa tersebut tidak sepenuhnya dapat mengkaitkan dengan konsep – konsep yang pernah diterima sebelumnya seperti konsep rumus perbandingan trigonometri untuk dua sudut berkomplemen dan sudut pelurus. Contohnya seperti yang terlihat pada baris ketiga, siswa dapat menemukan nilai dari sudut yang ditanyakan tetapi kemungkinan pada saat di wawancarai siswa tidak dapat menjelaskan konsep rumus perbandingan trigonometri untuk dua sudut berkomplemen dan sudut pelurus karena siswa memperoleh nilai sudut itu dengan hafalan atau cuma mengingat ingat saja.

Langkah 3. Melaksanakan rencana penyelesaian

Dikatakan siswa dapat melaksanakan penyelesaian apabila siswa dapat menyelesaikannya dengan menggunakan langkah –

langkah yang ditempuh untuk mendapatkan jawaban yang benar tetapi tidak sepenuhnya dapat menjelaskannya karena penyelesaiannya menggunakan intuisi.

Contohnya seperti yang terlihat pada baris ketiga dan keempat. Setelah merencanakan penyelesaian dengan menggunakan intuisi, siswa langsung menghitungnya dengan cara operasi penjumlahan dan pengurangan sehingga diperoleh jawaban yang benar.

Komputasional

$$\begin{aligned} & \cos (240^\circ + \beta) - \sin (210^\circ - \beta) \\ &= \cos 240^\circ + \cos \beta - \sin 210^\circ + \sin \beta \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3} + \cos \beta - \frac{1}{2} + \sin \beta \end{aligned}$$

Keterangan :

Berikut ini penjelasan dari proses berpikir diatas berdasarkan indikator komputasional.

Langkah 1. Memahami soal

Dikatakan siswa tidak mampu memahami soal apabila siswa tidak mampu mengetahui tentang konsep rumus trigonometri untuk jumlah dan selisih dua sudut.

Langkah 2. Menyusun rencana penyelesaian

Dalam menjawab soal lepas dari konsep yang sudah pernah diterima sebelumnya. Seperti yang terlihat pada langkah kedua.

Langkah 3. Melaksanakan rencana penyelesaian

Siswa tidak dapat melaksanakan penyelesaian karena tidak menggunakan konsep – konsep yang dipelajari seelumnya dan siswa tidak menggunakan langkah – langkah yang ditempuh untuk mendapatkan jawaban yang benar.

Contohnya seperti yang terlihat pada baris ketiga, siswa tidak dapat merencanakan penyelesaian sehingga memperoleh jawaban yang salah.

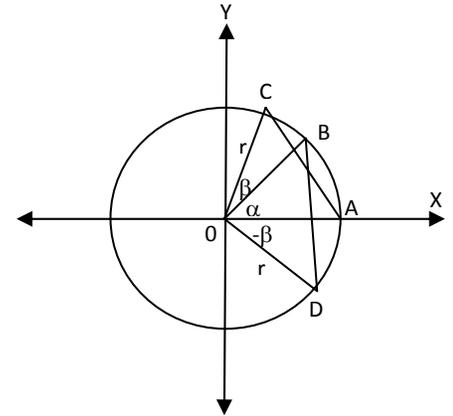
Dengan memperhatikan indikator dari masing-masing proses berpikir (konseptual, semi konseptual dan komputasional), peneliti dapat menentukan bagaimana proses berpikir siswa dalam menyelesaikan soal pembuktian trigonometri untuk jumlah dan selisih dua sudut.

E. Rumus Trigonometri untuk jumlah dan selisih dua sudut

1. Rumus untuk Cos ($\alpha + \beta$)

Amati gambar 2.1 dengan seksama.

Gambar 2.1 menunjukkan lingkaran yang berpusat di o dan berjari jari r. amati lagi gambar tersebut dengan seksama dari gambar tersebut, diperoleh $OC = AB = OD = OA = r$ dan koordinat titik A, titik B, titik C dan titik D yaitu A ($r, 0$), B ($r \cos \alpha, r \sin \alpha$), C ($r \cos (\alpha + \beta), r \sin (\alpha + \beta)$) dan D ($r \cos \beta, -r \sin \beta$).²³



Gambar 2.1

Dengan menggunakan rumus jarak antara dua titik, diperoleh :²⁴

$$d_{AB}^2 = (AB)^2 = (X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2$$

sehingga dapat menentukan $(AC)^2$ dan $(DB)^2$, yaitu dengan $(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2$

$$\begin{aligned} \text{a. } (AC)^2 &= [r \cos (\alpha + \beta) - r]^2 + [r \sin (\alpha + \beta) - 0]^2 \\ &= r^2 \cos^2 (\alpha + \beta) - 2r^2 \cos (\alpha + \beta) + r^2 + r^2 \sin^2 (\alpha + \beta) \\ &= r^2 [\cos^2 (\alpha + \beta) + \sin^2 (\alpha + \beta) + r^2 - 2r^2 - 2r^2 \cos (\alpha + \beta)] \\ &= r^2 \cdot 1 + r^2 - 2r^2 \cos (\alpha + \beta) = 2r^2 - 2r^2 \cos (\alpha + \beta) \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } (AC)^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos (\alpha + \beta)$$

²³ Wahyudin Djumanta, *Mahir Mengembangkan Kemampuan Matematika Untuk kelas XI Sekolah Menengah Atas/ Madrasah Aliyah Program Ilmu Pengetahuan Alam.* (Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional 2008), hal 77.

²⁴ B.K Noormandiri, *Matematika SMA untuk kelas XI.* (Jakarta: Erlangga, 2004), hal 124.

$$\begin{aligned}
\text{b. } (DB)^2 &= (r \cos \alpha - r \cos \beta)^2 + (r \sin \alpha + r \sin \beta)^2 \\
&= r^2 \cos^2 \alpha - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta + r^2 \cos^2 \beta + r^2 \sin^2 \alpha + 2r^2 \sin \alpha \sin \beta + r^2 \sin^2 \beta \\
&= r^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + r^2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta + 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \\
&= r^2 + r^2 - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta + 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \\
&= 2r^2 - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta + 2r^2 \sin \alpha \sin \beta
\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } (DB)^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta + 2r^2 \sin \alpha \sin \beta$$

Karena $\triangle AOC$ kongruen dengan $\triangle BOD$ sehingga di peroleh $AC = BD$

$$2r^2 - 2r^2 \cos (\alpha + \beta) = 2r^2 - 2r^2 \cos \alpha \cdot \cos \beta + 2r^2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$-2r^2 \cos (\alpha + \beta) = -2r^2 \cos \alpha \cos \beta + 2r^2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\boxed{\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

Rumus untuk $\cos (\alpha - \beta)$ dapat diturunkan dari rumus $\cos (\alpha + \beta)$, yaitu :

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos (\alpha + (-\beta))$$

$$= \cos \alpha \cos (-\beta) - \sin \alpha \sin (-\beta)$$

$$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\boxed{\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$$

2. Rumus untuk $\sin (\alpha \pm \beta)$

Pada pelajaran di kelas X tentang sudut komplemen, dapat menentukan rumus $\sin (\alpha \pm \beta)$ dengan menggunakan rumus perbandingan trigonometri dua sudut komplemen berikut

$$\cos (90^0 - \alpha) = \sin \alpha \text{ dan } \sin (90^0 - \alpha) = \cos \alpha$$

Dengan menggunakan rumus perbandingan trigonometri dua sudut komplemen diperoleh :²⁵

$$\begin{aligned} \sin (\alpha + \beta) &= \cos [90^0 - (\alpha + \beta)] \\ &= \cos [(90^0 - \alpha) - \beta] \\ &= \cos (90^0 - \alpha) \cos \beta + \sin (90^0 - \alpha) \sin \beta \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Sehingga $\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

Rumus $\sin (\alpha - \beta)$ dapat diperoleh dari rumus $\sin (\alpha + \beta)$, yaitu :

$$\begin{aligned} \sin (\alpha - \beta) &= \sin (\alpha + (-\beta)) \\ &= \sin \alpha \cos (-\beta) - \cos \alpha \sin (-\beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Jadi $\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

²⁵ Ibid,hal 80.

3. Rumus untuk $\tan(\alpha \pm \beta)$

Telah diketahui bahwa $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Sekarang, pelajari uraian berikut :

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \times \frac{\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Rumus $\tan(\alpha + \beta)$ diperoleh dari rumus $\tan(\alpha + \beta)$, sebagai berikut

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan(\alpha + (-\beta)) = \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha \tan(-\beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\text{Jadi, } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$